PUCRS

FACULDADE DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ROSANA MARIA LUVEZUTE KRIPKA

USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA LINEAR NA PERSPECTIVA DAS TEORIAS DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Porto Alegre
2018

PÓS-GRADUAÇÃO - *STRICTO SENSU*

Pontifícia Universidade Católica
do Rio Grande do Sul

Ficha Catalográfica

K92u Kripka, Rosana Maria Luvezute

Uso de tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear na perspectiva das teorias da Aprendizagem Significativa e dos Registros de Representação Semiótica / Rosana Maria Luvezute Kripka . – 2018.
591 f.
Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, PUCRS.

Orientador: Prof. Dr. Regis Alexandre Lahm.
Co-orientador: Prof. Dr. Lori Viali.

1. Ensino e Aprendizagem. 2. Álgebra Linear. 3. Tecnologias Digitais. 4. Aprendizagem Significativa. 5. Registros de Representação Semiótica. I. Lahm, Regis Alexandre. II. Viali, Lori. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da PUCRS
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Bibliotecário responsável: Marcelo Votto Texeira CRB-10/1974

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ROSANA MARIA LUVEZUTE KRIPKA

USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA LINEAR NA PERSPECTIVA DAS TEORIAS DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Porto Alegre
2018

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ROSANA MARIA LUVEZUTE KRIPKA

USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA LINEAR NA PERSPECTIVA DAS TEORIAS DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Tese apresentada como requisito para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Orientador: Dr. Regis Alexandre Lahm
Coorientador: Dr. Lori Viali

Porto Alegre
2018

ROSANA MARIA LUVEZUTE KRIPKA

"USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA LINEAR NA PERSPECTIVA DAS TEORIAS DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA"

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada em 20 de março de 2018, pela Banca Examinadora.

Dr. Regis Alexandre Lahm (Orientador - PUCRS)

Dr. Valdeni Soliani Franco (Universidade Estadual de Maringá)

Dr. Rodrigo Della Vecchia (UFRGS)

Dra. Thaísa Jacintho Muller (PUCRS)

Porto Alegre

2018

Dedico este trabalho à minha família.

Especialmente ao meu esposo Moacir Kripka e aos meus filhos Vinícius Luvezute Kripka e Guilherme Luvezute Kripka, pelo amor, apoio e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço...

A Deus, por me permitir viver essa rica experiência em minha vida, a qual me fez amadurecer pessoalmente e profissionalmente.

Aos meus amados pais, José Luvezute (in memorian) e Leontina Pereira Luvezute, pelo amor, pelos exemplos, incentivos e apoios.

À minha família, especialmente ao meu esposo Moacir, grande incentivador para iniciar e finalizar esta etapa de doutoramento, e aos meus filhos Vinícius e Guilherme, que, apesar das minhas inúmeras ausências, sempre me apoiaram, me incentivaram e me compreenderam, nos momentos mais difíceis.

À minha sogra Annita Berger Kripka, pelo carinho, apoio e acolhimento, em Porto Alegre, que me ajudaram e incentivaram durante a realização das disciplinas do doutorado.

Ao professores doutores Regis Alexandre Lahm e Lori Viali, por suas orientações, incentivos e oportunidades de aprendizado.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (EDUCEM – PUCRS), que souberam dialogar, compartilhando seus saberes, orientando e mediando muitas de minhas aprendizagens em diversos contextos, incentivando e inspirando em momentos desafiadores neste período de construção de conhecimentos. Especialmente, agradeço ao professor Maurivan Güntzel Ramos, professor e coordenador do Programa, pelo exemplo, pelas inspirações e também pelas oportunidades de aprendizagem.

Aos funcionários do Programa, pela competência, atenção, disponibilidade e pelo carinho, durante todos esses anos. Agradeço de modo especial à secretária Luciana Apolo e à funcionária Vani Tessaro, pelo carinho e pela ajuda.

Aos amigos de doutorado Luciana Richter e Marcus Eduardo Maciel Ribeiro, pela parceria, apoio e incentivo, em todos os momentos desse processo.

Aos demais amigos e colegas do Mestrado e do Doutorado, pela convivência harmoniosa e construtiva.

Aos professores Adriano Pasqualotti e José Antônio Portela, ambos da Universidade de Passo Fundo (UPF), e à professora Gleny Terezinha D. Guimarães, *da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS) pelas contribuições e esclarecimentos.*

Aos professores que participaram da banca de qualificação (ocorrida em 21 de dezembro de 2016) Rosana Maria Gessinger, Rodrigo Dalla Vecchia e Valdeni Soliani Franco, pelas suas oportunas contribuições.

À Universidade de Passo Fundo (UPF), pelo apoio institucional recebido, especialmente ao professor Cristiano Cervi, diretor do Instituto de Ciências Exatas e Geociências, e ao professor Dirceu Lima dos Santos, coordenador da área da Matemática da UPF, pelo incentivo e apoio nos trâmites institucionais.

Aos graduandos que participaram dessa pesquisa, por suas valiosas participações e contribuições, pois, sem elas, o presente trabalho não seria possível.

À Capes, pela bolsa que apoiou financeiramente a realização desta pesquisa.

Resumo

Esta tese trata da identificação e da análise de influências do uso de recursos tecnológicos no ensino e na aprendizagem significativa de Álgebra Linear, avaliadas no contexto presencial. A pergunta considerada como diretriz da pesquisa foi: *“Considerando as perspectivas da Aprendizagem Significativa e dos Registros de Representação Semiótica, de que modo a docente e os discentes percebem a utilização de recursos tecnológicos digitais, em sala de aula, relativos aos processos de ensino e de aprendizagem, ocorridos na disciplina de Álgebra Linear?”*. A pesquisa é um estudo de caso múltiplo holístico, caracterizada como naturalística-construtiva, com abordagens qualitativa e quantitativa. Participaram da pesquisa 61 estudantes, de três turmas regulares da disciplina de Álgebra Linear do curso de Engenharia Civil, de uma Instituição de Ensino Superior (IES) comunitária, do Rio Grande do Sul (RS/BR). O trabalho tinha como escopo identificar e analisar potencialidades e fragilidades percebidas pelos participantes e pela docente – envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra Linear – relativas à utilização de recursos tecnológicos digitais, propostos em tarefas elaboradas e desenvolvidas em sala de aula. Em todas as turmas, foi aplicado o mesmo sequenciamento didático. Em duas turmas, foram realizadas tarefas potencialmente significativas, explorando o uso continuado de múltiplos recursos tecnológicos digitais, tais como geotecnologias e aplicativos *GeoGebra, MATLAB* e Planilha *Excel*. Na terceira turma, explorou-se o uso de recursos tecnológicos digitais em apenas uma tarefa. A constituição de dados foi realizada por meio de observações, questionários, produções dos participantes da pesquisa e diário de bordo da professora. Na análise de dados, foram considerados métodos mistos. No tratamento dos dados qualitativos, foram utilizadas técnicas da análise de conteúdo, e, para análise quantitativa, se fez uso de análises descritivas e do teste *t*, para amostras independentes. Concluiu-se que, apesar de não haver diferença estatística significativa entre as notas médias dos grupos analisados, as percepções sobre o uso continuado de recursos tecnológicos, na proposta didática elaborada, indicaram que: houve aumentos nas frequências de identificação de compreensão de conceitos e de aprendizagens significativas ocorridas na disciplina; o uso das tecnologias digitais favoreceu os processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear, facilitando a mediação pedagógica, a compreensão e a construção de conceitos matemáticos; e o uso continuado das tecnologias é mais favorável do

que o uso pontual, tendo em vista que a familiarização com uso de recursos tecnológicos, com a finalidade de construção do conhecimento, é necessária e precisa de um tempo maior para sua adequação.

Palavras Chave: Ensino e Aprendizagem; Álgebra Linear; Tecnologias Digitais; Aprendizagem Significativa; Registros de Representação Semiótica

Abstract

This work deals with the identification and analysis of influences of technology resources use in teaching and learning of Linear Algebra, evaluated in the classroom context. The question used as a guideline for the reasearch was: "Considering the perspectives of Meaningful Learning and the Semiotic Representation Registers, in which way the teacher and the students perceive the use of digital technology resources, in classroom, related to the processes of teaching and learning that occur in the classes of Linear Algebra?" The research is a holistic multiple study case, characterized as naturalistic-constructive, with quantitative and qualitative approaches. The research had 61 students enrolled in Linear Algebra, from three different classes of Civil Engineering course that belong to a community university (IES) placed in Rio Grande do Sul, Brazil. The work was aimed at identifying and analyzing potentialities and weaknesses perceived by the students and the teacher involved in the learning and teaching Linear Algebra processes, related to the use of digital technologies resources, proposed in tasks elaborated and developed in the classroom context. The same didactic sequence was applied to the three different classes. In two of them, potentially meaningful tasks were applied to two classes, exploring the continuous use of digital technology resources such as geotechnologies and apps like GeoGebra, MATLAB and Excel spreadsheet. In the third classroom, the use of digital technology resources was explored in only one task. The gathering of data was done through observations, questionnaires, productions made by the research participants and the teacher's logbook. Mixed methods were considered in the analysis of data. Techniques of content analysis were used in the treatment of qualitative data and, for the quantitative data, descriptive analysis were carried out. The t tests were used for independent samples. We conclude that, although there was no significant statistical difference between the average scores of the analyzed groups, the perceptions about the continuous use of technological resources, in the didactic proposal elaborated, indicated that there were increases in the frequencies of identification of understanding of concepts as well as in the significant learning in the discipline; the use of digital technologies favored the processes of teaching and learning in Linear Algebra, facilitating the pedagogical mediation, the understanding and the construction of mathematical concepts; and the continued use of technologies is more favorable than timely use, *since familiarization with the use of technological resources, for the purpose of knowledge construction, is necessary and needs a longer time for its adequacy.*

Key words: Teaching and Learning; *Linear Algebra*; *Digital Technology*; *Meaningful Learning*; *Semiotic Representation Registers.*

INCENSO FOSSE MÚSICA

Isso de querer
ser exatamente aquilo
que a gente é
ainda vai
nos levar além.

Paulo Leminski
(Distraídos venceremos. São Paulo: Brasiliense, 1987)

LISTAS DE FIGURAS

LISTAS DE QUADROS

LISTAS DE TABELAS

LISTAS DE SIGLAS

AVA - Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA)

CAS - *Computer Algebra System* (Sistema de Computação Algébrica)

CEP/PUCRS - Comitê de Ética em Pesquisa da PUCRS

DEUG - Diplôme d'Études Universitaires Générales

ENIAC - *Electrical Numerical Integrator and Calculator*

IES - Instituição de Ensino Superior

IREM - *Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*

LDB - Lei de Diretrizes e Bases

OA - Objetos de Aprendizagem

LMS - *Learning Management System* (Sistema de Gestão da Aprendizagem)

PUCRS - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

TAS – Teoria da Aprendizagem Significativa

TD – Tecnologias Digitais

TIC – Tecnologias de Informação e de Comunicação

TRRS - Teoria dos Registros de Representação Semiótica

UAB - Universidade Aberta do Brasil

UNESP - Universidade Estadual Paulista

UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

USP - Universidade de São Paulo

WWW - *World Wide Web*

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O aprendizado perpassa por diferentes contextos socioculturais, sendo o aprendizado científico fundamental para o desenvolvimento e a evolução da sociedade (WELLS, 2001).

Nesse processo, a apropriação e a construção de novos conhecimentos têm por finalidade possibilitar e impulsionar melhorias na qualidade de vida dos estudantes, tanto do ponto de vista pessoal quanto do profissional.

Segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), nº 9394, de 1996, o ensino de Ciências e de Matemática nos espaços escolares deve proporcionar a formação integral por meio de um aprendizado amplo, interdisciplinar, real e significativo, visando principalmente à interação entre a teoria e a prática (BRASIL, 1996).

Conforme os propósitos gerais da educação escolar (BRASIL, 1999), os educadores devem atuar como mediadores na construção do conhecimento por meio de tarefas didáticas apropriadas. As tarefas didáticas propostas deveriam ser investigativas e desafiadoras de modo a estimular a apropriação crítica dos conceitos abordados. Assim, seriam propiciadas aos estudantes condições favoráveis para aprendizagem, de modo a desenvolver autonomia, bem como capacidade para aplicação de conhecimentos teóricos em situações práticas.

No entanto, Oliveira (2006) indica que, na maioria das escolas, o processo de ensino e de aprendizagem, no que se refere ao conhecimento científico, ainda ocorre de modo fragmentado, desenvolvido por meio de disciplinas. Geralmente, as aulas são expositivas, existindo pouco espaço para a discussão de ideias e para interação entre professor e estudante. A autora citada indica que esse tipo de abordagem não possibilita aos estudantes perceberem relações entre conhecimentos de diferentes áreas ou suas aplicações em situações reais. E ainda, afirma que o ensino se resume à transmissão e ao estudo de teorias isoladas, desvinculadas das realidades e desprovidas de significados, o que vem a contribuir com o desinteresse em sala de aula e com baixos índices de aprendizagem.

Moran (2013, p.12) destaca que “A educação é um processo de toda a sociedade”, que envolve a todos de diversos modos. O autor afirma que, ao transmitir ou buscar novas ideias, conhecimentos ou valores, a sociedade educa, onde se aprende com todas as organizações ou grupos de pessoas com os quais convivemos. Para Moran (2013, p. 12-13):

> Enquanto a sociedade muda e experimenta desafios mais complexos, a educação formal continua, de maneira geral, organizada de modo previsível, repetitivo, burocrático, pouco atraente, Apesar de teorias avançadas, predomina, na prática, uma visão conservadora, repetindo o que está consolidado, o que não oferece riscos ou tensões.
> A escola precisa reaprender a ser uma organização efetivamente significativa, inovadora, empreendedora. Ela é previsível demais, burocrática demais, pouco estimulante para os bons professores e alunos. Não há receitas fáceis nem medidas simples. Mas a escola está envelhecida em seus métodos, procedimentos, currículos. A maioria das instituições superiores se distancia velozmente da sociedade, das demandas atuais. [...]

Empiracamente se percebe que esse distanciamento de realidades, vivenciadas na sociedade e na escola, faz com que os estudantes não tenham interesse pela aprendizagem dos conhecimentos científicos, que são oferecidos por meio do ambiente escolarizado.

Em relação ao ensino específico de matemática, além desse problema, salienta-se que muitos estudantes sentem dificuldades de aprendizagem, as quais são identificadas desde o ensino fundamental, conforme destacam Ribeiro e Cury (2015), quando se referem ao grande número de pesquisas sobre esse tema, voltadas ao ensino e à aprendizagem dos fundamentos de Álgebra.

Além disso, Duval (2003, 2009) destaca que as dificuldades relacionadas à compreensão em matemática se devem às múltiplas formas de representação existentes de um mesmo objeto matemático, que acabam gerando confusões. O autor salienta que, diferentemente de outros tipos de conhecimentos, o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio da diversidade de registros semióticos e de suas coordenações e articulações, que exige a presença de condições cognitivas apropriadas para esse fim.

A necessidade de abstração e de construção de representações semióticas para compreensão dos objetos matemáticos abordados, que passa pela significação dos diferentes registros de representação semiótica, torna complexo o processo de aprendizagem.

As dificuldades acabam por desmotivar e levam à desistência pela busca da compreensão, o que impede a significação, a apropriação dos conhecimentos e o desenvolvimento da autonomia dos estudantes nessa área.

No ensino superior, geralmente, em diversas disciplinas básicas de Matemática identifica-se o desinteresse de muitos estudantes pelo aprendizado de seus conteúdos, o que leva aos altos índices de reprovação, evasão e a um aprendizado superficial, não significativo (CELESTINO, 2000).

Pimenta e Anastasiou (2008, p. 37), ao tratarem sobre “Docência no ensino superior” indicam que dentre as causas para os problemas de aprendizado existentes destaca-se o fato de que muitos professores ainda não possuem formações iniciais ou continuadas adequadas para trabalharem com o ensino e a aprendizagem nesse contexto. Apenas a formação especifica nas suas áreas de atuações é a exigência necessária para se tornarem docentes universitários. A ação docente fundamenta-se no senso comum de “como ensinar”. Afirmam que para que os professores possam de fato promover a aprendizagem é preciso superar o modelo centrado no professor, que ainda se faz presente na organização universitária. Segundo as autoras:

> Na maioria das instituições de ensino superior, incluindo as universidades, embora seus professores possuam experiência significativa e mesmo anos de estudos em suas áreas específicas, predomina um despreparo e até um desconhecimento científico do que seja o processo de ensino e de aprendizagem, pelo qual passam a ser responsáveis a partir do instante em que ingressam na sala de aula.

Da mesma maneira, Cunha (2004, p.527), ao tratar sobre a necessidade de reflexão sobre a prática docente e de mudanças no contexto do ensino superior por meio de processos formativos adequados, também salienta a presença do paradigma tradicional de ensino no contexto ao afirmar que:

> [...] dos docentes universitários costuma-se esperar um conhecimento do campo científico de sua área, alicerçado nos rigores da ciência e um exercício profissional que legitime esse saber no espaço da prática. Contando com a maturidade dos alunos do ensino superior para responder às exigências da aprendizagem nesse nível e, tendo como pressuposto o paradigma tradicional de transmissão do conhecimento, não se registra, historicamente, uma preocupação significativa com os conhecimentos pedagógicos.

Pimenta e Anastasiou (2008) esclarecem que no modelo metodológico tradicional de ensino: a figura do professor é de transmissor de conteúdos curriculares; o conhecimento aparece fragmentado em disciplinas e os estudantes assumem uma postura passiva, o que implica na aprendizagem não significativa.

Desde a educação básica a fragmentação do ensino em áreas impede que a aprendizagem seja significativa. Referindo-se à esse fato, as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica (BRASIL, 2013, p. 118) indicam que:

> Em relação à organização dos conteúdos, há necessidade de superar o caráter fragmentário das áreas, buscando uma integração no currículo que possibilite tornar os conhecimentos abordados mais significativos para os educandos e favorecer a participação ativa de alunos com habilidades, experiências de vida e interesses muito diferentes.
>
> Os estudiosos do tema têm insistido na crítica aos currículos em que as disciplinas apresentam fronteiras fortemente demarcadas, sem conexões e diálogos entre elas. Criticam, também, os currículos que se caracterizam pela distância que mantêm com a vida cotidiana, pelo caráter abstrato do conhecimento trabalhado e pelas formas de avaliação que servem apenas para selecionar e classificar os alunos, estigmatizando os que não se enquadram nas suas expectativas. A literatura sobre currículo avança ao propor que o conhecimento seja contextualizado, permitindo que os alunos estabeleçam relações com suas experiências. Evita-se, assim, a transmissão mecânica de um conhecimento que termina por obscurecer o seu caráter provisório e que não leva ao envolvimento ativo do estudante no processo de aprendizagem (Moreira e Candau, 2008)

Assim, destaca-se que uma das prováveis causas para o fracasso do ensino e da aprendizagem de disciplinas básicas de Matemática consiste no fato de seus conteúdos serem apresentados de modo sequencial e fragmentado, desvinculados da sua história ou de possibilidades de usos em situações cotidianas. Nesse sentido, a proposta de ensino e aprendizagem não permite aos estudantes perceberem relações ou aplicações em outras áreas ou em contextos apropriados.

Dentre diversos problemas existentes relativos ao ensino e aprendizagem de disciplinas básicas de Matemática, busca-se evidenciar na presente pesquisa aqueles que se referem à disciplina de Álgebra Linear, basicamente por três motivos.

O primeiro deve-se à importância dessa disciplina no contexto do ensino superior, tendo em vista que ela constitui o núcleo básico da maioria dos cursos de Ciências Exatas, especialmente no que diz respeito aos mais variados currículos dos cursos de Engenharia existentes, no país e no mundo.

O segundo, pelo fato da autora considerar essa disciplina como uma de suas preferidas, desde quando ainda era estudante de graduação, do curso de Licenciatura em Matemática, sentimento que ainda perdura até os dias atuais, pelo fato de ser uma das disciplinas com a qual mais se identifica, dentre as várias disciplinas que leciona atualmente como professora da área de Matemática. Salienta-se que essa é uma das disciplinas que leciona na Universidade desde seu ingresso, ocorrido em 1998, sendo semestralmente oferecida a diversos cursos, tais como: Licenciatura em Matemática, Ciências da Computação, Engenharia Civil, Engenharia Mecânica, Engenharia de Alimentos, Engenharia de Produção etc. Desde então, a autora se sente desafiada a encontrar uma proposta de ensino adequada, de modo a possibilitar a aprendizagem significativa dos estudantes, contribuindo, assim, com suas formações profissionais específicas.

Além disso, a escolha por desenvolver a pesquisa com estudantes do curso de Engenharia Civil, se deve ao fato da autora estar trabalhando regularmente ao longo de vários semestres dos últimos anos com essa disciplina nesse curso. Desse modo foi possível a familiarização e o domínio do conteúdo a ser trabalhado, bem como o acesso aos dados referentes aos desempenhos obtidos em anos anteriores, quando a pesquisa ainda não estava sendo realizada. Isso viabilizou a constituição de dados retrospectivos, referente à análise quantitativa proposta. Além disso, a escolha também ocorreu por existir uma ampla variedade de aplicações de conceitos de Álgebra Linear na área da Engenharia Civil, o que favorece a constituição de materiais potencialmente significativos, necessários na execução da proposta, tendo em vista o favorecimento da promoção da aprendizagem significativa.

O terceiro motivo se refere ao fato de existir um número reduzido de pesquisas específicas relativas ao ensino e aprendizagem de disciplinas de Álgebra Linear. Na revisão de literatura realizada, constatou-se que apenas na dissertação de mestrado desenvolvida por Silva (1999) foi apresentada uma investigação relacionada ao desenvolvimento de uma proposta didática aplicada no contexto da sala de aula presencial, envolvendo todos os conteúdos abordados em uma disciplina de Álgebra Linear. A autora supra citada adotou os pressupostos metodologia da Assimilação Solidária na sua proposta, direcionou as atividades aos estudantes do curso de Computação, mas não propôs a exploração do uso de recursos tecnológicos digitais em sua investigação. Esse fato a diferencia completamente da presente proposta de pesquisa. Também foi identificada a tese de Chiari (2015) que, no contexto do ensino à distância, analisou o papel das tecnologias digitais em disciplinas de Álgebra Linear, no contexto dos seus Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA), identificando desafios, limites e possibilidades. No trabalho citado, o contexto da pesquisa foi o ensino à distância, o que também se diferencia da presente proposta de tese já que a proposta aqui apresentada visa investigar influências do uso de tecnologias em atividades potencialmente significativas para o ensino e aprendizagem de Álgebra Linear realizadas em salas de aula presenciais.

Conforme indicam Flemming et al. (2005), vários educadores matemáticos percebendo necessidades de mudança na área da Educação Matemática, se dedicaram à pesquisa e ao desenvolvimento de novas abordagens didáticas, propondo formas alternativas de ensino e de aprendizagem. Segundo os autores, as pesquisas realizadas, na área, buscavam meios para que a construção de conceitos matemáticos fosse realizada por meio de conexões com outras áreas do conhecimento, tendo em vista a aproximação entre teoria e prática. Assim, na época, eles identificaram que surgiam novas tendências em Educação Matemática, como métodos alternativos e inovadores, com propostas interativas, reflexivas e dinâmicas. Dentre as várias tendências identificadas, destaca-se a “Informática e a Educação Matemática”, a qual têm se consolidado nos dias atuais como uma abordagem diferenciada na promoção da aprendizagem em matemática.

Na presente pesquisa, considera-se essa perspectiva tendo em vista o rápido avanço das Tecnologias de Informação e de Comunicação (TIC) na sociedade, os diferentes modos como elas têm sido incorporadas em nossos cotidianos e também por estarem influenciando cada vez mais nossos modos de pensar, de aprender, de viver e de conviver.

Perrenoud (1999, p 1), há quase duas décadas, já indicava que “As sociedades se transformam, fazem-se e desfazem-se. As tecnologias mudam o trabalho, a comunicação, a vida cotidiana e mesmo o pensamento”. O autor destaca que por existirem muitas mudanças sociais relativas à indústria, aos meios de transporte, às formas de alimentação, aos costumes e em modos de comunicação, cada vez mais as pessoas estão usando novas tecnologias, bem como estão tendo acesso às informações dos mais diversos tipos, disponibilizadas em rede. Também salienta que essa “modernidade” não permite a ninguém, inclusive à escola, se proteger das contradições existentes no mundo, e evidencia a importância de se preparar os professores para a inovação, cooperação e para uma prática reflexiva.

Kripka, Viali e Lahm (2016) realizaram um estudo teórico visando identificar quais seriam os atuais desafios e possibilidades para a inserção do uso de TIC em contextos educacionais evidenciados em processos de formação de professores. Indicam que talvez um dos maiores desafios da Educação na sociedade contemporânea seja a necessidade de formar efetivamente professores que sejam capazes de inserir o uso das TIC no cotidiano escolar, ou seja, que saibam explorar seus recursos de modo a potencializar a formação integral dos estudantes.

Frente a essa necessidade premente, muitos pesquisadores têm direcionado suas investigações pela linha da tendência “Informática e a Educação Matemática”, discutindo problemas e propondo soluções alternativas para o ensino e a aprendizagem em matemática. Dentre tantos trabalhos publicados, destacam-se as pesquisas de:

- Bennemann e Alevatto (2012), que realizaram estudo teórico sobre o uso das TIC no ensino e na aprendizagem matemática, visando identificar focos de interesse e abordagens didáticas existentes para sua integração em práticas escolares;
- Borba e Chiari (2013), que apresentaram uma coletânea de pesquisas sobre a interação das TIC com a Educação Matemática;
- Borba, Malheiros e Zulatto (2007), que trataram de questões sobre a modalidade de Educação a distância, apresentando resultados de pesquisas realizadas em *EaDonline* relacionadas à Educação Matemática;
- Borba e Villarreal (2005), que investigaram sobre como a produção do conhecimento se dá por meio do coletivo pensante, e indicam que o pensamento matemático é influenciado pelos computadores ou pelas diferentes mídias com as quais os sujeitos interagem em seus cotidianos; exploram, ainda, a relação por eles chamada de seres-humanos-com-mídias;
- Borba e Penteado (2010), que trataram sobre dificuldades e possibilidades de uso de recursos da informática em contextos escolares, relacionados à Educação Matemática;
- Gravina et al. (2012), que apresentam uma coletânea sobre inovações didáticas propostas para matemática escolar, realizadas em curso de formação continuada à distância, tendo em vista a exploração de mídias digitais no contexto da Educação Matemática.

No contexto mais abrangente do ensino de Ciências e Matemática, Souza, Bastos e Angotti (2001) salientam que o uso das TIC permite a elaboração de materiais interdisciplinares no desenvolvimento de temas transversais. Os autores também destacam que o uso das TIC, ao favorecer e facilitar o uso de diferentes estratégias para aprendizagem, também estimula a interação, a reflexão e a análise crítica do assunto.

Os recursos tecnológicos, quando utilizados de modo adequado, podem propiciar a mediação na construção do conhecimento, por meio da proposição de tarefas investigativas, em qualquer nível de ensino, conforme pode ser verificado nos trabalhos de Allevato (2010); Braga e Viali (2011); Chereguini (2013); Kripka, Viali e Lahm (2014) e Bona e Ribeiro (2016). Sua inserção em ambientes escolares, quando adequada, permite estimular: o saber pensar, o aprender a aprender, a compreensão, a criatividade e a imaginação, o que pode favorecer e potencializar a aprendizagem significativa dos estudantes.

No contexto do ensino superior, salienta-se que diversos conceitos matemáticos aparecem na maioria das disciplinas básicas dos cursos de Ciências Exatas. Especificamente em relação aos cursos de graduação em Engenharia, encontram-se nas disciplinas básicas, referentes à formação inicial dos futuros engenheiros, bem como estão distribuídos em disciplinas específicas ao longo de todo o curso.

Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia (BRASIL, 2002, p. 4), espera-se que a formação do perfil do egresso deva ser:

> [...] generalista, humanista, crítica e reflexiva, capacitado a absorver e desenvolver novas tecnologias, estimulando a sua atuação crítica e criativa na identificação e resolução de problemas, considerando seus aspectos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais, com visão ética e humanística, em atendimento às demandas da sociedade.

Além disso, o documento (BRASIL, 2002, p. 4) indica que:

> Art. 4º A formação do engenheiro tem por objetivo dotar o profissional dos conhecimentos requeridos para o exercício das seguintes competências e habilidades gerais:
> I - aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia; [...]
> V - identificar, formular e resolver problemas de engenharia; [...]
> VIII - comunicar-se eficientemente nas formas escrita, oral e gráfica; [...]
> XIII - assumir a postura de permanente busca de atualização profissional.

Assim, as diretrizes orientam que os futuros engenheiros, ao finalizarem seus cursos, devem estar preparados para atuarem com competência e habilidade na resolução de problemas de suas áreas de atuação, nas quais os conhecimentos matemáticos, científicos e tecnológicos são instrumentos valiosos.

Ressalta-se que, no processo de suas formações iniciais, as disciplinas básicas de matemática, tais como Álgebra Linear, Geometria Analítica ou Cálculo Diferencial e Integral, são fundamentais para possibilitar a construção do conhecimento científico dos estudantes, pois são elas que fornecem conhecimentos matemáticos básicos necessários para a compreensão e a resolução de diversos problemas reais específicos da Engenharia (FIGUEIREDO et al., 2014).

Nesse sentido, na presente tese, destaca-se o uso de aportes teóricos da Teoria da Aprendizagem Significativa (AUSUBEL,1963, 1968), proposta por David Paul Ausubel, tendo em vista não somente a formação acadêmica especifica dos estudantes, mas, sim, sua formação integral. Além do conhecimento específico relacionado aos conceitos de Álgebra Linear abordados, buscou-se oferecer uma proposta de formação que lhes possibilite perceber o uso adequado dos conhecimentos construídos de modo competente ao longo de suas vidas, tanto no âmbito pessoal quanto no profissional.

Com a abordagem proposta, propiciou-se aos estudantes a participação de tarefas potencialmente significativas, ou seja, que visaram favorecer a aprendizagem significativa dos conceitos abordados. Segundo essa teoria, para se promover a aprendizagem significativa, por meio de tarefas potencialmente significativas, é necessário que os conteúdos sejam abordados de modo a despertar os interesses dos estudantes e, ainda, de modo a permitir que sejam estabelecidas integrações cognitivas entre conhecimentos prévios e novas informações acadêmicas, provocando, com isso, modificações cognitivas e assimilações de conceitos.

Desse modo, ao impulsionar o desenvolvimento cognitivo por meio da criação de novos significados, são criadas novas conexões, o que possibilita reconfigurar a estrutura cognitiva do estudante por meio da (re)construção de conhecimentos, com significados.

Celestino (2000) refere-se à importância do desenvolvimento de pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, salientando que seus conteúdos estão subjacentes a quase todos os domínios da matemática e que a compreensão de seus conceitos se torna indispensável aos profissionais que trabalham na grande área das ciências exatas. No entanto, ressalta que os estudantes geralmente apresentam muitas dificuldades de aprendizagem nessa disciplina.

Também, pela experiência da sala de aula, percebe-se que a aprendizagem de Álgebra Linear envolve a construção de um conhecimento específico, complexo e abstrato, baseado em uma linguagem própria, que necessita de práticas significantes, as quais favoreçam tanto a aprendizagem de suas diferentes representações semióticas quanto de seus sentidos.

Na elaboração da presente tese, também foram considerados os pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 1993, 1995, 2016), a qual foi desenvolvida por Raymond Duval, na área da Educação Matemática, tendo em vista a elaboração de tarefas que favorecessem a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Duval (2003) afirma que a compreensão em matemática está relacionada às condições cognitivas de acesso aos objetos matemáticos, que se dá por meio da diversidade de registros semióticos e de suas coordenações e articulações. Sugere que as tarefas envolvam situações problemas que permitam a exploração de diferentes estratégias de resolução, nas quais as mudanças de representação semióticas possam ser exploradas, visando favorecer a compreensão dos conceitos matemáticos tratados.

Outro fato considerado na presente pesquisa é que se observa, na sociedade contemporânea, que muitos estudantes fazem uso diário de múltiplas tecnologias, seja pelo uso de celulares, de *tablets* ou de computadores, explorando seus recursos para finalidades diversas. Assim, considera-se imprescindível que sejam explorados tais recursos em sala de aula, pois esses possibilitam aproximar o ambiente de aprendizagem escolar da realidade vivenciada pelos estudantes.

Concorda-se com Borba e Penteado (2010, p. 87) quando indicam que:

> No momento em que os computadores, enquanto artefato cultural e enquanto técnica, ficam cada vez mais presentes em todos os domínios da atividade humana, é fundamental que eles também estejam presentes nas atividades escolares.

Da experiência, destaca-se que existem vários motivos que impulsionam ao uso adequado de recursos tecnológicos digitais em ambientes de ensino e de aprendizagem. O fato de os estudantes conviverem e usarem recursos tecnológicos digitais indica que seu uso pedagógico no ensino pode estimular e despertar seus interesses pela construção do conhecimento matemático proposto. O uso adequado das tecnologias digitais para o ensino pode favorecer e potencializar o desenvolvimento de tarefas no tratamento de informações, agilizando processos de cálculos e evitando possíveis erros que são comuns em resoluções manuais de problemas matemáticos. Também se destaca que os aplicativos matemáticos podem propiciar praticidade e rapidez nas resoluções de problemas diversos e possibilitam a realização de diferentes análises, por meio de variações dos parâmetros iniciais considerados, o que pode estimular o desenvolvimento do pensamento crítico matemático. Além disso, muitos aplicativos facilitam o uso e o trânsito entre diferentes registros de representação, o que favorece a compreensão de conceitos matemáticos.

Borba e Penteado (2010, p.46) afirmam que o uso das tecnologias digitais muda o modo como se aprende. Segundo os autores, a prática pedagógica deve estar:

> [...] em harmonia com uma visão de construção de conhecimento que privilegia o processo e não o produto-resultado em sala de aula, e com uma postura epistemológica que entende o conhecimento como tendo sempre um componente que depende do sujeito.

Os autores destacam a importância da atuação ativa do sujeito no processo da construção do conhecimento, que deve ser estimulada nos contextos de aprendizagem.

Na presente tese, considerando as perspectivas anteriormente apresentadas, buscou-se investigar sobre a elaboração e os usos de práticas educativas que propiciem a exploração de diferentes recursos tecnológicos digitais, favorecendo a compreensão em matemática e a aprendizagem significativa de conceitos de Álgebra Linear.

Para tanto, foram elaboradas e desenvolvidas tarefas potencialmente significativas, mediadas pelo uso de recursos tecnológicos digitais, que visaram: (i) tensionar os processos cognitivos relacionados ao ensino e a aprendizagem da matemática; (ii) estimular a participação ativa no processo de construção do seu conhecimento, por meio de desafios; (ii) facilitar as resoluções dos problemas propostos, tornando os processos de resolução mais rápidos e precisos, evitando erros de cálculos; (iii) favorecer a aprendizagem reflexiva, beneficiando a percepção e a compreensão de relações existentes entre conceitos teóricos e práticos, por meio de suas aplicações em contextos diversificados; e (iv) estimular o trânsito entre diferentes registros de representação semiótica, de modo a facilitar a compreensão e a aprendizagem significativa de conceitos de Álgebra Linear na resolução de problemas.

Assim, a presente tese, elaborada na área de Ensino em Ciências e Matemática, trata da análise de alternativas pedagógicas elaboradas e aplicadas em processos de ensino e de aprendizagem, ocorridos em uma disciplina presencial de Álgebra Linear, que visaram não somente à minimização de dificuldades de aprendizagem, mas também a compreensão matemática e a aprendizagem significativa de conceitos abordados.

1.1 Tema e problema da pesquisa

O tema da presente tese consistiu na identificação de percepções sobre possíveis implicações do uso de recursos tecnológicos digitais frente ao processo de ensino e de aprendizagem, ocorridos na disciplina de Álgebra Linear, com abordagem didática segundo as Teorias da Aprendizagem Significativa e dos Registros de Representação Semiótica.

Ribeiro e Cury (2015) ao abordarem sobre ensino e aprendizagem de Álgebra ocorridos desde o ensino fundamental, consideram esse conhecimento como um dos pilares da matemática. Salientam que seus conceitos estão presentes na maioria dos livros de matemática dos mais diversos níveis de ensino e que existe um número significativo de pesquisas que tratam de dificuldades envolvidas nesse contexto.

Esses fatos ajudam a formalizar o problema proposto na presente pesquisa, o qual envolve o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear, no contexto do ensino superior, pois são os conhecimentos prévios (básicos) de Álgebra, apreendidos desde o ensino fundamental, que vão possibilitar aos estudantes futuras abstrações e o desenvolvimento de conceitos complexos desenvolvidos posteriormente nessa disciplina.

Celestino (2000, p. 7) destaca a importância da aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear em cursos de graduação pelo fato de esses estarem implícitos em diferentes domínios da matemática, tais como: “[...] os sistemas de equações lineares, a geometria, a aritmética, o estudo das quádricas, as transformações lineares, as equações diferenciais, etc.”. O autor também afirma que seus conceitos possibilitam a resolução de diferentes problemas da área das Ciências Exatas, sejam eles da área da Física, Química, Computação, Agronomia, Engenharias, entre outros.

O autor indica que, por existirem diversas aplicações e conexões possíveis entre diferentes áreas, o uso adequado de seus métodos e técnicas exige o reconhecimento de uma linguagem científica específica e o desenvolvimento do raciocínio abstrato mais complexo. Também constatou que seriam esses os principais motivos que explicam os altos índices de reprovação dessa disciplina, pois geralmente é proposta como uma disciplina inicial para cursos de graduação, quando os estudantes recém iniciaram seus processos de formação e sentem diversas dificuldades de aprendizagens. Além disso, apresenta resultados de uma pesquisa realizada na Unicamp que classificou a Álgebra Linear como uma das “disciplinas problema”, sendo identificada, dessa forma, entre várias disciplinas analisadas entre os anos de 1993 a 1997, quando foram considerados dados relativos a três universidades distintas.

Os problemas de aprendizagem dos fundamentos de Álgebra, verificados desde o ensino fundamental, somados às necessidades de compreensão e resolução de problemas próprios do ensino superior, podem ocasionar sérias dificuldades de aprendizagem. Experimentar e analisar diferentes modos para que os estudantes consigam superá-las consistiu no grande desafio da presente tese.

Apesar das dificuldades de aprendizagem em Álgebra Linear no ensino superior, verifica-se que existe um número reduzido de pesquisas em Educação Matemática que indiquem alternativas para o ensino do conteúdo dessa disciplina, no contexto presencial da sala de aula, visando minimizar as dificuldades de aprendizagem evidenciadas. Esse fato pode ser constatado na revisão de literatura apresentada no Capítulo 2.

Outro fator a ser considerado são os contínuos avanços tecnológicos e o uso cada vez maior das tecnologias digitais na sociedade, os quais têm influenciado nossas formas de pensar, de agir e de conviver (LÉVY, 2010; PERRENOUD, 1999; KENSKI, 2012).

Atualmente, se percebe a necessidade crescente de inserção e de exploração adequada dos recursos tecnológicos em ambientes escolares, tendo em vista facilitar a mediação do professor na construção do conhecimento dos estudantes (PRETTO, 1996; BORBA; PENTEADO, 2003; PRETTO; RICCIO, 2010; KRIPKA; VIALI; LAHM, 2016).

Considerando os problemas identificados, emergiram inquietações que apontaram para a seguinte pergunta diretriz: *“Considerando as perspectivas da*

Aprendizagem Significativa e dos Registros de Representação Semiótica, de que modo a docente e os discentes percebem a utilização de recursos tecnológicos digitais, em sala de aula, relativos aos processos de ensino e de aprendizagem, ocorridos na disciplina de Álgebra Linear?".

1.2 Objetivos

O objetivo geral da presente tese consistiu em: identificar e analisar potencialidades e fragilidades percebidas pelos participantes, envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra Linear, relativas aos usos didáticos de recursos tecnológicos digitais, propostos nas tarefas elaboradas e desenvolvidas a partir de pressupostos das Teorias da Aprendizagem Significativa e dos Registros de Representação Semiótica.

Objetivou-se especificamente:

(i) Elaborar tarefas para ensino de Álgebra Linear, segundo pressupostos das teorias da Aprendizagem Significativa e dos Registros de Representação Semiótica, visando ao estímulo e à promoção da compreensão de conceitos e da aprendizagem significativa.

(ii) Identificar conhecimentos prévios dos participantes da pesquisa, considerados relevantes para a aprendizagem significativa.

(iii) Aplicar as tarefas para ensino de Álgebra Linear em dois grupos, sendo, em um deles, utilizados continuamente diferentes recursos tecnológicos digitais interativos, e, no outro, apenas em uma tarefa específica.

(iv) Identificar percepções dos participantes da pesquisa sobre como o uso pedagógico de recursos tecnológicos digitais influenciou a construção de conhecimentos, nos dois grupos, analisando potencialidades e limitações desse uso nas tarefas realizadas.

(v) Identificar as notas médias finais dos grupos analisados, para verificar se poderia ser aceita a hipótese de que o uso de recursos tecnológicos influenciou a aprendizagem de Álgebra Linear.

(vi) Identificar, por meio de dados retrospectivos e prospectivos à pesquisa, tendências sobre aprovação e evasão.

Nesse contexto, a presente tese consiste num estudo de caso múltiplo sobre ensino e aprendizagem de Álgebra Linear em turmas regulares de um curso de Engenharia Civil de uma Instituição de Ensino Superior (IES) comunitária do Rio Grande do Sul (RS/BR).

A tese defendida é a de que as tarefas didáticas elaboradas e aplicadas, apoiadas nas Teorias da Aprendizagem Significativa e nos Registros de Representação Semiótica, com usos adequados de recursos tecnológicos em sala de aula, propiciam ambientes de aprendizagem favoráveis para o ensino e para a aprendizagem significativa de conceitos de Álgebra Linear.

Destaca-se que, ao longo do período de doutoramento (2014 a 2018), além dos artigos em congressos na área de Ensino, também foram publicados artigos em revistas que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento da presente pesquisa. Esses artigos estão listados a seguir:

- KRIPKA, R. M. L.; QUADROS, E. L. L.; OLIVEIRA, R. P.; RAMOS, M. G. Educação em Ciências e Matemática: a função da linguagem no contexto da sala de aula. **Ensaio: Pesquisa em Educação em Ciências (Online)**, v. 19, p. 1-18, 2017.
- KRIPKA, R. M. L.; KRIPKA, M.; PANDOLFO, P. C. N.; PEREIRA, L. H. F.; VIALI, L.; LAHM, R. A. Aprendizagem de Álgebra Linear: explorando recursos do GeoGebra no cálculo de esforços em estruturas. **Revista Acta Scientiae**, v. 19, p. 544-562, 2017.
- KRIPKA, R. M. L.; VIALI, L.; LAHM, R. A. Tecnologias de Informação e Comunicação na Formação de Professores. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, v.6, p.45 - 57, 2016
- KRIPKA, R. M. L.; VIALI, L.; LAHM, R. A. Contribuições de Vannevar Bush para a ciência e a tecnologia, especialmente ao hipertexto. **Revista Conhecimento Online**, v. 2, p. 55-68, 2016.
- KRIPKA, R. M. L.; BONOTTO, D. L.; RICHTER, L.; LARA, I. C. M.; FERRARO, J. L. S. O espaço museal e a modelagem na educação: possibilidades para alfabetização científica. **Boletim GEPEM (Online)**, p.59 - 73, 2015.
- KRIPKA, R. M. L.; SCHELLER, M.; BONOTTO, D. L. Pesquisa documental na pesquisa qualitativa: conceitos e caracterização. **Revista de Investigaciones Unad,** v.14, p.55 - 73, 2015.

- KRIPKA, R. M. L.; VIALI, L.; LAHM, R. A. Utilização dos recursos do Google Earth™ e do Google Maps™ no ensino de ciências. **Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa (RELATEC),** v. 13, p. 89-101, 2014.
- KRIPKA, R. M. L.; BIEMBENGUT, M. S.; LARA, I. C. M.; VIALI, L.; LAHM, R. A. Mapeamento do uso de tecnologias e de modelagem matemática no ensino. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC** (UFRN), v. 9, p. 109-134, 2014.

No período, também foram publicados os seguintes capítulos de livros:

- KRIPKA, R. M. L.; VIALI, L.; LAHM, R. A. Aprendizagem de matemática com uso de geotecnologia: uma proposta para o ensino médio. In: VIALI, L. et al. (Org.). **Tecnologias na educação em ciências e matemática**. 1 ed. Porto Alegre, RS, BR: EDIPUCRS: Editora Universitária da PUCRS, 2016, v. 1, p. 100-106.
- KRIPKA, R. M. L.; FERREIRA, L. M. S.; LAHM, R. A. Explorando recursos tecnológicos no ensino superior: uso de geotecnologia na aprendizagem significativa de matemática. In: VIALI, L et al. (Org.). **Tecnologias na educação em ciências e matemática.** 1 ed. Porto Alegre, RS, BR: EDIPUCRS: Editora Universitária da PUCRS, 2016, v. 1, p. 159-168.
- BONOTTO, D. L.; KRIPKA, R. M. L.; BIEMBENGUT, M. S.; LAHM, R. A. Professores de matemática: estratégias evidenciadas para resolver problemas de modelagem matemática. In: BONOTTO, D. L.; LEITE, F. A.; GÜLLICH, R. I. C. (Org.). **Movimentos formativos: desafios para pensar a educação em ciências e matemática**. 1 ed. Tubarão: Editora Copiart, 2016, v. 1, p. 245-268.

O relato da presente pesquisa inicia com o capítulo de introdução, no qual são apresentados o tema, o problema e os objetivos da pesquisa.

O segundo capítulo apresenta a revisão de literatura, no qual é descrito o estado da arte sobre pesquisas identificadas, relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear, bem como um panorama geral sobre o uso de tecnologias no ensino.

O terceiro capítulo apresenta a fundamentação teórica, no qual constam as principais características das Teorias da Aprendizagem Significativa e nos Registros de Representação Semiótica, consideradas na elaboração da proposta didática.

O quarto capítulo apresenta os procedimentos e os métodos propostos, no qual são detalhados: as características da pesquisa, a abordagem por meio do uso de métodos mistos, os pressupostos e estratégias adotados, segundo as perspectivas qualitativa e quantitativa. Também são detalhados o planejamento da pesquisa, o local onde foi realizada; os participantes envolvidos; os instrumentos utilizados na mineração de dados, bem como são identificados os métodos de análise que se pretende utilizar.

O quinto capítulo apresenta a proposta de ensino e aprendizagem, contendo o detalhamento sobre sequenciamento didático e sobre as tarefas elaboradas. O sexto capítulo, por sua vez, apresenta as análises realizadas e, no sétimo capítulo, são apresentadas as considerações finais da pesquisa.

Finalizando o trabalho, apresentam-se as referências bibliográficas e os anexos.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, apresenta-se a revisão da literatura, na qual se procurou identificar investigações que trataram sobre ensino e aprendizagem de Álgebra Linear. Para realizar esse mapeamento, inicialmente, se fez buscas por teses e dissertações no portal da Capes utilizando as palavras: “Álgebra Linear; ensino, aprendizagem, TIC, aprendizagem significativa, registros semióticos”. Ressalta-se que na busca realizada não se estabeleceu um período de tempo específico para a consulta.[1]

Quando foi solicitado que a busca considerasse que todas as palavras estivessem simultaneamente presentes, nenhum resultado foi encontrado, o que corroborou com a originalidade do tema apresentado.

Realizando nova busca, por meio do recurso de busca avançada, cada palavra foi inserida separadamente, o que gerou quatro resultados. No entanto, os trabalhos encontrados não tratavam especificamente de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, mas de pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de matemática com uso de recursos tecnológicos, fundamentados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. Cabe ressaltar que todos os resultados são dissertações relativas a pesquisas aplicadas, das quais duas eram direcionadas ao ensino médio e duas ao ensino superior.

O primeiro trabalho trata de uma pesquisa desenvolvida por Monteiro (2011), na qual apresenta uma proposta de ensino e aprendizagem de um conteúdo específico de Geometria Analítica. Refere-se ao estudo de retas e planos no espaço tridimensional, com abordagem vetorial, e propõe a exploração de diferentes registros semióticos por meio do aplicativo *Cabri 3D*. A autora desse trabalho afirma ter utilizado, para fundamentar o experimento de ensino, a metodologia do *Design*

[1] Ressalta-se que o portal da Capes foi atualizado em 2016, logo depois que foi realizada a busca citada no presente trabalho e que a opção busca avançada, utilizada no mapeamento, foi modificada. Atualmente, ao invés de selecionar somente os trabalhos em que todas as palavras apareçam simultaneamente, o sistema gera um relatório contendo todos os trabalhos em que as palavras escolhidas aparecem não necessariamente juntas, o que dificulta a seleção de trabalhos que contenham todas as palavras escolhidas.

Experiment, de Cobb et al., e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval, como fundamentação teórica da proposta. Os participantes da pesquisa foram seis estudantes do curso de Engenharia, de uma instituição de ensino superior particular de São José dos Campos, SP. Como resultados, destaca que: (i) os conhecimentos prévios de vetores foram relacionados de modo independente pelos alunos em tarefas envolvendo retas e planos, o que os possibilitou estabelecer relações provenientes de diferentes registros semióticos, bem como possibilitou análises por meio do registro gráfico; (ii) os alunos apresentaram dificuldades em registros simbólico-algébricos; (iii) o uso do *software* propiciou um ambiente motivador e facilitador para a realização de conversões pouco utilizadas no ensino tradicional, bem como possibilitou contatos diferenciados com os objetos matemáticos abordados por meio da elaboração de conjecturas e de suas validações experimentais.

O segundo trabalho é uma dissertação de mestrado, desenvolvida por Perali (2011), na qual apresenta uma proposta interdisciplinar para ensino de matemática, com aplicações em física. Envolve operações com vetores, ou seja, adição de vetores e multiplicação de um vetor por escalar real, explorando recursos gráficos do aplicativo *Cabri Géomètre II-Plus*. Cita que utilizou a Metodologia de *Design Experiment,* de Cobb et al., bem como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. Os participantes da pesquisa foram dois estudantes voluntários do curso de Licenciatura em Química que já haviam tido contato com as operações vetoriais citadas pela abordagem tradicional. Conclui que a abordagem possibilitou evoluções conceituais aos estudantes e em conversões envolvendo o registro gráfico, mas salienta que nem todas as dificuldades apresentadas inicialmente pelos estudantes foram superadas. Ressalta que o uso do recurso computacional impulsionou a atividade de experimentação, possibilitando a elaboração de conjecturas e suas validações.

O terceiro resultado refere-se ao trabalho de Gregório (2011), que apresenta uma pesquisa sobre o uso de Objetos de Aprendizagem no ensino de matemática. A autora do trabalho citado evidencia que na proposta foram utilizadas a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, e a concepção de David Wiley sobre Objetos de Aprendizagem como recurso de ensino. Indica que a investigação visou reconhecer se o uso de Objetos de Aprendizagem (OA) com a abordagem segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica possibilitaria a efetivação de atividades cognitivas. Para tanto, foram analisados processos de representação, tratamento, conversão e coordenação entre os registros semióticos e as interações propiciadas por eles. Como metodologia a autora indica que os conteúdos foram introduzidos em sala de aula e posteriormente foram utilizados OA em computadores, armazenados em um repositório. Os participantes da pesquisa foram alunos da segunda série do ensino médio, sendo os dados coletados por meio de observação, questionários e diário de bordo. Conclui que foi possível perceber que os estudantes realizam atividades cognitivas necessárias à efetivação da aprendizagem ao utilizarem os OA, pois foram desenvolvidos com essa finalidade. Além disso, indica que a possibilidade de interação de modo inteligente com os OA possibilitou exercitar a autonomia do estudante e também propiciou a construção de novos conhecimentos por meio das tarefas propostas.

O quarto trabalho foi proposto por Santos (2012), que teve como objetivo investigar de que modo o desenvolvimento de projetos de modelagem matemática, utilizado como método de ensino, pode contribuir com a construção de conhecimento. Segundo a referida autora, para o desenvolvimento e a análise de atividades, foram considerados os fundamentos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Os participantes da pesquisa foram dois professores e alunos de duas turmas do ensino médio do Instituto Superior de Educação em Campos dos Goytacazes/RJ. Os dados foram constituídos por observação, aplicação de questionários, análise de atividades e por diário de bordo. A pesquisadora concluiu que o uso da modelagem como método de ensino alternativo desperta o interesse dos alunos e deve ser utilizado em sala de aula. Também constatou que os professores que participaram da pesquisa sentiram dificuldades em explorar diferentes tipos de registros de representação semiótica. Por esse motivo, sugere que sejam contemplados, em processos de formação inicial de professores de matemática, os estudos e as aplicações da teoria das representações semióticas de Raymond Duval.

Percebe-se que os trabalhos relatados não se referiam especificamente ao tema Álgebra Linear, que corresponde ao foco principal da presente proposta de tese. Assim, foi realizada nova pesquisa no banco de teses da Capes buscando apenas os trabalhos em que constasse a expressão “Álgebra Linear”. Foram encontrados 64 resultados, tendo sido verificado que a maioria dos trabalhos (59) se referia às pesquisas desenvolvidas na área da matemática pura ou aplicada.

Para refinar a pesquisa no procedimento de busca, foram acrescentadas as palavras “ensino” e “aprendizagem” (além de “Álgebra Linear”), que resultou exatamente nos cinco trabalhos selecionados pela leitura dos resumos dos 64 resultados encontrados anteriormente, os quais tinham focos parcialmente relacionados à questão de pesquisa da presente proposta.

Além disso, a leitura dos resumos possibilitou identificar que um deles não tinha relação com o tema, pois se referia à análise de disciplinas básicas de matemática no ensino superior, não sendo direcionado especificamente para a discussão dos contextos de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear. Assim, do terceiro procedimento de busca por teses e dissertações no banco da Capes, resultaram apenas quatro dissertações de mestrado, as quais são apresentadas a seguir.

Jammal (2011) apresenta resultados de uma pesquisa documental, que visou identificar se noções de Geometria Analítica específicas sobre ponto e reta no plano, ao serem introduzidas por meio de tarefas e práticas no ensino médio, podem ser consideradas como conhecimentos prévios da disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear no ensino superior. Segundo a autora, foram utilizados como fundamentação teórica a noção de quadro e mudança de quadro de Régine Douady, a Teoria Antropológica do Didático de: (i) Yves Chevallard; (ii) Yves Chevallard e Denise Grenier e (iii) Marianna Bosch e Yves Chevallard. Nas abordagens teóricas, considerou termos de níveis de conhecimento esperados dos estudantes definidos por Aline Robert e pontos de vista segundo Marc Rogalski. Informou que analisou documentos oficiais propostos para o ensino médio que possibilitaram identificar expectativas institucionais do ponto de vista pedagógico e didático para o desenvolvimento de tais noções. Além disso, construiu uma grade que a possibilitou analisar relações institucionais esperadas dos estudantes por meio de livros didáticos e de relações pessoais também esperadas dos estudantes, que foram realizadas por meio de duas macroavaliações. Como conclusão, afirma que, ao se considerar relações institucionais esperadas e existentes, os resultados indicam que no ensino superior as articulações de quadros, manipulação de ostensivos[2] e evocação de não ostensivos dependem dos conhecimentos prévios que os estudantes dispõem ou são capazes de mobilizar. Também conclui que foi possível identificar que as noções de ponto e reta no plano são construídas por meio dos quadros das funções, geometria euclidiana plana e cálculo algébrico e que o nível de conhecimento esperado dos estudantes difere de modo geral, dependendo do documento analisado. Salienta que esse fato sugere que a introdução de Geometria Analítica no Ensino Superior, merece atenção especial quanto aos diferentes grupos de estudantes com os quais se trabalha.

Rangel (2011) apresenta resultados de uma investigação sobre contribuições do desenvolvimento de projetos de Modelagem Matemática na formação inicial de professores. Indica que a pesquisa envolveu especificamente ensino e aprendizagem de sistemas lineares, sendo esse conteúdo um tópico da Álgebra Linear. Informa que foi desenvolvida em uma disciplina obrigatória chamada “Matemática Básica III”, envolvendo 15 alunos do 3º semestre de um curso de Licenciatura em Matemática. Inicialmente apresenta uma análise documental sobre a abordagem desse conteúdo em alguns livros didáticos de Álgebra Linear e posteriormente descreve o desenvolvimento de três projetos, com os seguintes temas: “Nutrição balanceada”, “Condicionamento físico” e “Circuitos elétricos”. Segundo o autor, os projetos foram realizados pelos alunos, sob sua orientação, como uma das tarefas de ensino e aprendizagem desenvolvida na disciplina. Conclui que o desenvolvimento de projetos de modelagem matemática pode auxiliar na formação crítica e reflexiva do professor ao possibilitar desafios na aplicação de conceitos. Além disso, que esse método de ensino propicia interação e colaboração na construção coletiva de conhecimentos.

Faro (2011) apresenta uma pesquisa teórica que visou identificar aspectos considerados relevantes quanto à noção de sistemas de equações lineares, no processo de transição entre o Ensino Médio e Superior. Trata-se de uma pesquisa

[2] Segundo Jammal (2011), os objetos ostensivos e não ostensivos foram definidos por Chevallard em 1994. Os objetos ostensivos são objetos materiais, tais como: caneta, compasso, gestos, palavras, esquemas gráficos, escritas e formalismos, entre outros. Os objetos não ostensivos referem-se a representações internas de um objeto de estudo, tais como imagens mentais, conceitos, noções, concepções.

documental realizada com documentos oficiais, livros didáticos e caderno da nova proposta do estado de São Paulo e macroavaliações. O objetivo consistiu em analisar relações institucionais esperadas, relações institucionais existentes e relações pessoais esperadas dos estudantes. Concluiu que a pesquisa possibilitou verificar que existem problemas de coerência entre relações institucionais e pessoais para o Ensino Médio, que são consideradas pelo Ensino Superior. Indica que, em relação à noção de sistemas de equações lineares, os acadêmicos finalistas de cursos de Matemática dispõem de conhecimentos prévios necessários para realizarem a macroavaliação do final de curso com sucesso, pois esses, além de serem desenvolvidos no ensino médio, são revisitados nas disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear no Ensino Superior.

Devolder (2012) apresenta uma pesquisa que envolveu a proposição e análise de viabilidade do uso de uma tecnologia para redação de textos matemáticos, em cursos regulares de matemática, desenvolvida no LIMC/UFRJ. Indica que o recurso foi inspirado por uma tecnologia semelhante, desenvolvida para ser utilizada em disciplina de Cálculo. Informa que nessa foi proposta a integração de duas plataformas computacionais, sendo uma um Sistema de Gestão da Aprendizagem (LMS), no caso o a plataforma *Moodle*, e a outra um Sistema de Computação Algébrica (CAS), no caso o software *Maxima*. O autor indica que, após ser analisada e redesenhada, a tecnologia proposta foi validada na disciplina de Álgebra Linear II de um curso de Engenharia. Como resultado, indicou que a possibilidade introdução de expressões matemáticas e dos processamentos dos textos por meio dessa tecnologia permitiu a formação de um acervo disponibilizado no *Moodle* aos inscritos no curso, proporcionando ao professor num complemento didático e aos estudantes um ambiente de aprendizagem amigável, que possibilita abordar conceitos próprios da matemática e realizar discussões sobre os assuntos abordados.

Esses foram os trabalhos identificados pelo mapeamento realizado no banco de dados da Capes. No entanto, ao realizar a leitura dessas pesquisas, foram encontradas nas referências algumas dissertações ou teses envolvendo ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, que não constam no banco de teses da Capes, mas que possuíam proximidades com o tema abordado na presente proposta de tese. Nesse sentido, foram selecionados alguns trabalhos para compor o mapeamento da revisão de literatura realizado, os quais são apresentados brevemente a seguir. O critério de escolha utilizado foi a busca por pesquisas que remetessem ao contexto de ensino e de aprendizagem de Álgebra Linear.

Na leitura de Rangel (2011), foram identificadas as dissertações de mestrado de Celestino (2000), Coimbra (2008), França (2007), Furtado (2010), Silva (1997), Grande (2006), Rodrigues (2009) e a tese de doutorado de Karrer (2006).

Celestino (2000) apresenta um mapeamento teórico que objetivou identificar e analisar, no contexto mundial, investigações sobre ensino e aprendizagem de Álgebra Linear realizadas na década de 1990. Devido à abrangência de seu estudo, apresenta-se, a seguir, um detalhamento maior de seus resultados, por entender que muitos deles podem colaborar com a análise de dados da presente proposta de tese. Inicialmente, o autor aborda resultados de pesquisas realizadas por uma equipe da Unicamp entre 1993 e 1997 sobre disciplinas problemáticas. Nessa, a Álgebra Linear aparece como uma das quinze mapeadas, com altos índices de reprovação nas universidades Unicamp, USP e Unesp, com variações entre 25% a 50%, o que indica a existência de dificuldades de aprendizagem dos estudantes nessa disciplina. Ressalta que esses problemas não ocorrem somente no Brasil, apresentando a pesquisa de Dorier et al. (1994) realizada na França que também revelou dificuldades de aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear.

Entre dissertações, teses e artigos, Celestino (2000) pesquisou vários documentos, referentes ao período de 1989 a 1999, e apresentou sínteses de quatro artigos para compreensão do contexto histórico mundial sobre pesquisas realizadas em ensino e aprendizagem de Álgebra Linear. Afirma que, por meio da análise dos três primeiros, foi possível identificar influências e mudanças ocorridas na área da Educação Matemática no Brasil e nos Estados Unidos, naquela época.

Em relação ao quarto artigo, apresentou análises de pesquisas sobre didática da Álgebra Linear especificamente na França e nos Estados Unidos. Na continuidade da pesquisa, o autor apresentou uma síntese sobre trabalhos brasileiros desenvolvidos na década de 1990 e afirma que foi nessa década que se iniciaram as pesquisas brasileiras sobre esse tema. Conclui que apesar de ter identificado, em seu mapeamento, poucas pesquisas brasileiras realizadas nessa área, elas apresentam resultados coerentes com os resultados mundiais. Em sua dissertação, Celestino (2000) destaca as pesquisas que Guerson Harel realizou em 1990 junto a um grupo norte-americano, o LACSG (*Linear Álgebra Curriculum Study Group*), sobre investigações relacionadas a dificuldades de ensino e aprendizagem de Álgebra. Como resultado dessas investigações, o grupo propôs os seguintes *quatro eixos norteadores*, recomendados para a abordagem do ensino e da aprendizagem de Álgebra Linear:

(i) *foco na demonstração*, com desafios intelectuais;

(ii) disciplina com *duração suficiente* para seu ensino, centrado na teoria matricial;

(iii) *uso de tecnologias educativas;* e

(iv) *limitar o conteúdo* ao estudo de R^n .

Também afirma que Harel propôs um quadro teórico sobre ensino e aprendizagem constituído de três princípios:

(i) *concretização*: propiciada pela visualização de conceitos com auxílio da geometria, a qual possibilita a construção de conceitos-imagens, que servem como âncoras para abstrações posteriores;

(ii) *necessidade*: que podem ser gerados por desestabilização, ou seja, busca de novos conceitos que possibilitem responder novas questões para novos contextos e

(iii) *generalidade*: que ao ser trabalhada, visa desenvolver a capacidade de abstração de contextos particulares para gerais.

Além disso, Celestino (2000) destaca, na sua dissertação, o mapeamento realizado por Dorier (1998), que se referiu às contribuições didáticas para o ensino de Álgebra Linear e às dificuldades dos estudantes encontradas na área.

Dorier (1998), além do mapeamento sobre as várias pesquisas da época, também apresentou pesquisas próprias sobre “flexibilidade cognitiva” remetendo às mudanças de registros e de diferentes perspectivas e formas de raciocínio, considerando-a necessária para a aprendizagem de Álgebra.

Sobre essa questão da “flexibilidade cognitiva”, Celestino (2000) também ressalta a pesquisa de doutorado de Kallia Pavlopoulou (1994). Em sua tese, a pesquisadora considerou os fundamentos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. Assim, para observar a coordenação dos diferentes tipos de registros utilizados no ensino de Álgebra Linear, buscou identificar três tipos de atividades:

(i) formação de representação identificável, associada a um tipo de registro;

(ii) tratamento de uma representação e suas transformações dentro do registro criado;

(iii) conversão como sendo a atividade de transformação de um tipo de registro semiótico para outro.

A autora informa que analisou alguns livros didáticos da época e concluiu que os registros simbólicos eram privilegiados e que as conversões não eram explicitadas. Além disso, elaborou uma sequência didática para o ensino de conceitos de Álgebra Linear centrada na distinção entre diferentes tipos de registros de representação semiótica. Informou que a sequência foi realizada com estudantes do último nível da Universidade de Estrasburgo, em 1993, tendo a duração de oito horas. Conclui que os rápidos avanços que observou indicaram melhorias na aprendizagem. No entanto, sugere que ainda seria necessário buscar por novas estratégias visando melhorias no desempenho dos estudantes, no âmbito da conversão de registros. Indicou também que os participantes da pesquisa sentiam dificuldades em realizar conversões, salientando que essas não eram iguais de um sentido para o outro. Identificou que a maior dificuldade foi observada na conversão entre vetor e sua representação geométrica. Ressaltou como sendo fraco o nível de competência espontânea dos estudantes e sugere que sejam examinados aspectos epistemológicos da história da Álgebra Linear segundo aspectos da teoria dos registros de representação semiótica.

Ainda relacionado ao mapeamento de Dorier (1998), também aparecem as pesquisas de Joel Hillel e Anna Sierpinska, que investigaram sobre possíveis explicações acerca de dificuldades no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear. Segundo ele, os autores consideraram a existência de três tipos de linguagens existentes:

(i) linguagem da teoria geral (conceitual), que denominaram de abstrata;

(ii) linguagem da teoria do R^n (coordenadas, matrizes, sistema de equações, etc.), que denominaram algébrica;

(iii) linguagem geométrica de R^2 e R^3 (pontos e vetores geométrico associados, retas, planos e transformações geométricas), que chamaram de linguagem geométrica.

Indicaram que os alunos sentem dificuldades em usá-las em contextos adequados, bem como em transitar entre elas, evidenciando dificuldades de mudanças de registros, especialmente quando passam da representação figural para a representação algébrica. Dorier (1998) cita que após suas análises, os autores concluíram que, para que haja apreensão dos conceitos, é necessário desenvolver a capacidade de conversão entre diferentes registros. E que também é necessário que seja desenvolvida uma atitude reflexiva que possibilite o uso adequado dos instrumentos da Álgebra Linear.

Dorier (1998) também ressalta o trabalho de Anna Sierpinska, Asrtrid Defence, Tsolaire Khatcherian e Luis Saldanha, que defendem que, para o desenvolvimento da Álgebra Linear, existem três modos distintos de raciocínio (ou de pensamento):

(i) o sintético geométrico;
(ii) o analítico geométrico;
(iii) o analítico estrutural.

Segundo ele, os autores indicam que os três modos de pensamento devem ser utilizados para ultrapassar as dificuldades de introdução aos números na geometria e de utilização da intuição geométrica na intervenção do domínio da aritmética. E, também, afirmam que na Álgebra Linear se propõe um pensamento analítico sobre o espaço geométrico e que cada modo de pensamento possui uma linguagem própria de representação. Além disso, salientam que no pensamento sintético geométrico se utiliza a linguagem geométrica de figuras e de representações gráficas e no modo analítico se utiliza os demais tipos de representação. Dorier (1998) relata que os autores concluem que os diferentes tipos de raciocínio levam a diferentes compreensões, com sentidos diferentes das noções que abordam, pois estão associados às diferentes perspectivas teóricas. Além disso, identificaram que os alunos utilizam diferentes modos de pensamento em seus raciocínios, sendo alguns identificados como intermediários e que sugerem que o melhor para a aprendizagem de Álgebra Linear seria recorrer à forma mista de pensamento.

Em relação às pesquisas brasileiras sobre ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, Celestino (2000) identificou, na época, apenas seis publicações. A primeira refere-se à dissertação de Silva (1997) desenvolvida na Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, na qual é apresentada uma análise da produção de significados para a noção de base em Álgebra Linear. A segunda é a dissertação de Silva (1999), defendida na Unesp de Rio Claro, onde são apresentados resultados sobre como projetar, executar e avaliar uma disciplina de Álgebra Linear, que contempla as necessidades de um curso de Computação. Nessa dissertação, as tarefas elaboradas foram aplicadas segundo a metodologia da Assimilação Solidária, ou seja, após suas aplicações, o grupo de estudantes avaliava os resultados e sugeria novos caminhos para as próximas tarefas, indicando que os assuntos foram distribuídos por aulas. Além disso, destaca que a autora justificou que não utilizou recursos tecnológicos digitais, pois:

(i) na época, não existia infraestrutura adequada;
(ii) existiam limitações das professoras, que não eram especialistas de computação;
(iii) se buscava propor alternativas para o ensino de Álgebra que não ficassem limitadas ao uso de computadores, mas que fossem acessíveis a todos os professores, possibilitando um caminho possível para transição do ensino tradicional para uma proposta inovadora.

A autora citada concluiu, à época, que os alunos não viam necessidade em compreender os conceitos de Álgebra Linear propostos, partindo de um referencial matemático, mas se detinham nos processos concretos dos cálculos indicados. No final do seu trabalho, ela questiona se, no início de cursos de álgebra, não seria adequada a introdução da *definição conceitual* para, posteriormente, se obter as *imagens conceituais.*

O objetivo geral da dissertação de mestrado proposta por Silva (1999) se assemelha a um dos objetivos específicos da presente tese, no que se refere à proposição de tarefas didáticas para o ensino de Álgebra Linear adequado às necessidades dos estudantes. No entanto, as propostas assumem perspectivas diferentes, considerando o objetivo geral da presente tese, que propõe investigar as influências do uso dos recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra Linear. A incorporação apropriada das TIC no ensino escolarizado implica a proposição de tarefas didáticas alternativas plurais e sofisticadas, tendo em vista propiciar ambientes de aprendizagem que possibilitem alcançar os objetivos propostos.

A terceira pesquisa citada por Celestino (2000) foi identificada por ele como um trabalho equivalente a uma dissertação de mestrado que se refere a uma pesquisa realizada por Dias (1993), na França. No trabalho foram apresentados resultados sobre avaliação de provas, de alunos do primeiro ano universitário

(DEUG A), da faculdade de Lille (França), sobre noções centrais e específicas de Álgebra Linear e sobre identificações de possíveis relações entre o implícito e o paramétrico. Celestino (2000) destaca que essa pesquisa estava relacionada a experimentos para o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear propostos por Marc Rogalski e que levou em consideração os fundamentos das teorias das situações de Guy Brousseau e a de Jogo de Quadros de Régine Douady. Destaca que a referida autora dedicou-se a responder à seguinte pergunta: “[...] qual articulação é feita entre o método de Gauss como técnica e noções de Álgebra Linear (subespaço gerado, sistemas de equações lineares e dimensão de um subespaço gerado)” (CELESTINO, 2000, p. 64), a qual subdividiu em quatro itens. Salienta que empregou alguns princípios da metodologia de pesquisa da Engenharia Didática e fez uma análise a priori de cada item da questão para posteriormente realizar a descrição dos resultados. Salienta que, pela análise a posteriori, a autora observou que vários (e diferentes) procedimentos de resolução eram utilizados por estudantes de um mesmo grupo na tarefa proposta. Além disso, percebeu que os estudantes recorriam ao uso do método algébrico, embora fosse solicitado que resolvessem a questão sem o uso de cálculos. Destaca que a autora concluiu que os estudantes dominam bem a técnica, mas que não têm clareza quanto aos conceitos trabalhados, pois constatou que tinham dificuldades para perceber suas aplicações quando não eram explicitadas no enunciado. Indicou que os estudantes consideram a matemática como um conjunto de “receitas” que possibilitam resolver problemas.

O quarto trabalho citado por Celestino (2000) refere-se a um artigo científico, também realizado por Dias (1995), publicado no 19th *PME* (*Psychology of Mathematics Education*). Indica que o objetivo consistiu em investigar problemas envolvendo possibilidades de articulações entre sistemas de representação simbólicos diferentes, referentes à flexibilidade entre dois pontos de vista (o paramétrico e o cartesiano) presentes na aprendizagem de Álgebra Linear. Informa que, como fundamentação teórica, a pesquisa considerou o Jogo de quadros de Régine Douady e os registros de representação semiótica de Raymond Duval. Salienta que a autora concluiu que a competência de flexibilidade entre as representações cartesiana e paramétrica tem um papel fundamental na aprendizagem de Álgebra Linear. Percebeu ainda que esse papel não se reduz às habilidades simplesmente de representação semióticas, pois, no processo de resolução de problemas, os componentes conceituais e técnicos aparecem vinculados. Além disso, ressaltou que a maioria dos estudantes tendem a reduzir a flexibilidade aos aspectos algorítmicos, o que dificulta a aprendizagem. Informou também que, ao finalizar sua pesquisa, a autora sugere que a competência de flexibilidade deve ser objetivada explicitamente nos processos pedagógicos, pois não podem ser desenvolvidas apenas com esforço pessoal.

A quinta pesquisa citada por Celestino (2000) refere-se ao artigo de Artique e Dias (1998), publicado nos anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática (VI ENEM), nos quais são apresentados resultados de uma investigação sobre o fenômeno da articulação entre pontos de vista cartesiano e paramétrico, no que diz respeito ao tratamento das representações de subespaços vetoriais. Informa que os autores se apoiaram nas concepções teóricas de Douady e Duval, quanto às noções de quadro e de registro, respectivamente, bem como na abordagem antropológica de Chevallard quanto às noções de níveis de conhecimento teórico, tecnológico e técnico e citam que se apoiaram, de modo particular, no trabalho sobre o desenvolvimento histórico da noção de posto, desenvolvido por Dorier (1993). Segundo Celestino (2000), os autores indicaram que foi realizado uma análise de livros didáticos, visando identificar regularidades e diferenças entre os relatórios institucionais franceses e brasileiros. E ainda, que se procedeu à análise de questionários, entrevistas e exames de DEUG, visando compreender como estudantes de diferentes níveis, brasileiros e franceses, construíam articulações entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico, tendo em vista os materiais didáticos a eles disponibilizados e quais dificuldades apresentavam. O autor informa que os resultados que obtiveram confirmaram as conclusões obtidas no trabalho de Dias (1995).

A sexta pesquisa citada por Celestino (2000) refere-se à tese de doutorado de Dias (1998a), defendida no IREM de Paris VII, da Universidade de Paris. Nessa, a autora citada propôs uma investigação sobre o fenômeno de articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico, na representação de espaços vetoriais.

Dias (1998a) indica que usou procedimentos da Engenharia Didática como método de pesquisa e afirma que foram considerados como fundamentos teóricos o Jogo de quadros de Douady, os registros de representações de Duval e a articulação de Ponto de Vista de Rogalski.

Inicialmente, a autora apresenta um estudo sobre quadros de modelos cognitivos hierarquizados e não-hierarquizados, contemplando noções de jogo de quadros, de registros, de pontos de vista. Na sequência, apresenta um estudo sobre a relação entre pontos de vista paramétrico e cartesiano considerando duas perspectivas: da visão algorítmica e da noção de dualidade. Posteriormente, apresenta o modo como ocorreu a evolução histórica da flexibilidade na articulação do ponto de vista paramétrico e cartesiano e apresenta resultados de análises de alguns livros didáticos franceses e brasileiros, que possibilitaram observar registros e variáveis, em tarefas propostas. A autora afirma que a pesquisa se refere a um estudo sobre o funcionamento institucional dessas articulações e foi realizada por meio de entrevistas e questionários aplicados aos estudantes brasileiros e franceses, procedimento que possibilitou que se observasse a existência de dificuldades importantes em relação ao fenômeno da articulação investigado.

Nas conclusões, a autora indica que o papel da articulação é importante na aprendizagem da Álgebra Linear e que apresenta dificuldades pelo fato de a passagem entre eles não ser simétrica. Afirma que a dualidade representa um desnível entre as técnicas algorítmicas de passagem e o quadro teórico envolvidos na articulação entre os pontos de vista e que, pela análise histórica, o desenvolvimento da articulação pode ser freado pela técnica. A autora também apresenta a distinção de cinco quadros que possibilitaram perceber como a articulação se expressa, destacando: quadro dos Sistemas Lineares, quadro da Geometria, quadro da Álgebra Linear, quadro das Matrizes e o quadro dos Determinantes. Afirma que esses últimos não existem de modo autônomo em relação à articulação. Além disso, informa que a análise dos manuais didáticos indica que as poucas questões existentes que envolviam articulação o faziam de forma implícita, sendo percebidas por dois polos: um técnico, da resolução de sistemas lineares, e outro teórico, da dualidade. Além disso, se evidenciou que, quando o polo técnico domina, a tecnologia é essencialmente descritiva.

Também concluiu que, geralmente, os exercícios que necessitam de articulação entre diferentes pontos de vista ficam marginalizados e que, na sua maioria, apresentam-se no sentido do cartesiano para o paramétrico, associados à resolução de sistemas. Por outro lado, salientou que as dificuldades verificadas nas respostas dos estudantes brasileiros e franceses indicam dificuldades resistentes, no que se refere à elaboração de justificativas eficazes e flexíveis quanto aos dois pontos de vista considerados, em relação às articulações existentes. Destacou, também, que foi possível perceber que há falta de uso pelos estudantes dos recursos de validação e do quadro geométrico. Além disso, que o estudante, ao trabalhar com a dualidade, explorando a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico, pode diferenciar entre a solução técnica da articulação por meio do quadro dos sistemas lineares e da sua solução teórica. Salienta que a articulação não é facilmente acessível, pois os estudantes restringem a conceitualização a certos domínios, reduzindo-a aos aspectos algorítmicos. Finaliza afirmando que, para que os estudantes possam desenvolver competências necessárias para articulação, é necessário considerá-la de forma explícita no processo de ensino.

Esses foram os resumos das pesquisas citadas por Celestino (2000) referentes ao mapeamento teórico por ele realizado com o objetivo de identificar pesquisas realizadas sobre ensino e aprendizagem de Álgebra Linear realizadas na década de 1990 e analisá-las no contexto da época.

Dando continuidade à presente revisão de literatura, que visa identificar pesquisas mais recentes que tratam sobre ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, são apresentadas outras investigações mapeadas, citadas por Rangel (2011).

Coimbra (2008) investigou as dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear. Em sua dissertação, o autor indica que a análise histórica realizada possibilitou concluir que a Álgebra Linear não pode ser ensinada apenas como uma mera generalização da geometria, pois isso pode tanto facilitar a compreensão quanto criar obstáculos na aprendizagem. Indica que a concretização[3] necessária na Álgebra pode ser favorecida não somente por modelos geométricos, mas também por uma representação gráfica, ilustrando conceitos e propriedades. Destaca que as concepções matemáticas relativas aos conceitos básicos da Álgebra, construídos ao longo da educação básica, são obstáculos ontogenéticos que geram conflitos aos estudantes, quando se deparam com novos saberes, que devem ser construídos no ensino superior. Cita, como exemplo, o conceito de vetor. Indica que existem dificuldades quanto à linguagem utilizada, bem como a limitação

[3] Segundo Coimbra (2008), o princípio da concretização foi estabelecido por Guershon Harel, em 2000. Refere-se ao processo de abstração de estruturas matemáticas relacionadas à representação mental de objetos como referências.

do tipo de espaço vetorial ao estudo do R^n, o que não favorece o tratamento axiomático, necessário à aprendizagem matemática. Concluiu sua dissertação indicando os seguintes aspectos problemáticos do processo de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear:

(i) *Atitude do professor*: salientado sua importância na condução das tarefas de ensino.

(ii) *Desconhecimento da história*: informação que deve possibilitar uma compreensão integradora dos conceitos.

(iii) *Assimilação sem acomodação*: considerar que os alunos já possuem conhecimentos prévios que precisam ser considerados para acomodação de novas informações.

(iv) *Obstáculos verbais*: o uso de palavras conhecidas pode gerar confusão de sentidos; mas devem ser trabalhadas como conceitos unificadores.

(v) *Uso da geometria*: devem servir para ilustrar com exemplos, mas não possibilita esgotar os conceitos de Álgebra Linear e não devem ser usados em demasia para não dar a impressão de que a Álgebra Linear se resume à Geometria.

(vi) *Uso da lógica*: considerada importante para a compreensão dos conceitos de Álgebra Linear;

(vii) *Exemplos variados e integração dos domínios*: auxiliam na compreensão e na resolução de problemas de outras áreas.

Finaliza afirmando que os professores devem cuidar obstáculos de natureza epistemológica, bem como devem observar os aspectos da natureza abstrata e unificadora dos conceitos tratados em Álgebra Linear.

França (2007), em sua dissertação de mestrado, propôs uma pesquisa que envolveu a aprendizagem de conceitos de vetores, de dependência linear, de base e de transformação linear no plano. O trabalho foi realizado com estudantes de licenciatura em Matemática que já haviam cursado a disciplina de Álgebra Linear. O autor informou que considerou as teorias de Representação Semiótica de Duval e a dos Campos conceituais de Vergnaud como bases teóricas. Destaca que investigou sobre como um tratamento geométrico e a articulação entre diferentes registros realizados por meio dos recursos do *Cabri-Géomètre* influenciaram as concepções dos participantes da pesquisa. Para tanto, propôs experimentos de ensino e concluiu que esses ambientes de geometria dinâmica influenciaram positivamente as estratégias de resoluções dos estudantes e que as tarefas possibilitaram, por meio da realização de conversões, ampliar o domínio das representações gráficas, algébricas e geométricas, indicando que houve evoluções na compreensão dos conceitos.

Furtado (2010) apresentou resultados de uma investigação realizada sobre a compreensão de conceitos de transformação linear abordados na disciplina de Álgebra Linear. Informou que considerou a teoria de proceito[4] proposta por Gray e Tall, que possibilitaram reflexões sobre flexibilidade entre conceito, processo e procedimento.

Grande (2006) propôs uma investigação teórica que visou identificar quais os tipos de registros de representação semiótica que aparecem em livros didáticos, utilizados para abordar noções sobre independência linear no processo de ensino e de aprendizagem. A análise foi realizada segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Concluiu que são escassos os usos de alguns tipos de registros de representação e verificou a falta de conversão de registros em definições, exemplos e exercícios propostos.

Rodrigues (2009), em sua dissertação, apresenta um software que ele desenvolveu como apoio ao ensino e à aprendizagem de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial. Afirma que o software por meio de tarefas animadas e interativas possibilita desenvolver os conteúdos de Combinação Linear, Independência Linear, Base e Dimensão de um Espaço Vetorial. Destaca que foi utilizado em caráter experimental, em uma turma da disciplina de Álgebra Linear do curso de Licenciatura em Matemática da PUCMINAS de Betim. Concluiu que os resultados indicam uma possível melhoria na qualidade do ensino e consequente eficácia na aprendizagem de Álgebra Linear.

Karrer (2006), em sua tese de doutorado, investigou sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear por meio da exploração de conversões entre diferentes registros semióticos, em tarefas sobre transformações lineares realizadas

[4] O conceito “proceito” foi criado por Gray e Tall, em 1991, como uma mistura de processo e conceito, na qual processo e produto usam o mesmo simbolismo para serem representados. Como exemplo, citam o conceito do número 6, que pode ser indicado pelos processos de multiplicação como 2x3, ou por processos de adição como 3+3.

em ambientes computacionais propiciados pelos softwares *Cabri-Géomètre* e *papel&lápis*. Para tanto, realizou um estudo teórico, por meio de analises em livros didáticos de Álgebra Linear e de Computação Gráfica que possibilitou formular a hipótese de trabalho, bem como a identificação de ferramentas conceituais utilizadas para análise, utilizando como fundamentação teórica a teoria dos registros de representação semiótica de Duval. Para elaboração das tarefas, utilizou a metodologia do *Design Experiments,* de Cobb et al. Foram concebidas tarefas de exploração das diversas representações que foram aplicadas a seis estudantes do curso de Engenharia da Computação, de uma instituição particular de ensino superior da cidade de São Paulo. Concluiu que houve evoluções significativas na compreensão dos sujeitos quanto aos conceitos tratados; que o ambiente do *Design,* desenvolvido por tarefas que objetivaram a exploração de diferentes modos de registros e de conversões, se constituiu num modo diferenciado para abordagem das transformações lineares planas; que os recursos das tecnologias facilitaram a construção e a validação locais, possibilitando combinar aspectos teóricos e empíricos dos objetos matemáticos tratados; que propiciaram ampliar o domínio das diferentes formas de representações e de suas conversões.

Além desses trabalhos, ao realizar pesquisas por meio do *Google* Acadêmico por teses ou dissertações relacionadas ao tema da presente tese, também foram identificados os trabalhos descritos a seguir.

O primeiro deles refere-se à dissertação de mestrado de Clarice Zita Sanches de Brito Silva (1994), denominada "O ensino da Álgebra Linear I: Uma experiência na Universidade do Amazonas", defendida na Universidade Santa Úrsula. Embora o título sugira que o assunto trata de questões relativas ao ensino e à aprendizagem da Álgebra Linear de modo geral, o trabalho dedica-se principalmente a problemas do ensino e aprendizagem de Geometria Analítica.

O segundo refere-se à tese de doutorado de Marcela Parraguez González (2009), que apresenta resultados sobre uma investigação realizada acerca da evolução cognitiva dos estudantes de Álgebra Linear, ao construírem o conceito de espaço vetorial, ao serem introduzidos conceitos básicos tais como dependência linear e base. A autora indica que, para identificação e análise das construções mentais dos estudantes, utilizou como fundamentação a teoria APOE (Ação - Processo – Objeto – Esquema), desenvolvida por Dubinsky e colaboradores. Informa que a pesquisa envolveu: análise teórica; projeto e implementação de instrumentos, análise e verificação de dados. Os instrumentos foram aplicados a dez estudantes de Bacharelado em Matemática do Instituto de Matemática (IMA) da Universidade Católica de Valparaiso (Chile PUCV), durante o segundo semestre de 2007. Gonzales concluiu que a investigação possibilitou perceber que houve uma evolução cognitiva dos estudantes de Álgebra Linear envolvidos.

O terceiro refere-se à tese de doutorado de Aparecida Santana de Souza Chiari (2015), que investigou, em disciplinas de álgebra Linear, o papel das tecnologias digitais (TD), destacando possibilidades, limites e desafios desse uso. Chiari considerou o contexto dos Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA) de quatro cursos vinculados à Universidade Aberta do Brasil (UAB) de Licenciatura em Matemática a distância. Indicou que utilizou a Teoria Enraizada ou Teoria Fundamentada (*Grounded Theory*) para análise de dados, obtidos por observação, entrevistas, projetos políticos pedagógicos e notas da pesquisadora. Concluiu que, nesse contexto, dois papéis se colocam em evidência, que foram analisados em duas categorias “TD como promotoras de variedade comunicacional” e “TD na construção de materiais didáticos digitais”, que foram posteriormente integradas sugerindo que as TD, a internet e o uso de AVA pode tornar o material didático digital interativo, o que ocorre a partir dos registros dessas interações. Quanto à Álgebra Linear, a autora indica que os modos de abordagem algébrico, formal e geométrico ocorrem em desequilíbrio e sugere que poderiam ser estimulados pelas possibilidades oferecidas pela TD. Afirma que o modelo construído e utilizado possibilitou validar a análise e permitiu reflexões sobre a consistência entre os objetivos institucionais estabelecidos e as práticas observadas.

A originalidade do tema se verifica por meio da revisão de literatura realizada, na qual se constatou que apesar de existirem vários trabalhos desenvolvidos sobre o tema “Álgebra Linear”, nenhum deles aborda uma investigação com características delineadas pela presente proposta.

Ressalta-se que, na sociedade contemporânea, as tecnologias digitais fazem parte das tarefas pessoais diárias da maioria das pessoas, e, ainda, elas têm sido utilizadas profissionalmente, na maioria dos ambientes de trabalho.

Pozo (2002) a chama de sociedade do conhecimento e da aprendizagem e salienta que o maior desafio consiste em buscar meios para que se possa converter informação em conhecimento. Destaca que essa nova cultura de aprendizagem exige novos modos de concepção e de produção de conhecimento, seja do ponto de vista social ou cognitivo.

No entanto, nos ambientes escolares, o uso de tecnologias digitais ainda é pouco explorado. Assim, destaca-se a relevância da presente pesquisa devido à necessidade da inclusão de recursos tecnológicos, em ambientes presenciais de ensino propiciando aos estudantes ambientes favoráveis à compreensão matemática e à aprendizagem significativa.

No próximo capítulo, apresentam-se os fundamentos das teorias consideradas para a elaboração das tarefas propostas. Também se apresenta um levantamento sobre a exploração e o uso de recursos tecnológicos digitais no Ensino de Ciências e Matemática, tendo em vista destacar: o impacto de suas utilizações em ambientes de ensino, os diferentes modos como afetam o ensino e a aprendizagem e as potencialidades identificadas em relação às múltiplas formas de aprendizagens.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A educação escolarizada possui implicações diretas em aspectos sociais, culturais, históricos, educacionais e formativos. Desse modo, verifica-se a importância da elaboração e da análise de propostas metodológicas para uma aprendizagem que estimule desenvolvimento de competências (DEMO, 2000).

Demo (2000), ao abordar o tema “Educar pela pesquisa”, indica que, para se propiciar uma formação completa, competente, crítica e inovadora, é necessário que sejam introduzidas tarefas investigativas como base fundamental da educação escolar, desenvolvidas por meio de questionamentos reconstrutivos.

Educar significa preparar os indivíduos para atuarem numa sociedade que está em constante transformação, onde as propostas educacionais contemporâneas devem contribuir para a formação completa do indivíduo, de modo a prepará-lo para os desafios das resoluções de seus problemas no cotidiano. Assim, é necessário criar propostas pedagógicas que possibilitem estimular o raciocínio, a criatividade na resolução de problemas, a interação através de discussão de ideias e de trabalhos em grupo, de modo que a aprendizagem ocorra coletivamente, mediada pelo diálogo, implicando o desenvolvimento de capacidades e potencialidades, preparando os indivíduos para serem críticos e ativos, atuantes na sociedade em que vivem (POZO, 2002).

Segundo Flemming et al. (2005), as pesquisas em Educação Matemática surgiram no século XIX diante da necessidade de renovação dos processos de ensino e de aprendizagem, uma vez que os educadores da época buscavam elaborar estratégias de forma que os conhecimentos matemáticos se tornassem mais acessíveis aos estudantes. Também afirmam que, ao longo da história, vários educadores, buscando contribuir com esses processos, criaram práticas inovadoras que originaram as chamadas tendências em educação matemática, definidas pelas linhas de pesquisa da área da Educação Matemática ou por trabalhos que surgiram para solucionar os problemas desse campo. Dentre as diversas tendências, destaca-se a *Informática e a Educação Matemática*.

O ensino de Matemática, em cursos de Engenharia, além de seu caráter formativo e instrumental, deve fazer com que os estudantes se habituem a resolver problemas, utilizando as tecnologias disponíveis, gerando hábitos de investigação, instigando a criatividade e a análise crítica de resultados, fazendo com que percebam a matemática como uma ciência que transita entre outras ciências, tais como a física, a biologia, etc.

Nesse contexto, se percebe a importância das TIC no processo de formação, de modo a auxiliar na construção de conhecimentos científicos e tecnológicos, para que possam atuar com competência na sociedade contemporânea, que está em constante transformação.

Com essas características, o aprendizado matemático somente será possível por meio da construção e da apropriação efetiva de conhecimentos, realizada pelo aluno, no qual se destaca a importância do estabelecimento de relações entre conhecimentos abstratos científicos, próprios do ambiente escolar, com aplicações reais.

Existem diversas teorias de aprendizagem desenvolvidas, ao longo da história da educação, com o intuito de compreender como se dá a construção do conhecimento e de impulsionar a proposição de métodos de ensino que potencializassem esse processo.

Dentre as teorias de aprendizagem desenvolvidas, destaca-se a teoria cognitivista da Aprendizagem Significativa, proposta por David Paul Ausubel (1918 - 2008).

Aragão (1976) informa que durante dez anos de sua vida, Ausubel se dedicou à elaboração de uma teoria sistemática que pudesse ser utilizada em sala de aula, tendo em vista identificar fatores que pudessem *facilitar a aprendizagem verbal significativa* e a *retenção do conhecimento.*

Por esses dois motivos, e pelo fato de ter sido desenvolvida especialmente para promover o ensino e a aprendizagem em sala de aula, a teoria de Ausubel (1963, 1968) foi escolhida para ser utilizada no presente trabalho, tendo em vista o planejamento das tarefas e a organização dos conteúdos a serem apresentados aos alunos, de modo a promover ambientes que fossem favoráveis à aprendizagem significativa e à retenção do conhecimento na estrutura cognitiva do estudante.

Ausubel (1963) indica que, para ocorrer aprendizagem significativa, é necessário que novas informações sejam apresentadas aos estudantes por meio de materiais potencialmente significativos. Assim, essas novas informações podem interagir com conceitos pré-existentes na estrutura cognitiva e, por meio de processos de assimilação, são incorporadas a ela.

Na presente tese, visando promover ambientes favoráveis à aprendizagem significativa, foram propostas e desenvolvidas tarefas, nas quais, além do uso de materiais potencialmente significativos, também foi oportunizada, aos estudantes, a utilização interativa de diferentes recursos tecnológicos digitais na resolução de problemas interdisciplinares contextualizados.

O objetivo principal consistiu em desafiá-los na busca por soluções possíveis, estimulando tanto a compreensão dos conceitos abordados, como suas aprendizagens significativas. Desse modo, buscou-se propiciar a complementaridade de saberes, e não apenas o oferecimento do contato com conhecimentos desvinculados, abordados por meio de disciplinas isoladas. Isso possibilitou a interação entre conhecimentos de diferentes áreas, o desenvolvimento da autonomia e a análise crítica de processos utilizados, o que também permitiu estimular a construção reflexiva de conhecimentos, bem como a aprendizagem significativa.

Ressalta-se também que, no processo de ensino e de aprendizagem específico de matemática, a comunicação tem grande importância e o aluno deve ser estimulado a se expressar “falando” e “escrevendo” sobre matemática.

Duval (2003) indica que o ensino de matemática objetiva contribuir com o desenvolvimento das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização. Afirma que, para que exista a compreensão de conceitos matemáticos, é necessário que haja articulação entre a pluralidade de registros possíveis na representação de um objeto, o que ocasionalmente pode não pode ser percebido apenas por registros semióticos externos de representação. Dessa forma, desenvolveu a teoria dos Registros de Representação Semiótica, a qual tem sido utilizada por diversos pesquisadores, com intuito de propiciar a construção e a análise de propostas didáticas, visando melhorar o ensino de matemática.

O fato é que nos processos de ensino e de aprendizagem em matemática, a necessidade de compreensão de uma linguagem própria e de seus processos de resolução, que compreende símbolos com significados e sentidos próprios, indica a necessidade de se compreender como se dá essa construção do conhecimento humano, para orientação da elaboração e análise de novas propostas de ensino.

A seguir, apresentam-se os aspectos relevantes da Teoria da Aprendizagem Significativa e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, visando à fundamentação teórica usada na elaboração das tarefas propostas, tendo em vista a potencialização do aprendizado de matemática, especificamente na disciplina de Álgebra Linear.

3.1 Teoria da Aprendizagem Significativa

David Paul Ausubel (1918 - 2008) nasceu em Nova York no dia 25 de outubro de 1918. Estudou Medicina e Psicologia na Universidade da Pensilvânia, Filadélfia. Foi cirurgião assistente e psiquiatra residente no serviço público dos Estados Unidos. Depois da segunda guerra mundial, trabalhou nas Nações Unidas e na Alemanha. Depois de terminar sua formação em psiquiatria, estudou na Universidade de Colúmbia, Nova York, onde obteve seu doutorado em Psicologia do Desenvolvimento. Entre 1950 e 1966, trabalhou em projetos de pesquisa, na Universidade de Illinois, onde teve muitas publicações sobre Psicologia Cognitiva. Também atuou como professor visitante em Institutos de Educação e também em Universidades Europeias, como a Universidade de Berna, Suíça, e a Pontifícia Universidade Salesiana, Roma. Foi diretor do departamento de Psicologia da Educação, para pós-graduação, da Universidade de Nova York, onde trabalhou até 1975. Em 1976, foi premiado pela Associação Americana de Psicologia, por sua contribuição com a Psicologia da Educação. Posteriormente, direcionou sua prática para o Centro Psiquiátrico Infantil. Faleceu em 9 de julho de 2008, aos 90 anos (CBT, 2013).

Era filho de família judia pobre, imigrante da Europa Central, e cresceu em uma época em que a população judia sofria muito com preconceitos e com conflitos. Por ter recebido muitos castigos e humilhações na escola, cresceu insatisfeito e revoltado com o ensino escolar e tornou-se um psicólogo da educação (QUEIROZ, 2017).

Segundo Fernandes (2011), sua teoria foi apresentada em 1963, quando as ideias behavioristas predominavam, ou seja, acreditava-se que os estudantes aprenderiam se fossem ensinados por meio de estímulos e respostas.

Ressalta-se que os princípios da Teoria da Aprendizagem Significativa podem ser encontrados em Ausubel (1963, 1968) e em Ausubel, Novak e Hanesian (1980).

Moreira e Masini (1982) afirmam que a teoria de Ausubel é cognitivista e se contrapõe à Behaviorista, pois rejeita a premissa de que somente o comportamento observável deve ser objeto de estudo no processo de aprendizagem e se preocupa com a compreensão dos mecanismos internos da mente, ou seja, dos processos cognitivos internos. Como cognitivista, considera que já existe uma estrutura cognitiva que processa a organização e a integração de informações recebidas pelo sujeito.

Destaca-se também que a teoria de Ausubel, além de ser uma teoria cognitiva, também é considerada uma teoria com perspectiva construtivista.

Valadares (2011, p. 40) considera que a Teoria da Aprendizagem Significativa é construtivista, o que tem raízes no fato de que, no construtivismo, "[...] o conhecimento não é recebido passivamente nem pelos sentidos nem por meio de comunicação; o conhecimento é construído ativamente pelo sujeito que o possui". O autor esclarece que o processo de aprendizagem significativa é construtivo e reconstrutivo, onde a mente do aprendiz atua ativamente, ao realizar associações de novas informações recebidas com conceitos subsunçores preexistentes, o que o possibilita construir ou reconstruir seu próprio conhecimento.

Aragão (1976, p. 8) afirma que, para Ausubel, existe relação entre "*saber como o aluno aprende"*, que remete às teorias de aprendizagem, e *"saber o que fazer para o aluno a aprender melhor",* que remete às teorias de ensino. Segundo a autora, nessa concepção, ensinar significa dar uma direção deliberada ao processo de aprendizagem, e Ausubel indica princípios para uma teoria de aprendizagem que se realiza na sala de aula. Para Aragão (1976, p. 9), a questão fundamental da Teoria de Ausubel remete a:

> [...] como facilitar o encontro da estrutura lógica de um determinado conteúdo com a estrutura psicológica de conhecimento do aluno? Surge, daí a preocupação com a aprendizagem significativa de matérias escolares, ou seja, com a natureza do processo de aquisição, retenção e transferência de significados e com a natureza do material de aprendizagem, que caracteriza a concepção cognitivista da aprendizagem, manifesta na Teoria de David P. Ausubel.

(i) Conceitos fundamentais da Teoria da Aprendizagem Significativa

A ideia central da Teoria de Ausubel consiste em considerar *aquilo que o aprendiz já sabe* como o fator mais importante que influencia a aprendizagem. Uma das frases mais conhecidas de Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, folha de rosto) é:

> Se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos.

Segundo Moreira (1999, p. 11), a aprendizagem significativa de Ausubel “[...] é um processo por meio do qual uma nova informação se relaciona de maneira substantiva (não-literal) e não arbitrária, a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo”. Denomina tais conceitos como “subsunçores” e salienta que a aprendizagem é significativa se a nova informação se ancora em conceitos relevantes, pré-existentes, interagindo com eles. Moreira (1985) esclarece que a palavra “subsunçor” se origina da palavra inglesa *subsumer*, que significa inseridor, facilitador, subordinador.

Moreira e Masini (1982) afirmam que, para Ausubel, o armazenamento de informações é um processo complexo, organizado pela estrutura mental do cérebro. Além disso, a estrutura cognitiva é compreendida pelo estudioso como uma estrutura hierárquica de conceitos, constituída de abstrações advindas da experiência do indivíduo, ou seja, consiste no conteúdo total de ideias de um certo indivíduo e a forma como estão organizadas.

O processo de ancoragem da nova informação implica crescimento e modificação dos conceitos subsunçores já existentes. Assim, podem existir tanto subsunçores limitados e pouco desenvolvidos como podem existir subsunçores abrangentes e bem desenvolvidos. Além disso, para Ausubel (1986), a estrutura cognitiva se constitui por meio de aprendizagens ocorridas ao longo da vida, distinguidas por ele como aprendizagens mecânicas ou significativas, sendo que ambas podem ocorrer por recepção ou por descoberta.

O autor indica que, na aprendizagem mecânica, a informação é armazenada arbitrariamente. Não existe interação com conceitos subsunçores. Afirma ainda que é necessária quando há contato com informações em uma área totalmente nova, até que existam conhecimentos relevantes que possam servir como subsunçores. Cita o exemplo das crianças pequenas, onde ocorre a *formação de conceitos,* que se dá pela aquisição espontânea de ideias genéricas por experiência empírico-concreta, ou seja, a aprendizagem por descoberta (AUSUBEL,1986).

Na aprendizagem significativa, a nova informação é armazenada por um processo que chama de *subsunção,* que ocorre em dois estágios:

- *Princípio da Assimilação*: a nova informação, potencialmente significativa (a), é assimilada pela interação com conceitos subsunçores (A) existentes na estrutura cognitiva, gerando um conceito subsunçor modificado, que consiste no produto interacional entre eles (A'a'). Segundo Ausubel, esse produto é temporariamente dissociável nas ideias do subsunçor modificado (A') e da nova informação modificada (a'), o que favorece o armazenamento ou a retenção da informação modificada pelo subsunçor (a') (MOREIRA; MASINI, 1982).
- *Princípio da Assimilação Obliteradora*: após a fase de retenção, ocorre um processo de esquecimento, no qual a nova informação modificada (a') é esquecida, permanecendo na estrutura cognitiva somente o subsunçor modificado (A'), que se torna mais elaborado e desenvolvido (MOREIRA, 1999).

Segundo Ausubel (MOREIRA; MASINI, 1982), existem dois tipos de subsunção:

- *Derivativa*: é aquela em que a nova informação é um exemplo específico de conceitos já estabelecidos. Nesse caso, o significado do material emerge rápido e relativamente sem esforço, mas a assimilação obliteradora tende a ocorrer com facilidade.
- *Correlativa*: é aquela em que o novo conhecimento é aprendido como extensão, elaborações, modificações ou qualificação dos conceitos já existentes. Nesse caso, quando a proposição correlativa perde sua identidade e não pode ser dissociada dos subsunçores, ocorre a perda do conhecimento e assimilação obliteradora no caso dos subsunçores serem instáveis, ou se o material aprendido não foi bem compreendido.

Moreira e Masini (1982, p. 19-20) afirmam que, como a assimilação obliteradora, no entendimento de Ausubel, seria a responsável pelo esquecimento, ou seja, pela perda da perda de diferenciação do conjunto de ideias específicas no conhecimento, o problema principal na aprendizagem do conteúdo de uma disciplina específica consiste em neutralizar seu efeito no ambiente escolar, visando à aprendizagem significativa dos conceitos.

Os autores informam que o conhecimento em crianças mais velhas ou em adultos ocorre por assimilação de conceitos, ou seja, “[...] envolve a relação, de modo ‘substantivo’ e ‘não-arbitrário’ de ideias relevantes estabelecidas na estrutura cognitiva do aprendiz com o conteúdo potencialmente significativo [...]” (MOREIRA; MASINI,1982, p. 11).

Moreira (2012) destaca que o conceito de assimilação de Ausubel se diferencia do conceito utilizado por Piaget, pois o conceito de Ausubel refere-se à ancoragem, na qual o novo conhecimento adquire significados e o conhecimento prévio adquire novos significados, por meio de interações cognitivas. Não trata de uma interação sujeito-objeto, conforme a assimilação é entendida na teoria construtivista de Piaget.

Moreira e Masini (1982) ponderam ainda que Ausubel considera a linguagem como um recurso facilitador no processo de aprendizagem ocorrido no ambiente escolar, onde a maior parte dos processos ocorre por assimilação de conceitos. Os autores indicam que isso se deve à força representacional dos símbolos e dos aspectos refinadores da verbalização no processo de conceituação, o que influencia e reflete o nível do funcionamento cognitivo do estudante. Os autores salientam que, sem ela, o processo de assimilação de conceitos, pela definição e contexto, seria inconcebível, e que seu uso ajuda a assegurar certa uniformidade cultural no conteúdo genérico dos conceitos, facilitando a comunicação cognitiva interpessoal.

Para Ausubel (1968), a experiência cognitiva resulta de um processo de interação no qual a nova informação, ancorada nos conceitos subsunçores, os modifica, gerando novo conhecimento, assimilado significativamente.

Segundo Moreira (2012b, p. 5), “A estrutura cognitiva está constantemente se reestruturando durante a aprendizagem significativa. O processo é dinâmico; o conhecimento vai sendo construído”.

Quanto ao conceito de significado, segundo Moreira e Masini (1982, p. 39),

> [...] Ausubel acentua o fato de que significado é um produto “fenomenológico”, no qual o significado potencial inerente aos símbolos converte-se em conteúdo cognitivo, diferenciado para cada indivíduo. O significado potencial converte-se em significado “fenomenológico” quando um indivíduo incorpora um símbolo à sua estrutura cognitiva. A aquisição de um conceito é, pois, uma forma de emergência de um significado “fenomenológico”. [...]

Assim, a realidade é experimentada, passa por filtro conceitual ou categorial e se constitui no mundo de significados do sujeito.

Segundo Ausubel, existem três tipos de aprendizagens significativas: representacional; conceitual e proposicional (MOREIRA; MASINI, 1982).

A aprendizagem significativa representacional remete à associação simbólica em nível primário, onde se faz atribuição de significados a determinados símbolos, no caso, tipicamente palavras. Como exemplo, seria a relação entre a palavra “faca” e seu conteúdo cognitivo (imagem visual do objeto).

No caso da aprendizagem significativa conceitual, esta também remete ao uso de símbolos – porém, genéricos ou categóricos – a respeito de qualidades ou propriedades essenciais dos objetos ou eventos. Como exemplo, pode ser citado o conceito de talheres.

A aprendizagem significativa proposicional envolve aprender o significado de ideias expressas verbalmente por meio de conceitos, em forma de proposições, em um contexto no qual o significado está além da soma dos significados das palavras ou conceitos que compõem a proposição. Nesse caso, são necessários conhecimentos prévios dos conceitos, como pré-requisitos desse tipo de aprendizagem. Como exemplo: a compreensão da frase “A higienização correta de talheres é condição necessária para o sucesso de restaurantes”.

Moreira e Masini (1982) também afirmam que, para Ausubel, as aprendizagens dos tipos “proposicional” e “conceitual” podem ocorrer de três formas:

- *Subordinada (Subsunciva*), quando um conceito é incorporado a uma estrutura maior e, nesse caso, a nova ideia subordina-se a ideias pré-existentes mais gerais e abrangentes e que podem ser do tipo derivativas ou correlativas. Um exemplo seria a aprendizagem do conceito força nuclear, que seria assimilado como subordinado ao conceito subsunçor de força já existente na estrutura cognitiva do estudante.
- *Superordenada,* quando a nova proposição é relacionada a proposições subordinadas específicas relevantes existentes na estrutura cognitiva e passa a incluí-las. Um exemplo seria a aprendizagem do conceito de animais mamíferos (MOREIRA; MASINI, 1982, p. 20).
- *Combinatória*, quando a nova proposição, ou conceito, é adquirida, mas não é relacionada nem a proposições subordinadas ou superordenadas específicas, mas relaciona-se com antecedentes amplos de conteúdos existentes relevantes.

(ii) Uma teoria de aprendizagem para sala de aula

Ausubel se dedicou durante vários anos da sua vida à elaboração de uma teoria sistemática que pudesse ser utilizada em sala de aula, tendo em vista propiciar a aprendizagem significativa por meio de estratégias de organização de materiais potencialmente significativos (ARAGÃO, 1976).

Acreditava que a aprendizagem e a retenção poderiam ser facilitadas caso fosse possível: contribuir com a aquisição de uma estrutura cognitiva organizada; baixar o nível de assimilação obliteradora e tornar mais ativo o processo de aquisição de significados, visando atingir aspectos mais relevantes e mais estáveis da estrutura cognitiva (MOREIRA; MASINI, 1982, p. 20).

Para Ausubel, o problema principal da aprendizagem escolar consiste na **“**aquisição de um corpo organizado de conhecimento e na estabilização de ideias inter-relacionadas que constituem a estrutura da disciplina” (MOREIRA; MASINI, 1982, p. 41).

Além disso, para que ocorra aprendizagem significativa, Ausubel (MOREIRA; MASINI, 1982, p. 13) afirma que são necessários três pressupostos:

- que o material a ser aprendido seja potencialmente significativo;
- que exista uma estrutura cognitiva preexistente, com subsunçores adequados;
- que o estudante tenha predisposição para aprender.

Moreira e Masini (1982, p. 41) citam que “Segundo Ausubel, o problema principal da aprendizagem consiste na aquisição de um corpo organizado de conhecimento e na estabilização de ideias inter-relacionadas que constituem a estrutura da disciplina”.

Ausubel acreditava que a estrutura cognitiva do estudante poderia ser influenciada:

- *Substantivamente*, com propósitos “organizacionais” e integrativos, exploração de conceitos e proposições unificadores, visando à integração por meio da seleção de ideias básicas para não sobrecarregar os estudantes.
- *Programaticamente*, por meio do uso de princípios para ordenação da sequência do assunto de forma adequada (MOREIRA; MASINI, 1982).

Dessa forma, uma das ideias centrais da teoria da Aprendizagem Significativa, que foi elaborada para ser aplicada no contexto da sala de aula, consiste na organização programática do conteúdo de disciplinas escolares.

Para tanto, Ausubel propôs os seguintes princípios (MOREIRA; MASINI, 1982):

– *Diferenciação Progressiva*: visa iniciar a aprendizagem partindo de ideias mais gerais e inclusivas, que devem ser apresentadas no início do processo, para que progressivamente possam ser diferenciadas em detalhes e especificidades.
– *Reconciliação integrativa*: consiste em explorar relações entre proposições e conceitos, visando ressaltar diferenças e similaridades entre eles.
– *Organização sequencial*: visa assegurar a disponibilidade de ideias âncoras relevantes, considerando que a compreensão de um tópico depende do entendimento prévio de algum tópico relacionado.
– *Consolidação*: visa verificar se houve sucesso na aprendizagem sequencialmente organizada antes que novas informações sejam apresentadas, de modo a assegurar "contínua prontidão", ou seja, apropriação dos conceitos na matéria de ensino.

A direção recomendada por Ausubel para a diferenciação progressiva de conceitos seria partir de conceitos mais gerais e inclusivos, para intermediários e, em seguida, considerar conceitos específicos, pouco inclusivos. Na Reconciliação Integrativa, para explorar relações, recomenda que seria preciso "descer" dos conceitos gerais para os particulares, para depois "subir" para os gerais novamente, observando similaridades e diferenças entre os conceitos abordados.

Para sistematização dos princípios propostos para organização programática, sugeriu o uso de *organizadores prévios*, que são materiais introdutórios, os quais são apresentados antes do material a ser aprendido na disciplina específica. São entendidos como âncoras para aprendizagem, mas que devem ser elaborados de modo a apresentar um nível mais alto de abstração e generalidade. São considerados por Ausubel como uma estratégia para manipular a estrutura cognitiva, visando facilitar a aprendizagem significativa. Afirma que a principal função do organizador prévio é ser uma "ponte cognitiva" entre o que o aprendiz já sabe e o que deve aprender (MOREIRA, 2012).

Moreira (2012) também informa que os organizadores prévios não são simples comparações introdutórias. Objetivam identificar o conteúdo relevante e explicar a relevância deste para a aprendizagem do novo material; dar uma visão geral, em nível mais alto de abstração. Visam salientar relações importantes e devem prover elementos organizacionais inclusivos, ou seja, prover um contexto ideacional, que possa ser usado para assimilar significativamente novos conhecimentos.

Ausubel classificou os organizadores prévios em dois tipos:

- *Organizador expositório*, que deve ser usado quando a aprendizagem envolve um material totalmente não-familiar ao estudante, com objetivo de prover subsunçores relevantes aproximados.
- *Organizador comparativo*, que deve ser usado quando a aprendizagem envolve um material relativamente familiar, com objetivo de integrar novas ideias com conceitos similares existentes (MOREIRA; MASINI, 1982).

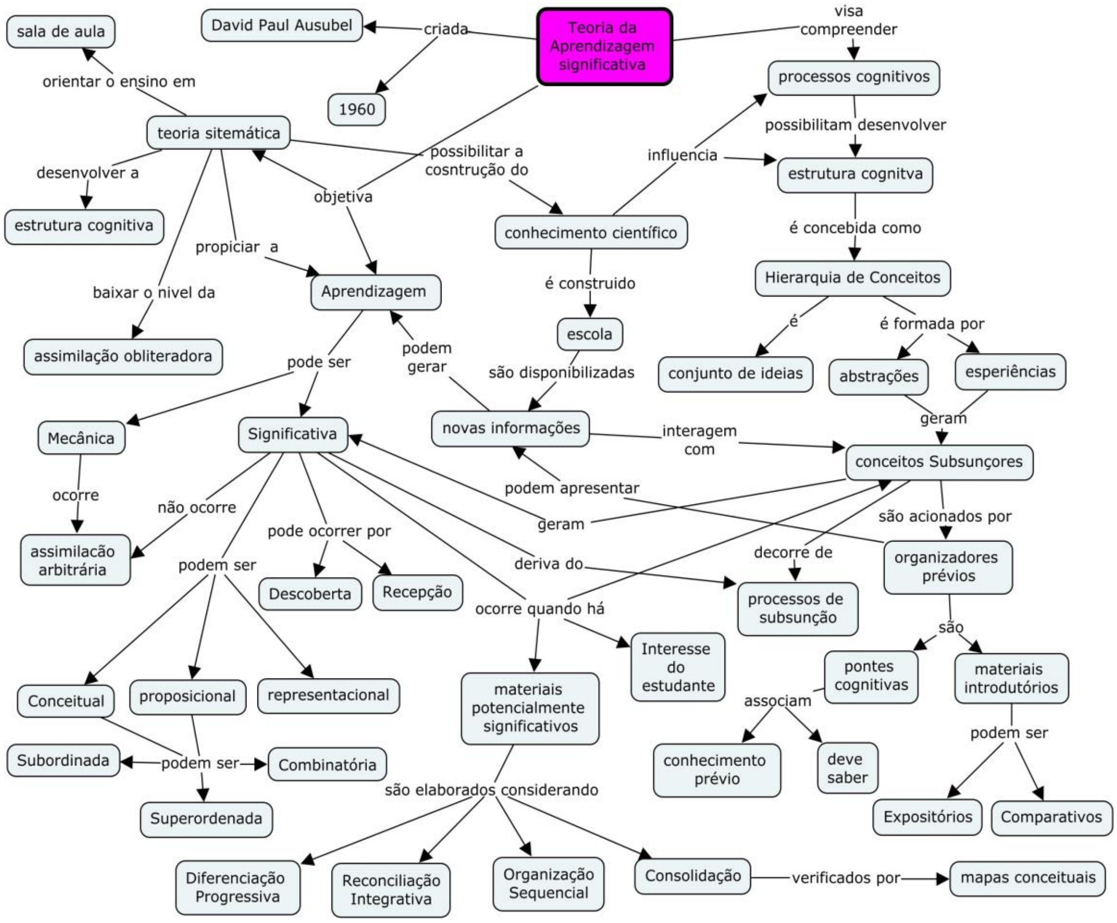
Além da estratégia dos organizadores prévios, na década de 1970, também foram desenvolvidos os *mapas conceituais,* que consistem numa técnica que visa à promoção da aprendizagem significativa desenvolvida por Joseph Novak e colaboradores, na Universidade de Cornel (EUA), fundamentada na Teoria de Ausubel (MOREIRA, 2012b).

Segundo Moreira (2012b), os *mapas conceituais* são diagramas de significados, de relações significativas e de hierarquia conceituais, se for o caso. Visam enfatizar os conceitos e as relações entre eles, segundo o enfoque da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa. Podem ser utilizados como: instrumento de análise de currículo; recurso didático; recurso de aprendizagem e instrumento de avaliação. O autor salienta que, como recurso didático, possibilita: identificar conhecimentos prévios; organizar o material instrucional; mostrar relações hierárquicas entre conceitos e mostrar relações de subordinação e superordenação. Também indica que os *mapas conceituais* são dinâmicos e mudam no curso da aprendizagem significativa e destaca que seu uso não dispensa a explicação do professor, que deve atuar como um guia na leitura e compreensão. Além disso, indica que devem ser utilizados, de preferência, quando os alunos já têm familiaridade com o tema e que podem levar a profundas modificações na maneira de ensinar, de avaliar e de aprender.

Os *mapas conceituais* apresentam como vantagens o fato de possibilitarem: enfatizar a estrutura conceitual de uma disciplina e o papel dos sistemas conceituais; visualizar o grau de inclusividade, por meio da ordem hierárquica existente, e da generalidade de conceitos; perceber uma visão integrada do assunto e uma espécie de “listagem” do que foi abordado nos materiais instrucionais, o que facilita a aprendizagem e retenção. Por outro lado, possui algumas desvantagens. É preciso considerar que caso não tenham significado para os estudantes, será compreendido simplesmente como algo mais a ser memorizado, o que levaria à aprendizagem mecânica. Também podem ser complexos e confusos, dificultando a aprendizagem e a retenção. Além disso, a habilidade dos alunos em construir seus próprios mapas pode ficar inibida ao receberem as estruturas propostas pelo professor (MOREIRA; MASINI, 1982).

Na Figura 1, apresenta-se um exemplo de mapa conceitual sobre conceitos básicos da teoria da Aprendizagem Significativa.

Figura 1 - Mapa conceitual: Quais os principais conceitos da Teoria da Aprendizagem Significativa?



Fonte: Idealizado pela autora, com uso da ferramenta Cmap Tools (2016)

Desse modo, os mapas conceituais podem contribuir ou não com a aprendizagem significativa, dependendo do uso que se faz de tais recursos.

Ausubel afirma que há evidências de Aprendizagem Significativa quando existe compreensão genuína, ou seja, quando existe “a posse de significados claros, precisos, diferenciados e transferíveis” (MOREIRA; MASINI, 1982, p. 14-15). Os autores afirmam que, para analisar se houve realmente a aprendizagem significativa no ensino escolar, Ausubel propõe:

– que sejam realizadas atividades com solução de problemas, indicando esse método como um procedimento válido e prático;
– que seja solicitado aos estudantes o desenvolvimento de tarefas que visem à diferenciação de ideias relacionadas ao conceito abordado ou que visem identificar elementos importantes.
– a proposição de tarefas sequencialmente dependentes que não possam ser executadas sem o perfeito domínio do precedente.

(iii) Implicações para a Educação

Devido às mudanças nos paradigmas educacionais da sociedade contemporânea, para que a Teoria de Ausubel possa ser utilizada em sala de aula, é necessário que o professor reflita e reelabore seu papel e sua prática, de modo a propiciar ambientes de aprendizagem significativa dos estudantes.

Segundo Moreira (1985, p. 71), para facilitar a aprendizagem significativa, cabe ao professor:

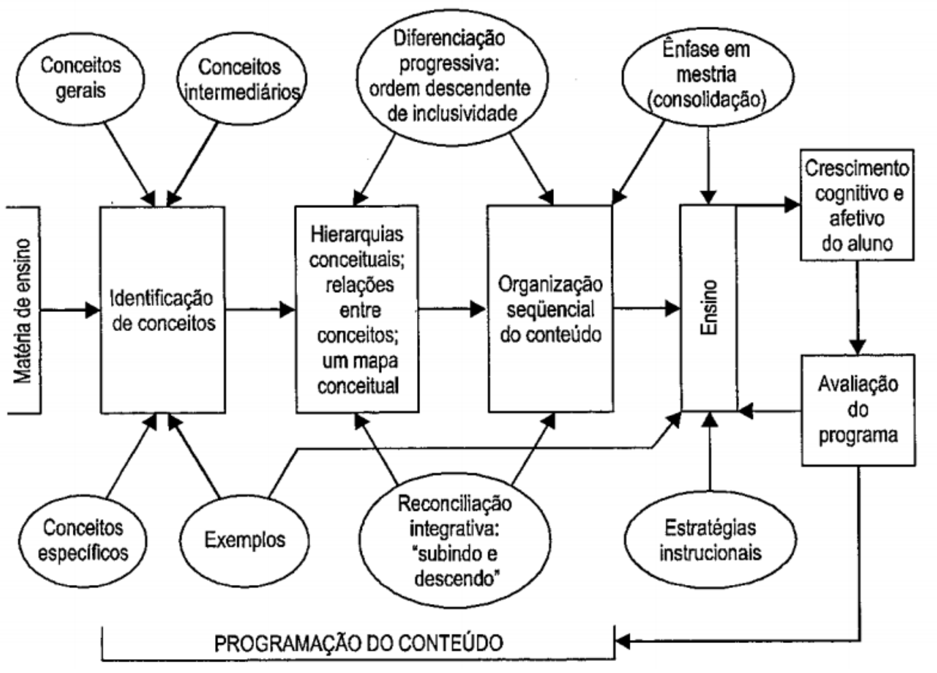
– identificar a estrutura conceitual e proposicional da matéria de ensino e organizá-los hierarquicamente. Salienta-se que esse planejamento pode ser realizado segundo o modelo apresentado na Figura 2, que considera os princípios da diferenciação progressiva; reconciliação integrativa; organização sequencial e consolidação;
– diagnosticar aquilo que o aluno já sabe e determinar, dentre os subsunçores especificamente relevantes, quais os que estão disponíveis na estrutura cognitiva do aluno;
– identificar quais os conceitos subsunçores relevantes à aprendizagem, que o estudante deveria ter, para que possa assimilar as novas informações recebidas;

– ensinar com recursos e princípios que facilitem a aquisição da estrutura conceitual da matéria de modo significativo.

A teoria que Ausubel desenvolveu foi inovadora na época em que viveu, pois se contrapôs ao pensamento behaviorista predominante para explicar os processos de aprendizagem em ambientes escolares. Como cognitivista, buscou compreender como se dava a aprendizagem cognitiva dos estudantes em relação às informações recebidas sobre conteúdos ensinados em disciplinas específicas.

Algo que surpreende na sua história é saber que ele usou de resiliência em relação às próprias experiências negativas. O fato de ter sofrido castigos e humilhações o fez se revoltar com o ensino escolarizado e o impulsionou a criar uma nova teoria, visando transformar o aprendizado escolar, que julgava ser mecânico e superficial, em aprendizado significativo, que pudesse favorecer a constituição da estrutura cognitiva do sujeito (QUEIROZ, 2017).

Figura 2 - Um modelo para planejar a instrução conforme a Teoria de Ausubel



Fonte: (MOREIRA; MASINI, 1982, p.43)

Diferentemente de Piaget ou de Vygotsky, que se dedicaram ao estudo do desenvolvimento da estrutura mental dos indivíduos e das suas interações com o meio, Ausubel visou elucidar relações existentes entre teorias de aprendizagem e de ensino, entendendo que seriam imprescindíveis nos contextos da sala de aula.

A autora da presente pesquisa, como professora do ensino superior, percebeu na Teoria da Aprendizagem Significativa uma alternativa adequada para o planejamento de tarefas a serem desenvolvidas em sala de aula. Percebeu que seus fundamentos e princípios poderiam colaborar para elaboração de ambientes de ensino que estimulassem a aprendizagem significativa, o que considera fundamental para a formação acadêmica dos futuros profissionais com os quais trabalha, tendo em vista não somente capacitá-los para atuarem na resolução de problemas clássicos, mas também prepará-los para resoluções de novas questões que se apresentam em suas áreas, na sociedade contemporânea.

3.2 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Nesta seção, são apresentados alguns princípios e reflexões sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval (1988, 1993, 1995, 1998).

Segundo Machado (2003), Raymond Duval tem formação em psicologia e filosofia. Afirma que entre os anos 1970 e 1995 trabalhou com pesquisas envolvendo psicologia cognitiva no Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática (Irem), de Estrasburgo, na França, que resultaram em diversas publicações, especialmente na área de Educação Matemática.

Duval (1999), por meio da análise do desenvolvimento cognitivo, identificou três fenômenos que contribuem para as dificuldades de aprendizagem em matemática, a saber:

- existência de diversos tipos de registros de representação semiótica;
- dificuldade de diferenciação entre o objeto representado e seus registros de representação semiótica;
- dificuldades de coordenação entre os diversos tipos de registros.

Além disso, frente ao desafio da proposição de uma adequada formação aos estudantes de matemática, que facilitasse a compreensão e os capacitasse para atuação em ambientes informatizados e tecnológicos, cada vez mais complexos, propôs a realização uma pesquisa qualitativa, que visou responder: “Como compreender as dificuldades muitas vezes insuperáveis que muitos alunos têm na compreensão de matemática? Qual é a natureza dessas dificuldades? Onde elas se encontram?” (DUVAL, 2003, p. 11).

Ao responder a essas questões, o autor adotou uma abordagem cognitiva, para descrever características do funcionamento cognitivo dos estudantes, envolvidas no processo de compreensão de conceitos matemáticos.

O autor também considerou a existência de propostas diversificadas para o ensino de matemática, nas quais são utilizados diferentes registros semióticos para representação dos objetos matemáticos. Nesse contexto, verificou que é necessário que sejam desenvolvidas, pelos estudantes, capacidades de reconhecimento de tais objetos, de modo que consigam realizar manipulações e transições entre diferentes registros de representação, por meio da identificação de relações e características existentes entre eles.

Assim, ao pesquisar sobre os diferentes modos de representação dos fenômenos relativos ao conhecimento matemático, Duval (2009, p.32) destaca os registros de representação semiótica, afirmando que:

> [...] A especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para cada sujeito que o utiliza. [...]

O autor refere que a operação cognitiva de mudança de registro semiótico consiste em "**mudar a forma pela qual um conhecimento é representado**" (DUVAL, 2009, p. 33, grifo do autor).

Para Duval (2012a, p.268), os objetos matemáticos não podem ser compreendidos por meio de instrumentos físicos, tais como microscópios ou aparelhos de medida, e não estão acessíveis à experiência intuitiva imediata, ou à percepção. Necessitam de representantes, ou seja, de representações semióticas para que possam ser compreendidos e acessados. Afirma que esse fato se constitui no seguinte paradoxo cognitivo do pensamento matemático:

> [...] de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível. [...]

O autor salienta que, muitas vezes, esse paradoxo não é reconhecido, pois as representações mentais são mais valorizadas do que as semióticas.

Segundo Duval (2012a, p. 269, grifo do autor):

> As representações **mentais** recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações **semióticas** são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento.

Para o pesquisador, as representações semióticas não podem ser consideradas apenas como meios de exteriorização de representações mentais, que visam somente possibilitar a comunicação matemática, e afirma que devem ser consideradas como essenciais no desenvolvimento da atividade cognitiva do pensamento matemático.

Duval (2012b) indica que as representações semióticas possuem um papel primordial:

- no *desenvolvimento das representações mentais*, ao possibilitarem que sejam percebidas e interiorizadas;
- na *função cognitiva de objetivação*, por possibilitarem expressões particulares de objetos (não utilizadas necessariamente para comunicação), bem como na *função cognitiva de tratamento*, na qual não podem ser substituídas por representações mentais;
- na *produção de conhecimentos*, pois possibilitam representar um mesmo objeto em diferentes sistemas semióticos.

Duval (2012a, p. 270, grifo do autor) destaca que: "Se é chamada "**semióse**" a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e "**noésis**" a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a **noésis** é inseparável da **semióse**".

O autor salienta que não é possível apreender conceitualmente um objeto matemático sem fazer uso de suas representações por meio de registros semióticos. Considera que não existe a noésis sem que haja semióse.

Duval (2009) indica que, para que exista compreensão em matemática, é preciso distinguir um objeto matemático de sua representação, pois argumenta que um mesmo objeto pode ser representado por meio de vários registros diferentes. Defende, ainda, que essa pluralidade potencial de representações deveria ser secundária e extrínseca à aprendizagem conceitual dos objetos.

Assim, para o estudioso, a compreensão de um objeto matemático perpassa pela representação e pela coordenação de múltiplos registros de representação semiótica, o que somente é possível por meio da apreensão conceitual desse objeto. Duval (2012, p. 270) afirma que:

> [...] A coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis. É nestas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente como representação, quer dizer, ela dá acesso ao objeto representado.

Ao considerar do ponto de vista cognitivo, Duval (2003) salienta que a análise da complexidade do funcionamento cognitivo, subjacente às atividades matemáticas, indica a existência de duas características específicas da atividade matemática, que são:

- a fundamental importância das representações semióticas na evolução do pensamento matemático;
- a grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática.

Duval (2003) destaca que, além dos sistemas de numeração, para expressar conceitos matemáticos, geralmente também são utilizadas figuras geométricas, escritas simbólicas algébricas e formais, representações gráficas, bem como se faz uso da linguagem natural. Desse modo, o autor indica que toda representação de objetos matemáticos pode envolver quatro tipos de registros possíveis: figural, simbólico, gráfico e língua natural.

O autor ainda afirma que, parodiando Descartes, usa a expressão “registro” de representação para designar esses diferentes tipos de representações semióticas, que são utilizados em matemática.

Além disso, apresenta uma classificação, conforme é apresentado no Quadro 1, diferenciando os quatro tipos de registros, do seguinte modo:

- *Língua natural*: é um registro multifuncional, com representação discursiva;
- *Figural*: é um registro multifuncional, com representação não-discursiva;
- *Simbólico*: é um registro monofuncional, com representação discursiva;
- *Gráfico*: é um registro monofuncional, com representação não-discursiva.

Duval (2003, p. 14-15) considera que, em atividades cognitivas de matemática, existe a mobilização simultânea de pelo menos dois registros de representação semiótica e infere que a compreensão matemática supõe a capacidade de coordenação entre ao menos dois registros de representação semiótica, ao afirmar que:

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento o registro de representação. Certamente, segundo os domínios ou as fases da pesquisa, em uma resolução de problema um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, mas deve existir sempre a possibilidade de passar de um registro ao outro. Podemos então antecipar a hipótese, ou, em linguagem matemática, "conjecturar" o seguinte: a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica [...].

Quadro 1 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática).

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: • Argumentação a partir de observações e crenças; • Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • Numérica (binária, decimal, fracionária, ...); • Algébricas; • Simbólicas (línguas formais) Cálculo.	Gráficos cartesianos. • Mudanças de sistemas de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Fonte: (DUVAL, 2003, p. 14)

Além disso, o autor sugere que existem dois tipos de *transformações* possíveis entre representações semióticas – que chama de *tratamentos* e de *conversões* – as quais podem ser consideradas em análises da aprendizagem ocorrida em uma atividade matemática.

Duval (2009, p.57, grifo do autor) afirma que: "[...] Um tratamento é uma **transformação de representação interna a um registro** de representação ou a um sistema. [...]". Como exemplo de *tratamento*, o autor cita o cálculo realizado com o registro de uma escrita simbólica de algarismos e letras, que substitui expressões dadas por novas expressões, permanecendo no mesmo registro de representação simbólico. Na mesma direção, afirma que: "[...] A conversão é então uma **transformação externa em relação ao registro de representação de partida.** [...]" (DUVAL, 2009, p.59, grifo do autor). Segundo o autor, converter consiste em transformar a representação de um objeto dado (ou uma informação ou situação dada) em outro registro, ou seja, se procede à mudança no registro de representação, mas conserva-se o objeto matemático representado. Duval (2009) indica que os termos “tradução”, “ilustração”, “transposição”, “interpretação” ou “codificação” são exemplos de operações que indicam a transformação de um registo dado em outra representação, em um registro diferente do inicial.

Como exemplo de *conversão*, o autor cita fazer uma ilustração por uma figura em correspondência a uma palavra ou frase. O autor destaca que a passagem inversa da figura a um texto, pode ser uma interpretação ou uma descrição. Outro exemplo citado seria a transformação de dados de um enunciado problema em expressões simbólicas, que possibilita perceber que o conteúdo representado pode recobrir parcialmente a representação de partida.

Como atividades cognitivas inerentes à semiósis, Duval (2009) refere-se: (i) à *formação* de representações num registro semiótico especifico, que possibilita exprimir uma representação mental; (ii) ao *tratamento;* e (iii) às *conversões*.

O pesquisador salienta também que, especialmente ao se tratar de conversões, é necessário que o estudante perceba que existe diferença entre o conteúdo de uma representação e aquilo que ela representa, ou seja, é preciso considerar o *sentido* da transformação e a referência dos símbolos ou signos envolvidos. O autor afirma que sem essa percepção não é possível compreender a atividade de conversão. Indica, além disso, que, no ensino de matemática, apesar de serem usados diferentes registros semióticos, os estudantes geralmente não reconhecem o objeto matemático, pois ficam presos ao tipo de representação utilizado. Destaca que a percepção de relações entre diferentes registros não ocorre espontaneamente para a maioria deles e aponta que eles, geralmente, passam de uma representação à outra espontaneamente quando existe *congruência* entre as representações de um mesmo objeto, ou seja, quando três condições são satisfeitas:

> [...] correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem; mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações, e conversão de uma unidade de partida em uma só unidade significante na representação de chegada (DUVAL, 2009, p. 18).

Segundo o autor, quando uma dessas condições não é satisfeita, ocorre o fenômeno de não-congruência entre as representações semióticas.

Duas representações semióticas podem ser congruentes em um sentido de conversão, mas, no sentido inverso, podem ser não congruentes. Duval (2009, p. 19) exemplifica:

> [...] a expressão "$XY \geq 0$" e a representação cartesiana dos dois quadrantes determinados, respectivamente pelos semi-eixos Y e X positivos, X e Y negativos, são congruentes se passarmos da escrita algébrica ao gráfico, mas não para a passagem inversa.

Além disso, o autor destaca que o sucesso ou o fracasso em tarefas de conversão estão relacionados à existência ou não de congruência na transformação. A taxa de sucesso é elevada quando as conversões são congruentes e a taxa de sucesso é mais ou menos fraca, de acordo com o grau de não congruência existente.

Como a coordenação de conversões, entre diferentes registros de representação, não é espontânea e, geralmente, não resulta em aprendizagens clássicas, centradas sobre o conteúdo de ensino. Segundo Duval (2009), ela pode ser contemplada em propostas centradas no desenvolvimento da capacidade de transitar entre diferentes tipos de registros por meio de conversões. Nessas propostas, devem ser observadas possibilidades de transformações dentro do próprio registro, além de estimular comparações e "traduções" mútuas entre diferentes formas de representação. No entanto, para que isso ocorra, é necessária uma mudança completa na condução do processo de ensino e de aprendizagem, que não necessariamente implicará o sucesso na tarefa, mas que vai implicar mudanças na qualidade das produções, propiciando o desenvolvimento de competências referentes à coordenação e à articulação entre diferentes registros de representação semiótica. Nesse sentido, Duval (2003) considera que, em pesquisas da Educação Matemática que abordam o desenvolvimento cognitivo, é necessário considerar diferenças entre o ponto de vista cognitivo e o ponto de vista matemático.

Para o autor, a *conversão é irredutível a um tratamento, para quaisquer registros considerados*, pois não trata apenas de simples codificações e, geralmente, não basta aplicar regras simples de correspondência para "traduzir" o ato da conversão. Esse processo demanda uma apreensão global e qualitativa, que exige articulação entre variáveis cognitivas referentes ao funcionamento de cada tipo de registro.

O autor também destaca que, em operações de conversão existem fenômenos característicos que devem ser observados, tais como as *variações de congruência e de não-congruência* e a *heterogeneidade dos dois sentidos da conversão*. Afirma que, no ensino de matemática, de modo geral, se privilegia apenas o treinamento de um sentido da conversão, pois se considera que, no outro sentido, o treinamento já ocorreria, automaticamente.

Na concepção de Duval, *compreensão em matemática implica a capacidade de mudança de conversão de registros de representações*. Numerosas observações, realizadas em diferentes níveis de ensino, permitiram concluir que os bloqueios dos estudantes aumentam quando uma mudança de registro é necessária ou quando se solicita a mobilização de dois registros simultaneamente, como se existisse o que chama de “enclausuramento” de registro, o qual não permite aos estudantes reconhecerem o mesmo objeto matemático representados em dois tipos diferentes de registros. Indica que esse fato limita suas capacidades de usarem seus conhecimentos prévios na construção de novos conhecimentos matemáticos, o que limita suas capacidades de compreensão e aprendizagem. Assim, apesar de o acesso aos objetos matemáticos passar necessariamente por representações semióticas, não é possível identificar o objeto apenas com o conteúdo da representação que o torna acessível. Ao se passar de um sistema para outro não basta mudar o tratamento, mas é necessário explicar aspectos diferentes ou propriedades do objeto naquele sistema. Nesse sentido, o conteúdo não é o mesmo em dois registros diferentes, apesar de representarem o mesmo objeto matemático. Indica que “É a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática e não o inverso, qual seja, o “enclausuramento” de cada registro. [...]” (DUVAL, 2003, p. 22). Assim, para existir a compreensão matemática é necessário considerar a pluralidade dos registros de representação semiótica, nos quais a articulação e o trânsito entre pelo menos dois registros de representação diferentes é necessária para que não se confunda o conteúdo com o objeto representado.

Devido à complexidade relacionada à questão da aprendizagem em matemática, Duval (2003), chama atenção para o fato de que, em estudos ou pesquisas sobre tais processos, deve-se buscar distinguir o que se destaca no *tratamento* de um registro e o que se destaca em uma *conversão*, quando forem analisadas produções realizadas pelos estudantes, colocando em evidência os mecanismos próprios da compreensão em matemática. Nesse sentido, devem ser consideradas as naturezas dos registros, fazendo distinção entre usos de registros monofuncionais, desenvolvidos com finalidades específicas de *tratamento,* ou de registros multifuncionais, nos quais as atividades tanto de *tratamento* como de conversão podem ser mais ou menos complexas, possibilitando explorar variações de congruência e de não-congruência entre dois registros, nas múltiplas representações de objetos matemáticos.

O autor sugere que em pesquisas relacionadas à Educação Matemática sejam utilizadas as *conversões* como um instrumento de análise para se compreender a complexidade cognitiva da articulação entre diferentes tipos de representação semióticos presentes nas resoluções de problemas. Propõe que, além de pesquisa e de resolução de problemas, sejam propiciadas aos estudantes tarefas que possibilitem estimular o reconhecimento dos objetos matemáticos em suas múltiplas ocorrências representacionais. Afirma que o nível de compreensão em matemática pode ser elevado quando o estudante for capaz de reconhecer rapidamente o objeto matemático, o que estimula sua iniciativa ou capacidade de exploração. Duval (2003, p. 28) esclarece:

> [...] Tarefas de estrito reconhecimento são, então, tão importantes para a aprendizagem quanto tarefas de produção. [...] Os únicos conhecimentos disponíveis e mobilizáveis por um indivíduo – e, portanto, operatórios para ele – são aqueles que permitem reconhecimentos relativamente rápidos.

Ao apresentar um modelo que visa explicar como esse processo ocorre, Duval (2003, p. 29-30) ressalta que:

> 1. O desenvolvimento da *capacidade mental de representação* depende do desenvolvimento cultural de *sistemas semióticos*, porque esses sistemas não preenchem somente uma função de comunicação, mas também uma função de transformação de representações (“tratamento”) e de objetivação consciente para o sujeito. Um dos “cacifes” da formação inicial é a apropriação e o domínio desses sistemas.
> 2. Nos indivíduos em período de desenvolvimento e de formação inicial, o processo de aquisição de conhecimentos matemáticos depende da coordenação de registros de representação semiótica. Essa coordenação não é espontânea, mas deve ser levada em conta na apropriação de cada um dos sistemas semióticos.
> 3. Certas variáveis cognitivas podem ser retomadas como variáveis didáticas.
> 4. Na medida em que a matemática tende a diversificar os registros de representação, sua aprendizagem específica pode contribuir fortemente para o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais dos indivíduos. Visar a esse desenvolvimento sem se fixar na forma míope sobre a aquisição de tal ou tal noção particular é provavelmente o aporte maior que se pode esperar da aprendizagem matemática para a sua educação [...]

O autor indica que o funcionamento cognitivo do pensamento está relacionado ao funcionamento de uma produção mental relacionada a uma representação semiótica. Também enfatiza que uma característica importante da atividade matemática é que nela são mobilizados diversos registros de representação semiótica, em um contexto no qual a compreensão matemática não ocorre apenas no plano conceitual, como uma atividade puramente mental, mas ocorre por meio da interiorização das representações semióticas externas que possibilitam formar representações mentais, que são representações semióticas interiorizadas. No Quadro 2, apresentam-se os modos fenomenológicos de produção, diferenciando os modos distintos de representação interna ou externa produzidos em processos de aprendizagem.

Assim, essa teoria foi escolhida para fundamentação teórica da proposta de ensino apresentada na presente tese, tendo em vista a proposição de tarefas que potencializassem a compreensão dos conceitos relacionados à disciplina de Álgebra Linear.

Quadro 2 - As representações semióticas não são internas nem externas. MODO FENOMELÓGICO DE PRODUÇÃO

<table>
<tr><td rowspan="5">SISTEMA DE PRODUÇÃO</td><td></td><td>MENTAL (interna)</td><td colspan="2">MATERIAL (externa)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>ORAL</td><td>VISUAL (suporte de papel ou tela do computador)</td></tr>
<tr><td></td><td>Produção para si próprio</td><td>Produção para os outros</td><td>Produção para si próprio ou para os outros</td></tr>
<tr><td>SEMIÓTICO (produção intencional)</td><td>Discurso interior OBJETIVAÇÃO E funções de tratamento</td><td>Interações verbais funções de COMUNICAÇÃO</td><td>Escrita, desenho funções de TRATAMENTO de comunicação e de objetivação</td></tr>
<tr><td>NATURAL (produção automática)</td><td>Memória visual ou icônica Função de objetivação</td><td></td><td></td></tr>
</table>

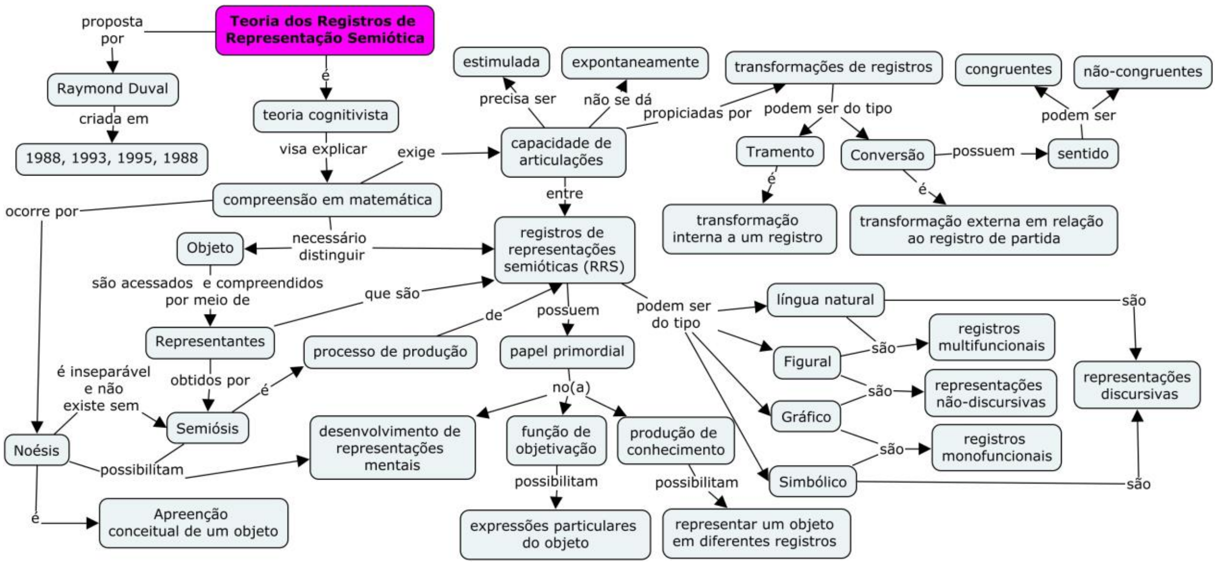
Fonte: (DUVAL, 2003, p. 31)

Destaca-se que, nas tarefas propostas, se buscou estimular a mobilização de diferentes registros de representação semiótica, com intuito de possibilitar o reconhecimento dos objetos matemáticos abordados.

Na Figura 3, apresenta-se um mapa conceitual sobre conceitos básicos da TRRS.

Cabe ressaltar que também se buscou explorar o uso de tecnologias digitais com objetivo de verificar, posteriormente, de que modo esses recursos influenciaram nesse processo, facilitando ou não a mudança de registros. E ainda, de que modo essa estratégia influenciou as aprendizagens dos estudantes quanto ao reconhecimento dos objetos matemáticos trabalhados.

Figura 3 - Mapa conceitual: Quais os principais conceitos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica?



Fonte: Idealizado pela autora com uso da ferramenta Cmap Tools (2016)

3.3 Uso de tecnologias no ensino de ciências e matemática

Forbes e Dijksterhuis (1963) ressaltam que, paralelamente ao desenvolvimento da ciência e da matemática, as tecnologias foram sendo desenvolvidas de modo a facilitar a comunicação e os registros dos conhecimentos criados.

Em relação ao desenvolvimento do conhecimento científico, Wells (2001) afirma que, de modo especial nos dois últimos séculos, houve uma notável evolução em temos de inovações tecnológicas que contribuíram muito para que informações sobre os diversos tipos de conhecimentos criados pelo homem pudessem ser socializados.

No entanto, somente no ano de 1946 foi criado o primeiro computador digital eletrônico de grande escala chamado ENIAC (*Electrical Numerical Integrator and Calculator*), patrocinado pelo exército americano, sendo que apenas em 1981 a IBM deu o início à introdução dos Computadores Pessoais (PC) (CASTELLS, 2000).

Desde então, houve rápidas e diversas inovações tecnológicas que culminaram na criação e na disponibilização de tecnologias digitais (TD) móveis, tais como: computadores pessoais (*notebooks, netbooks e ultrabooks*), celulares, *smarthphones*, *tablets*, GPS e jogos, entre outros.

Destaca-se, de modo especial, a criação da Internet e da WWW[5] (*World Wide Web* - grande rede mundial), que impulsionou a socialização do conhecimento, especialmente o científico, por meio de hipertextos (ARAYA; VIDOTTI, 2010; CRUZ, 2011).

Além dos inúmeros recursos da WWW, que propiciaram o acesso à informação disponibilizada em rede por meio de hipertextos conectados mundialmente, a internet também possibilitou o acesso aos diferentes modos de comunicação em tempo real, por meio do uso de aplicativos disponibilizados, sendo que muitos independem da WWW, tais como: contatos via *Skype*; arquivos compartilhados pelo *Google Docs* ou troca de mensagens em tempo real em aplicativos como *WhatsApp* ou em ambientes de conversas disponibilizados em redes sociais.

Desse modo, a partir de 1990, devido à facilidade de uso e dos benefícios que essas inovações tecnológicas trouxeram para a sociedade, tais recursos começaram a ser comumente utilizados, com finalidades diversas, tanto no cotidiano das pessoas quanto nos ambientes profissionais.

Como resultado das inovações tecnológicas, ocorrem mudanças em hábitos e nota-se que isso acaba implicando diferentes modos de agir, de pensar e de compreender o mundo, conforme já defendia Perrenoud (1999). Percebe-se, ainda, que essas mudanças socioculturais acabaram gerando necessidades de mudanças nos contextos de ensino escolarizado, em especial na sala de aula presencial.

Atualmente, percebe-se, de modo empírico, que o uso dessas inovações tecnológicas digitais em atividades diversas, pessoais, produtivas ou comerciais, pelo fato de possibilitar tanto o acesso quanto a facilidade de armazenamento de informações, tem favorecido a comunicação pessoal e profissional em ambientes familiares ou profissionais. Esse fato contribui com os processos de globalização e isso tem implicado diferentes modos de compreender o mundo, pois o acesso livre às informações faz com que diversos pontos de vista sejam considerados na resolução de problemas de mesma natureza.

---

[5] Geralmente, a proximidade entre esses conceitos causa certa confusão. Cabe esclarecer que a internet se constitui na rede física de computadores que estão interconectados mundialmente, enquanto que a WWW é o repositório de conhecimentos composto de várias mídias, disponibilizados pelos sites e que podem ser acessados via internet.

Também nota-se, empiricamente, que o uso diário e contínuo de recursos tecnológicos digitais por pessoas comuns, muitas vezes disponíveis por meio de hipertextos, acabou impulsionando a existência de diferentes modos de leituras, de pensamentos, de aprendizagens e de percepções, decorrentes de diferentes compreensões da complexidade de informações disponíveis em rede.

No meio acadêmico, também é possível perceber empiricamente mudanças na coleta de materiais, tanto para construção da revisão de literatura quanto para a fundamentação teórica de pesquisas científicas. Antigamente, os materiais encontravam-se disponíveis de modo impresso e tinham que ser consultados diretamente em bibliotecas onde estavam armazenados fisicamente. Isso limitava muito a divulgação e a consulta de pesquisas realizadas a nível nacional e, muito mais, a nível internacional. Hoje, os sites de busca disponibilizados na rede mundial de computadores facilitam muito a identificação e o acesso aos materiais importantes, pois a maioria dos modos atuais de armazenamento se efetiva por meio de bibliotecas virtuais, e os processos de busca existentes, disponibilizados em rede, realizam a busca por associação de palavras, o que antigamente era impossível em bibliotecas convencionais, nas quais era necessário proceder a buscas sequenciais. Esses meios virtuais de armazenamento e consulta de materiais acadêmicos também impulsionaram as descobertas científicas, pois facilitaram a possibilidade de acesso às informações científicas desenvolvidas globalmente.

Considerando os atuais contextos social e cultural, Veen e Vrakking (2009) designam a geração atual de “geração instantânea”. Justificam essa denominação indicando que essa geração é caracterizada por sujeitos que vivem conectados em rede e que possuem facilidade de acesso a um conjunto de informações disponibilizadas em rede, o que lhes possibilita buscar respostas para dúvidas ou curiosidades rapidamente, quase que instantaneamente.

Também existe a designação “nativos digitais”, criada por Prensky (2001) para se referir àqueles que nasceram após a década de 1980. Indica que essa denominação se deve ao fato de terem nascido numa época na qual foi possível conviver com uso de tecnologias desde a infância e que, desse modo, são considerados pelo autor como multitarefas, no sentido de serem capazes de realizar, simultaneamente, várias tarefas do tipo: acompanhar redes sociais, pesquisar diferentes sites, falar no celular ou até mesmo escrever no computador.

Borba e Villarreal (2005, p. 22) apresentam outra perspectiva ao se referirem às pessoas que atualmente convivem e coexistem com diversas mídias. Indicam que atualmente o conhecimento se produz em coletivos pensantes constituídos de "seres-humanos-com-mídias" ou de "seres-humanos-com-tecnologias". Explicam esse conceito afirmando que "[...] humanos são constituídos por tecnologias que transformam e modificam seu raciocínio e, ao mesmo tempo, esses humanos são constantemente transformados por essas tecnologias". Para os autores, a aprendizagem matemática produzida com uso de tecnologias de informação e de comunicação (TIC) difere qualitativamente daquela produzida somente com uso de lápis e papel, pois possibilita alterar a linearidade do pensamento. Nesse sentido, entendem que o conhecimento se produz junto a uma mídia ou a uma tecnologia da inteligência. Desse modo, não concordam com a visão dicotômica entre seres humanos e tecnologias. Sugerem que o conceito "seres-humanos-com-mídias" ressalta o papel participativo das tecnologias da inteligência, tais como a escrita, a oralidade, ou os recursos da informática presentes na produção do conhecimento e indicam que, nessa produção, essas são entendidas como mediadores externos. Em consonância com Lévy (2010), defendem que as tecnologias da inteligência permeiam as interações que ocorrem na construção do conhecimento sendo coautoras dessa produção.

Lévy (2010), ao abordar o futuro do pensamento na era da informática, utiliza a noção de tecnologias da inteligência, entendendo-as como instituições criadas pelo homem para manter uma ordem em uma estrutura social. Cita como exemplos a oralidade, a escrita e a informática, como sendo grandes técnicas criadas pelo homem, associadas ao conhecimento e à memória. Entende que suas evoluções estiveram associadas à extensão qualitativa da memória. Sugere que foi a escrita que possibilitou o aparecimento da linearidade do raciocínio, enquanto que a informática, por possibilitar modos de conhecer baseados na simulação e na experimentação, fez com que a linearidade da escrita fosse substituída pela não linearidade do acesso a informações, por meio dos diferentes usos de seus recursos, tais como os usos de hipertextos e de multimídia interativas. Lévy (2010, p. 54) afirma que:

> [...] a maior parte dos programas computacionais desempenham um papel de tecnologia intelectual: eles reorganizam, de uma forma ou de outra, a visão de mundo de seus usuários e modificam seus reflexos mentais. As redes informáticas modificam circuitos de comunicação e de decisão nas

> organizações. Na medida em que a informatização avança, certas funções são eliminadas, novas habilidades aparecem, a ecologia cognitiva se transforma.

Segundo o autor, as tecnologias intelectuais mudam as faculdades humanas de percepção, de manipulação e de imaginação e desempenham um papel fundamental nos processos cognitivos, mudando inclusive os modos como pensamos e como resolvemos nossos problemas cotidianos.

De acordo com os constructos teóricos apresentados, nota-se que, devido ao modo como as tecnologias digitais têm evoluído e pelo fato de estarem continuamente presentes nos diversos contextos sociais e culturais, há a necessidade de se compreender como essas interações ocorrem e como elas influenciam nossos modos de viver e de trabalhar, mas, de modo especial, o modo como influenciam nossos modos de pensar e de produzir novos conhecimentos. Assim, emerge a necessidade de se compreender de que maneira as tecnologias, especialmente as digitais, influenciam os ambientes escolarizados.

Concorda-se com Ponte (2014, p. 354) quando afirma que:

> Perceber quais as potencialidades das tecnologias que podem ser mobilizadas para contextos formativos e identificar modos de as usar de forma produtiva na formação inicial e contínua, tanto com os professores que já usam com muita destreza estas tecnologias, como com professores que mantêm com elas uma relação incipiente, constituem aspetos importantes de uma agenda atual de investigação nesse campo.

Esse aspecto remete a uma das motivações que impulsionaram o desenvolvimento da presente pesquisa: a elaboração de práticas, com destaque ao uso de recursos tecnológicos digitais para o ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, em disciplina presencial, de modo a propiciar aos professores do ensino superior propostas de tarefas alternativas que possibilitem potencializar a compreensão e a aprendizagem significativa desses conceitos.

Para fundamentar essa construção, apresenta-se, a seguir, um breve relato sobre como se deu historicamente a inserção do uso de tecnologias digitais no ensino escolarizado, em especial, por meio do uso de computadores, e quais foram os modos propostos na exploração de seus recursos.

Segundo Valente (1993b), os primeiros usos do computador no ensino visaram simplesmente criar uma versão computadorizada do que se apresentava em sala de aula tradicional. Inicialmente, se pensava o ensino por máquinas e que essa ideia foi usada por Sidney Pressey, em 1924, que inventou uma máquina para corrigir testes de múltipla escolha. No início de 1950, o professor de Harvard B. F. Skinner, usando o conceito de instrução programada, propôs uma máquina para ensinar por meio de módulos logicamente encadeados. Assim que terminava um módulo, o estudante era questionado e somente passaria ao módulo seguinte caso sua resposta estivesse correta. Ressalta-se que esses módulos, nas décadas de 1950 e 1960, eram disponibilizados na forma impressa e que o método acabou não sendo disseminado pelo fato de a reprodução do material ser considerada difícil e em razão de não existir uma padronização.

No início dos anos 1960, a criação dos computadores possibilitou a implementação de diversos programas de instrução programada, o que caracterizou o surgimento da *Computer Aided Instruction* (CAI), ou instrução auxiliada por computadores, os quais, na versão brasileira, ficaram conhecidos como PEC (Programas Educacionais por Computador.) Nessa década, houve um grande investimento do governo americano para difundir essa ideia, mas os computadores eram ainda muito caros para serem adquiridos pelas escolas. Desse modo, em 1963, na Universidade de Stanford na Califórnia, por meio do *Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences*, foram desenvolvidos diversos cursos nessa modalidade para alunos do 1º grau e posteriormente vários cursos dessa universidade também foram ministrados através do computador, o que, na época, atraia muito a atenção dos estudantes.

Foi no início de 1970 que, segundo Valente (1993b), a Universidade de Illinois e a fábrica de computadores *Control Data Corporation* desenvolveram um sistema que possibilitou a disseminação do CAI nas escolas. Valente (1997) enfatiza que existem diferentes modos de compreender o uso dos computadores, sendo um deles o entendimento do computador “como uma máquina de ensinar”. O outro seria “uma máquina para ser ensinada”. Explica que a primeira compreensão pode ser identificada como uma versão computadorizada dos métodos tradicionais de ensino e que, do ponto de vista pedagógico, refere-se ao paradigma instrucionista. Nesse caso, afirma que “as informações são passadas ao aluno na forma de um tutorial, exercício-e-prática ou jogo”.

Já em relação à segunda compreensão, esclarece que o computador é um meio no qual o aprendiz, por meio de construções e reflexões sobre elas, constrói seu próprio conhecimento. O autor indica que essa abordagem refere-se à abordagem construcionista, criada por Seymour Papert.

Giordan (2008) informa que se deve à Seymour Papert as primeiras iniciativas de uso de computadores como recurso de ensino, destacando que Papert coordenou a criação da linguagem de programação LOGO, na década de 1970, no *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), com objetivo de fazer com que as crianças aprendessem a se comunicar por meio dos computadores.

A abordagem construcionista foi proposta em 1980 por Papert (1994), que, na época, reconheceu a existência de duas tendências de sinergia potencial no mundo: a tecnológica e a epistemológica. Para ele, a mesma revolução tecnológica que gerou a necessidade de busca por novas estratégias de aprendizagem seria aquela que forneceria os meios para que isso se efetivasse, possibilitando diversos modos para a melhoria na qualidade do ensino. Afirmou, ainda, que a tendência epistemológica que se refere à revolução no pensamento acerca do conhecimento também pode ser potencializada pelo uso das tecnologias, valorizando as diferentes formas de aprender, se expressar, obter informações e se comunicar, explorando o amor das crianças pelas máquinas. Buscando responder a como o relacionamento entre crianças e computadores afetava a aprendizagem, Papert propôs o construcionismo, em oposição ao instrucionismo, o qual propugnava o máximo de aprendizagem com o mínimo de ensino.

Segundo o autor, o construcionismo consiste numa reconstrução pessoal do construtivismo proposto por Piaget, indicando que também o considera um “conjunto de construção” e que valoriza o papel das construções no mundo como apoio para o desenvolvimento de construções mentais. O desenvolvimento intelectual inclui a necessidade de construção de um artefato externo, que deve ser estimulado por uma situação ou problema que desperte o interesse pela aprendizagem. Assim, na abordagem construcionista, parte-se da ação mental sobre o objeto, o que, por intermédio de construções concretas, possibilitadas pelo uso de recursos computacionais, conduz o aprendiz à conceituação.

Nesse contexto, Papert (1994), como educador matemático, destaca a importância do uso dos computadores como indispensáveis para a aprendizagem, por possibilitarem aos alunos externarem suas construções mentais, exibirem, discutirem e analisarem os artefatos construídos, tais como a construção de programas de computador, ou gráficos, ou de imagens quaisquer. Também indica que o uso de computadores: estimula a criatividade e a criação de ambientes ativos de aprendizagem possibilitando testar ideias e hipóteses; permite o desenvolvimento de trabalhos colaborativos e a aprendizagem por meio de reflexões; estimula o desenvolvimento do senso crítico e ressalta a vantagem de possibilitar a abordagem de problemas por meio de diferentes estratégias, que podem ser compartilhadas em sala de aula permitindo a finalização dos trabalhos em diferentes níveis e respeitando os gostos e habilidades técnicas dos alunos. Assim, na proposta construcionista, com o auxílio do computador, ao visualizar suas construções mentais, o aluno relaciona o concreto e o abstrato de modo interativo, favorecendo a construção do próprio conhecimento.

Segundo Valente (1977, s/p.), o uso da abordagem construcionista em sala de aula apresenta enormes desafios ao professor:

> [...] Primeiro, implica em entender o computador como uma nova maneira de representar o conhecimento provocando um redimensionamento dos conceitos já conhecidos e possibilitando a busca e compreensão de novas ideias e valores. Usar o computador com essa finalidade requer a análise cuidadosa do que significa ensinar e aprender bem como demanda rever o papel do professor nesse contexto. Segundo, a formação desse professor envolve muito mais do que prover o professor com conhecimento sobre computadores. O preparo do professor não pode ser uma simples oportunidade para passar informações, mas deve propiciar a vivência de uma experiência. [...]

O autor destaca que, ao fazer a escolha dos recursos tecnológicos digitais, o professor deve observar quais deles possibilitam tanto a interação quanto a explicitação de processos mentais, para que possam ser utilizados como mediadores na construção de seus próprios conhecimentos. Nas tarefas propostas, a interação aluno-computador deve ser mediada pelo professor, com orientações que possibilitem abstrações reflexivas.

No Brasil, houve um período de 40 anos, desde a criação dos computadores digitais, para que houvesse ações educativas que explorassem seu uso para o ensino. Segundo Moraes (1993, p.17):

> A informática educativa no Brasil tem suas raízes históricas plantadas na década de setenta, quando, pela primeira vez, em 1971, se discutiu o uso de computadores no ensino de Física, em seminário promovido pela Universidade de São Carlos, assessorado por um especialista da Universidade de Dartmouth/USA.

Desde então, o uso de computadores tem sido cada vez mais explorado como meio para promoção da aprendizagem em ambientes escolarizados.

Na década de 1990, Valente (1993a) defendia que o uso do computador no ambiente escolar deveria possibilitar ao estudante uma participação ativa no processo da aprendizagem, auxiliando na execução de tarefas que os possibilitassem construir seus conhecimentos. Para o estudioso, o conceito de Informática Educacional (IE) consiste no:

> [...] processo que coloca o computador e sua tecnologia a serviço da educação. [...] Portanto, todos os aspectos e as variáveis neste processo deverão estar subordinados à consideração de que a essência da IE é de natureza pedagógica, buscando assim melhorias dos processos de ensino-aprendizagem de forma a levar o aluno a aprender, e o professor a orientar e auxiliar esta aprendizagem, tornando-o apto a discernir sobre a realidade e nela atuar (VALENTE,1993a, p. 26).

O estudo apresentado por Kripka, Viali e Lahm (2014) indica que a exploração adequada de recursos tecnológicos permite aos alunos uma participação ativa no processo de aprendizagem, o que possibilita tornar os espaços de aprendizagem mais interessantes e interativos e estimula o desenvolvimento do pensamento crítico de modo colaborativo.

A interação entre os estudantes também deve ser estimulada, de modo a propiciar a construção dos conhecimentos, na qual o professor deve atuar ativamente intermediando e orientando a ação. Faria (2004, p. 57) afirma que:

> Os procedimentos didáticos, nesta nova realidade, devem privilegiar a construção coletiva dos conhecimentos, mediados pela tecnologia, na qual o professor é um partícipe pró-ativo que intermedia e orienta esta construção.

Concordando com Valente (1999b), a pesquisadora reconhece o papel do professor como orientador e mediador de tarefas, afirmando que deve esse profissional deve atuar de modo a estimular o compartilhamento de informações, de modo que ocorra aprendizagem colaborativa. O professor deve usar os recursos tecnológicos de modo criativo, importantes nas tarefas de interação e de atuação participativa dos estudantes, visando à construção do conhecimento coletivo.

Esse papel do professor, que atua como mediador da aprendizagem na qual se exploram recursos tecnológicos como meios na construção de conhecimentos, também é destacado por Masetto (2013, p.143) ao se referir ao rápido desenvolvimento da atual cultura digital que permeia os modos de pensar e raciocinar:

> [...] Esse cenário envolve totalmente o professor em sua função docente, colocando-o na contingência de conhecer novos recursos tecnológicos, adaptar-se à eles, usá-los e compreendê-los em prol de um processo de aprendizagem mais dinâmico e motivador para seus alunos. Novamente a mediação pedagógica entra em discussão.

No mesmo sentido, Moran (2013, p. 26) defende que:

> Uma boa escola precisa de professores mediadores, motivados, criativos, experimentadores, presenciais e virtuais. De mestres menos “falantes” mas mais orientadores. De aulas menos informativas, e mais atividades de pesquisa e experimentação. De desafios e projetos. Uma escola que fomente redes de aprendizagem, ente professores e alunos, onde todos possam aprender com os que estão perto e com os que estão longe – mas conectados – e onde os mais experientes possam ajudar os menos experientes.

Moran (2013, p. 29) complementa, sobre isso, que “Há uma exigência de maior planejamento pelo professor de atividades diferenciadas, focadas em experiências, pesquisa, colaboração, desafios, jogos, múltiplas linguagens, e um forte apoio em situações reais e simulações”. Devido à existência de inúmeros recursos tecnológicos digitais disponíveis e de possibilidades de seus usos em situações de ensino e de aprendizagem, no contexto escolar, também cabe ao professor o planejamento de tarefas que, fazendo uso adequado desses recursos, propiciam ambientes favoráveis à aprendizagem.

Kripka, Viali e Lahm (2014), em consonância com Valente (1993b), salientam a importância do professor como facilitador no processo de aprendizagem. Indicam que cabe ao professor adaptar e propiciar os usos dos recursos tecnológicos em suas práticas e, mais do que isso, que também são responsáveis por facilitarem o acesso às informações e por promoverem a aproximação entre a educação científica e o conhecimento pessoal, ou seja, entre as teorias e as práticas vivenciadas pelos estudantes.

Ao serem consideradas as atuais mudanças socioculturais, que se devem aos contínuos e rápidos avanços tecnológicos, cada vez mais se intensifica a percepção da necessidade de aproximação entre a realidade vivenciada pelo estudante, permeada por usos de recursos tecnológicos digitais e seus ambientes de aprendizagens, tendo em vista que esses recursos podem potencializá-las.

Assim, na presente tese, se propõe que o ambiente da sala de aula seja reformulado, de modo que sejam repensados os processos de ensino e de aprendizagem do conhecimento científico proposto ao estudante, propiciado por meio da utilização adequada dos recursos, subsidiados pelas inovações tecnológicas digitais existentes, de modo a apresentar caminhos diferenciados que favoreçam as construções cognitivas envolvidas.

Pelo estudo teórico realizado, constata-se que os recursos das tecnologias digitais assumem um papel primordial no contexto da aprendizagem, atuando como um meio propício para a construção do conhecimento, que não pode ser desconsiderado no contexto da sala de aula presencial.

Segundo Prensky (2010, p. 202), “O papel da tecnologia, em nossas salas de aula, é o de oferecer suporte ao novo paradigma de ensino”. O pesquisador considera que, no velho paradigma, o ensino está centrado no professor, que adota o método expositivo para “transmissão” do conhecimento, e defende como novo paradigma aquele no qual as crianças ensinam a si mesmas, com orientação do professor que atua como “guia ao lado”, representando uma combinação de “aprendizagem centrada no aluno”, “aprendizagem baseada em problemas a resolver” e “aprendizagem baseada em casos”. Assim, o autor ressalta que a tecnologia atual proporciona, por seus inúmeros recursos, muitas possiblidades para que o professor possa estimular os estudantes a aprenderem sozinhos, devendo o professor atuar como guia.

Na presente tese, enfatiza-se que a sala de aula, seja ela presencial ou virtual, se constitui no principal ambiente de ensino e de aprendizagem no qual o estudante entra em contato com o conhecimento científico. Esse ambiente pode ser estimulante e adequado para esse fim, de modo que os próprios estudantes possam relacionar seus conhecimentos próprios às novas informações disponibilizadas, construindo, ampliando ou (re)significando seus próprios conhecimentos, científicos ou não. Concorda-se com Moran (2008, p. 5), quando afirma:

> A educação escolar precisa compreender e incorporar mais as novas linguagens, desvendar os seus códigos, dominar as possibilidades de expressão e as possíveis manipulações. É importante educar para usos democráticos, mais progressistas e participativos das tecnologias, que facilitem a evolução dos indivíduos.

Atualmente, existem diversos documentos nacionais, elaborados pelo Ministério da Educação que indicam a necessidade da inserção do uso de TIC em processos de ensino e aprendizagem tanto no contexto da Educação Básica, quanto no contexto da Educação superior.

Nas atuais Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica (BRASIL, 2013), quando se aborda “Organização curricular: conceito, limites, possibilidades”, indica-se que, para preparar cidadãos plenos, é preciso que a escola assuma diferentes papéis, possibilitando uma educação que destinada a múltiplos sujeitos com diferentes condições econômicas, sociais e culturais. O documento indica que o distanciamento entre a realidade dos estudantes e a realidade escolar deve ser superado. Seu texto ainda leva à compreensão de que, para que isso ocorra, é necessário que sejam revistos os métodos didáticos pedagógicos e que seja estimulada a criação de novas propostas que explorem os diversos recursos disponibilizados pelas tecnologias de informação e comunicação, fundamentais para criar condições para o exercício da cidadania. Conforme Brasil (2013, p. 26):

> [...] o conhecimento científico, nos tempos atuais, exige da escola o exercício da compreensão, valorização da ciência e da tecnologia desde a infância e ao longo de toda a vida, em busca da ampliação do domínio do conhecimento científico: uma das condições para o exercício da cidadania. O conhecimento científico e as novas tecnologias constituem-se, cada vez mais, condição para que a pessoa saiba se posicionar frente a processos e inovações que a afetam.

Outro documento criado pelo Ministério da Educação foi a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996), que trouxe mudanças significativas em todos os níveis de ensino no Brasil. Em relação ao ensino superior, foram lançados grandes desafios aos docentes relacionados às práticas em sala de aula. Nessa lei (BRASIL, 1996, s.n.), se determina:

> Art. 43. A educação superior tem por finalidade:
>
> I - estimular a criação cultural e o desenvolvimento do espírito científico e do pensamento reflexivo;
>
> II - formar diplomados nas diferentes áreas de conhecimento, aptos para a inserção em setores profissionais e para a participação no desenvolvimento da sociedade brasileira, e colaborar na sua formação contínua;
>
> III - incentivar o trabalho de pesquisa e investigação científica, visando o desenvolvimento da ciência e da tecnologia e da criação e difusão da cultura, e, desse modo, desenvolver o entendimento do homem e do meio em que vive; [...].

Especificamente em relação às Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia, os documentos nacionais (BRASIL, 2001, p. 4) indicam que:

> O perfil dos egressos de um curso de engenharia compreenderá uma sólida formação técnico científica e profissional geral que o capacite a absorver e desenvolver novas tecnologias, estimulando a sua atuação crítica e criativa na identificação e resolução de problemas, considerando seus aspectos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais, com visão ética e humanística, em atendimento às demandas da sociedade.

Isso tudo evidencia que, no ensino superior, há necessidade de propostas de ensino e aprendizagem que possibilitem a construção do conhecimento científico e tecnológico por meio de atividades que envolvam ensino, pesquisa e extensão, tendo em vista a formação de cidadãos críticos e reflexivos, preparados para atuar na resolução de problemas de suas próprias realidades.

Devido a essas necessidades prementes de inserção do uso de tecnologias em ambientes formais de ensino, de modo especial no ensino superior – de forma a potencializar a aprendizagem do conhecimento científico, tornando os processos de ensino e aprendizagem mais significativos –, apresenta-se, na presente tese, uma sequência didática com uso de tecnologia para o ensino presencial, que visa, por meio da exploração de recursos tecnológicos e de diferentes registros semióticos, propiciar ambientes que favoreçam a aprendizagem significativa de Álgebra Linear. Em consonância com Kampff (2006, p. 11-12), concorda-se que:

> As tecnologias, […] ampliam o potencial humano. Todos reconhecem o papel fundamental das instituições escolares no desenvolvimento intelectual, social e afetivo do indivíduo. […] cabe à escola incorporar em seu trabalho, apoiado na oralidade e na escrita, outras formas de aprender, […] com uma tecnologia cada vez mais avançada. Mais do que resistir, é preciso desvendá-la e, conscientemente fazer uso dela.

Após a apresentação das duas principais teorias, consideradas na elaboração das tarefas de ensino e aprendizagem propostas, e dos aspectos teóricos e históricos, considerados relevantes, sobre usos de tecnologias digitais em ambientes de ensino e aprendizagem, no próximo capítulo, são apresentados os procedimentos metodológicos utilizados, considerados no desenvolvimento da presente tese.

4. PROCEDIMENTOS E MÉTODOS

Neste capítulo são apresentados os procedimentos e métodos que orientaram a pesquisa. Inicialmente, são expostas a abordagem investigativa proposta por meio do uso de métodos mistos, as estratégias adotadas conforme as abordagens qualitativa e quantitativa e as etapas da pesquisa. Na sequência, são apresentados os métodos utilizados na constituição e na análise de dados.

4.1 Abordagem investigativa: uso de método mistos

A abordagem investigativa da presente tese caracteriza-se pela utilização de métodos mistos. Segundo Creswell e Plano-Clark (CRESWELL, 2010, p. 27) a:

> [...] pesquisa de métodos mistos é uma abordagem de investigação que combina ou associa as formas qualitativa e quantitativa. Envolve suposições filosóficas, o uso de abordagens qualitativas e quantitativas e a mistura de duas abordagens em um estudo. Por isso, é mais do que uma simples coleta e análise de dois tipos de dados; envolve também o uso das duas abordagens em conjunto, de modo que a força geral de um estudo seja maior do que a da pesquisa qualitativa ou quantitativa isolada.

Desse modo, ao adotar a utilização de métodos mistos na presente pesquisa, objetiva-se ampliar as possibilidades de interpretação dos resultados considerados relevantes no campo de investigação dos processos educativos abordados.

Dal-Farra e Lopes (2013) indicam que o uso de métodos mistos tem aumentado em inúmeros campos do conhecimento e que, devido ao fato de conjugarem elementos quantitativos e qualitativos por meio de diferentes objetivos, são necessários cuidados especiais, visando minimizar possíveis dificuldades existentes entre eles.

Creswell (2010, p. 38) informa que: “[..] O conceito de misturar diferentes métodos originou-se em 1959, quando Campbell e Fisk utilizaram métodos múltiplos para estudar a validade dos traços psicológicos [...]”. O autor também comenta que foi a dificuldade dos pesquisadores ao realizarem a análise de dados, considerando as duas abordagens, que fez com que surgisse a necessidade de triangulação de dados como um meio de busca pela convergência entre resultados obtidos pelos métodos quantitativos e qualitativos utilizados. Posterirormente, o autor informa que foram propostas metodologias distintas para seus desenvolvimentos, conforme desenvolvido em Tashakkori e Teddlie (1998) e Creswell e Plano Clark (2007).

Dal-Farra e Lopes (2013) destacam que, ao serem utilizados métodos mistos, as múltiplas abordagens possibilitam explorar as potencialidades de cada uma delas, o que pode contribuir com respostas mais abrangentes ao problema de pesquisa investigado, desde que sejam respeitadas suas características particulares.

Os pesquisadores indicam que existem limitações na construção de abordagens por meio de métodos mistos pelo fato das abordagens quantitativas e qualitativas possuírem vieses diferenciados, e que um poderia neutralizar o viés do outro, mas isso pode ser contornado por processos de triangulação.

Os autores esclarecem que os métodos quantitativos, por possibilitarem a mensuração de um construto específico, fazem com que a análise distancie-se de seu contexto original, enquanto o uso de métodos qualitativos, por objetivar a compreensão do fenômeno como um todo, necessita considerar o contexto original de modo a possibilitar uma análise aprofundada, o que não pode ser realizado por meio de instrumentos de mensuração.

Além disso, Creswell (2010, p. 241) destaca que os usos de métodos mistos impõem desafios: “[...] eles incluem a necessidade de uma extensa coleta de dados, a natureza de tempo intensivo da análise de dados de textos e numéricos e a exigência que o pesquisador esteja familiarizado com as formas de pesquisa quantitativa e qualitativa”.

Para contornar essas dificuldades no uso das abordagens qualitativa e quantitativa, buscou-se a realização da triangulação metodológica de modo a favorecer a análise final da pesquisa, pois, segundo Triviños (1987, p. 138):

> A técnica da triangulação tem por objetivo básico abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do foco em estudo. Parte de princípios que sustentam que é impossível conceber a existência isolada de um fenômeno social, sem raízes históricas, sem significados culturais e sem vinculações estreitas e essenciais com uma macrorrealidade social.

Também se destaca o foco histórico-hermenêutico da pesquisa, conforme Habermas (1987) e Domingues (1986), pois é pela *mediação da linguagem* que se busca transmitir institucionalmente o conhecimento científico sobre os conteúdos relativos à ementa da disciplina de Álgebra Linear. Também houve o *interesse prático* em potencializar a aprendizagem significativa dos estudantes por meio da realização de tarefas propostas em sala de aula e, desse modo, propôs-se a exploração de diferentes registos semióticos de um mesmo objeto matemático, bem como a utilização de diferentes recursos tecnológicos tendo em vista a construção dos conceitos tratados. Também se buscou *interpretar significados*, tanto em termos de observação de ações dos estudantes, no contexto da sala de aula, em relação às tarefas propostas, bem como pela análise dos dados constituídos por meio da realização de tarefas, o que gerou indicativos sobre aprendizagem de conceitos matemáticos e sobre a aprendizagem significativa de tais conceitos. Também se buscou a *compreensão* dos fenômenos de ensino e de aprendizagem ocorridos em sala de aula, orientada por um *processo dialógico consensual*, advindos da relação entre professor e estudantes, nos quais a intersubjetividade foi considerada como um conceito básico do foco histórico-hermenêutico.

A seguir, são apresentadas estratégias segundo as abordagens qualitativa e quantitativa adotadas.

4.2 Estratégias adotadas - abordagens qualitativa e quantitativa

Na presente pesquisa, ao adotar o uso de métodos mistos, pretendeu-se usar diferentes estratégias de pesquisa.

Conforme definidas por Creswell (2010), foram utilizadas como estratégia qualitativa o *estudo de caso* e como estratégia quantitativa o *levantamento de dados*, tendo em vista identificar e analisar como inovações no método de ensino aliado ao uso adequado de recursos didáticos das TIC podem contribuir na idealização de práticas pedagógicas potencializadoras do aprendizado significativo em matemática.

Yin (2001) destaca que a abordagem do estudo de caso é adequada quando se pretende compreender, descrever ou explorar acontecimentos em contextos complexos, onde se procura respostas para perguntas do tipo “Como?” e o “Porquê?”, onde devem ser considerados diversos fatores envolvidos no processo. A investigação visa identificar fatores relevantes que possibilitem compreender a dinâmica do fenômeno ou do processo de modo profundo e global.

Lüdke e André (1986) citam sete características ao se referirem ao estudo de caso na pesquisa qualitativa, indicando que: (i) possibilitam a descoberta, pois durante seu desenvolvimento podem surgir novos elementos e características importantes, além do considerado nos pressupostos teóricos iniciais; (ii) valorizam a interpretação considerando o contexto no qual a pesquisa está inserida, considerando tanto recursos materiais como humanos, entre outros; (iii) possibilitam descrever realidade de forma completa e profunda; (iv) propiciam o uso de fontes variadas de informação; (v) possibilitam generalizações naturalistas; (vi) objetivam investigar diferentes perspectivas existentes em uma situação social; e (vii) propiciam o uso de modos mais acessíveis de linguagem do que outros métodos de investigação.

Segundo Yin (2001), a presente pesquisa se caracteriza como um estudo de caso múltiplo e holístico, pois foram considerados dois casos relativos à dois grupos distintos, G1 e G2 (sendo que no G1 se fez uso contínuo de tecnologias e no G2 se fez uso pontual delas), nos quais foi considerada uma unidade única de análise, ou seja, buscou-se investigar "como" os participantes percebiam as influências do uso das tecnologias digitais nos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra Linear, no contexto do ensino presencial.

Já como estratégia quantitativa, optou-se pelo levantamento de dados (CRESWELL, 2010), tendo em vista a compreensão de tendências relativas ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear ocorridos nos grupos analisados.

Além disso, na perspectiva da abordagem quantitativa, foi feita uma análise descritiva, além do uso do teste *t*, para comparar as médias dos dois grupos.

4.3 Os caminhos da pesquisa

A primeira etapa da pesquisa se constituiu de um estudo teórico sobre o estado da arte, que foi realizado por meio de uma revisão bibliográfica sobre a teses e dissertações, buscando identificar propostas metodológicas existentes para o ensino de Álgebra Linear, desenvolvidas especialmente para cursos de engenharia, que envolvessem o conceito de aprendizagem significativa e que explorassem recursos das TIC, na qual buscou-se elucidar objetivos e resultados.

Na segunda etapa, considerando os fundamentos das teorias de Aprendizagem Significativa e da teoria dos Registros de Representação Semiótica, foram elaboradas sequências didáticas para o ensino de Álgebra Linear, de modo a propiciar aprendizagens significativas dos conteúdos tratados, para serem utilizadas ao longo de um semestre, no ensino presencial dessa disciplina, regularmente ministrada no curso de Engenharia Civil da IES que sediou a pesquisa. As sequências didáticas foram aplicadas em dois grupos de estudantes, denominados G1 e G2.

Ainda nessa etapa, também foram elaboradas e realizadas tarefas em ambos os grupos, geralmente desenvolvidas em duplas, nas quais resoluções de exercícios ou de problemas contextualizados foram propostos, que visaram possibilitar uma participação mais ativa do estudante na construção do seu conhecimento.

Além disso, visando investigar a influência do uso das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem propostos, em um dos grupos (G1) propôs-se o uso frequente de diferentes recursos tecnológicos digitais, tais como geotecnologias disponíveis em aparelhos celulares e ambientes interativos disponíveis em computadores. Destaca-se que, nesse grupo, a maioria das tarefas foi desenvolvida em laboratório computacional, ao longo de todo o semestre, onde os estudantes tiveram contato com diferentes tecnologias digitais interativas, tais como GeoGebra, *MATLAB* e planilhas *Excel*. Em apenas uma tarefa propôs-se a troca de experiências ao outro grupo – G2 (que não fazia uso dos recursos tecnológicos para o desenvolvimento das tarefas), para que usassem os recursos tecnológicos digitais na resolução de um problema proposto, enquanto que propôs-se ao grupo G1, que resolvessem uma tarefa semelhante, porém, nessa tarefa, não puderam fazer uso dos recursos tecnológicos com os quais já estavam habituados.

Destaca-se que essas tarefas, nas quais foi proposto o uso de diferentes recursos tecnológicos, tiveram como propósitos: (i) tensionar os processos cognitivos relacionados ao ensino e a aprendizagem da matemática; (ii) acelerar processos de cálculos algébricos (que muitas vezes são demorados e chatos); (iii) evitar possíveis erros de cálculos na resolução de exercícios; e, (iv) facilitar o reconhecimento, a manipulação e o trânsito entre diferentes registros semióticos, visando propiciar ambientes de aprendizagem que favorecessem a compreensão dos objetos matemáticos abordados.

De modo geral, as tarefas propostas são potencialmente significativas, pois foram elaboradas visando a uma organização programática do conteúdo orientada pelos princípios da teoria da aprendizagem significativa, que são a *diferenciação progressiva* (partindo de ideias mais gerais para as mais inclusivas, favorecendo a diferenciação de detalhes e especificidades), a *reconciliação integrativa* (propondo tarefas para explorar relações entre conceitos, tendo em vista ressaltar diferenças e similaridades entre eles), a *organização sequencial* (visando resgatar ideias âncoras relevantes já existentes, na qual se fez uso de *organizadores prévios – expositivos ou comparativos*, para possibilitar a interação cognitiva com conhecimentos prévios e mapas conceituais) e a *consolidação* (visando averiguar sobre o sucesso na aprendizagem, antes que novas tarefas fossem realizadas).

Na terceira etapa, fez-se o planejamento e a execução da constituição de dados, que ocorreram no primeiro e segundo semestres de 2016. Durante esta etapa, também foram elaborados os questionários a serem aplicados ao longo do semestre e escolhidas as turmas do curso de Engenharia Civil nas quais as propostas foram aplicadas.

Destaca-se que a constituição dos dados foi realizada por meio de: (i) questionários aplicados ao longo das disciplinas; (ii) observações realizadas em sala de aula; (iii) de produções individuais e coletivas fornecidas pelos estudantes em tarefas desenvolvidas; e, (iv) de diários de bordo elaborado após as aulas pela própria professora. Também foram aplicados questionários com os estudantes nove meses após o término das disciplinas.

Fez-se, também, a coleta retrospectiva em banco de dados da IES, na qual a pesquisa foi realizada, de modo a possibilitar a avaliação quantitativa sobre desempenho e evasão ocorridos em disciplinas anteriores ao ano de 2016.

Finalmente, na quarta etapa da pesquisa, foram realizadas as análises qualitativa e quantitativa dos dados coletados, tendo em vista identificar percepções sobre possíveis influências ocorridas do uso de tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, na proposta fundamentada pelas teorias da aprendizagem significativa e dos Registros de Representação Semiótica.

Destaca-se que, inicialmente, o projeto de pesquisa de doutorado foi enviado ao Comitê de Ética em Pesquisa da PUCRS (CEP/PUCRS) e foi aprovado em 21 de março de 2016, e novamente aprovado em defesa de qualificação, ocorrida em 21 de dezembro de 2016.

4.4 Descrição do local e participantes da pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida em uma Instituição de Ensino Superior (IES), localizada na região sul do Brasil, cujos participantes foram estudantes de cursos de graduação.

A proposta investigativa apresentada abordou o desenvolvimento e análise de tarefas elaboradas para o ensino e aprendizagem de conteúdos da disciplina de Álgebra Linear, e foram aplicadas a dois grupos independentes de estudantes, visando investigar os efeitos relacionados à exploração de usos de recursos tecnológicos no processo de ensino e de aprendizagem.

A ideia inicial era trabalhar simultaneamente com duas turmas no primeiro semestre de 2016, nas quais seria aplicada a mesma sequência de tarefas, sendo que em apenas uma delas seriam introduzidas as tarefas diferenciadas com uso de tecnologias. Porém, no primeiro semestre, devido ao número reduzido de estudantes matriculados na disciplina de Álgebra Linear do Curso de Engenharia Civil no turno da manhã, foi possível aplicar a proposta em apenas uma turma e se optou por trabalhar com a exploração de recursos das tecnologias digitais nas tarefas realizadas. Porém, como o número de estudantes dessa turma era significativamente reduzido em relação ao número de estudantes existentes em turmas de semestres anteriores, decidiu-se trabalhar com outras duas novas turmas cujas aulas ocorreram no segundo semestre de 2016, a fim de obter mais dados para análise.

Desse modo, no segundo semestre, a sequência de tarefas que propiciavam o uso de tecnologias foi novamente aplicada numa segunda turma e, numa terceira turma, a mesma sequência de ensino foi aplicada, porém o uso de recursos tecnológicos digitais foi evitado na realização das tarefas propostas.

Cabe destacar que em apenas uma tarefa (Tarefa 15, envolvendo conhecimentos sobre transformações lineares e criptografia) propôs-se a troca de experiência em relação ao uso de recursos tecnológicos digitais. Na segunda turma, na qual normalmente os estudantes usavam os computadores em suas resoluções, solicitou-se que o problema fosse resolvido manualmente. Na terceira turma, na qual nunca havia sido proposto o uso de recursos tecnológicos digitais durante as aulas, foi solicitado que os estudantes usassem os computadores para resolver os problemas propostos. Salienta-se que essa proposta de troca de abordagem didática visou possibilitar uma análise cruzada de dados quanto às percepções dos estudantes ao vivenciarem a experiência do uso ou do não uso dos recursos tecnológicos na resolução de problemas propostos.

Desse modo, a coleta de dados para a análise qualitativa foi realizada em três turmas. Foram analisados os dados referentes a dois grupos independentes de estudantes, denominados:

- Grupo 1 (G1): constituído pela primeira e segunda turmas (Turma 1 e 2), nas quais foram propostas tarefas que envolveram a exploração contínua de recursos tecnológicos digitais; e,
- Grupo 2 (G2): constituído pela terceira turma (Turma 3), na qual se evitou a exploração contínua de recursos tecnológicos digitais, mas se propôs o uso deles em apenas uma tarefa.

A seguir são apresentadas informações mais específicas para caracterização dos participantes envolvidos na pesquisa:

- *Critérios de inclusão*: Os participantes da pesquisa são estudantes do ensino superior de três turmas de Álgebra Linear, do segundo nível do curso de Engenharia Civil, os quais tiveram participação ativa em todas as tarefas propostas. Ressalta-se que as disciplinas ocorreram conforme o que é descrito a seguir:

  a. *Horário das aulas:*
     - G1: segundas-feiras e quartas feiras: no turno da manhã e
     - G2: segundas-feiras: no turno da noite; e, sábados: turno da manhã.

  b. *Período de realização da pesquisa*:
     - Turma 1 – 1º semestre de 2016 (início coleta de dados - 04/abr/16).
     - Turmas 2 e 3 – 2º semestre de 2016 (início coleta de dados – 25/jul/16)

  c. *Número total de estudantes das turmas:*
     - Turma 1: 11 estudantes.
     - Turma 2: 33 estudantes.
     - Turma 3: 36 estudantes.

  d. *Número total de participantes da pesquisa (retirando excluídos):*
     - G1: 36 participantes (Turma 1: 8 estudantes e Turma 2: 28 estudantes)
     - G2: 25 participantes (Turma 3: 25 estudantes).

  e. *Dados retrospectivos*: também foram consideradas amostras de dados relativas a dez turmas de Álgebra Linear, relativas aos anos de 2012 (duas turmas), 2013 (duas turmas), 2014 (três turmas), 2015 (três turmas), que não participaram do processo de investigação de ensino e aprendizagem aqui proposto, para análise de possíveis correlações estatísticas envolvendo índices de aprovação ou evasão entre as turmas, anteriores e posteriores à proposta apresentada.

– *Critérios de exclusão:* não foram considerados como participantes da pesquisa os estudantes que não assinaram o termo de consentimento, ou aqueles que não responderam ao questionário inicial, ou aqueles que reprovaram por falta (pelo fato de não terem participado da maioria das tarefas propostas ao longo do semestre).

Salienta-se que, somente após a aprovação do projeto de pesquisa pelo CEP/PUCRS, o termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE - Anexo 1) foi apresentado aos participantes, para que se pudesse dar início às tarefas propostas na pesquisa.

4.5 Constituição de dados e método de análise

Segundo Bogdan e Biklen (1994), as estratégias mais representativas para constituição de dados na investigação qualitativa são a observação participante e a entrevista em profundidade.

Devido às características da proposta investigativa - ou seja, o desenvolvimento de diversas tarefas ao longo de um semestre, visando avaliar os processos de ensino e aprendizagem ocorridos -, de modo mais geral, na presente pesquisa, optou-se pela observação participante e também pelo uso de questionários, constituídos por questões abertas, tendo em vista investigar as percepções e as aprendizagens identificadas antes do início do processo, durante e posteriormente ao seu desenvolvimento.

A constituição de dados nesse estudo, realizada pelo investigador, foi iniciada no primeiro semestre de 2016, ocorreu ao longo do primeiro e segundo semestres do ano de 2016 e foi finalizada no segundo semestre de 2017, nove meses após o término das tarefas, quando os estudantes foram novamente convidados a responder questionários sobre as possíveis aprendizagens ocorridas.

A maioria dos dados foram constituídos em tarefas desenvolvidas no ambiente natural da sala de aula ou, ainda, por meio de algumas tarefas desenvolvidas em um contexto extra sala de aula, relacionadas ao conteúdo abordado na aula. Assim, durante o período de ocorrência das aulas regulares, coletou-se documentos produzidos pelos participantes da pesquisa os quais envolveram tarefas realizadas no computador ou sem ele, trabalhos realizados individualmente ou em grupos e testes de avaliação.

Foram realizadas observações diretas, ocorridas no contexto da sala de aula, registadas em diários de bordo pelo professor investigador, ao longo do primeiro e segundo semestres de 2016, quando ocorreram as aulas das três turmas de Álgebra Linear, nas quais a proposta foi aplicada.

Além disso, os estudantes responderam a questionários, propostos no início, ao longo do semestre, ao final do semestre e nove meses após o término da disciplina, tendo em vista possibilitar a investigação sobre possíveis percepções ocorridas em relação ao processo de ensino e de aprendizagem vivenciados.

No início do primeiro semestre de 2016, também foram coletados dados retroativos sobre desempenho, relativos a dez turmas de Álgebra Linear, do curso de Engenharia Civil, da IES considerada, referentes a turmas que cursaram a disciplina entre os anos de 2012 e 2015. Esses dados possibilitaram identificar percentuais históricos de aprovação, reprovação e evasão ocorridos no período considerado e puderam ser também comparados aos resultados obtidos após a aplicação da proposta.

Apresenta-se a seguir os instrumentos escolhidos para constituição de dados proposta.

4.5.1 Instrumentos para produção de dados

Como critério de seleção para compor a amostra representativa da pesquisa, foram consideradas, para a coleta de dados, apenas informações sobre turmas da disciplina de Álgebra Linear do curso da Engenharia Civil, a fim de garantir as características gerais dos grupos analisados.

Além disso, para garantir a consistência e validade da pesquisa qualitativa, para constituição de dados foram utilizados diversos instrumentos, tais como:

- *Observações das aulas*.
- *Aplicação de questionários*.
  - (i) Questionário inicial para identificação de conhecimentos prévios.
  - (ii) Questionários intermediários sobre percepções acerca de tarefas.

(iii) Questionário final sobre suas impressões sobre a metodologia e sobre aprendizagens ocorridas.

(iv) Questionário após seis meses para verificar conhecimentos retidos na memória permanente.

- *Produções dos participantes de pesquisa*, realizadas em tarefas práticas ou teóricas, desenvolvidas ao longo das aulas.
- *Diário de bordo*: com relatos de fatos e de percepções da professora pesquisadora, referentes às aulas ministradas, decorrentes da observação dos participantes de pesquisa.

4.5.2 Métodos de análise de dados

Na investigação proposta, os dados coletados foram analisados segundo as abordagens qualitativa e quantitativa. Para a realização da análise de dados qualitativos utilizou-se o método “Análise de Conteúdo” e para análise dos dados quantitativos, fez-se uso da estatística descritiva e do teste *t* para grupos independentes.

4.5.2.1 Análise de Conteúdo

Os dados foram analisados por meio de procedimentos da Análise de Conteúdo, conforme pressupostos de Bardin (2011), do tipo análise categorial, com a construção do quadro de categorias de acordo com Moraes (1998, 1999).

Justifica-se a escolha desse método pelo fato dele possibilitar o aprofundamento na percepção dos diferentes significados de conteúdos presentes em manifestações verbais ou escritas, realizadas pelos participantes da pesquisa, possibilitando identificar as diferentes formas de compreensão existentes sobre um mesmo objeto matemático, bem como as suas impressões sobre as influências dos usos dos recursos tecnológicos presentes no processo de ensino e aprendizagem propostos.

Segundo Bardin (2011, p.48), o termo Análise de Conteúdo designa-se por:

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens.

Assim, a análise consiste num conjunto de técnicas de interpretação de comunicações baseadas em inferências, na qual o pesquisador busca identificar o conteúdo manifesto.

Na Análise de Conteúdo, o principal material coletado são os *significados*, nos quais o próprio objeto vai ser submetido à análise, de modo a explicitar e sistematizar o conteúdo das mensagens ou de expressões deste conteúdo (BITTENCOURT, 1986).

Bardin (2011) indica que a organização da análise se faz em três fases: *pré-análise*; *exploração do material*; e *tratamento dos resultados, inferência* e *interpretação.*

Descrevendo essas fases, a autora esclarece que a *pré-análise c*onsiste na organização do material e de um plano de análise e indica que existem quatro objetivos:

– *Escolha dos documentos,* chamado *corpus da pesquisa,* que deve ser constituído segundo algumas regras: e*xaustividade e não seletividade* - o material deve abranger todos os elementos e quanto mais documentos considerados, melhor será a análise realizada; *representatividade* - a amostra deve representar o universo pesquisado; *homogeneidade* - os documentos selecionados devem ser escolhidos a partir de critérios definidos, considerando indivíduos semelhantes ou mesma técnica; e p*ertinência*: a escolha dos documentos deve estar adequada aos objetivos, ou seja, os materiais devem conter ou selecionar o problema.
– *Formulação das hipóteses e dos objetivos*: nessa etapa são feitas afirmações provisórias que se propõe verificar (confirmar ou infirmar) por meio de procedimentos da análise.
– *Referenciação dos índices e elaboração de Indicadores*: uma forma para se construir indicadores consiste em considerar que a importância do tema está relacionada com sua frequência de repetição. Assim, o indicador deste tema será a frequência relativa ou absoluta em relação a outros. São os indicadores que vão possibilitar fundamentar a interpretação final.
– *Preparação do material*: refere-se à edição dos dados, identificação dos recortes, anotações, colocação de colunas vazias para se digitar os códigos estabelecidos e processo de codificação dos dados no computador.

Bardin (2011) indica que a segunda fase, *exploração do material*, *c*onsiste no tratamento do material, visando esclarecer a razão *por que* se analisa e para explicitá-la para saber *como* analisar. Refere-se ao processo de codificação, tendo em vista a sistematização dos materiais, por meio dos seguintes procedimentos:

- *Recorte*: realizado em duas fases que consistem na escolha das unidades, classificadas como *Unidades de Registro*, que se referem à escolha de unidades de significação, codificadas, que vão corresponder a fragmentos do texto, considerados como unidades base, tendo em vista a categorização e a contagem frequencial, e como *Unidades de Contexto***,** que servem de referência para contextualizar as unidades de registro. No caso de a unidade de registro ser a palavra, a unidade de contexto seria a frase. Se fosse uma frase, o contexto seria o tema.
- *Enumeração ou contagem***:** procede-se à escolha das regras de enumeração e do modo de contagem. Após a escolha da regra de enumeração das unidades de registro, o modo de contagem pode ser realizado das seguintes maneiras: *presença (ou ausência)* dos elementos definidos na unidade de registro, que podem servir como indicadores na análise; *frequência* (geralmente a mais usada) indica a importância da unidade de registro e neste caso considera que todas as unidades e registro têm igual importância; *frequência ponderada*: este caso se aplica ao se supor, a priori, que um elemento teria uma importância maior que outro e se recorre a um sistema de ponderação; *intensidade:* que se aplica quando da análise de valores (ideológicos ou tendências) e atitudes, considerando a intensidade semântica do verbo, os advérbios de modo, os adjetivos ou os atributos; *direção:* o uso da frequência com ponderação indica o caráter quantitativo da análise, enquanto que a direção indicaria o caráter qualitativo do elemento, indicado por escalas; *ordem*: quando um índice pertinente seria a ordem de aparição das unidades de registro como, por exemplo, na análise de uma entrevista ou um relato; e *co-ocorrência (análise da contingência)*: quando existe a ocorrência de duas unidades de registro numa mesma unidade de contexto. Neste caso, deve ser considerada a distribuição dos elementos e das suas associações, nas quais existem modalidades qualitativas para diferenciar suas naturezas, a saber: associação (quais elementos aparecem juntos); equivalência (aparecem em contextos idênticos e pode-se deduzir que teriam

caráter de equivalência ou de substituição); e oposição (os elementos nunca aparecem juntos). A autora salienta que a proximidade na ocorrência também pode ser medida, caso seja importante na análise.

- *Classificação e agregação*: visa à escolha de categorias que possibilitem explorar as características do texto. As categorias reúnem unidades de registro sob um título genérico, considerando características comuns entre eles. Têm como objetivo fornecer uma representação simplificada dos dados brutos por condensação, para que as inferências finais possam ser efetivadas pela análise qualitativa do material reconstruído. Supõe-se que existe correspondência entre a mensagem original e a realidade subjacente, referentes ao processo de decomposição-reconstrução do texto. Para garantir a qualidade de uma "boa categoria" é necessário que haja *exclusão mútua* (um elemento não pode existir em mais de uma categoria); *homogeneidade* (garantir uma dimensão para análise, ou seja, um princípio único de classificação); *pertinência* (quando a categoria está adaptada ao material de análise escolhido e quando pertence ao quadro teórico definido); *objetividade e fidelidade* (a codificação de diferentes partes do material deve ser realizada da mesma maneira, mesmo quando submetida a diversas análises); e *produtividade* (o conjunto de categorias é produtivo, quando fornecer resultados férteis para análise).

Olabuenaga e Ispizúa (1989) afirmam que o processo de categorização deve ser entendido como um processo de redução dos dados, no qual as categorias destacam os aspectos mais importantes da comunicação, representando o resultado do esforço da síntese.

Moraes (1998, p. 18) define: "A categorização é um procedimento de agrupar dados, considerando a parte comum existente entre eles. Classifica-se por semelhança ou analogia, segundo critérios previamente estabelecidos ou definidos no processo". O autor afirma que esta é uma das etapas mais críticas da Análise de Conteúdo.

Complementando, Franco (2008) informa que podem existir dois caminhos na elaboração das categorias:

- *Categorias criadas a priori*: são determinadas, assim como os indicadores, em função da busca pela resposta a uma questão de pesquisa específica do analista, visando a uma avaliação centrada em objetivos.

– *Categorias não definidas a priori:* são emergentes dos significados e dos sentidos dos conteúdos analisados e vão depender da clareza e do domínio de diferentes abordagens teóricas do pesquisador. Investigam-se convergências e divergências e as categorias vão sendo criadas no processo.

Em relação ao uso das categorias a priori, a autora afirma que elas podem levar a uma simplificação e a uma fragmentação grande do conteúdo. Também induzem o pesquisador a tentar enquadrar todas as respostas da pesquisa no seu sistema categórico. Já as categorias criadas a posteriori, além de exigir maior conhecimento teórico do pesquisador, podem gerar uma tendência inicial de se criar uma grande quantidade de categorias, o que também fragmenta o conteúdo e prejudica a análise de convergências. Quando isso ocorre, sugere-se reagrupar categorias de menor amplitude em categorias mais abrangentes.

A terceira fase da pesquisa, Bardin (2011) denomina *tratamento de dados, inferência e interpretação.* Após o processo de pré-análise e de exploração, o material bruto deve se tornar significativo e válido. São construídos quadros de resultados, modelos, figuras e diagramas que condensam e salientam as informações obtidas pela análise, por meio de operações estatísticas simples e complexas. Também são utilizados testes de validação visando a um maior rigor dos resultados. Considerando resultados "significativos e fiéis" o analista pode inferir ou propor interpretações sobre os objetivos considerados ou, ainda, sobre descobertas inesperadas (BARDIN, 2011, p. 131).

Nessa fase, a partir da descrição, usa-se a dedução lógica, em que são utilizados índices e indicadores ou variáveis, para se chegar à interpretação dos dados.

Bardin (2011, p. 47) indica que a especificidade da Análise de Conteúdo está na articulação entre a "*superfície dos textos*, descrita e analisada (pelo menos alguns elementos característicos e os *fatores que determinaram estas características*, deduzidos logicamente" e nesse sentido, busca-se:

> [...] correspondência entre as estruturas semânticas ou linguísticas e as estruturas psicológicas ou sociológicas (...) dos enunciados. De maneira bastante metafórica, falar-se-á de um plano sincrônico ou plano "horizontal" para designar o texto e sua análise descritiva, e de um plano diacrônico ou plano "vertical", que remete para as variáveis inferidas.

O foco da Análise de Conteúdo é olhar o objeto para perceber o que está dito e somente ao final faz-se a análise, segundo pressupostos conhecidos da literatura.

Para Bardin (2011), a importância da frequência da variável indica como se chega à inferência que vai propiciar a conclusão da análise. Partindo da descrição e da inferência, são considerados pressupostos teóricos para se chegar às conclusões.

A autora ainda informa que existem cinco tipos de análise:

- *Análise Categorial:* visa descobrir os núcleos de sentido que compõem uma comunicação, considerando a frequência desses núcleos, sob a forma de dados segmentáveis e comparáveis e não com sua dinâmica e organização. É uma das técnicas mais utilizadas em Análise de Conteúdo e segundo Minayo (2010) tem raízes positivistas, tendo em vista que considera a significação de regularidade.
- *Análise de Avaliação:* visa avaliar atitudes do locutor quanto aos objetos de que ele fala (pessoas, coisas, acontecimentos) e baseia-se em como a linguagem reflete e representa aquele que a utiliza. São utilizados indicadores para se elaborar inferências sobre a fonte de emissão explicitada na comunicação. O foco está na direção e na intensidade dos juízos, nas atitudes, na predisposição em omitir opiniões (BARDIN, 1979).
- *Análise da Enunciação:* diferencia-se das demais, apoiando-se na concepção da comunicação como um processo, evitando no texto as estruturas e os elementos formais. Visa elucidar condições de produção da palavra com modalidades do discurso (análise sintática e paralinguística, análise lógica, análise dos elementos formais atípicos: silêncios, omissões, ilogismos e realce das figuras de retórica) (MINAYO, 2010).
- *Análise da Expressão*: visam trabalhar com indicadores da estrutura da narrativa para atingir a inferência formal. Tem como princípio a correspondência entre o tipo de discurso e as características do locutor e de seu meio, identificando a necessidade de se conhecer, para análise, a situação social do autor da fala e dados culturais que o constituem (MINAYO, 2010). É mais indicada na investigação da autenticidade de documentos (literatura, história), na psicologia clínica (psicoterapia, psiquiatria), em discursos políticos ou outros susceptíveis de veicularem ideologias (retórica) (BARDIN, 1979).

- *Análise das Relações*: visa identificar no texto relações entre elementos da mensagem para complementar a análise frequencial simples.

Bardin (2011) sugere que todos esses tipos de análise podem auxiliar na compreensão dos significados manifestos e latentes no material de comunicação.

No desenvolvimento da presente tese, para Análise de Conteúdo dos dados textuais, coletados por meio de questionários, foram considerados os pressupostos da *Análise Categorial*, definidos por Bardin (2011), de modo a esclarecer o problema de pesquisa pela compreensão dos significados sobre o conteúdo manifesto pelos participantes da pesquisa a ser realizada.

Além disso, também foram consideradas, no processo de categorização, algumas etapas definidas por Roque (1998), as quais são descritas a seguir.

Após a definição do *corpus* de pesquisa, realiza-se um processo preliminar de codificação, identificando-se os participantes da pesquisa por letras e números.

Realiza-se, também, a unitarização do *corpus*, que consiste na definição das unidades de análise ou unidades de registro, que são fragmentos do conteúdo considerados importantes para análise, quando o participante explicita o que pensa ou como compreende o que está sendo analisado.

Posteriormente, inicia-se a categorização de todas as unidades de registro, tendo em vista a comparação constante das unidades. Nesse caso, não há categorias “a priori” e são criadas primeiramente as chamadas “categorias iniciais”, de acordo com os significados das unidades de registro, o que geralmente resulta num número grande de categorias. Em seguida, são criadas categorias intermediárias, quando se busca identificar relações e proximidades entre as categorias iniciais, agrupando-as de acordo com seus significados. O processo de reagrupamento se repete, até obter-se as categorias finais, em que todas as unidades de registro se encontram classificadas.

Depois do término da categorização, faz-se a descrição de cada categoria emergente, identificando características mais gerais, identificadas na categoria final, seguidas de descrições mais refinadas, referentes às características identificadas nas categorias intermediarias e iniciais. Nesse processo de descrição, é importante ressaltar que devem ser destacadas características dos grupos que apareceram com maior frequência, uma vez que essa frequência é um indicativo que caracteriza as unidades de registro consideradas.

Em seguida, para cada categoria, faz-se inferências, ou seja, procede-se à interpretação dos resultados, o que exige conhecimento do pesquisador acerca do tema abordado. Finalmente realiza-se a análise, obtendo-se as conclusões e construindo-se, a partir das inferências e de pressupostos teóricos, a fundamentação da análise do conteúdo realizada.

4.5.2.2 Hipóteses estatísticas e Teste *t* de Student

Muitos procedimentos estatísticos são testes de hipóteses. Admite-se uma hipótese a ser testada, chamada de hipótese nula (H_0), e se assume como hipótese alternativa (H_1) aquela que será aceita, caso a hipótese nula for considerada falsa (DOWNING; CLARK, 1999).

Em geral, a análise estatística visa rejeitar a hipótese nula, isto é, visa provar, com certa probabilidade, que a hipótese alternativa é verdadeira. Se a hipótese nula não puder ser rejeitada, então é aceita. Contudo ela não é provada, isto é, parte-se do princípio que ela é verdadeira. Isso ocorre, porque, em geral apenas o erro de rejeição, denominado de Erro do Tipo I, que é controlado e tem uma probabilidade de ocorrer igual a α. Contudo, quando se aceita a hipótese nula, comete-se o erro de aceitação que é denominado de Erro do Tipo II, que tem uma probabilidade de ocorrer igual a β. (CALLEGARI-JACQUES, 2003).

Calcula-se um valor, baseado nas observações, chamado de "*estatística de teste",* que é considerado uma variável aleatória. Caso a hipótese nula for verdadeira, então a estatística de teste consiste numa variável aleatória com distribuição conhecida. Se for provável que este número provenha desta distribuição, se aceita a hipótese nula, caso contrário rejeita-se a hipótese nula (DOWNING; CLARK, 1999).

Quando o desvio padrão populacional σ é conhecido a variável teste segue uma distribuição normal. Contudo quando o desvio padrão populacional σ é desconhecido, usa-se o desvio padrão amostral s e, assim, a variável teste segue uma Distribuição *t*, com grau de liberdade $= n-1$, definida pela fórmula (1) (TRIOLA, 2014):

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad (1)$$

onde:

$\bar{x}$ é a média amostral;

μ é a média populacional;

s é o desvio padrão amostral;

n é o tamanho da amostra sendo utilizada.

O teste *t* de Student, ou simplesmente, teste *t*, foi criado por William Sealey Gosset (1876-1937), químico da Cervejaria Guinness em Dublin, que, perante a necessidade de manipular dados provenientes de pequenas amostras extraídas para melhorar a qualidade da cerveja, criou o teste *t* baseado na distribuição de probabilidade por ele determinada e que passou a ser conhecida como distribuição *t*. Os resultados foram publicados, em 1908, na revista Biometrika sob o pseudônimo de “Student”. Gosset usou esse pseudônimo, pois a Cervejaria Guinness não desejava revelar, aos concorrentes os métodos estatísticos que estava empregando no controle de qualidade da cerveja (VIALI; BERLIKOWSKY, 2016).

O teste *t* é um teste paramétrico que possibilita a comparação entre dois conjuntos de dados quantitativos, em termos de seus valores médios, quando o desvio padrão populacional σ é desconhecido. É utilizado para avaliar se existem diferenças estatísticas significativas entre as médias de dois grupos (amostras) analisados (CALLEGARI-JACQUES, 2003).

A hipótese nula consiste em admitir que as médias das populações consideradas nos dois grupos são iguais ($H_0 : \mu_A = \mu_B$ ou $\mu_A - \mu_B = 0$) e na hipótese alternativa considera-se que são diferentes ($H_1 : \mu_A \neq \mu_B$ ou $\mu_A - \mu_B \neq 0$). No teste *t*, além da curva da distribuição, que deve ser adequada à cada situação considerada, também se calcula o *valor*-p*,* que representa a área sob a curva da distribuição *t*, que pode ser de uma cauda ou de duas caudas conforme o teste seja unilateral ou bilateral. Considerando que o *valor-p* representa a probabilidade dos resultados terem acontecido ao acaso, caso o valor *valor-p* seja menor que o nível de significância α, rejeita-se a hipótese nula e aceita-se a hipótese alternativa. E caso *valor-p* seja maior que α, não rejeita-se a hipótese nula (CALLEGARI-JACQUES, 2003).

Após o cálculo do valor de *t*, identifica-se o *valor-p* caudal aproximado, olhando na coluna da Tabela da Distribuição *t* Student (VIALI, 2016), considerando o elemento da tabela mais próximo de *t*, que está localizado na linha que corresponde ao grau de liberdade da distribuição considerada.

No caso de serem consideradas duas amostras independentes X_A e X_B, com variâncias desconhecidas e supostamente iguais, calcula-se o valor da estatística *t*, com grau de liberdade $gl = n_A + n_B - 2$, por meio da fórmula (2) (CALLEGARI-JACQUES, 2003):

$$t = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\bar{\mu}_A - \bar{\mu}_B)}{\sqrt{s_0^2\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B)}{\sqrt{s_0^2\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} \text{, pois } \mu_A - \mu_B = 0 \qquad (2)$$

onde:

$\bar{x}_A$ e $\bar{x}_B$ são os valores médios das amostras;

$s_0 = \frac{(n_A - 1)\, s_A^2 + (n_B - 1)\, s_B^2}{n_A + n_B - 2}$ é o erro padrão da diferença entre as médias amostrais;

s_A e s_B: desvios padrão das amostras;

n_A e n_B: tamanhos da amostras.

Além disso, a autora indica que caso sejam consideradas amostras tenham variâncias desconhecida e supostamente diferentes calcula-se o valor da estatística t, para cada amostra, pela fórmula (3), com grau de liberdade dado pela fórmula (4). por meio da fórmula:

$$t = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B)}{\sqrt{\left(\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}\right)}} \qquad (3)$$

$$gl = \frac{(w_A + w_B)^2}{\frac{w_A^2}{n_A - 1} + \frac{w_B^2}{n_B - 1}} \text{, onde } w = \frac{s^2}{n}. \qquad (3)$$

Na presente tese, o teste *t* foi usado para comparar notas médias finais obtidas entre os grupos independentes analisados (G1 e G2), onde a hipótese nula consistiu em admitir que as notas médias finais eram equivalentes, ou seja, o uso de recursos tecnológicos não influenciaram a aprendizagem de Álgebra Linear.

Antes de usar o teste *t*, também foi usado o teste *F* (Fisher/Snedecor), o qual possibilitou constatar que as variâncias nas duas amostras eram homogêneas. Desse modo, verificou-se que deveria ser utilizado o teste *t* para amostras independentes, com variâncias homogêneas desconhecidas (CALLEGARI-JACQUES, 2003).

5. PROPOSTA DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM

“[...] Aprendemos mais quando estabelecemos pontes entre a reflexão e a ação, entre a experiência e a conceituação, entre a teoria e a prática; quando ambas se alimentam mutuamente” (MORAN, 2013, p. 28).

O principal objetivo da presente proposta de tese consistiu em identificar influências devidas à exploração de diferentes registros semióticos com uso de recursos das TIC no ensino de Álgebra Linear, considerando uma proposta didática diferenciada da usualmente utilizada, elaborada segundo os fundamentos da teoria da Aprendizagem Significativa de David Paul Ausubel (1963; 1968, 1980) e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1995, 2003, 2012a, 2012b).

Desse modo, o planejamento e a elaboração de tarefas foram propostos tendo em vista apresentar os conteúdos de modo diferenciado, conforme pressupostos da teoria da Aprendizagem Significativa, ou seja, abordando conceitos dos mais gerais para os mais específicos. Assim, foram considerados os princípios da diferenciação progressiva, reconciliação integrativa, organização sequencial e consolidação.

Também foram propostas tarefas visando à identificação de conhecimentos prévios para diagnosticar quais conceitos subsunçores relevantes já estavam disponíveis na estrutura cognitiva do aluno. Nesse sentido, também foram utilizados organizadores prévios, que são materiais potencialmente significativos com os quais se pretende facilitar a interação da nova informação recebida em aula com conceitos subsunções já existentes, de modo a evitar a aprendizagem mecânica, visando estimular a aprendizagem significativa dos conceitos abordados.

Além disso, foram consideradas na proposta de ensino, tarefas que envolveram tanto a exploração de mudanças de registros de representação semiótica, visando a compreensão de conceitos matemáticos, bem como foram pensados diferentes usos dos recursos tecnológicos de modo a estimular a aprendizagem significativa de conceitos.

5.1 Apresentação da proposta

Para compreensão da proposta didática elaborada, apresenta-se a seguir: (i) a ementa atual da disciplina considerada; (ii) os Quadros 3 e 4, que indicam, respectivamente, a sequência de conteúdos historicamente praticada e o novo sequenciamento proposto para o desenvolvimento da ementa da disciplina; (iii) os mapas conceituais que apresentam a proposta, indicando as relações existentes entre os conceitos abordados (ver Figuras 5 e 6); e (iv) as tarefas elaboradas, tendo em vista a exploração dos recursos tecnológicos educacionais na execução do novo sequenciamento didático proposto.

Destaca-se que o curso de Engenharia Civil, da IES onde foi realizada a pesquisa, tem duração de cinco anos e que a disciplina de Álgebra Linear I ocorre regularmente no segundo nível (semestre).

Conforme a matriz curricular, as disciplinas oferecidas no primeiro nível são: Ética geral; Iniciação ao conhecimento acadêmico; Física I; Introdução ao Cálculo; Introdução a Química; Desenho Técnico. No segundo nível são oferecidas: Sociologia da Ciência e da Tecnologia; Física II; Leitura e produção de textos; Álgebra Linear I; Cálculo Diferencial e Integral I; Geometria Analítica; Desenho auxiliado por computador e Estatística.

Disciplina: AMD115 - ÁLGEBRA LINEAR I (180083)

Curso: Engenharia Civil **Nível:** II

Ementa: Matrizes. Matriz inversa. Determinantes. Sistema de Equações Lineares. Transformações Lineares no plano. Autovalor e Autovetor.

Quadro 3 – Sequenciamento de conteúdos anterior

Nº	Descrição de conteúdos de aulas, anteriores à proposta
1	Definições básicas sobre matrizes. Construção de matrizes incluindo uso de somatórios e produtórios.
2	Aplicações de matrizes em teoria dos grafos. Igualdade entre matrizes. Revisão de métodos básicos (adição, substituição e comparação) para resolução de sistemas lineares com duas variáveis.
3	Definição de tipos especiais de matrizes. Operações entre matrizes: adição, multiplicação por escalar e transposição de matrizes. Propriedades.
4	Produto entre matrizes. Propriedades. Casos particulares de matrizes comutativas. Resolução de problemas envolvendo operações entre matrizes.
5	Definição de inversa de uma matriz. Cálculo da inversa por meio de resolução de sistemas. Potência de uma matriz. Definição de Matrizes Ortogonais.
6	Operações elementares entre linhas de uma matriz. Matrizes equivalentes. Matrizes na forma escada. Procedimento para escalonamento total de matrizes.
7	Determinantes. Definição pela regra geral das permutações. Cálculo de determinantes de ordem 1, 2 e 3. Revisão da regra de Sarrus.

8	Cálculo do determinante através do desenvolvimento dos elementos da primeira linha. Teorema de Laplace ou cálculo do determinante através da expansão em cofatores.
9	Propriedades de determinantes. Método de triangulação para cálculo de determinantes de ordem *n*. Exemplos.
10	Cálculo de determinantes de Matrizes de Vandermonde. Aplicação de determinantes no cálculo da área de triângulos.
11	Revisão sobre a inversa de uma matriz. Cálculo da inversa por meio da matriz adjunta. Processo prático usando escalonamento de matrizes para cálculo da inversa.
12	Propriedades da matriz inversa. Divisão matricial. Revisão sobre sistemas de equações lineares. Modelagem matemática na resolução de situações problemas.
13	I Avaliação.
14	Sistemas e matrizes: Forma matricial e matriz ampliada. Tipo de soluções possíveis. Interpretação geométrica. Classificação de sistemas por tipos de soluções.
15	Método da matriz inversa para resolução de sistemas lineares. Aplicação de resolução de sistemas na interpolação polinomial.
16	Sistemas Equivalentes. Método de Gauss-Jordan na resolução de sistemas compatíveis determinados e indeterminados e sistemas incompatíveis
17	Método da Eliminação Gaussiana para resolução de sistemas.
18	Sistemas Lineares homogêneos: solução trivial e não trivial.
19	II Avaliação
20	Definição de Vetores em R, R^2 e R^3. Interpretação Geométrica. Vetores no espaço n dimensional. Módulo, vetor oposto, vetor nulo. Igualdade entre vetores. Operações: Adição e Multiplicação por escalar.
21	Propriedades dos vetores no espaço tridimensional decorrentes das operações definidas. Definição de espaços vetoriais e subespaços vetoriais.
22	Combinação linear. Exemplo. Definição de dependência linear entre vetores. Significado geométrico.
23	Caso particular de verificação de dependência linear. Definição de bases de espaços vetoriais. Vetores geradores de espaços vetoriais.
24	Teorema da invariância: conceito de dimensão de espaços vetoriais. Teoremas e corolários para verificação de bases de espaços vetoriais. Coordenadas de vetores em relação a uma base.
25	Matrizes mudança de base. Inversa da matriz mudança de base.
26	Transformações lineares: definição e verificação.
27	Transformações lineares do plano no plano: expansão ou contração uniforme, reflexão em torno do eixo x, reflexão em torno da origem.
28	Transformações lineares do plano no plano: rotação, cisalhamento horizontal. Transformação não linear: translação. Exemplos e exercícios.
29	Autovalores e autovetores associados a transformações lineares ou a matrizes. Interpretação analítica e geométrica dos resultados.
30	III Avaliação

Fonte: Autora.

Destaca-se que, no sequenciamento anteriormente utilizado, os conteúdos eram apresentados de acordo com a ordem da ementa preestabelecida.

Quadro 4 - Novo sequenciamento proposto

Nº	**Descrição de conteúdos de aulas relativos à nova proposta**
1	Aplicação de questionários iniciais. Resolução de problemas, visando à obtenção de representações matemáticas simplificadas por meio de sistemas lineares simples e complexos. Exemplos: equilíbrio de forças e fluxos em redes, entre outros. Conceituação de sistemas lineares e soluções. Introdução aos tipos de métodos de resolução. **TAREFA 1.**
2	Sistemas de pequeno porte - resolução por métodos básicos: adição, comparação e substituição. Interpretação Geométrica. Tipo de soluções possíveis. Interpretação geométrica. Classificação de sistemas por tipos de soluções. **TAREFA 2.**
3	Sistemas de grande porte – métodos mais complexos – representação matricial. Definições

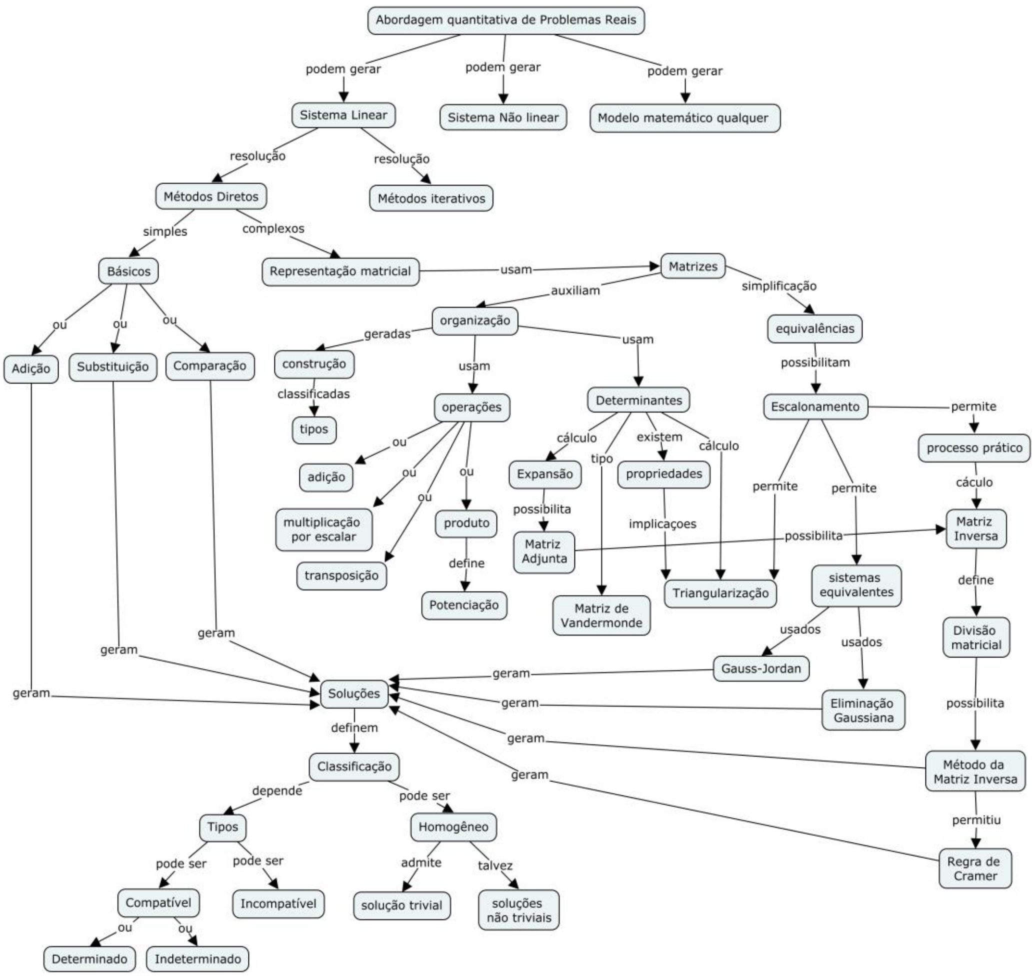
	básicas sobre matrizes. Tipos especiais de matrizes. **TAREFA 3.**
4	Igualdade entre matrizes. Operações entre matrizes: adição, multiplicação por escalar e transposição de matrizes. Propriedades. Produto entre matrizes. Propriedades. **TAREFA 4**
5	Resolução de exercícios e problemas aplicados envolvendo operações entre matrizes. **TAREFA 5.**
6	Tarefa avaliativa sobre uso de matrizes em resolução de problemas. **TAREFA 6.**
7	Construção de matrizes incluindo uso de somatórios e produtórios. Representação de redes de acesso. Potenciação de matrizes**. TAREFA 7**
8	**TAREFA 8:** cálculo da área de um triângulo por meio de seus vértices. Definição de determinantes: cálculo de determinantes de ordem 1, 2 e 3, regra de Sarrus. Cálculo do determinante através do desenvolvimento dos elementos da primeira linha. Teorema de Laplace ou cálculo do determinante através da expansão em cofatores.
9	Propriedades de determinantes. Cálculo de determinantes de matrizes triangulares. Exemplos e exercícios
10	Equivalência entre matrizes: operações elementares entre linhas de uma matriz. Procedimento para escalonamento de matrizes e para cálculo de determinantes (ordem *n*).
11	Método de triangulação para cálculo de determinantes de ordem *n*. **TAREFA 9**
12	Cálculo de determinantes de Matrizes de Vandermonde.
13	I Avaliação.
14	Sistemas e matrizes: forma matricial e matriz ampliada. Sistemas equivalentes. Método de Gauss-Jordan na resolução de sistemas compatíveis determinados e indeterminados e sistemas incompatíveis. **TAREFA 10**
15	Método da eliminação Gaussiana para resolução de sistemas, com uso do *MATLAB* para resolução do escalonamento parcial. Aplicação de resolução de sistemas lineares para obtenção da interpolação polinomial. **TAREFA 11**
16	Introdução ao método da matriz inversa para resolução de sistemas lineares. Casos particulares de matrizes comutativas em relação à multiplicação entre matrizes: definição de inversa de uma matriz. Cálculo da inversa por meio de da matriz adjunta e por meio do processo prático, usando escalonamento de matrizes para cálculo da inversa.
17	Propriedades da matriz inversa. Divisão matricial. Método da matriz inversa.
18	Exemplos de resolução de problemas com uso de recursos do *MATLAB*. Tarefa avaliativa no laboratório computacional envolvendo resolução de problemas com aplicação dos métodos de resolução de sistemas abordados. **TAREFA 12**
19	Atividade em grupo realizada na sala de aula: apresentação das resoluções realizadas pelos estudantes com reflexões sobre os processos utilizados.
20	Sistemas lineares homogêneos: solução trivial, não trivial e parametrizada.
21	II Avaliação com uso de TIC.
22	**TAREFA 13** - Cálculo de esforços em estruturas – exemplo de uso de resolução de sistemas específico na área de engenharia.
23	Introdução do estudo de transformações lineares por meio de conceitos envolvidos em análise de estruturas. Associação de cálculo de esforços tais como: tração, compressão, torção e cisalhamento associados a transformações lineares dos tipos expansão uniforme, contração uniforme, rotação e cisalhamento, respectivamente. Associação do estudo de autovalores e autovetores aplicado à análise de vibração em estruturas: os autovalores estão relacionados aos modos de frequência de vibração e os autovetores correspondentes são os deslocamentos (ou deformações) que a estrutura sofre devido a vibração existente. Estudo de espaços vetoriais: definição de representação geométrica e algébrica de vetores em R, R^2 e R^3. Vetores no espaço *n* dimensional. Módulo, vetor oposto, vetor nulo e versor de um vetor.
24	Igualdade entre vetores. Operações: Adição e Multiplicação por escalar. Propriedades dos vetores no espaço tridimensional decorrentes das operações definidas. Definição de espaços vetoriais. Definição de subespaços vetoriais
25	Combinação linear. Definição de dependência linear entre vetores. Significado geométrico. Caso particular de verificação de dependência linear.
26	Definição de bases de espaços vetoriais. Teorema da invariância: conceito de dimensão de espaços vetoriais. Teoremas e corolários para verificação de bases de espaços vetoriais.
27	Coordenadas de vetores em relação a uma base. Conceito de transformações lineares. Transformações lineares do plano no plano: expansão ou contração uniforme, reflexão em torno do eixo x, reflexão em torno da origem, rotação, cisalhamento horizontal e revisão de

	relações com análise de esforços em estruturas. Exemplo de transformação não linear, muito utilizada na representação de deslocamentos espaciais de estruturas: translação. **TAREFA 14.**
28	Definição e cálculo de autovalores e autovetores associados à transformações lineares ou à matrizes. Interpretação analítica e geométrica dos resultados.
29	III Avaliação
30	**TAREFA 15 –** Desenvolvida com *MATLAB* para ilustrar como as transformações lineares podem ser utilizadas na resolução de problemas de criptografia.

Fonte: Autora.

Em relação ao novo sequenciamento proposto, elaborado segundo a teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, foram invertidas as ordens de apresentação dos conteúdos previstos na ementa. Visou-se a abordagem de conhecimentos mais gerais e abrangentes seguidos de conhecimentos mais específicos, possibilitando, assim, a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa dos conceitos abordados.

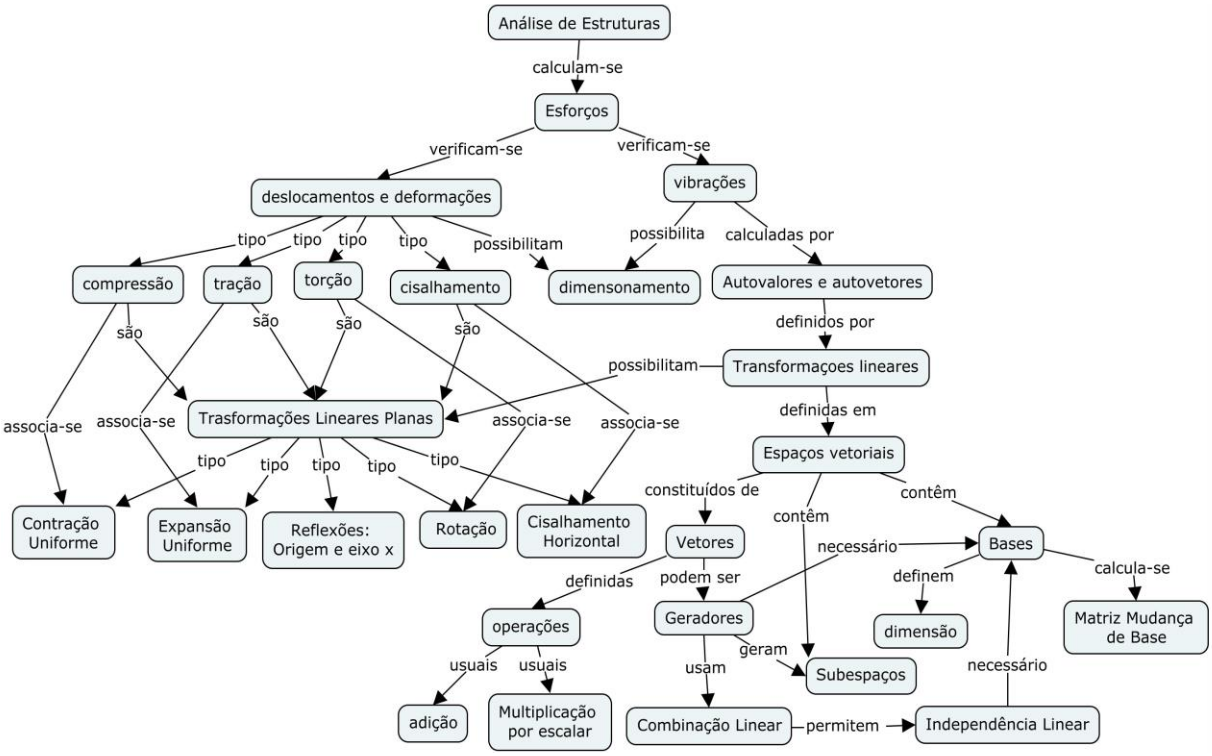
Figura 4 - Mapa conceitual referente ao planejamento da primeira parte do conteúdo segundo a concepção de Ausubel



Fonte: Idealizado pela autora com uso da ferramenta Cmap Tools (2016)

Os mapas conceituais apresentados nas Figuras 4 e 5 possibilitam perceber melhor a relação entre os conceitos abordados na disciplina, tendo em vista o novo sequenciamento proposto.

Figura 5 - Mapa conceitual referente ao planejamento da segunda parte do conteúdo segundo a concepção de Ausubel



Fonte: Idealizado pela autora com uso da ferramenta Cmap Tools (2016)

5.2 Detalhamento das tarefas

Nesta seção, apresenta-se o detalhamento de tarefas elaboradas com exploração de registros de representação semiótica e de uso de recursos tecnológicos.

Segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, os registros monofuncionais possuem algoritmos próprios usados em sua estrutura e os multifuncionais são aqueles que necessitam de tratamentos não algoritmizáveis (DUVAL, 2003).

Visando propiciar a compreensão de conceitos matemáticos, buscou-se propor, no desenvolvimento das tarefas, que os estudantes trabalhassem com manipulação de diferentes registros de representação semiótica, valorizando não somente as transformações de tratamento, mas especialmente as de conversão, estimulando a compreensão dos conceitos, por meio da exploração do trânsito entre registros multifuncionais, tais como:

- *Linguagem natural*, para representações discursivas, relacionadas tanto à apresentação das situações problemas quanto aos discursos argumentativos envolvidos nas resoluções e conclusões apresentadas na organização do discurso matemático elaborado.
- *Linguagem gráfica*, com uso de estruturas de grafos ou de construções geométricas, na reta real, no plano cartesiano ou no espaço tridimensional, usados para representação dos dados dos problemas visando suas compreensões ou, ainda, explorando métodos de resoluções geométricos para resolução de problemas, tais como encontrar a solução de sistemas envolvendo duas variáveis.
- *Linguagem numérica*, usada na representação numérica dos problemas envolvendo números reais, inteiros ou fracionários como, por exemplo, nos processos de escalonamentos gerados pelos métodos de resolução de sistemas.
- *Linguagem algébrica*, que envolve tanto a resolução de expressões literais como a resolução de equações ou inequações, que aparecerem na modelagem matemática das situações propostas, bem como nas resoluções de sistemas por métodos algébricos.

Assim, nas tarefas, propôs-se o uso de diferentes tipos de registros de representação, pois se concorda com Zugno, Silva e Silva (2015), quando afirmam que o uso da teoria das representações semióticas de Raymond Duval e a mudança de registros no tratamento dos dados favorecem o processo de aprendizagem. Os autores também indicam que o uso da tecnologia digital, por meio dos recursos oferecidos pelo GeoGebra, agilizou a representação geométrica, tornando o processo dinâmico e interativo, o que possibilitou a aprendizagem por meio da construção de conhecimentos realizada pelos estudantes.

De modo geral, o uso de recursos tecnológicos digitais não somente facilita a representação de um objeto matemático em diferentes tipos de registros de representações semióticas mas também facilita a manipulação de dados, evita erros de cálculos e propicia rapidez na obtenção de soluções numéricas. Também facilita a interpretação de problemas por meio da sua visualização gráfica.

Tendo em vista essa gama de possibilidades, buscou-se explorar, nas tarefas elaboradas, o uso de recursos tecnológicos diferenciados oferecidos pelos *softwares* GeoGebra, *MATLAB* e *Excel*. Ressalta-se que esses *softwares* foram escolhidos por oferecerem ambientes apropriados às resoluções de problemas próprios da disciplina de Álgebra Linear e também por possuírem uma interface amigável, ou seja, de fácil utilização. Além disso, salienta-se que possibilitam meios para resoluções interativas dos problemas propostos, tanto do ponto de vista numérico como do ponto de vista algébrico e também possibilitam representações gráficas, as quais favorecem a compreensão dos problemas investigados.

Existem diversos *softwares* disponíveis para o ensino e aprendizagem de matemática, com variados recursos hipermídia. No entanto, dependendo do modo como são idealizados, muitos apenas reproduzem virtualmente os modelos tradicionais de ensino. Nesses ambientes, os estudantes recebem informações e respondem a questões relacionadas ao tema abordado ou praticam a resolução de exercícios, de modo repetitivo. Por outro lado, também existem *softwares* educativos diferenciados, elaborados segundo a concepção construtivista de aprendizagem.

Esses ambientes de aprendizagem, além de serem interativos, propiciam aos estudantes manipular dados, investigar hipóteses e testar possibilidades de solução durante a resolução do problema proposto. Essa liberdade de ação possibilita a ampliação ou construção de conhecimentos próprios, que resulta de processos interativos e investigativos propiciados por esses aplicativos.

Morgado (2003) classifica os *softwares* educativos em dois grupos. No primeiro estão aqueles desenvolvidos especificamente para fins educacionais. Cita como exemplo os softwares *Logo*, *Winplot*, *Cabri-Géomètre*, entre outros. No segundo grupo, o autor indica aqueles que, apesar de não terem sido desenvolvidos com finalidades educativas, podem também ser utilizados para esse fim, tais como as planilhas, calculadores numéricos ou programas que viabilizam a criação e manipulação de banco de dados, entre outros.

Salienta-se que o ambiente da planilha, além de possibilitar o armazenamento de matrizes de modo direto e organizado, por meio de suas linhas e colunas, também possibilita a inserção de novas fórmulas em suas células, de modo intuitivo e simples bem como permite trabalhar com diversas funções pré-programadas. Outro recurso é a atualização automática de resultados com a alteração de qualquer dado de entrada de uma função ou procedimento. Contudo, o recurso mais útil da planilha é a reprodução automática de qualquer fórmula utilizada em uma célula para as células vizinhas mediante a operação de arrastar o resultado da célula que contém a fórmula (função).

Como exemplos de uso desses recursos para o ensino e aprendizagem de matemática destacam-se os trabalhos de (i) Braga e Viali (2011), que analisaram potencialidades do uso da planilha na compreensão de conceitos da função afim e quadrática, por meio de tarefas aplicadas à estudantes de 8ª série de uma escola particular. Os autores concluíram que esse recurso tecnológico, por possibilitar a mobilização e o trânsito entre diferentes tipos de representação semiótica, favoreceram a compreensão de conceitos tratados. Outro trabalho é o de (ii) Bona e Ribeiro (2016), que exploraram seus recursos para abordagem de conteúdos de matemática financeira no ensino superior e indicaram que as planilhas associadas aos problemas cotidianos possibilitam aos estudantes um espaço para aprender a aprender. Além disso, concluíram que os estudantes aprenderam mais que o usual pois, no processo de aprendizagem, a necessidade de construção de modelos matemáticos e de explicações sobre os raciocínios utilizados propiciaram processos de reflexão sobre suas próprias aprendizagens.

Tendo em vista tais potencialidades, também se optou pela exploração dos recursos oferecidos pela planilha na proposição de tarefas, considerando que os estudantes, ao buscarem soluções para os problemas apresentados, poderiam, além de perceber aplicações do uso de matrizes na resolução de problemas associados aos seus cotidianos, também poderiam realizar os cálculos algébricos necessários por meio do uso dos seus recursos, o que evitaria possíveis erros de cálculos bem como implicaria em economia de tempo em suas execuções.

Desse modo, propôs-se aos estudantes a resolução de problemas contextualizados, realizadas no ambiente da planilha, nas quais os estudantes foram desafiados a pensar adequadamente tanto no armazenamento de dados em matrizes, como nos usos de operações entre as matrizes criadas, de modo a permitir a obtenção dos resultados esperados. Nesses casos, as tarefas visavam possibilitar ambientes de aprendizagem propícios à compreensão dos conceitos envolvendo matrizes e suas operações. Também foi utilizado o ambiente da planilha para explorar os conceitos envolvidos no método de triangulação de matrizes, usado para o cálculo do determinante de ordem *n* (ver Tarefas 4, 5, 6, 7 e 9).

Outro aplicativo escolhido foi o GeoGebra. Trata-se de um aplicativo gratuito, disponibilizado na rede mundial de computadores, que, atualmente, se destaca entre diversos recursos tecnológicos utilizados nos ambientes escolares, pois possibilita trabalhar ao mesmo tempo com Geometria, Álgebra, Cálculo e Estatística, de modo dinâmico. Foi desenvolvido inicialmente por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg. (HOHENWARTER, 2007).

Muitas investigações em Educação Matemática têm sido desenvolvidas com uso desse aplicativo com diferentes objetivos, inclusive em dissertações de mestrado profissional. Como exemplo, pode ser citado o trabalho de Souza (2014), que propôs a utilização desse aplicativo para promover o estudo de cônicas. Nessa pesquisa, o autor abordou conceitos de espaços vetoriais, transformações lineares, autovalores e autovetores de Álgebra Linear, nos quais o ambiente do GeoGebra possibilitou explorar a construção gráfica das cônicas e de suas modificações por meio matrizes de transformação. Também pode ser citado o trabalho de Silva (2014), que desenvolveu tarefas para o estudo de sistemas lineares nos quais os recursos possibilitaram explorar relações entre Geometria e Álgebra Linear, o que facilitou a construção dos conceitos trabalhados bem como despertou o interesse dos estudantes pelo tema. O autor comenta que também elaborou as tarefas segundo a teoria de Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval.

Na presente pesquisa, assim como Silva (2014), também se buscou, em uma das tarefas propostas, explorar conceitos envolvidos no estudo de sistemas de equações lineares por meio de construções gráficas no GeoGebra. A tarefa 2 possibilitou, aos estudantes, perceber associações entre o método de resolução geométrico e o método de resolução algébrico.

Além disso, os recursos do GeoGebra também foram explorados nas tarefas 11, 13 e 14. Nas tarefas 11 e 13, o aplicativo possibilitou a representação gráfica dos problemas e, na tarefa 14, facilitou a percepção de características relacionadas às transformações lineares clássicas.

O terceiro aplicativo utilizado foi o *MATLAB* (*MATrix LABoratory*) desenvolvido pela *MathWorks*. Trata-se de um software criado inicialmente para fazer cálculos com matrizes, por Cleve Moler, no final dos anos 1970, que posteriormente, foi aperfeiçoado por Jack Little e Steve Bangert, que reescreveram o *MATLAB* em linguagem C (CHAIA; DAIBERT, 2017).

Becker et al. (2010) informam que o *MATLAB* é um *software* interativo de computação numérica de alta performance para análise e visualização de dados. Possui uma interface amigável, na qual problemas e soluções podem ser inseridos e interpretados por meio da linguagem matemática, não sendo preciso conhecer a linguagem de programação tradicional. Disponibiliza uma grande quantidade de bibliotecas auxiliares ("*Toolboxes*") que facilitam a realização de tarefas, pois oferecerem uma grande quantidade de funções preexistentes que otimizam o tempo gasto na realização de tarefas. Possibilita, além da construção de gráficos, a manipulação de funções predeterminadas e o uso de variáveis simbólicas. Além disso, o *MATLAB* é, também, uma linguagem de programação de alto nível.

Assim como os demais *softwares* citados, o *MATLAB* tem sido usado em diversas propostas de ensino. A seguir são apresentados alguns exemplos desses trabalhos.

Marchetto (2016) relata que fez uso do aplicativo em duas turmas do ensino médio politécnico, para contextualização da utilização de matrizes e de suas transformações em imagens. A autora destaca que a abordagem construcionista da proposta, com uso do *MATLAB*, favoreceu a aprendizagem dos estudantes pois eles realizaram a tarefa rapidamente e demonstraram avanços que puderam ser observados durante seu desenvolvimento. Afirma que gostaram de ter trabalhado com o aplicativo e que demonstraram interesse pela tarefa. Também salienta que os estudantes conseguiram aprimorar suas estratégias de resolução com o uso de recursos oferecidos pelo aplicativo.

Parmegiani (2011) apresenta uma abordagem pedagógica para estudo de transformações lineares do plano no plano, para cursos de Engenharia, na qual propõe o uso dos recursos do *MATLAB* para manipulação dos dados e para visualização de figuras transformadas. A autora afirma que o propósito do trabalho consistiu em propiciar a concretização desse conteúdo além de possibilitar aos estudantes o conhecimento do aplicativo. Relata que o desenvolvimento da tarefa exigiu muito empenho dos estudantes e que, num primeiro momento, sentiram dificuldades devido ao desconhecimento do aplicativo, mas após a ambientação, notou que a preocupação inicial deu lugar à criatividade e ao interesse e destacou que a utilização do *MATLAB* possibilitou alcançar os objetivos iniciais propostos.

Mariani e Martin (2003) também apresentam um relato sobre experiências vivenciadas em aulas teóricas e de laboratório computacional em que apresentam possibilidades de uso do *MATLAB* no ensino de sistemas de equações lineares e cálculo de autovalores autovetores. Os autores afirmam que optaram pelo aplicativo *MATLAB* por se tratar de um sistema interativo que possibilita, além do desenvolvimento de algoritmos, que a resolução de tarefas seja rápida e eficiente. Salientam a importância do uso de recursos no ensino de engenharias, devido às facilidades e vantagens que podem trazer para os ambientes de ensino.

Destaca-se que também existe o *SciLab* (*Scientific Laboratory*), que é um software livre, disponível na rede mundial de computadores desde 1994, que foi inspirado no software *MATLAB*. Foi criado em 1990, por um grupo de pesquisadores do INRIA – *Institut de Recherche en Informatique et en Automatique* e da ENPC - *Ècole Nationale des Ponts et Chaussées* (SCILAB, 2015). Devido à sua semelhança ao *MATLAB*, ele também foi citado durante as aulas, como um *software* alternativo, mas não foi efetivamente utilizado nas tarefas realizadas.

Além dos *softwares Geogebra*, *Excel* e do *MATLAB*, que possibilitaram a construção interativa do conhecimento, também foram utilizados, ao longo de todo o semestre, recursos tecnológicos vinculados ao uso do computador tais como projetores multimídias e caixas de som. Esses recursos possibilitaram a projeção de *slides* com materiais informativos, elaborados no aplicativo *Power Point*, bem como a apresentação de vídeos sobre temas de interesse, utilizados como organizadores prévios, tendo em vista tanto o resgate de conceitos quanto a familiarização com um tema ou até mesmo o simples repasse de novas informações utilizadas no desenvolvimento das tarefas (ver Tarefas 1, 3 e 4).

Além disso, na Tarefa 3, ao se abordar a resolução de um de problema de localização, também fez-se o uso da geotecnologia *Google Maps*™, acessado por meio dos telefones celulares dos estudantes. O objetivo foi obter as distâncias aproximadas entre as cidades consideradas no problema.

De modo geral, diferentemente do modelo centrado no professor que somente apresenta o conteúdo, dá exemplos e depois propõe exercícios repetitivos, nas tarefas propostas buscou-se estimular a participação ativa dos estudantes na resolução de problemas, por meio de conversas dialogadas e dos desafios que foram propostos. Geralmente era solicitado, durante a aula, que trabalhassem em duplas, de modo a favorecer a reflexão e a construção coletiva das soluções.

O uso de aplicativos computacionais, especialmente na resolução dos problemas, exigiu que as duplas entrassem em consenso sobre a compreensão dos conceitos para que pudessem usar os recursos tecnológicos disponíveis com clareza e objetividade. As resoluções dos problemas também exigiram que houvesse interpretação de resultados gerados automaticamente, o que possibilitou discussões e reflexões sobre os conteúdos tratados. Desse modo, possibilitaram estimular a criatividade e a análise crítica de resultados, ao refletirem sobre a identificação de objetos matemáticos, por meio da percepção de relações e de articulações entre diferentes tipos de representações existentes.

Além disso, ao serem apresentadas novas informações no ambiente da sala do ensino superior, buscava-se resgatar conceitos subsunçores preexistentes por meio de materiais potencialmente significativos (organizadores prévios), de modo a favorecer a interação dos novos conceitos tratados com aqueles já existentes na estrutura cognitiva, visando potencializar a aprendizagem significativa de conceitos.

Nesse sentido, fez-se uso de apresentações, organizadas em *slides*, elaboradas no *PowerPoint,* e de vídeos, com a intenção de explorar a potencialidade desses recursos.

Conforme Moran (1995, p. 27):

> O vídeo é sensorial, visual, linguagem falada, linguagem musical e escrita. Linguagens que interagem superpostas, interligadas, somadas, não separadas. Daí a sua força. Somos atingidos por todos os sentidos e de todas as maneiras. O vídeo nos seduz, informa, entretém, projeta em outras realidades (no imaginário), em outros tempos e espaços.

Além disso, Moran (2007, p. 47) indica que “Há atividades que facilitam a organização e outras a superação” e, ao se referir ao uso de vídeo na escola, afirma que podem existir dois focos:

> 1. Quando o vídeo provoca, sacode, causa inquietação e serve como abertura para um tema, é um estímulo em nossa inércia [...];
> 2. Quando o vídeo serve para confirmar uma teoria, uma síntese, um olhar específico com o qual já estamos trabalhando, é ele que ilustra, amplia, exemplifica.

Destaca-se que nas tarefas elaboradas, os vídeos utilizados foram escolhidos para serem apresentados aos estudantes de modo a contemplar, em momentos diferentes, esses dois focos. Visaram não somente resgatar conhecimentos prévios mas também apresentar novos conceitos ampliando e exemplificando os conteúdos abordados.

A seguir, apresenta-se o planejamento de cada tarefa e nos anexos constam as folhas que foram eventualmente entregues aos estudantes com orientações sobre as tarefas desenvolvidas.

Tarefa 1 - Objetivo: apresentar, usando recursos multimídias, de que modo são utilizados sistemas lineares na resolução de problemas reais e propor a resolução de problemas que recaiam em sistemas de equações lineares.

- Vídeo sobre resolução de problemas – A voz do interior. (Fonte: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1192)
- Apresentação de projeto de extensão sobre construção de pontes - uso da álgebra no cálculo estrutural.
- Apresentação em *Power Point* sobre fluxo em redes.
- Proposição de problemas às duplas para serem representados e resolvidos por meio de sistemas lineares.

Tarefa 2 - Objetivo: relembrar métodos algébricos básicos de resolução de Sistemas e explorar a interpretação geométrica de sistemas lineares 2x2, explorando recursos do GeoGebra.

- Apresentar exemplos de como proceder à análise da solução com uso do registro geométrico e algébrico de sistemas lineares com duas variáveis.
- Propor exercícios para que sejam resolvidos em duplas, tanto pelo método algébrico como pelo método geométrico, com uso do GeoGebra.

Tarefa 3 - Objetivo: ilustrar o uso de matrizes em problemas reais.

- Propor a resolução de um problema de fluxo em rede que, ao ser modelado matematicamente, corresponde à um sistema linear com quatro equações e quatro variáveis, para que percebam
    a. a dificuldade do emprego de métodos mais simples como da adição ou de substituição para se determinar as infinitas soluções existentes.
    b. a necessidade de se estudar técnicas de Álgebra Linear mais sofisticadas para resolução de sistemas de equações lineares.
- Apresentar *slides* sobre aplicação de matrizes em problemas reais nas quais apareça, entre várias aplicações, especialmente o emprego de matrizes na representação de sistemas lineares.

- Apresentar *slides* sobre definição de matrizes, contemplando conceitos fundamentais, bem como alguns tipos especiais de matrizes, que serão utilizados ao longo do semestre.
- Apresentar vídeo sobre uso de matrizes – Cooperativa de leite. (Fonte: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1076).
- Solicitar que resolvam um problema de localização, de modo a explorar o uso da geotecnologia *Google Maps™*, acessada pelo telefone celular, para obtenção de distâncias entre as cidades consideradas.

Tarefa 4 - Objetivo: identificar conhecimentos prévios e revisar operações básicas.

- Solicitar que os estudantes resolvam alguns exercícios sobre operações entre matrizes: adição, multiplicação por escalar, transposição, multiplicação entre matrizes, visando identificar os conhecimentos prévios sobre estes conceitos.
- Apresentar *slides* sobre igualdade de matrizes e sobre as operações: adição, multiplicação por escalar e transposição.
- Apresentar vídeo sobre produto de matrizes – Bombons a granel. (Fonte: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1055).
- Continuar a apresentação em *slides* sobre multiplicação de matrizes.
- Resolver os exercícios no quadro, propostos no início da aula, visando esclarecimento de dúvidas.
- Disponibilizar listas de exercícios sobre as operações com matrizes revisadas.
- Solicitar que entreguem as listas de exercícios resolvidas, esclarecendo que a tarefa será avaliada e que valerá um ponto da primeira avaliação.

O objetivo desta tarefa foi prepará-los para o uso da planilha eletrônica, fazendo com que revisassem os conceitos necessários (envolvidos na próxima tarefa) antes da próxima tarefa, que visou favorecer especialmente àqueles que faltaram à aula de revisão, que havia sido realizada anteriormente.

Cabe destacar que a identificação de conhecimentos prévios relevantes dessa tarefa foi realizada por meio da análise do material coletado (produções individuais de cada estudante), após o término da aula. Isso não foi possível durante aula, devido ao pouco tempo disponível para a realização das atividades.

Os conceitos abordados inicialmente nessa tarefa (operações com matrizes) geralmente são trabalhados no segundo ano do ensino médio e, teoricamente, já deveriam estar presentes na estrutura cognitiva dos estudantes.

Assim, o objetivo dessa tarefa foi identificar de que modo esses conceitos apareciam nas produções dos estudantes, visando o planejamento das próximas aulas, ou de tarefas, de modo que elas pudessem colaborar de modo mais específico com a construção desses conhecimentos básicos, os quais são necessários na construção de conceitos mais complexos, abordados posteriormente na disciplina.

Tarefa 5 - Objetivos: propiciar a compreensão de operações básicas entre e com matrizes. Capacitar os estudantes para uso e manipulação de recursos computacionais em planilhas, para resolução de exercícios que envolvam operações entre matrizes, visando propiciar a familiarização dos estudantes com os recursos disponíveis nas planilhas eletrônicas.

- Apresentar instruções básicas de uso da planilha, com resolução de exercícios, envolvendo adição de matrizes, multiplicação por escalar, transposição e multiplicação entre matrizes.
- Propor o desenvolvimento de resoluções de exercícios variados, disponibilizados em arquivos digitais, baseados em listas que haviam sido resolvidas anteriormente (sem o auxílio do computador), para serem novamente resolvidos com auxílio dos recursos das planilhas, em laboratório computacional.

Tarefa 6 - Objetivo: realizar a avaliação sobre compreensão de operações básicas entre e com matrizes e manipulação de recursos computacionais para resolução de situações problemas.

- Propor duas situações problema para os estudantes resolverem, em duplas ou em trios, no laboratório computacional, com auxílio dos recursos de planilhas eletrônicas.
- Solicitar que enviem os arquivos digitais para que sejam avaliados pelo professor.

Tarefa 7 - Objetivos: apresentar a utilização de matrizes para representação abstrata de problemas reais bem como o uso de produto de matrizes (no caso potenciação) para tratamento e análise de dados por meio da manipulação de recursos computacionais para resolução de situações problemas.

- Propor uma situação problema envolvendo uma rede de computadores representada por um Grafo, no qual os nós representem os computadores e os arcos representem os acessos diretos. Solicitar que construam uma matriz binária A que represente a matriz de acessos diretos entre os computadores.
- Fazê-los perceber, ao utilizar a planilha do Excel, que as matrizes potências A^n (o produto de A por A, n vezes), fornecem em seus elementos os acessos em n estágios.

Tarefa 8 - Objetivos: identificar conhecimentos prévios e apresentar a utilização de determinantes no cálculo de áreas de triângulos.

- Propor que resolvam o desafio, apresentado em *slides* elaborados em *Power Point,* de calcular áreas de dois triângulos, sendo que o primeiro tinha a base e altura paralelas aos eixos e o segundo não, solicitando que entreguem suas resoluções iniciais para posterior análise, com a finalidade de identificar conhecimentos prévios.
- Apresentar a demonstração, em *slides*, da fórmula para cálculo da área do triângulo por meio das coordenadas de seus vértices.
- Resolver com eles os dois problemas propostos utilizando a fórmula apresentada, para esclarecimento de dúvidas.
- Destacar a importância do cálculo da área de triângulos por meio de seus vértices, especialmente quando é necessário calcular a área de superfícies quaisquer, que possam ser decompostas por meio de triângulos, a exemplo do método dos elementos finitos, muito utilizado nas engenharias.

Nesta tarefa, assim como na tarefa 4, o objetivo consistiu em identificar conhecimentos prévios acerca de determinantes e de áreas de triângulos, tendo em vista que esses conceitos, geralmente, são abordados ao longo do ensino fundamental e no ensino médio e que poderiam, ou não, estar disponíveis como conceitos subsuncores.

Essa análise também foi realizada após o término da aula, pelo reconhecimento de seus usos nas produções dos estudantes e visou o planejamento de ações posteriores, com vistas a propiciar a aprendizagem significativa de conceitos posteriores, mais complexos.

Também visou despertar o interesse pelo aprendizado desse conteúdo, tendo em vista suas diversas aplicações em situações práticas do contexto da Engenharia Civil.

Tarefa 9 - Objetivos: apresentar o método teórico e utilizar os recursos da planilha eletrônica, visando mostrar os resultados teóricos por meio de exemplos práticos, tendo em vista favorecer e estimular a compreensão desse conteúdo.

- Apresentar inicialmente a teoria que fundamenta o método de triangulação de matrizes para cálculo de determinantes.
- Apresentar como se utiliza a sub-rotina específica da planilha para o cálculo do determinante.
- Com uso de planilhas eletrônicas, relembrar como pode ser realizado o cálculo da área de triângulos, obtido por meio do determinante de uma matriz construída a partir de seus vértices.
- Apresentar exemplos que ilustrem o processo de obtenção do determinante por meio da triangulação de matrizes, explorando comprovações numéricas ao longo do processo além de exemplos que também possibilitassem a percepção das mudanças ocorridas nos determinantes das matrizes modificadas, referentes ao uso das operações elementares entre linhas de uma matriz, no escalonamento parcial de matrizes, visando favorecer suas aprendizagens e compreensões sobre o método utilizado.
- Solicitar que resolvam exercícios sobre uso dos métodos abordados com o auxílio da planilha e que busquem comprovar os resultados obtidos. Também foi solicitado que as resoluções fossem entregues para avaliação.
- Solicitar que respondam a um questionário sobre suas percepções quanto ao uso da planilha na aprendizagem do método proposto.

Tarefa 10 - Objetivos: relembrar o método de Gauss-Jordan para resolução de sistemas quaisquer e apresentar os procedimentos de uso dos recursos do *software MATLAB* na automatização da resolução, tendo em vista favorecer e estimular a compreensão desse conteúdo e promover a familiarização com o uso dos recursos oferecidos pelo aplicativo.

- Apresentar uma resolução completa de um sistema pelo método de Gauss-Jordan, explorando as interpretações necessárias em todo o processo.

- Apresentar como se procede à resolução automatizada do processo de escalonamento da matriz ampliada pelo *MATLAB*, realizada por comandos que executam o escalonamento passo a passo.
- Ilustrar o processo de resolução, aplicando-o a diferentes tipos de sistemas: (i) Compatível e Determinado; (ii) Compatível e Indeterminado e (iii) Incompatível (exercícios da página 44).
- Explorar, por meio do questionamento dialogado, a análise crítica dos diferentes tipos de respostas obtidas, tendo em vista resgatar conceitos prévios e propiciar a diferenciação progressiva, ou seja, a reconciliação integrativa; organização sequencial e consolidação desse conteúdo, já apresentado em sala de aula.
- Estimular o registro escrito do processo realizado, tendo em vista esclarecer as relações entre os diferentes tipos de registros semióticos utilizados.

Tarefa 11 - Objetivos: apresentar o método da Eliminação Gaussiana para resolução de sistemas quaisquer e apresentar os procedimentos de uso dos recursos do *MATLAB* na automatização da resolução, tendo em vista favorecer e estimular a compreensão desse conteúdo e a familiarização com o aplicativo. Apresentar uma aplicação em um problema.

- Apresentar um exemplo manual de resolução completa de um sistema pelo método da Eliminação Gaussiana, explorando as interpretações necessárias em todo o processo.
- Apresentar a execução do processo por meio de comandos adequados, com auxílio do *MATLAB*, por meio da resolução do escalonamento parcial, esclarecido passo a passo.
- Estimular o registro escrito do processo realizado, tendo em vista o esclarecimento das relações entre os diferentes tipos de registros semióticos utilizados.
- Apresentar a aplicação de uso de resolução de sistemas no problema da interpolação polinomial.
- Apresentar uma situação problema (a ser entregue para avaliação) e solicitar que encontrem a solução, tendo em vista o uso de resolução de sistemas, com aplicação do método da Eliminação Gaussiana.

Tarefa 12 - Objetivos: avaliar a compreensão dos estudantes sobre uso dos métodos abordados na resolução de problemas com possibilidade de uso de recursos tecnológicos.

- Apresentar três situações problema para os estudantes, ilustrando os diferentes tipos de solução existentes para sistemas de equações lineares.
- Solicitar que, individualmente, construam os modelos matemáticos que representem simbolicamente os problemas. Solicitar que identifiquem as variáveis utilizadas, visando estimular suas representações em linguagem natural e que façam suas resoluções por meio de algum método abordado (escolha livre, com justificativa), para as quais deveriam indicar a(s) solução(ões), caso existisse(m).
- Estimular o uso dos recursos do *MATLAB* e dos registros simbólicos escritos para apresentar o raciocínio utilizado em todo o processo.
- Auxiliar no processo de modelagem e de resolução, especialmente questionando os estudantes em suas interpretações finais, as quais possibilitem identificar os diferentes tipos de solução existentes.

Tarefa 13 - Objetivos: propiciar atividade reflexiva sobre a importância do uso da resolução de sistemas lineares no cálculo de esforços em estruturas, visando relacionar conceitos abordados nas disciplinas de Álgebra Linear e Estática, as quais são oferecidas aos estudantes no segundo semestre do curso de Engenharia Civil.

- Apresentar um desafio aos estudantes de modo a estimular a compreensão de que sempre é possível expressar o equilíbrio de forças que atuam em uma estrutura por meio de um sistema linear.
- Estimular o raciocínio lógico dedutivo por meio da resolução algébrica do sistema linear. Essa segunda etapa da tarefa visa possibilitar aos estudantes que percebam que é possível usar os métodos de resolução de sistemas lineares, vistos na disciplina de Álgebra, de modo a se obter as expressões algébricas gerais para se obter diretamente o cálculo das forças que atuam na estrutura dada, para ângulos e pesos variados.
- Utilizar os recursos do GeoGebra para construir o esquema dinâmico de equilíbrio que possibilite o cálculo imediato de forças, para diferentes pesos e

ângulos. O objetivo dessa etapa é fazer com que os estudantes percebam que o esquema dinâmico construído possibilita obter os valores das forças que atuam nos elementos da estrutura, para diferentes pesos e para ângulos variados, os quais são calculados pelo programa por meio das fórmulas obtidas anteriormente pelos discentes, por meio da resolução genérica do sistema linear construído. Nesse caso foi possível fazer simulações de esforços para pesos e ângulos variados.

Tarefa 14 - Objetivos: propiciar a significação de conceitos sobre transformações lineares clássicas do plano no plano em ambiente virtual, que já haviam sido abordadas em sala de aula.

- Possibilitar a realização de construções algébricas e geométricas, no ambiente virtual propiciado pelo GeoGebra, com uso de roteiro auxiliar, disponibilizado pela professora, visando a compreensão e a significação de conceitos, por meio do reconhecimento dos objetos matemáticos representados.
- Estimular os processos cognitivos dos estudantes, por meio da:
  a. visualização, possibilitada pelos recursos de animação dinâmica do GeoGebra, para ressaltar relações existentes entre diferentes formas de registros;
  b. análise reflexiva sobre implicações geométricas ocorridas, referentes às mudanças realizadas em parâmetros algébricos.

Tarefa 15 - Objetivos: ilustrar como as transformações lineares podem ser utilizadas na resolução de problemas de criptografia.

- Apresentar um vídeo com informações gerais e conceitos básicos de criptografia (Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=ajniLnQTabw).
- Resgatar, por meio de *slides*, conceitos básicos sobre relações existentes entre transformações lineares, matrizes e vetores.
- Apresentar o método das transformações lineares como um método alternativo para envio de mensagens criptografadas.
- Ressaltar a importância do uso da matriz inversa para a decodificação e do uso do produto de matrizes, para realizar tanto a codificação como a decodificação de mensagens.

- Estimular a aprendizagem significativa, visando o resgate e a interação de conceitos subsunçores sobre transformações lineares já abordados, para propiciar a construção de novos conhecimentos, por meio da reconciliação integrativa.
- Utilizar recursos do *MATLAB* para agilizar o processo de codificação e decodificação bem como para estimular a criatividade e análise crítica de resultados.

6. ANÁLISES DOS DADOS

Neste capitulo, são apresentadas as características dos participantes da pesquisa, bem como os resultados das análises realizadas, relativas aos dados constituídos.

Nas análises foram considerados especialmente dois aspectos: a percepção da docente e as percepções dos estudantes participantes da pesquisa, relativas aos dados coletados, tanto em respostas registradas pelos estudantes nas tarefas realziadas, bem como em respostas dos questionários aplicados.

Inicialmente, apresenta-se os perfis das turmas, ressaltando as principais características dos grupos considerados. Em seguida, apresentam-se os resultados de análises de tarefas, que foram consideradas mais relevantes em relação à pergunta de pesquisa proposta, e, finalmente, são apresentadas as análises dos questionários aplicados.

Nesta seção, para garantir o sigilo e a discrição das informações coletadas para análise, doravante os estudantes do grupo G1 são identificados pela letra A, seguida do seu número de identificação, e os estudantes do grupo G2 são identificados pela letra E, seguida do seu número de identificação. Como exemplos, A12 refere-se ao estudante do G1 de número 12 e E18 refere-se ao estudante do G2 de número 18.

6.1 Análise dos perfis das turmas

O Grupo 1 (G1), composto por 36 participantes, se constituiu predominantemente por estudantes da Engenharia Civil (94%), no qual apenas dois estudantes são provenientes do curso de Engenharia Mecânica (6%). As idades dos participantes variaram entre 18 e 24 anos, sendo que a maioria tem 18 anos (87%). Além disso, a maioria não trabalhava (86%) e todos informaram não ter filhos. Dentre eles, 39% informaram ser do sexo feminino e 61% do sexo masculino. Um pouco mais da metade desse grupo morava na cidade da IES (53%) e os demais, em cidades próximas (47%) e precisavam viajar todos os dias para frequentarem as aulas. A maioria, 64%, informou que residia com os pais, 22% disseram que moravam sozinhos, 8% informaram que morava com colegas e 6%, com irmãos.

Todos estudantes informaram ter realizado o ensino médio na modalidade regular, sendo que a maioria (58%) afirmou ter estudado em escolas públicas, e os demais em escolas particulares (42%). Sobre o período de realização do ensino médio, 92% informaram ter estudado no diurno, 6% estudaram no noturno e 3% em ambos períodos. Em relação ao ano de término do ensino médio 69% afirmaram ter finalizado em 2015, 12%, em 2014, e os demais variaram entre 2009 e 2013. Quanto ao ano de ingresso na instituição pesquisada, 78% afirmaram ter ingressado em 2016, 11% ingressou em 2015 e os demais ingressaram entre 2011 e 2014. Cabe destacar também que dois estudantes (6%) informaram ter problemas na aprendizagem devido à dislexia e ao Transtorno do Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH).

O Grupo 2 (G2), composto por 25 participantes, também se constitui predominantemente por estudantes da Engenharia Civil (92%), uma vez que dois estudantes eram provenientes do curso de Engenharia Mecânica (8%). A maioria dos participantes (53%) tinha 18 anos, 20% tinham 19 anos e os demais tinham idades que variavam entre 17 e 34 anos. Nesse grupo, diferentemente do outro, a maioria (52%) trabalhava e não tinha filhos (92%), sendo que dois estudantes afirmaram ter filhos (8%). Dentre os participantes, 28% informaram ser do sexo feminino e 72%, do sexo masculino. Nesse grupo, a maioria não morava na cidade da IES. Apenas 24% morava em na cidade da IES e 76% morava em cidades próximas, ou seja, precisava viajar todos os dias para frequentar as aulas. A maioria (84%) informou que reside com os pais, 4% disse que morava sozinho e 12% informou que morava com a própria família (cônjuge ou cônjuge e filhos). Apenas um estudante (4%) disse não ter realizado o ensino médio na modalidade regular, entrando na graduação por meio do Enem, sendo que os demais participantes, 96%, afirmaram ter realizado o ensino médio na modalidade regular. Nesse grupo, a maioria (84%) também afirmou ter estudado em escolas públicas, dois estudantes (8%) estudaram em escolas particulares e dois estudantes (8%) afirmaram ter estudado tanto em escolas públicas quanto em particulares. Sobre o período de realização do ensino médio, 64% informaram ter estudado no diurno, 20%, no período noturno, e 12% afirmaram ter estudado em ambos períodos. Além disso, 4% disse que não fez ensino médio (tendo ingressado no ensino superior por Enem). Em relação ao ano de término do ensino médio, 56% afirmaram ter concluído seus estudos em 2015, 16% em 2014, e os demais variaram entre 1999 e 2013. Quanto ao ano de ingresso na IES, 84% afirmaram ter ingressado em 2016, 8% ingressaram em 2015 e os demais ingressaram entre 2010 e 2013. Nesse grupo, a exemplo do anterior, dois estudantes (8%) informaram ter problemas na aprendizagem, devido à miopia e ao Transtorno do Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH).

6.2 Análise das tarefas realizadas

Foram realizadas 15 tarefas, mas não houve constituição de dados nas tarefas 5, 7 e 10, conforme apresentado no Quadro 5, pois essas eram apenas explicativas. Desse modo, não serão apresentados resultados de análises específicas para essas tarefas.

Quadro 5 - Resumo de tarefas e usos de tecnologias digitais interativas

Tarefas	**Rec. TD**	**Descrição da tarefa**	**Uso de TD interativa**		**Coleta dados**
			G1	**G2**	
1	Vídeo/ *Power Point*	Conhecimentos prévios - Resolução de problemas por meio de SL	-	-	Sim
2	*Power Point*	Resolução de SL com duas variáveis – algébrica e gráfica	Uso de GeoGebra	-	Sim
3	Vídeo/ *Power Point*	Resolução um problema de localização	Uso de *Celular* - Google Maps™	-	Sim
4	Vídeo/ *Power Point*	Conhecimentos prévios - operações entre matrizes	-	-	Sim
5	Planilha	Exercícios sobre operações entre matrizes	Uso de planilhas	Não realizou	Não
6	*Power Point*	Resolução de situações problemas	Uso de planilhas	-	Sim
7	*Power Point*	Uso de matrizes em modelagem de problemas reais	-	-	Não
8	*Power Point*	Uso de determinantes em cálculo de áreas	-	-	Sim
9	Planilha	Método de triangulação para cálculo de determinantes.	Uso de planilhas	Não realizou	Sim
10	*Power Point* / *MATLAB*	Método de Gauss- Jordan para resolução de SL	Uso do *MATLAB*	Não realizou	Não
11	*Power Point*	Método de eliminação Gaussiana para resolução de SL	Uso do *MATLAB*	Não realizou	Não
		Resolução de problemas/ mod. matemática –interpolação polinomial (extra sala de aula)	Uso opcional do *MATLAB e* GeoGebra	-	Sim
12	*MATLAB*	Resolução de problemas – modelagem matemática como SL	Uso do *MATLAB*	-	Sim
13	GeoGebra	Resolução de problemas - cálculo de esforços em estruturas	Uso do GeoGebra	-	Sim
14	GeoGebra	Construções algébricas e geométricas de Transf. Lineares	Uso do GeoGebra	-	Sim
15	Vídeo/ *Power Point*	Uso de transformações lineares em problemas de criptografia	Não	Uso do *MATLAB*	Sim

Fonte: Autora

A seguir, são apresentados os resultados das demais tarefas, que foram desenvolvidas ou no contexto da sala de aula tradicional ou com uso de tecnologias digitais interativas, em laboratório de informática, conforme destacado no Quadro 5.

6.2.1 Tarefa 1

Nessa tarefa, os dois grupos, após assistirem a uma apresentação (no G1, um vídeo e no G2, *slides* em *Power Point*), foram desafiados a resolver um problema semelhante envolvendo resolução de sistemas. Os resultados estão tabulados nos Quadros 6 e 7.

Quadro 6 - Resultados de respostas da Tarefa 1 (G1 - 33 respondentes)

Critério	Respostas	Análise das respostas			
		Quantidade	Tipo de resposta	Quantidade	Percentuais
Organização de dados iniciais	Sim	15	Completa	13	45%
			Incompleta	2	
			Errada	-	
	Não	18	-		55%
Definição de variáveis	Sim	11	-		33%
	Não	22	-		67%
Formulação Algébrica	Sim	33	Adequada	28	85%
			Inadequada	5	15%
	Não	0	-		0%
Resolução Algébrica	Sim	32	Correta	23	70%
			Parcialmente Correta	1	27%
			Incorreta	8	
	Não	1	-		3%
Métodos de resolução	Eliminação de variáveis (ou da Adição)	29	-		88%
	Substituição	3	-		9%
	Escalonamento	0	-		0%

Fonte: Autora.

Conforme indicado no Quadro 6, pela análise dos registros escritos entregues pelos estudantes, foi possível observar no G1 que 55% deles não se preocuparam em organizar os dados iniciais e 67% não apresentaram a definição de variáveis. Isso indica que esses estudantes, em geral, não se preocuparam com a clareza no registro escrito em linguagem corrente, o que pode ser um problema em processos de modelagem matemática, levando a modelos equivocados, caso os dados não estejam claramente definidos.

Também verificou-se, no G1, que 85% apresentaram a formulação algébrica do modelo matemático corretamente e 15% de modo equivocado. Além disso, 70%

dos estudantes resolveram corretamente, mas 27% resolveram inadequadamente (3% chegaram à resposta, mas havia incoerências na resolução algébrica, 24% erraram a resolução algébrica) e 3% não resolveram. Isso indica que mesmo na resolução de sistemas lineares com apenas duas variáveis, os estudantes encontram dificuldades de resolução, o que não deveria ocorrer, pois esse conteúdo já teria sido abordado no ensino fundamental e essa tarefa seria para resgatar conhecimentos prévios existentes. Acredita-se que aqueles que erraram as resoluções possivelmente não conseguiram compreender e apreender esse conteúdo e armazená-lo na memória permanente. Em relação aos métodos utilizados, verifica-se que a maioria (88%) utilizou o método da eliminação de variáveis (ou método da adição) e apenas 9% usaram o método da substituição de variáveis. Isso indica a preferência dos estudantes em relação ao primeiro método, talvez por o compreenderem melhor.

Quadro 7 - Resultados de respostas da Tarefa 1 (G2 - 25 respondentes)

<table>
<tr><th rowspan="2">Critério</th><th rowspan="2">Respostas</th><th colspan="4">Análise das respostas</th></tr>
<tr><td>Quantidade</td><td>Tipo de resposta</td><td>Quantidade</td><td>Percentuais</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Organização de dados iniciais</td><td rowspan="3">Sim</td><td rowspan="3">13</td><td>Completa</td><td>10</td><td rowspan="3">52</td></tr>
<tr><td>Incompleta</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Errada</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Não</td><td>12</td><td colspan="2">-</td><td>48</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Definição de variáveis</td><td>Sim</td><td>1</td><td colspan="2">-</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Não</td><td>24</td><td colspan="2">-</td><td>96</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Formulação Algébrica</td><td rowspan="2">Sim</td><td rowspan="2">24</td><td>Adequada</td><td>21</td><td>84</td></tr>
<tr><td>Inadequada</td><td>3</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Não</td><td>1</td><td colspan="2">-</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Resolução Algébrica</td><td rowspan="3">Sim</td><td rowspan="3">22</td><td>Correta</td><td>10</td><td>40</td></tr>
<tr><td>Parcialmente Correta</td><td>8</td><td rowspan="2">48</td></tr>
<tr><td>Incorreta</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Não</td><td>3</td><td colspan="2">-</td><td>12</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Métodos de resolução</td><td>Eliminação de variáveis (ou da adição)</td><td>21</td><td colspan="2">-</td><td>84</td></tr>
<tr><td>Substituição</td><td>0</td><td colspan="2">-</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Escalonamento</td><td>1</td><td colspan="2">-</td><td>3</td></tr>
</table>

Fonte: Autora.

No grupo G1, apenas um estudante (3%) apresentou a verificação numérica de seus resultados para comprovar sua estratégia. Isso também indica a falta de preocupação em verificar as estratégias de resolução, algo que é muito comum entre os estudantes.

No grupo G2, a análise dos registros escritos indica que 52% se preocuparam em organizar os dados inicialmente, mas ainda 48% não o fizeram, o que também indica a falta preocupação com a clareza no registro escrito em linguagem corrente. Chama a atenção o fato de apenas um estudante definir as variáveis utilizadas (4%), sendo que 96% não o fizeram. Isso indica a falta de rigor na escrita algébrica, que é fundamental, na resolução de problemas, em processos de modelagem matemática.

Devido à simplicidade do problema proposto, também nesse grupo a maioria (96%) apresentou a formulação algébrica. Porém, desses, 12% apresentaram a formulação inadequada ou equivocada e apenas 84% apresentaram corretamente o modelo matemático, o que indica dificuldades com o registro algébrico. Já a resolução do problema foi apresentada por 88%, mas apenas 40% delas estavam corretas e 48% estavam parcialmente corretas (32% chegou à resposta, mas havia incoerências no desenvolvimento algébrico, e 16% errou completamente), e, ainda, 12% indicou não saber resolver o problema. Dos estudantes que tentaram resolver o modelo matemático, a maioria (84%) usou o método da eliminação de variáveis (ou método da adição), o que também indica a preferência dos estudantes em relação a esse método para resolverem sistemas com poucas equações e duas variáveis. Apenas um estudante (E11 - 3%) usou o método de escalonamento de matrizes, pois já havia cursado a disciplina no semestre anterior e conhecia esse método.

Em seguida, após uma apresentação em *slides*, elaborada no Power Point, sobre modelagem de problemas de redes, foi solicitado que realizassem a modelagem de um problema semelhante. Todos os estudantes (dos dois grupos) forneceram respostas corretas ao desafio proposto. Porém, não foi solicitado que resolvessem algebricamente devido à falta de tempo, o que ficou para ser explorado em outro momento.

6.2.2 Tarefa 2

Essa tarefa envolveu a resolução de sistemas lineares com duas variáveis, por meio de métodos algébricos básicos, bem como se propôs à resolução geométrica, visando estimular a interpretação dos diferentes tipos de soluções possíveis.

A tarefa foi realizada em duplas pelos dois grupos. No G1, foi realizada no laboratório computacional, onde foi possibilitado o uso de recursos do *GeoGebra* na resolução dos problemas. No G2, foi realizada em sala de aula tradicional.

O objetivo, com os dois grupos, foi explorar os diferentes tipos de sistemas existentes, caracterizados por seus tipos de soluções. A proposta era que resolvessem os problemas propostos e que verificassem seus resultados por comprovação gráfica ou numérica, além da resolução algébrica.

Nesse caso, a tarefa propiciava a mudança entre registros simbólicos e gráficos, estimulando a compreensão do objeto matemático por meio de conversões e de articulações existentes entre eles.

A análise da tarefa teve como critérios: (i) se foi realizada a resolução algébrica; (ii) se forneceram a(s) solução(ões) algebricamente; (iii) se foi realizada a verificação numérica; (iv) se foi feita a representação geométrica; (v) se foi feita a identificação de solução(ões) geometricamente; (vi) se associaram o tipo de solução algebricamente e geometricamente; (vii) se classificaram o sistema; e (viii) se justificaram as classificações realizadas. Os resultados estão apresentados no Quadro 8.

Quanto à análise de como procederam à resolução algébrica foi possível perceber, pelos dados registrados na Figura 6, que os estudantes dos dois grupos tiveram mais facilidade na resolução algébrica de sistemas lineares com solução única (no G1, houve 90% de acertos, e, no G2, 87,5%) e mais dificuldade na resolução de sistemas lineares com infinitas soluções (no G1, houve 80% de acertos, e, no G2, apenas 25%). Esse resultado confirma o esperado, tendo em vista que o procedimento algébrico para obtenção de um conjunto de valores numéricos únicos para cada variável, que satisfaça todas as equações de um sistema linear, é mais simples. Exige um grau menor de abstração e de compreensão do que aquele que se exige na obtenção das expressões que geram as infinitas soluções.

No caso de sistemas com única solução, em relação aos percentuais de resoluções incompletas (10% no G1 e 12,5% no G2, conforme dados da Figura 6), a análise dos registros escritos indicou que, nos dois grupos, isso ocorreu pelo fato de alguns estudantes terem usado apenas duas equações do sistema para calcularem os valores das duas variáveis existentes, em vez de usarem as três equações que compunham o sistema. Isso não é correto no caso de resoluções de sistemas lineares, nos quais nenhuma equação pode ser desprezada. Nesse tipo de sistema, não houve desistências ou erros cometidos, tanto no G1 quanto no G2, o que já era esperado, por se tratar do tipo de sistema mais simples que existe.

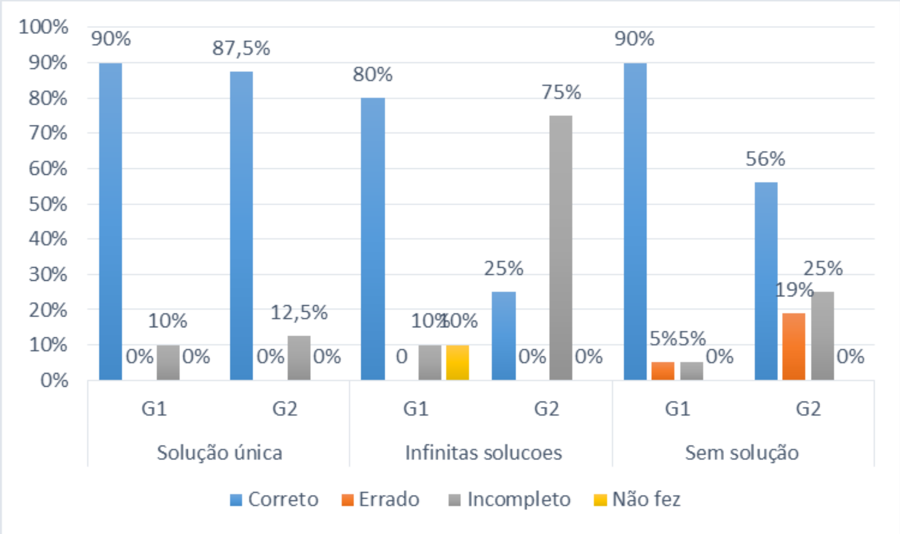
Quadro 8 - Resultados de respostas de duplas do G1 e do G2 - Tarefa 2

Tarefa	Critério	Tipos de Sistemas Lineares					
		Solução única		Infinitas soluções		Sem solução	
		G1	**G2**	**G1**	**G2**	**G1**	**G2**
Resolução algébrica	Correto	90%	87,5%	80%	25%	90%	56%
	Errado	-	-	-	-	5%	19%
	Incompleto	10%	12,5%	10%	75%	5%	25%
	Não fez	-	-	10%	-	-	-
Forneceram a(s) solução(ões) algebricamente	Correto	95%	88%	80%	75%	85%	88%
	Errado	-	-		-	10%	-
	Incompleto	-	-	10%	6%	-	-
	Não fez	5%	12%	10%	19%	5%	12%
Verificação numérica	Correto	65%	-	55%	6%	75%	19%
	Errado	-	-	-	-		-
	Incompleto	-	-	5%	-		-
	Não fez	35%	100%	40%	94%	25%	81%
Representação geométrica	Correto	95%	100%	95%	88%	95%	56%
	Errado	-	-	-	6%	-	25%
	Incompleto	-	-	-	6%	-	19%
	Não fez	5%	-	5%	-	5%	-
Identificação de solução(ões) geometricamente	Correto	70%	38%	50%	12,5%	90%	38%
	Errado	-	-	-	-	-	-
	Incompleto	-	-	-	-	-	-
	Não fez	30%	62%	50%	87,5%	10%	62%
Associaram o tipo de solução algebricamente e geometricamente	Correto	45%	25%	40%	19%	55%	40%
	Errado	-	6%	-	6%	15%	-
	Incompleto	35%	13%	30%	25%	20%	30%
	Não fez	20%	56%	30%	50%	10%	30%
Classificaram o sistema	Correto	95%	100%	80%	100%	75%	100%
	Errado	-	-	5%	-	15%	-
	Incompleto	-	-	-	-	-	-
	Não fez	5%	-	15%	-	10%	-
Justificaram as classificações realizadas	Correto	60%	31%	50%	31%	60%	69%
	Errado	-	-	5%	-	5%	-
	Incompleto	10%	25%	15%	25%	-	6%
	Não fez	30%	44%	30%	44%	35%	25%

Fonte: Autora.

No caso de sistemas com infinitas soluções, observa-se, na Figura 6, que 10% das respostas das duplas do G1 apresentou a resolução incompleta. Nesse grupo, apareceram duas situações diferentes: uma dupla (8) usou apenas duas equações, desprezando a terceira equação, o que não está correto do ponto de vista algébrico; e outra dupla (19) não soube continuar a resolução do sistema após ter identificado que duas de três equações eram redundantes. Já no G2, apareceu 75% das resoluções incompletas, e todas as duplas apenas mostraram que haviam identificado equações redundantes, mas não souberam terminar a resolução algébrica. Nesse caso, já apareceu 10% de desistência na resolução algébrica no G1, o que não ocorreu no G2, mas também não houve erro explícito identificado. Cabe esclarecer que a resolução incompleta poderia ter sido considerada como uma resolução errada, mas isso não foi considerado, pois, apesar de o procedimento estar incompleto, ele não levou a conclusões erradas.

Figura 6 - Resultados da Tarefa 2 - Resolução algébrica



Fonte: Autora.

Em relação ao caso de resolução algébrica de sistemas sem solução, observando os dados da Figura 6, nota-se que houve 90% de acertos no G1, enquanto que, no G2, houve 56%. No G1, se verificou 5% de erro, identificado no registro escrito de uma dupla (13) que concluiu que existia solução para o sistema (quando o sistema não admitia solução). Nessa resolução algébrica, os estudantes usaram as equações agrupadas duas a duas, o que levou ao cálculo de diferentes valores para as variáveis, o que seria impossível num sistema de equações lineares. Nota-se que existe um problema evidente na compreensão dos resultados algébricos. Ainda cabe destacar que, pela experiência docente, esse tipo de erro é comum entre estudantes de Álgebra Linear, pelo fato de não compreenderem o significado de um conjunto solução de um sistema linear, o qual não admite contradições matemáticas.

No G2, no caso de sistemas sem solução, verificou-se 19% de erro, sendo que, desse percentual, 13% indicou ter dificuldades na resolução algébrica (duplas 3 e 9), apresentando erros de matemática básica, e 6% optou por trabalhar com as duas primeiras equações (dupla 4), para calcular o valor de uma variável (no caso, a variável “x”) e, depois, com as outras duas equações, foi calculado o valor da outra variável (no caso a variável “ y ”), mas não continuaram o raciocínio, o que indica o problema de compreensão na resolução apresentada.

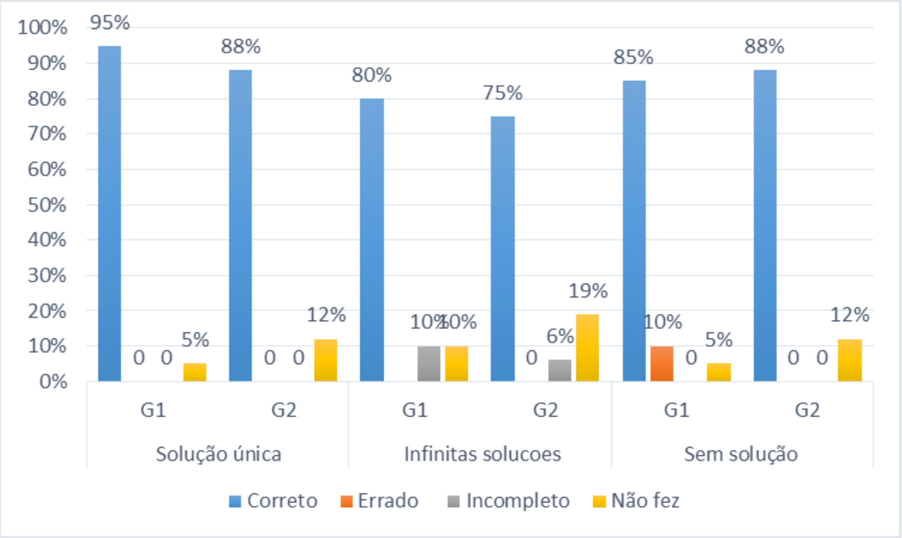
Também foi possível verificar que, no G1, 5% apresentaram resolução algébrica incompleta (dupla 3), na qual os estudantes usaram apenas duas equações para calcular os valores para as variáveis "x" e "y" e optaram por comprovar a inexistência da solução por meio da verificação numérica, substituindo os valores numéricos encontrados nas outras equações, o que levou a uma desigualdade. Porém, não souberam justificar a inexistência da solução por meio da resolução algébrica.

E, de acordo com os dados da Figura 6, houve 25% de resolução algébrica incompleta em respostas do grupo G2, pois foram identificados registros escritos de duplas que apresentaram cálculos de vários valores numéricos para as mesmas variáveis, o que indica a inexistência de uma solução comum a todas as equações. No entanto, os estudantes dessas duplas não souberam concluir seus raciocínios. Ainda, no G2, verificou-se 19% de erro, sendo que, desse percentual, 13% indicou dificuldades na resolução algébrica (duplas 3 e 9), apresentando erros de matemática básica, e 6% optou por trabalhar com as duas primeiras equações (dupla 4), para calcular o valor de uma variável (no caso, a variável "x") e, depois, com as outras duas equações, foi calculado o valor da outra variável (no caso, a variável "y"), mas não continuaram o raciocínio, o que indica o problema de compreensão na resolução apresentada.

Também foi possível verificar que, no G1, 5% apresentaram resolução algébrica incompleta (dupla 3), na qual os estudantes usaram apenas duas equações para calcularem os valores para as variáveis "x" e "y" e optaram por comprovar a inexistência da solução por meio da verificação numérica, substituindo os valores numéricos encontrados nas outras equações, o que levou a uma desigualdade. Porém, não souberam justificar a inexistência da solução por meio da resolução algébrica.

Quanto ao critério "fornecer a(s) solução(ões) algebricamente", os resultados, ilustrados na Figura 7, indicam que em todos os problemas propostos os percentuais de acertos na identificação da(s) solução(ões) algébricas foi maior ou igual a 75%, o que indica que a tarefa, como um todo, propiciou à maioria dos estudantes identificar a solução dos sistemas tratados. Além disso, na maioria dos resultados, sobre os três tipos de sistemas, houve um percentual maior de acertos no G1 (no qual houve a possibilidade de uso do aplicativo GeoGebra) do que em relação aos acertos obtidos no grupo G2. Apenas no caso da inexistência de solução que se verificou o contrário. Ainda é possível perceber que os percentuais de grupos que não forneceram a solução algébrica são sempre maiores no G2, do que em relação às repostas analisadas do G1 (especificamente: no caso de existência de solução única, são 5% do G1 contra 12% do G2; no caso de existência de infinitas soluções, são 10% do G1 contra 19% do G2; e, no caso da inexistência da solução: 5% do G1 contra 12% do G2). Assim, os resultados indicam que o uso do recurso tecnológico propiciado pelo GeoGebra pode ter influenciado positivamente, favorecendo as análises realizadas pelos estudantes do G1.

Figura 7 - Resultados da Tarefa 2 - Forneceram a(s) solução(ões) algebricamente



Fonte: Autora.

Destaca-se que somente nas resoluções de sistema com infinitas soluções é que foram identificadas respostas incompletas, pois, nos demais casos, ou estavam corretas, ou incorretas, ou os estudantes não fizeram.

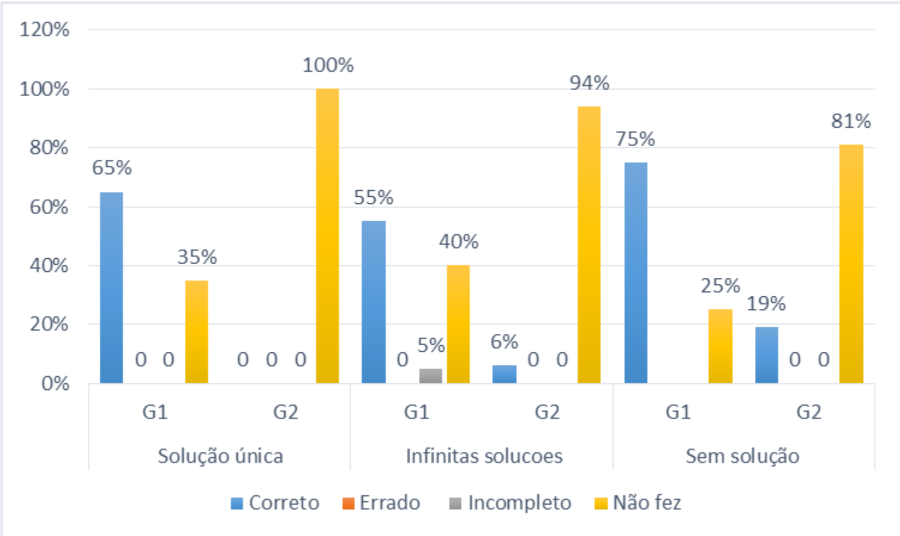
No G1, constatou-se que 10% das duplas não forneceram as soluções particulares para o sistema e, ainda, desse percentual, 5% não indicaram as infinitas soluções como um conjunto.

No G2, verificou-se que 6% apresentaram problemas na tentativa de representar o conjunto solução obtido em linguagem algébrica. Nesse caso, uma dupla (3) forneceu como solução para o sistema o conjunto $x = \{-3y+3 | y \in R\}$, que está equivocado no contexto de representação do conjunto solução possível para o sistema considerado.

Destaca-se, também, que somente para o caso de sistemas sem solução é que foram identificadas respostas consideradas erradas na identificação algébrica da inexistência da solução, que ocorreram em 10% das respostas das duplas do G1. Desse percentual, 5% das duplas apresentou equívocos no cálculo simbólico e depois concluiu erroneamente que o sistema tinha solução e 5% apenas apresentou o cálculo simbólico de diferentes valores para as mesmas variáveis, mas não concluiu o cálculo.

Os resultados ilustrados no Figura 8 indicam que a maioria estudantes do grupo G2 não valorizou o uso da estratégia da verificação numérica, com intuito de verificar a veracidade da solução encontrada, ao contrário dos resultados do Grupo G1, no qual a maoiria fez uso dessa estratégia.

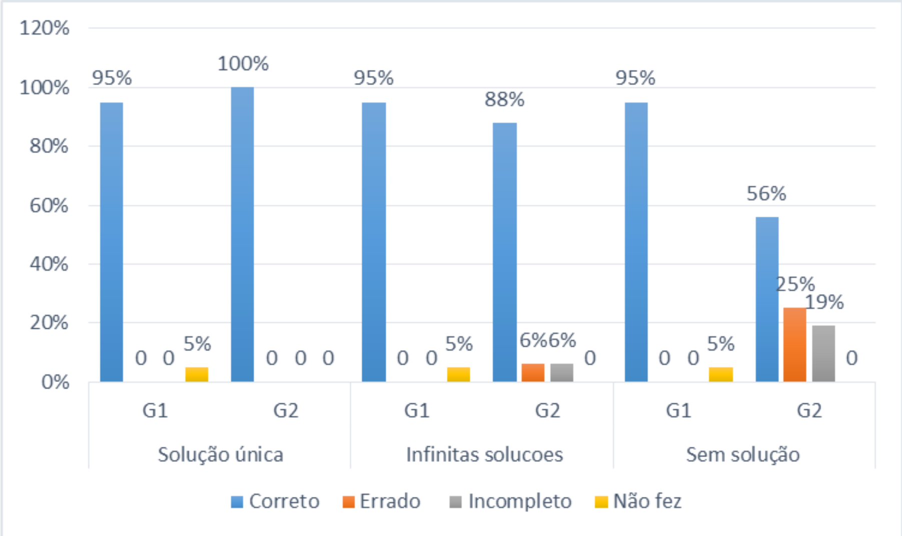
Figura 8 - Resultados da Tarefa 2 - Verificação numérica



Fonte: Autora.

Na Figura 9, também é possível constatar que, em ambos os grupos, os estudantes fizeram uso da representação geométrica como estratégia para confirmar a solução algébrica obtida, tendo ou não a possibilidade de uso de recursos tecnológicos digitais. Como no G1 foi possível gerar os gráficos usando o GeoGebra, se observa que não houve erros na construção dos gráficos, o que já ocorreu no processo manual, no G2, especialmente quando o sistema tinha infinitas soluções (6%), ou quando não admitia solução (25%). No G1, os estudantes eram livres para usar ou não o GeoGebra, mas, salienta-se que as duplas foram orientadas a usarem todos os recursos possíveis, de modo que os ajudassem a ter certeza da solução encontrada. Nota-se que, dentre todas as duplas do G1, foi possível observar que apenas uma dupla (5%) optou por não usar a representação geométrica, conforme evidenciam os resultados ilustrados na Figura 9.

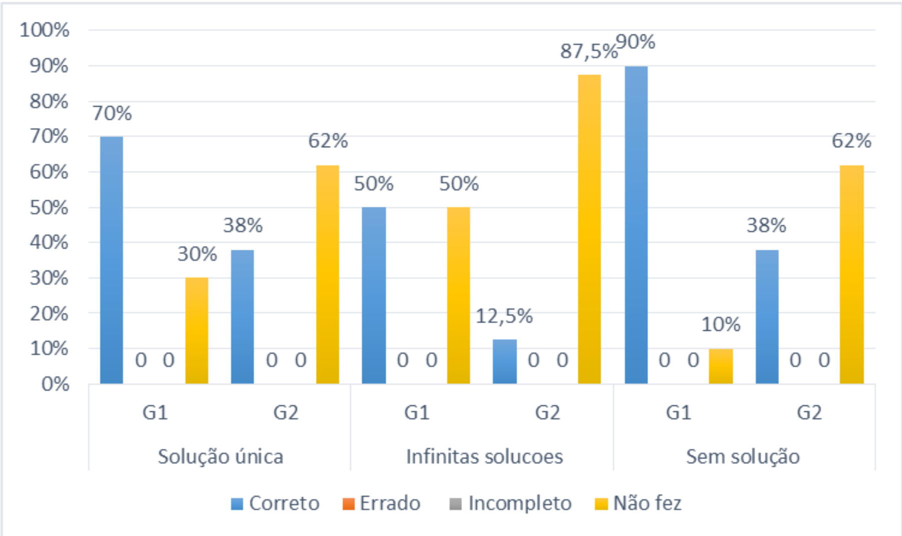
Figura 9 - Resultados da Tarefa 2 - Representação geométrica



Fonte: Autora.

Na Figura 10, os resultados indicam que, apesar de os grupos terem feito uso da representação geométrica das retas, a maioria dos estudantes do grupo G1 – ou pelo menos a metade – se preocupou em identificar geometricamente a(s) solução(ões), e que, no Grupo G2, se observa o contrário.

Figura 10 - Resultados da Tarefa 2 - Identificação de solução(ões) geometricamente

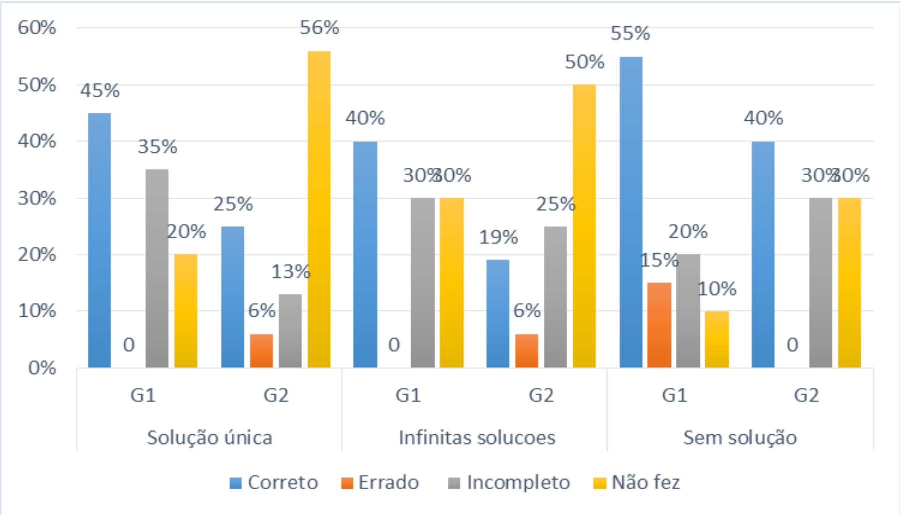


Fonte: Autora.

Na Figura 10, é possível observar que a maioria dos estudantes do grupo G2 não se preocupou em identificar geometricamente a(s) solução(ões), o que é um fato curioso, tendo em vista que a estratégia de representação geométrica, no caso de sistemas com duas variáveis, auxilia justamente na possibilidade de visualização da(s) solução(ões) (possíveis pontos de intersecção entre as retas geradas) ou da inexistência da solução.

Também, observou-se, nas argumentações dos estudantes, se eles associavam as soluções algébricas e geométricas sobre os tipos de soluções encontradas, tendo em vista explicitar suas compreensões acerca do objeto matemático abordado. Nota-se, pelos resultados ilustrados na Figura 11, que: (i) no caso de solução única, que apenas 45% do G1 e 25% do G2 fizeram a associação de modo correto. Nesse caso, 55% do G1: ou fez de modo incompleto (35%) ou não fez (20%); e 75% do G2: ou errou (6%) ou fez de modo incompleto (13%), ou não fez (56%); (ii) no caso de infinitas soluções, apenas 40% do G1 e 19% do G2 fizeram a associação de modo correto. Assim, 60% do G1: ou fez de modo incompleto (30%) ou não fez (30%); e 81% do G2: ou errou (6%) ou fez de modo incompleto (25%) ou não fez (50%); e (iii) no caso em que não havia solução para o sistema, 55% do G1 e 40% do G2 fizeram a associação de modo correto. E ainda, 45% do G1: ou errou (15%) ou fez de modo incompleto (20%) ou não fez (10%), e 60% do G2: ou fez de modo incompleto (30%) ou não fez (30%).

Figura 11 - Resultados da Tarefa 2 - Associaram o tipo de solução algebricamente e geometricamente

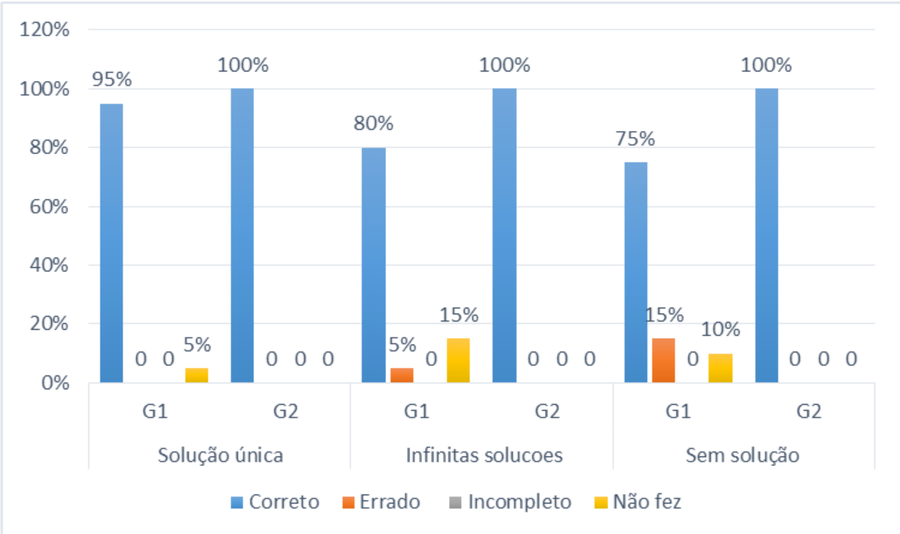


Fonte: Autora.

Assim, foi possível concluir que praticamente em todos os casos (exceto no último), nos dois grupos, G1 e G2, a maioria não soube fazer corretamente a associação ou seja, não conseguiu explicitar em linguagem corrente o que observaram em ambas resoluções e os motivos podem ser a falta de compreensão do objeto matemático ou dificuldades para se expressarem em linguagem verbal.

No que se refere à classificação dos sistemas (ver Figura 12), nota-se que a maioria dos estudantes em todos os casos analisados soube fazê-lo adequadamente. Chama atenção que houve 100% de acertos do grupo G2 e, ainda, em dois casos analisados pelos estudantes do grupo G1 houve: 5% de erro na classificação de sistemas compatíveis e indeterminados (infinitas soluções) e 15% na classificação de sistemas incompatíveis (sem solução). Além disso, verificou-se, no G1, que 15% não fizeram a classificação de sistemas compatíveis e indeterminados (infinitas soluções), e 10 % não fizeram a classificação de sistemas incompatíveis.

Figura 12 - Resultados da Tarefa 2 - Classificaram o sistema



Fonte: Autora.

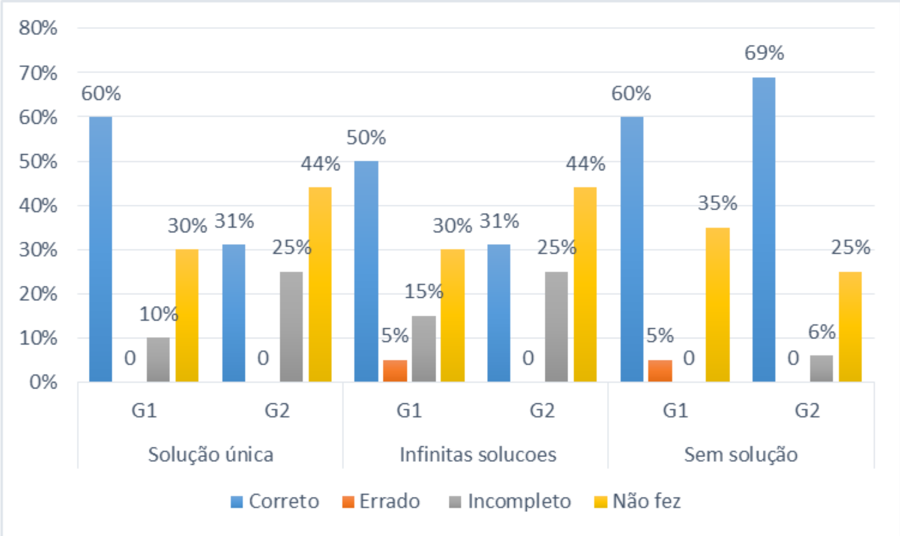
Quanto às justificativas das classificações (ver Figura 13), nota-se uma variedade maior nos resultados, o que indica a falta de cuidado com a justificativa escrita nas respostas dos estudantes.

No caso das justificativas dos sistemas compatíveis e determinados (com solução existente e única), nota-se, no Gráfico 8, que no G1 houve: 60% e justificativas corretas, 10% incompletas e 30% não justificou. Já no grupo G2 houve: 31% de justificativas corretas, 25% incompletas e 44% não apresentou justificativas.

No segundo caso, das justificativas elaboradas para sistemas compatíveis e indeterminados (com solução existente e a existência de infinitas soluções), nota-se, na Figura 13, que no G1 houve: 50% justificativas corretas, 5% erradas, 15%

incompletas e 30% não justificou. Já no grupo G2 houve: 31% de justificativas corretas e 25% incompletas, e 44% não justificou.

Figura 13 - Resultados da Tarefa 2 - Justificaram as classificações realizadas



Fonte: Autora.

No terceiro caso, das justificativas elaboradas para sistemas incompatíveis (com solução inexistente), nota-se, conforme evidenciado na Figura 13, que, no G1, houve: 60% de justificativas corretas e 5% de erradas; e 35% não justificou. Já no grupo G2, houve: 69% de justificativas corretas, 6% incompletas e 25% não justificou.

Cabe destacar que, no primeiro e no segundo casos, as justificativas incompletas que apareceram se devem à falta de rigor que aparece nos dois grupos G1 e G2 e se deve ao fato de os estudantes não acharem que é preciso justificar o termo “compatível”, que significa que o sistema tem solução. Esse resultado indica que os estudantes entendem que essa compreensão está implícita e, desse modo, não precisam justificá-la, o que não está correto.

Além disso, o fato de alguns não apresentarem a justificativa para a classificação realizada pode indicar duas possibilidades: ou existiu a falta de compreensão dos termos utilizados ou houve a falta de cuidado na elaboração das respostas, de modo que estivessem adequadas às perguntas realizadas.

De modo geral, considerando os resultados das análises realizadas, percebe-se que os estudantes do G1 alcançaram maiores percentuais de acertos tanto na resolução algébrica quanto no fornecimento da(s) solução(ões) algébricas. Além disso, verificou-se que os estudantes desse grupo também fizeram maior uso da estratégia de verificação numérica e da representação geométrica e da identificação de solução(ões) geometricamente e que o uso dessas estratégias de resolução provavelmente pode ter favorecido a identificação e a compreensão dos diferentes tipos de solução existentes, pois foram alcançados percentuais maiores de acertos em relação ao tipo de solução do ponto de vista algébrico e geométrico. No entanto, verificou-se que, nos dois grupos, os estudantes sentiram dificuldades para expressarem a relação que existia em ambas resoluções, em linguagem corrente.

Nesse caso, pela percepção docente verificou-se que a possibilidade de uso dos recursos tecnológicos digitais, disponibilizados no ambiente virtual do GeoGebra, favoreceu a análise realizada pelos estudantes do G1, pois a interação dos estudantes com as tecnologias digitais, ao facilitar a visualização do problema (evitando dificuldades de construção gráfica ou até mesmo erros de construção) e a manipulação dinâmica de dados, favoreceram a compreensão dos conceitos abordados. Porém, como os grupos tinham características diferentes, não é possível afirmar que os resultados obtidos pelo G1 foram melhores devido exclusivamente ao uso de recursos tecnológicos.

A possibilidade de representação gráfica dos problemas e de suas interpretações por meio dos recursos disponibilizados pelo ambiente virtual do GeoGebra facilitou a visualização gráfica virtual, na janela da geometria, bem como possibilitou a visualização das expressões algébricas consideradas, na janela da álgebra. Também possibilitou marcar visualmente os possíveis pontos de intersecção existentes entre as retas (que representavam as equações dos sistemas) e a obtenção automática de suas representações numéricas na janela da álgebra (que correspondiam às soluções dos sistemas).

Desse modo, supõe-se que caso os recursos tecnológicos também fossem utilizados no G2, a abordagem poderia ter facilitado e favorecido a compreensão da resolução gráfica de sistemas lineares e os resultados obtidos poderiam ter sido melhores.

Jordão e Bianquini (2014), em proposta semelhante aplicada a estudantes do ensino médio, também destacam a importância do uso do software educacional *Winplot* na visualização e na compreensão de resolução de sistemas lineares em 3D, ao permitir uma abordagem que favorece a conversão e o tratamento de registros de representação.

6.2.3 Tarefa 3

Essa tarefa visou possibilitar aos estudantes a percepção do uso de matrizes em problemas reais. Inicialmente, para despertar o interesse dos estudantes pelo estudo de matrizes, em ambos os grupos, foi apresentada uma proposta de modelagem matemática para cálculos de fluxo em rede, que podem gerar sistemas lineares de grande porte.

Com isso, se propiciou um ambiente de aprendizagem de modo que eles pudessem perceber a importância e a necessidade do estudo de matrizes e de técnicas de Álgebra Linear mais sofisticadas para resolução automatizada dos sistemas lineares envolvidos.

Além da contextualização desse problema na área da Engenharia, também foi apresentado (no G1, um vídeo ilustrativo, e, no G2, *slides* elaborados em Power Point) outro exemplo sobre o uso de matrizes na resolução de um problema de localização de um tanque de refrigeração, pois se tratava de um exemplo mais próximo do cotidiano, fora do contexto da universidade.

Nesse último caso, o tanque havia sido comprado por uma cooperativa de leite, composta por seis pequenos produtores. Os produtores, para decidirem em qual fazenda o tanque deveria ser instalado, utilizaram uma matriz de distâncias mínimas entre as fazendas, visando identificar, dentre elas, qual era a menor, dentre as maiores distâncias percorridas diariamente pelos fazendeiros, pois entenderam que esse seria um critério justo para todos. Posteriormente, também foi apresentada outra análise semelhante que foi realizada considerando que alguns fazendeiros poderiam produzir mais leite do que outros e, desse modo, precisariam de um número maior de viagens para o efetivo armazenamento.

Após esses exemplos os estudantes puderam perceber que o uso de matrizes facilitou tanto na organização dos dados quanto na análise realizada. Posteriormente, tendo em vista explorar a compressão desse exemplo em uma situação problema semelhante, foi solicitado aos estudantes que pensassem em duplas, como fariam para decidir, se tivessem que escolher onde deveria ser localizado um novo curso da universidade, entre os sete *campi* existentes, de modo que as distâncias a serem percorridas pelos estudantes que morassem nessas sete cidades fosse a menor possível. Foi solicitado que respondessem onde deveria ser instalado o novo curso e que registrassem também o motivo das suas escolhas.

No desenvolvimento dessa tarefa, o grupo G1 de dividiu em 19 duplas. Após receberem o desafio, perceberam que aparecia no mapa, gerado pelo *Google Maps*^{TM}, apenas a localização das sete cidades, sem a informação de distâncias entre elas.

No diário de bordo, consta que, ao ser solicitado às duplas como fariam para resolver o problema, o estudante A32 perguntou para a professora se ele poderia utilizar o *Google* e a professora disse: "*Sim, com certeza! Esse é um recurso tecnológico que, nesse caso, te ajuda a responder à pergunta!".* A professora também salientou que, nesse caso, o uso do celular na sala de aula era produtivo, pois facilitava a obtenção de dados necessários para a análise do problema.

Após terem a concordância para o uso do celular em sala de aula, eles começaram a trabalhar. No início da atividade, foi possível perceber que algumas duplas ficaram confusas para dar início aos procedimentos de resolução. Após esse momento inicial, verificou-se que todas as duplas passaram a utilizar diferentes estratégias para a construção da matriz de distâncias e, assim, a maioria conseguiu finalizar a tarefa proposta.

Ao longo da aula, para ajudá-los, foi falado sobre a importância da análise crítica dos dados coletados. Foi citado o exemplo de uma estudante que, ao resolver o problema, em outra turma, obteve a distância de 700 km entre duas cidades envolvidas, o que consiste num dado errado, considerando que distância é possível realizar o deslocamento entre os campi em um tempo máximo de hora. Foi informado que esse erro aconteceu em razão de que o aplicativo encontrou uma dessas cidades (de mesmo nome) em outro estado. Assim, foram orientados que refletissem sobre os dados obtidos antes de armazenamento final na matriz de menores distâncias entre as cidades.

Nessa tarefa, observou-se que praticamente todos os grupos trabalharam de modo cooperativo buscando as distâncias nos celulares, com dados obtidos no *Google Maps*^{TM}, para construção da tabela de distâncias aproximadas. Apenas em uma dupla (19) houve certa antipatia e pouca interação entre eles, o que os prejudicou no desenvolvimento da tarefa.

No decorrer da tarefa, houve o questionamento da dupla 17 sobre a decisão de usar como critério de escolha para construção da matriz de distâncias, os caminhos de menores distâncias entre as cidades. A professora os questionou sobre o que seria melhor (ou mais razoável) no contexto. Após refletirem, disseram que seria o menor caminho entre elas e, assim, optaram por considerá-los.

Foi possível observar, durante o desenvolvimento da tarefa, que o fato de ter sido apresentado, inicialmente, junto com o problema, um mapa, no qual as cidades apareciam conectadas com alguns roteiros assinalados em azul, pode ter prejudicado a interpretação inicial dos estudantes no que refere à possibilidade da existência de outros roteiros reais possíveis, com distâncias menores entre as cidades consideradas. A dúvida gerada acabou por favorecer a reflexão crítica sobre a possibilidade de existência de outros caminhos que deveriam ser considerados para análise, como o ocorrido com a dupla 17.

Conforme os resultados apresentados no Quadro 9, conclui-se que o uso do aplicativo foi tranquilo para a maioria dos estudantes do G1, pois 58% construíram a tabela corretamente; 37% a construíram de modo parcialmente correto, o que significa que erraram algumas distâncias, talvez por não terem considerado as menores distâncias entre as cidades (existia mais de um caminho possível entre elas); e apenas 5% (que representa apenas um grupo) não foi capaz de construir adequadamente a tabela.

Quadro 9 - Resultados de respostas da Tarefa 3 (G1 – 19 duplas/individual)

<table>
<tr><th>Critério</th><th colspan="4">Percentual de respostas</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Construiu a tabela corretamente</td><td>Sim</td><td colspan="3">58%</td></tr>
<tr><td>Parcialmente</td><td colspan="3">37%</td></tr>
<tr><td>Não</td><td colspan="3">5%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Identificou maiores distâncias</td><td>Sim</td><td colspan="3">84%</td></tr>
<tr><td>Não</td><td colspan="3">16%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Conclusão</td><td rowspan="2">Sim</td><td rowspan="2">95%</td><td>Correta</td><td>74%</td></tr>
<tr><td>Errada</td><td>21%</td></tr>
<tr><td>Não</td><td colspan="3">5%</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Justificativa</td><td rowspan="3">Sim</td><td rowspan="3">74%</td><td>Correta</td><td>53%</td></tr>
<tr><td>Errada</td><td>16%</td></tr>
<tr><td>Incompleta</td><td>5%</td></tr>
<tr><td>Não</td><td colspan="3">26%</td></tr>
</table>

Fonte: Autora

Esse indicativo de familiaridade no uso de tecnologias digitais remete ao conceito “seres-humanos-com-mídias” sugerido por Borba e Villarreal (2005), que destacam o uso das tecnologias nas atividades como algo natural na construção do conhecimento. Os autores indicam que, nesse contexto, a tecnologia é um mediador externo tão importante quanto a escrita e a oralidade.

A observação, realizada em sala de aula, possibilitou perceber que houve empolgação entre os estudantes durante a realização dessa tarefa. Assim, é possível afirmar a estratégia de uso do celular, como um mediador na resolução do problema proposto, foi motivadora para os estudantes. Além disso, essa percepção se comprovou verbalmente com a manifestação do estudante A33, quando afirmou: *“Um recurso didático interessante professora!*”.

Além disso, os resultados do Quadro 9 indicam que, no G1, de 95% das duplas que apresentaram conclusões sobre o problema proposto, 74% estavam corretas e que 21% apresentou conclusões erradas. Também foi possível notar que apenas 74% apresentaram justificativas para suas escolhas, sendo que 53% estavam corretas, 16% erradas e 5% incompletas. Ou seja, 26% não se preocuparam em apresentar justificativas para seus desenvolvimentos. Assim, se percebe que muitos estudantes sentem dificuldades em expressar em linguagem natural suas ideias, pois falta clareza nos procedimentos utilizados e nas justificativas e respostas apresentadas.

Desse modo, conclui-se que apesar de a maioria ter construído a matriz de distâncias corretamente, houve dificuldades para chegarem às conclusões corretas, o que indica problemas de compreensão em relação aos objetivos propostos ou à abordagem matemática de resolução.

Já no grupo G2, para o desenvolvimento de tarefa semelhante, os estudantes foram agrupados em treze duplas. Diferentemente do grupo G1, foi disponibilizado um mapa (também gerado pelo *Google Maps™*) no qual aparecia a localização das sete cidades e também informações sobre as distâncias mínimas existentes entre elas, que foram inseridas sobre a imagem.

Nesse grupo, como as distâncias já estavam disponibilizadas, nota-se, pelos resultados apresentados no Quadro 10, que foram verificados mais acertos na construção da matriz de menores distâncias entre as cidades consideradas. Contatou-se que 85% construíram a tabela corretamente e que apenas 15% cometeram erros nessa construção, por erros de interpretação.

Além disso, verificou-se também que 100% apresentaram conclusões, sendo que 85% foram consideradas corretas e 15%, erradas. Também se destaca que 92% apresentaram justificativas para suas escolhas, dos quais 69% foram consideradas justificativas corretas, 15% incompletas e 8% foram consideradas erradas. Nesse grupo, apenas 8% não se preocuparam em justificar suas escolhas.

Quadro 10 - Resultados de respostas da Tarefa 3 (G2 – 13 duplas/individual)

Critério	Percentual de respostas			
Construiu a tabela corretamente	Sim	85%		
	Parcialmente	15%		
	Não	-		
Identificou maiores distâncias	Sim	69%		
	Não	31%		
Conclusão	Sim	100%	Correta	85%
			Errada	15%
	Não	-		
Justificativa	Sim	92%	Correta	69%
			Errada	8%
			Incompleta	15%
	Não	8%		

Fonte: Autora

Durante a aula, conforme registro do diário de bordo, houve dúvidas dos grupos quanto à escolha do local, que, na medida do possível, foram sendo esclarecidas com a intermediação do professor. Por exemplo, a dupla 2 indicou, inicialmente, que o curso poderia ser instalado em Passo Fundo ou em Palmeira das Missões. Foi dito a eles que isso não seria possível, pois teriam que escolher um local apenas e que teriam que repensar o motivo que justificasse essa escolha. Para refletirem, destacou-se que caso o curso fosse localizado em Palmeira das Missões, os estudantes que moravam em Lagoa Vermelha deveriam percorrer 236,9 km para chegar ao curso (maior distância identificada), o que era uma distância muito maior que os 139 km (maior distância identificada) que os estudantes de Palmeira das Missões deveriam percorrer caso o curso fosse localizado em Passo Fundo.

Após repensarem o problema e refletirem sobre a questão proposta, os estudantes perceberam que o *campus* onde estaria localizado o novo curso estaria indicado pela linha da matriz. E que, nesse caso, as colunas representavam as distâncias de todas as cidades até ele. Assim, os estudantes indicaram que haviam compreendido e riscaram no trabalho a opção Palmeiras das Missões, deixando apenas Passo Fundo como opção para instalação do novo curso.

Cabe destacar que, nessa atividade, houve, nos dois grupos, envolvimento e a colaboração de praticamente todas as duplas na realização da tarefa e que aparentemente os estudantes conseguiram ter um desempenho melhor do que os do grupo G1, pois conseguiram mais acertos em suas respostas. Como não tiveram a dificuldade de obter as distâncias, tiveram mais tempo da aula disponível para análise da matriz de distâncias construídas.

Nesse caso, surge o indicativo acerca da dificuldade do uso de recursos tecnológicos digitais em sala de aula. O uso adequado exige uma disponibilidade de tempo maior para execução das tarefas propostas, conforme indicam os resultados obtidos. Para essa tarefa, foi planejado o uso de apenas um período de aula (cerca de 50 minutos). Provavelmente, se os estudantes do grupo G1 tivessem mais tempo para execução da mesma tarefa, poderiam ter tido um desempenho melhor.

6.2.4 Tarefa 4

Nessa tarefa, o objetivo consistiu em identificar conhecimentos prévios sobre operações básicas envolvendo matrizes, e a tarefa possibilitou sua revisão. Foi solicitado aos dois grupos que resolvessem alguns exercícios sobre operações entre matrizes: adição, multiplicação por escalar, transposição, multiplicação entre matrizes, visando identificar os conhecimentos prévios sobre esses conceitos.

Em seguida, esses conceitos foram retomados em ambos os grupos por meio de uma apresentação em *slides*, elaborada em *Power Point,* bem como se fez uso de um material explicativo (vídeo no G1 e *slides* no G2) para dar significado ao produto de matrizes, por meio de uma aplicação prática desse conceito.

Após serem sistematizados todos os conceitos, envolvendo as operações básicas entre matrizes, também foi realizada a resolução dos exercícios, que foram propostos aos estudantes no início da aula, visando esclarecimento de dúvidas.

De acordo com os registros individuais dos dois grupos, cujos resultados estão apresentados nos Quadros 11 e 12, verificou-se que, em relação à questão que envolvia uma soma possível entre matrizes, houve 78% de acertos no G1 e 61% de acertos no G2. Nesse tipo de exercício, foram constatados poucos erros de cálculos (17% no G1 e 7% no G2), e, ainda, notou-se que apenas 6% dos estudantes do G1 não souberam responder à questão, enquanto que, no G2, esse percentual subiu para 30%.

Em relação à questão que envolvia uma soma impossível, ou seja, que não poderia ser realizada em razão das ordens das matrizes serem diferentes, percebe-se que as dificuldades de lembrança ou de compreensão aumentam em ambos grupos, porém, é mais acentuada no G2, conforme os dados registrados no Quadro 11. Percebe-se que, no G1, 53% acertaram a resposta, sendo que 42% apresentaram justificativa correta, 8% somente informaram que não era possível, mas não justificaram, e 3% forneceu uma justificativa errada, o que significa que não está claro o conceito da soma. Além disso, 36% erraram a resposta e 11% simplesmente não respondeu.

Quadro 11 - Resultados de respostas da Tarefa 4 (G1 – 36 respondentes)

<table>
<tr><th>Tipo de Exercícios</th><th colspan="3">Acertos</th><th colspan="3">Erros</th><th>Não respondeu</th></tr>
<tr><td>Soma possível</td><td colspan="3">28</td><td colspan="3">6</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Soma impossível</td><td rowspan="3">19</td><td>Justificativa correta</td><td>15</td><td colspan="3" rowspan="3">13</td><td rowspan="3">4</td></tr>
<tr><td>Não justificaram</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Justificativa errada</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Multiplicação por escalar</td><td colspan="3">30</td><td colspan="3">3</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Multiplicação de matrizes impossível</td><td rowspan="2">9</td><td>Justificativa correta</td><td>3</td><td colspan="3" rowspan="2">18</td><td rowspan="2">9</td></tr>
<tr><td>Justificativa errada</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Multiplicação de matrizes possível</td><td colspan="3" rowspan="2">2</td><td rowspan="2">24</td><td>Calcularam errado</td><td>10</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>Disseram ser impossível</td><td>14</td></tr>
<tr><td>Transposição</td><td colspan="3">12</td><td colspan="3">6</td><td>18</td></tr>
</table>

Fonte: Autora

No Quadro 12, fica evidenciado que, no G2, 30% acertaram, sendo que 9% apresentaram justificativa correta, 9% somente informaram que não era possível, mas não justificaram, e 13% forneceram uma justificativa errada, o que também significa que não está claro o conceito da soma. Além disso, 22% erraram a resposta e 48% simplesmente não responderam.

Quadro 12 - Resultados de respostas da Tarefa 4 (G2 – 23 respondentes)

<table>
<tr><th>Tipo de exercício</th><th colspan="3">Acertos</th><th colspan="3">Erros</th><th>Não respondeu</th></tr>
<tr><td>Soma possível</td><td colspan="3">14</td><td colspan="3">2</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Soma impossível</td><td rowspan="3">7</td><td>Justificativa correta</td><td>2</td><td colspan="3" rowspan="3">5</td><td rowspan="3">11</td></tr>
<tr><td>Não justificaram</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Justificativa errada</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Multiplicação por escalar</td><td colspan="3">13</td><td colspan="3">-</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Multiplicação de matrizes impossível</td><td rowspan="2">2</td><td>Justificativa correta</td><td>1</td><td colspan="3" rowspan="2">7</td><td rowspan="2">14</td></tr>
<tr><td>Justificativa errada</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Multiplicação de matrizes possível</td><td colspan="3" rowspan="2">-</td><td rowspan="2">7</td><td>Calcularam errado</td><td>2</td><td rowspan="2">16</td></tr>
<tr><td>Disseram ser impossível</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Transposição</td><td colspan="3">2</td><td colspan="3">2</td><td>19</td></tr>
</table>

Fonte: Autora

Quanto à multiplicação por escalar no G1, 83% responderam corretamente, 8% erraram e 8% não responderam (ver Quadro 11). Em relação ao grupo G2, 57% responderam corretamente e 43% simplesmente não responderam, ou seja, não se lembravam da operação (ver Quadro 12).

Quando as questões envolveram produto de matrizes, se verificou uma quantidade maior de erros ou de esquecimentos acerca dessa operação, nos dois grupos. No caso da inexistência do produto, conforme resultados do Quadro 11, foi possível verificar que, no G1, houve apenas 25% de acertos, dos quais 8% apresentaram justificativa correta e 17% apresentaram justificativa equivocada, o que indica problemas de compreensão. Nessa questão, o número de erros aumentou significativamente para 50%, e, ainda, verificou-se que 25% não responderam, afirmando não se lembrar da operação. Ou seja, 75% do G1 não soube resolver essa questão.

No G2, conforme resultados do Quadro 12, verificou-se que apenas 9% acertou a resposta, sendo que a metade apresentou justificativa correta e a outra metade não. Além disso, 30% calcularam errado e 61% não responderam. Ou seja, 91% do G2 não soube resolver essa questão.

Quando a questão envolveu um produto possível entre matrizes, conforme resultados do Quadro 11, apenas 6% do G1 acertou. Houve 67% de respostas erradas, sendo que 28% calcularam errado e 39% afirmaram que não existia o produto (o que indica a falta de compreensão da operação). Além disso, 27% disseram não se lembrar ou deixaram em branco a questão.

No G2, os resultados, apresentados no Quadro 12, indicam que não houve acertos nessa questão e que 30% forneceram respostas erradas, sendo que 9% calcularam errado e 21% disseram que o produto não existia. Nesse caso, 70% disseram não se lembrar ou deixaram em branco a questão.

Finalmente, na questão que envolvia transposição de matrizes, observa-se, no Quadro 11, que, no G1, houve 33% de acertos, 17% de erros e 50% não responderam à questão. Já no Quadro 12, observa-se que, no grupo G2, houve 9% de acertos, 9% de erros e 82% não responderam.

As respostas dos dois grupos indicam que em relação à soma de matrizes ou na multiplicação de uma matriz por um escalar, os estudantes se recordam mais facilmente dos procedimentos de cálculo. Porém, quando foi solicitado como se efetuava o procedimento de multiplicação entre matrizes ou de transposição de matrizes, notou-se confusões nas compreensões.

Um erro que chamou a atenção nos registros de três estudantes do G1 dizia respeito à questão que envolvia a transposição, cuja resposta foi:

$$B^t = \begin{bmatrix} -3^t & -1^t \\ 9^t & 2^t \\ -3^t & -5^t \end{bmatrix}$$

Essa característica ou tendência para inventar uma resposta quando os estudantes não sabem como proceder aparece com frequência em resolução de problemas, especialmente em avaliações escritas. Além disso, o estudante A4 disse que, para poder ser efetuada a transposição, a matriz precisaria ser “quadrática”. Nesse caso, ele confundiu um conceito relacionado à ordem de matrizes com o nome que identifica um tipo de função matemática. Nota-se, aqui, que há confusão na compreensão desses conceitos.

A análise dos registros escritos dos estudantes permitiu concluir que há, para maioria dos participantes da pesquisa, a ausência de conhecimentos prévios acerca das operações básicas entre matrizes, geralmente abordadas no ensino médio. E, ainda, que esse indicativo aparece de modo mais acentuado nos resultados do grupo G2, tendo em vista os maiores percentuais de erros ou de esquecimentos verificados.

Ressalta-se que esses conhecimentos prévios acerca de conceitos básicos sobre operações entre matrizes são fundamentais para a compreensão do aprofundamento teórico dos conceitos mais complexos abordados no contexto do ensino superior relativos ao estudo da Álgebra Linear.

Os resultados da pesquisa comprovam o que se tem percebido ao longo da experiência vivenciada de docência no ensino superior com ensino de Álgebra Linear. A maioria dos estudantes chega desprovida desses conhecimentos prévios, que são fundamentais para a compreensão dos conceitos mais complexos dessa disciplina. Verifica-se que esse é um dos principais motivos que justificam a grande dificuldade de compreensão e de aprendizagem de conceitos próprios da Álgebra Linear, tendo em vista que os estudantes precisam aprender ou ressignificar conceitos básicos que já deveriam trazer presentes em suas estruturas cognitivas, para que possam ampliar esses conhecimentos tornando-os mais complexos e significativos. Além disso, também é um indicativo de que tais conceitos precisam ser retomados no ensino superior, de modo a propiciar um ambiente de ensino que favoreça a aprendizagem significativa.

Destaca-se que a identificação de dificuldades existentes entre os estudantes (dos dois grupos) relativas à aprendizagem sobre operações entre matrizes foram importantes, pois contribuíram com o planejamento das aulas posteriores, que visaram facilitar e potencializar futuras aprendizagens, de modo significativo.

6.2.5 Tarefa 6

O objetivo dessa tarefa consistiu em possibilitar aos estudantes, de ambos os grupos, a percepção sobre os usos práticos de matrizes ou de operações entre elas, na resolução de problemas.

O primeiro problema se referiu ao uso de matrizes para construção de um banco de dados de produtos, em uma loja de construção. As operações deveriam ser realizadas para possibilitar: o controle do estoque, visando: à manutenção de um número mínimo de itens; à obtenção dos montantes relativos aos itens estocados em diferentes momentos do mês e ao reajuste dos preços relativos aos itens estocados. Também deveriam possibilitar calcular valores totais em reais, relativos às compras de construtoras, realizadas na loja.

O segundo problema proposto envolveu o controle de nutrientes existentes em diferentes refeições de um cardápio preestabelecido, inicialmente fornecido para análise. Foi solicitado que verificassem quais seriam as quantidades totais de nutrientes ingeridos por refeição, bem como se essas quantidades estavam de acordo com as quantidades máximas e mínimas de nutrientes estabelecidas por uma nutricionista.

Em seguida, foi solicitado que construissem uma nova proposta de cardápio, prevendo as refeições mencionadas, na qual deveriam considerar seus próprios costumes, e deveriam verificar se esta nova proposta respeitaria as quantidades máximas e mínimas de nutrientes, que deveriam ser ingeridos em cada refeição proposta.

De acordo com as solicitações realizadas, esperava-se que, no primeiro problema, aparecessem: na alternativa (a), adição e subtração de matrizes; na alternativa (b), subtração de matrizes; nas alternativas (c) e (e), produto entre matrizes; e, na alternativa (d), multiplicação por um escalar. No segundo problema: na alternativa (a), multiplicação de matrizes; na alternativa (b), a comparação entre matrizes; e, na alternativa (c), que apresentassem um cardápio construído, por meio da observação dos próprios hábitos alimentares, para o qual deveriam verificar quais seriam as quantidades totais de nutrientes ingeridos e, também, se essas quantidades ingeridas satisfariam as quantidades máximas e mínimas, em cada refeição realizada. Ou seja, também envolveria produto e comparação entre matrizes.

As resoluções dos problemas foram desenvolvidas em duplas e o primeiro problema foi trabalhado durante o período de aula. A resolução do segundo problema foi proposta como uma tarefa extra sala de aula, de modo que as duplas pudessem ter mais tempo para refletir sobre sua resolução. Ficou combinado que eles fariam a entrega do segundo problema na próxima aula presencial.

Os estudantes do G1 puderam resolver as questões com o uso dos recursos tecnológicos digitais disponibilizados pela planilha *Excel*, em aula realizada no laboratório computacional da universidade. Por esse motivo, os problemas envolveram uma quantidade maior de dados, tendo em vista que os cálculos seriam facilitados pelo ambiente virtual. Já os estudantes do G2 realizaram a atividade em sala de aula convencional e os problemas tinham uma quantidade menor de dados, para facilitar os cálculos.

Os resultados do G1 estão apresentados na Tabela 1 e ilustrados na Figura 14, respectivamente.

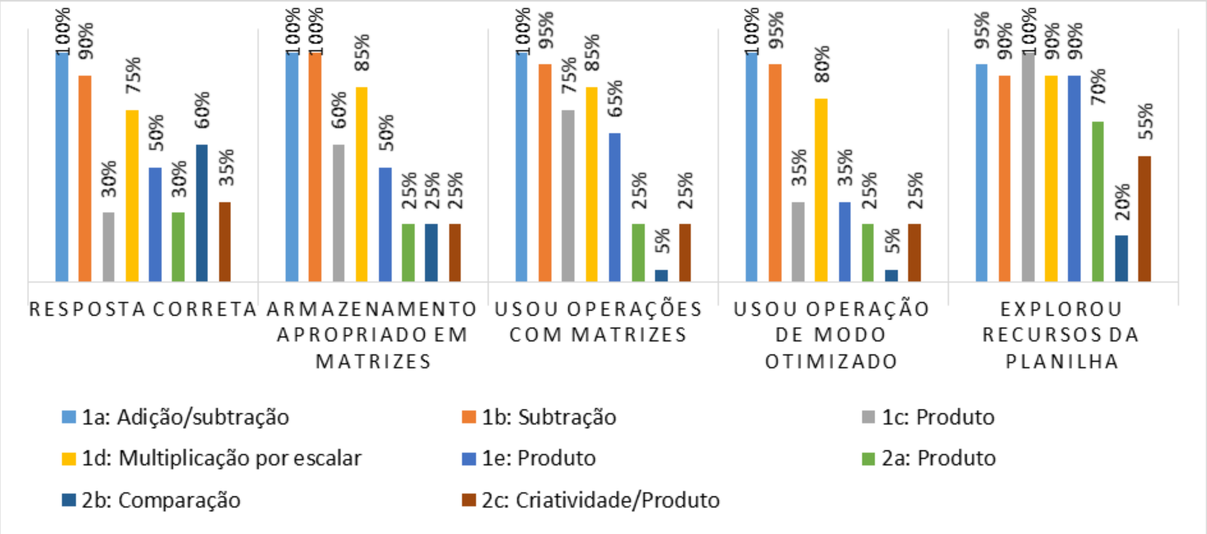
Tabela 1 - Resultados de respostas da Tarefa 6 (G1 – 20 grupos/individual)

Alternativa	Resposta correta (%)	Armazenamento apropriado em matrizes (%)	Usou operações com matrizes (%)	Usou operação de modo otimizado (%)	Explorou recursos da Planilha (%)
1 (a): Adição/subtração	100	100	100	100	95
1 (b): Subtração	90	100	95	95	90
1 (c): Produto	30	60	75	35	100
1 (d): Multiplicação por escalar	75	85	85	80	90
1e: Produto	50	50	65	35	90
2 (a): Produto	30	25	25	25	70
2 (b): Comparação	60	25	5	5	20
2c: Criatividade/Produto	35	25	25	25	55

Fonte: Autora.

Os resultados obtidos pela análise dos registros das respostas fornecidas pelas vinte duplas do G1 indicam que, na resolução do primeiro problema, em relação às alternativas 1(a) e 1(b), que envolviam adições ou subtrações entre matrizes, praticamente todas as duplas conseguiram resolver as questões propostas.

Figura 14 - Resultados das respostas da tarefa 6 (G1)



Fonte: Autora.

Na questão 1(b), foram identificadas duas respostas equivocadas, tendo sido percebidos erros de interpretação, conforme apresentado a seguir.

Os estudantes da dupla D8 afirmaram: “*O estoque a ser reposto nada mais é que o total de produtos que foi vendido”* e desconsideraram o fato de já terem sido repostos alguns itens, no meio do mês. Já os estudantes da dupla D15 apenas subtraíram, da quantidade inicial estocada, os itens que foram vendidos, e também desconsideraram a reposição no meio do mês.

Em relação ao uso dos recursos da planilha, foi possível perceber que a maioria das duplas do G1 (95% em 1(a) e 90% em 1(b)) fez uso deles de modo adequado.

Aqueles que não fizeram uso dos recursos apresentaram apenas os resultados na planilha, indicando que provavelmente fizeram os cálculos das adições ou subtrações manualmente (duplas D17 em 1(a); D7 e D8 em 1(b)) para, em seguida, inserir os resultados na planilha.

Na questão 1(c), que envolvia produto entre matrizes, verificou-se que houve um percentual grande de erros nas respostas. Apenas 30% forneceram respostas totalmente corretas.

Apesar de todos (100%) terem usado os recursos da planilha, apenas 75% usaram o produto de matrizes, que era o esperado. E, ainda, desses, apenas 35%

executaram o produto de modo otimizado, ou seja, realizaram todos os cálculos simultaneamente.

Na resolução de 1(c), foram observados diversos equívocos, apresentados a seguir:

- D1 e D11: calcularam os valores dos estoques iniciais e finais corretos, mas se enganaram no cálculo do estoque após a reposição (consideraram apenas os valores dos itens comprados para reposição, ao invés de somá-los aos itens já armazenados). E executaram os produtos separadamente, usando a função multiplicação de matrizes (=MATRIZ.MULT(matrizA; matrizB)).
- D2, D16: ao armazenarem os custos dos itens, erraram apenas um valor armazenado, o que gerou valores finais errados. Também executaram os produtos separadamente, por meio da função preexistente.
- D3: os estudantes também armazenaram valores errados sobre quantidades de itens estocados, o que gerou valores finais errados. Também executaram os produtos separadamente, por meio da função preexistente.
- D6: inseriram as matrizes em ordem errada na função multiplicação de matrizes. Para obter um valor único referente ao estoque, deveriam ter inserido matriz de custos $B_{1\times 8}$, que seria multiplicada pela matriz de quantidade em estoque $A_{8\times 1}$, que, por sua vez, geraria o valor único da matriz produto $(BA)_{1\times 1}$. No entanto, inseriram na função $A_{8\times 1}$ que foi multiplicada por $B_{1\times 8}$, que gera uma matriz $(AB)_{8\times 8}$. Como selecionaram apenas uma célula para receber o produto, a planilha gerou apenas o elemento (1, 1) da matriz $(AB)_{8\times 8}$. Nesse caso, notou-se que o uso inadequado dos recursos acabou gerando erros de cálculo que passaram despercebidos pelos estudantes desse grupo. Também fizeram os produtos separadamente, por meio da função preexistente.
- D7: apenas apresentaram o cálculo da multiplicação dos custos pela quantidade de itens (ambos armazenados em matrizes colunas), e indicaram os cálculos dos valores totais finais, mas estavam errados (houve um erro na construção da matriz de quantidade inicialmente estocada). Não utilizaram a função produto preexistente.

- D8, D19: apesar de efetuarem o produto por meio dos recursos da planilha corretamente, e todos ao mesmo tempo, consideraram na matriz de custos o valor de um item errado. Além disso, na matriz de estoques, ao invés de considerarem em colunas o estoque inicial, o intermediário e o final, consideraram o estoque inicial, as quantidades de reposição (sem estarem somadas aos itens já existentes) e as quantidades de itens vendidos, o que indica que houve problema de interpretação. Nesse caso, os estudantes não sentiram dificuldades com o recurso, mas não souberam interpretar e resolver o problema adequadamente.
- D9, D12, D15: apenas apresentaram o cálculo da multiplicação dos custos pela quantidade de itens (ambos armazenados em matrizes colunas), ou seja, não utilizaram a multiplicação entre matrizes. Não forneceram valores totais do estoque, o que indica que houve dificuldades de interpretação.
- D10: apesar de efetuarem o produto por meio dos recursos da planilha corretamente, e todos ao mesmo tempo, consideraram na matriz de custos o valor de um item errado.
- D20: apesar de efetuarem o produto por meio dos recursos da planilha corretamente, e todos ao mesmo tempo, calcularam os valores dos estoques iniciais e finais corretos e se enganaram no cálculo do estoque após a reposição (consideraram apenas os valores dos itens comprados para reposição, ao invés de somá-los aos itens já armazenados). Nesse caso, também não houve dificuldades no uso do recurso, mas sim de interpretação para resolução do problema.

De modo geral, na questão 1(c), observa-se que sete duplas erraram na interpretação do problema (D1, D8, D9, D11, D12, D15 e D19), o que representa 35% dos erros, e também houve um erro conceitual sobre produto de matrizes, verificado no grupo G6, que representa 5% dos erros verificados. Ou seja, percebe-se que 40% dos erros verificados na alternativa 1(c), estão relacionados a problemas de intepretação.

Em relação ao uso de recursos da planilha, verificou-se que oito duplas (40%) se equivocaram no armazenamento de dados (D2, D3, D16, D7, D8, D10, D19, D20), o que gerou erros nos cálculos finais. Destaca-se que a verificação de dados iniciais é um dos cuidados que se deve ter ao se trabalhar com planilhas. Nesse caso, dos 70% de erros cometidos, 40% foram gerados por problemas no armazenamento de dados. Esses erros combinados, explicaram os 70% de erros verificados nesse item.

No que se relaciona à exploração de recursos da planilha, nota-se que houve dificuldades em se trabalhar com o armazenamento de matrizes de modo adequado, pois apenas 60% o fizeram.

Também houve dificuldades de percepção acerca do fato de que diversos cálculos semelhantes poderiam ser agrupados por meio do produto entre matrizes. De acordo com os dados, dentre os 75% que usaram operações entre matrizes, apenas 35% o fizeram de modo otimizado, ou seja, 40% resolveram os produtos separadamente. Esse indicativo revela a falta de reflexão crítica dos estudantes no desenvolvimento da tarefa em relação ao uso adequado dos recursos tecnológicos digitais e também a falta de compreensão do modo como as operações entre matrizes podem ser utilizadas de modo adequado na resolução de problemas práticos.

Já em relação à alternativa 1(d), na qual esperava-se que os estudantes usassem a operação multiplicação por escalar, foi possível constatar que houve um percentual de 75% de respostas corretas e que 85% procederam ao armazenamento de modo apropriado, bem como usaram operações com matrizes de modo adequado. Além disso, 90% fizeram uso de recursos da planilha e 80% o fizeram de modo otimizado. Em relação aos resultados, verificou-se que apenas a dupla D6 não apresentou resolução dessa alternativa. Além disso, as duplas D10, D11, D12, D13 apresentaram erros de interpretação, pois calcularam o valor do desconto e não o valor do item descontado, ou seja, multiplicaram os preços dos itens por $0{,}38$, em vez de multiplicarem por $(1-0{,}38)=0{,}62$. A maioria das duplas apresentou os preços armazenados em uma matriz linha ou coluna e fez a multiplicação pelo escalar $0{,}62$.

Além dessa, também apareceram várias estratégias para resolver esse problema. Por exemplo, os estudantes de D3 primeiro calcularam 38% do valor do item, usando multiplicação por escalar, e depois fizeram uma subtração do valor inicial considerado. Também ocorreu que os estudantes das duplas D18 e D19, em vez de usarem multiplicação por escalar, armazenaram os preços dos itens numa matriz 8x1, armazenaram 0,62 numa matriz 1x1 e usaram a função de multiplicação de matrizes, obtendo a matriz produto desejada. Essa foi uma maneira criativa de resolver o problema.

Em relação à questão 1(e), que também envolvia um produto entre matrizes, verificou-se que houve apenas 50% de acertos, ou seja, assim como na alternativa 1(c), houve um percentual alto de erros de 50% (10 duplas).

Conforme os registros em planilhas, que foram enviados por e-mail, verificou-se que as resoluções de D1, D3, D4, D5, D11, D12, D15, D17, D18 e D20 estavam corretas, sendo que:

- Nas resoluções das duplas D1, D3, D5, D11, os cálculos dos produtos de matrizes foram realizados separadamente, com uso da função multiplicação preexistente.
- Nas resoluções das duplas D4, D17, D18, D20, os cálculos foram otimizados e os resultados foram obtidos por meio de um único produto de matrizes, também com uso da função multiplicação preexistente.
- Nas resoluções das duplas D12, D15 verificou-se que optaram por multiplicar o preço de cada item pela quantidade vendida, separadamente, para depois somarem os resultados, usando a função do somatório disponível. Nesses casos, não usaram a função multiplicação preexistente.

Em relação aos resultados errados, verificou-se que:

- Os estudantes da dupla D7 e D9 não usaram produto de matrizes, apenas multiplicaram os valores dos itens pelas quantidades vendidas, mas não somaram os resultados, ou seja, houve problema de interpretação.
- As duplas D2, D8, D10, D13, D16 e D19 erraram os cálculos pelo fato de terem se equivocado no armazenamento de dados, ao inserir os valores dos preços dos produtos.
- As duplas D6 e D14 não entregaram suas resoluções.

Assim, no grupo G1, em relação à questão 1(e), foi possível observar que apenas 10% (duas duplas) apresentaram erros de interpretação e que 30% das duplas forneceram respostas incorretas pelo fato de terem armazenado os dados incorretamente, ou seja, o recurso, apesar de gerar os cálculos corretamente, não propiciou os resultados corretos, pois os dados iniciais foram inseridos pelos estudantes de modo equivocado.

Já em relação ao segundo problema, cabe destacar que o objetivo consistiu em provocar uma maior reflexão mediante à resolução adequada do problema por meio dos recursos oferecidos pela planilha eletrônica. Assim, por meio da estratégia de resolução de problemas mais complexos, com a exploração do uso de recursos tecnológicos digitais, buscou-se favorecer o processo de abstração em relação aos possíveis usos das operações entre matrizes, de modo que propiciassem a obtenção da solução desejada.

Dessa forma, foi possível concluir, no G1, que provavelmente devido a esse grau maior de dificuldade imposta pelo problema, quatro duplas (D6, D7, D12 e D20) não entregaram suas resoluções, o que representa 20% dos erros constatados em cada alternativa.

Além disso, dentre 80% das tarefas entregues, verificou-se que houve somente 30% de acertos em relação à 2(a), 60% de acertos em relação à 2(b) e 35% de acertos em relação à 2(c).

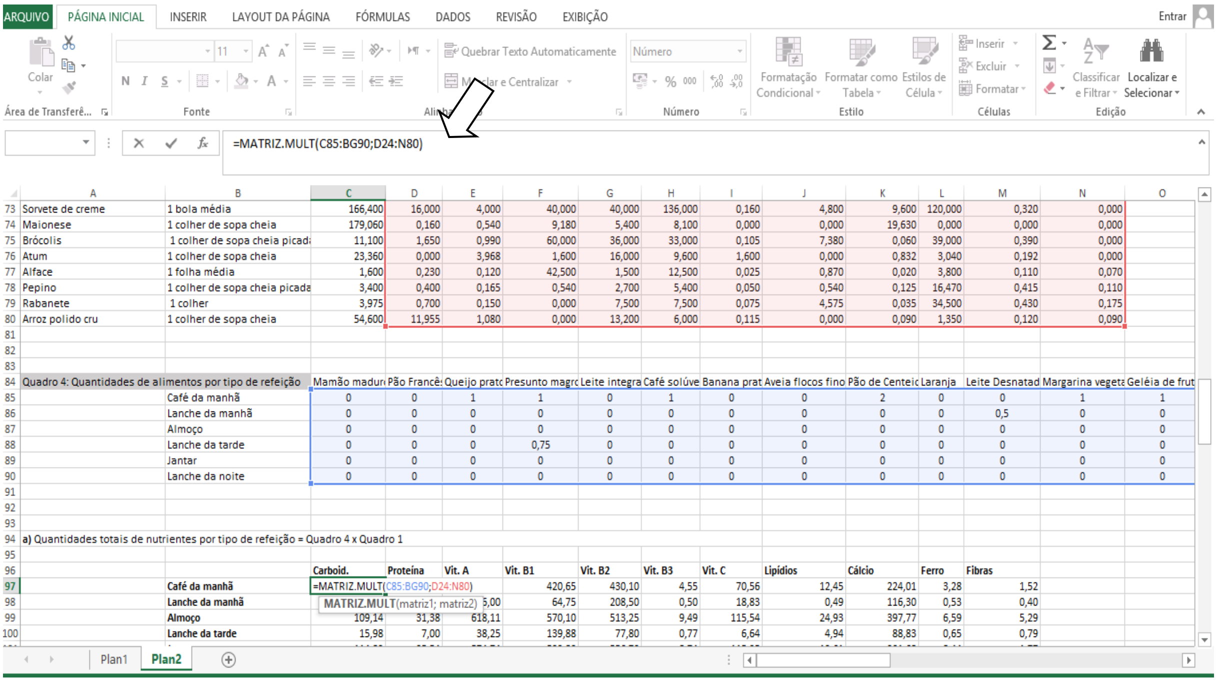
De todas as duplas, verificou-se que apenas D1, D3, D5 e D10 calcularam tudo corretamente e, ainda, que, dentre elas, somente D5 forneceu o cardápio por escrito.

Os estudantes de D4 também calcularam 2(a) e 2(b) corretamente, mas não conseguiram resolver 2(c), pois indicaram, por escrito, que não conseguiram executar o produto de matrizes na planilha, por meio da função de multiplicação preexistente. Essa dupla também não forneceu o cardápio escrito.

Em relação à complexidade de resolução, destaca-se que, na alternativa 2(a), para se determinar a quantidade de nutrientes ingeridos em cada refeição por meio de um produto entre matrizes, esperava-se que os estudantes criassem uma matriz de ordem 6x57 (6 refeições indicadas pelas linhas e 57 alimentos indicados pelas colunas) que armazenasse as quantidades ingeridas relativas aos 57 alimentos considerados, nas seis refeições realizadas.

Essa matriz, ao ser multiplicada pela matriz de nutrientes dos alimentos (57 alimentos x11 nutrientes) – dada inicialmente –, gerava uma matriz produto 6x11, que continha, para as seis refeições (indicadas pelas linhas da matriz produto), as quantidades totais ingeridas, relativas aos 11 nutrientes considerados (indicados pelas colunas da matriz produto). Como exemplo, apresenta-se a resolução da dupla D1, ilustrada na Figura 16.

Figura 15 - Resolução otimizada de 2(a) realizada pela dupla D1 – G1



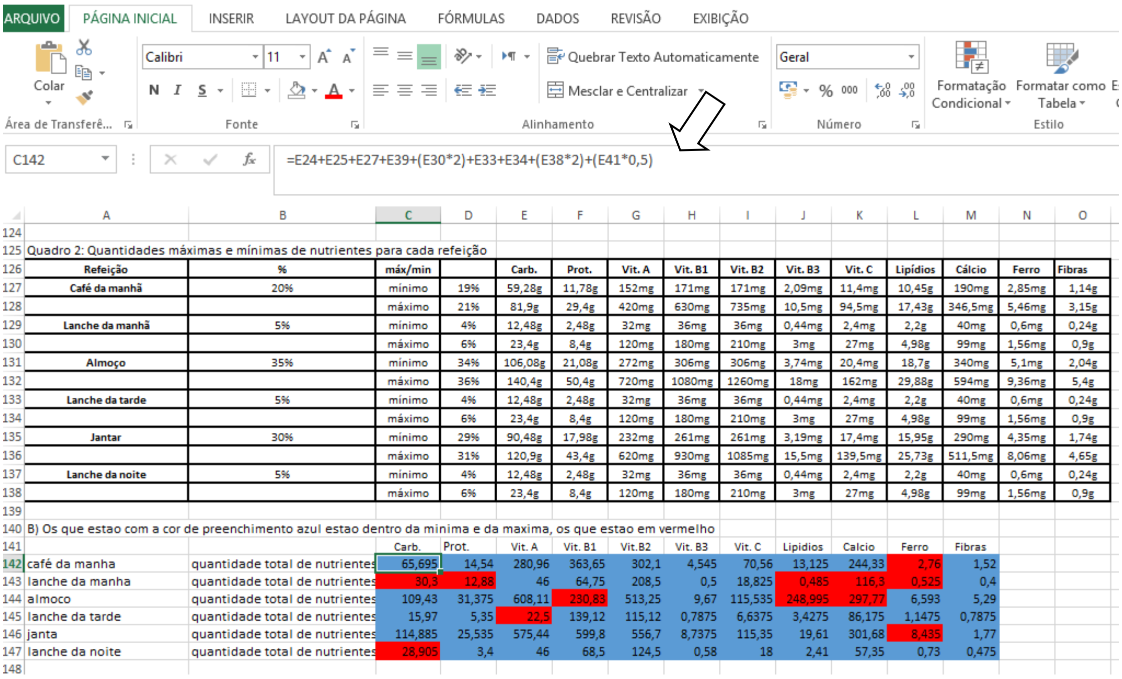
Fonte: Dupla D1 – G1 (2016)

Os resultados indicam que essa complexidade não foi percebida pela maioria dos estudantes do G1, pois, nessa alternativa, verificou-se que 70% se constituíram em respostas equivocadas ou inexistentes.

Também foi possível identificar que houve problema de compreensão em relação aos objetivos da tarefa, pois muitos compreenderam que, ao serem solicitadas as quantidades totais de nutrientes ingeridos, eles deveriam somar todos os valores calculados, relativos a todos os nutrientes considerados, o que, na prática, não faz sentido. Nesse caso, nota-se a falta de raciocínio crítico acerca dos objetivos da tarefa. Esse indicativo pode ser contatado pelos resultados que são apresentados a seguir.

As duplas D2, D13, D14 e D15, na alternativa 2(a), cometeram o erro de interpretação anteriormente citado, calculando as quantidades de nutrientes ingeridas e somando todos eles ao mesmo tempo. Porém, essas duplas calcularam corretamente, na alternativa 2(b), as quantidades de nutrientes ingeridos separadamente, por refeição, e armazenaram os resultados em uma tabela, que usaram para comparar com os valores máximos e mínimos estabelecidos. Para melhor compreensão da estratégia utilizada pelos estudantes na resolução de 2(b), apresenta-se, na Figura 17, um exemplo de cálculo realizado, o qual utiliza o procedimento citado. Todas essas duplas apresentaram na alternativa 2(c) o novo cardápio e procederam como em 2(b), para verificarem se os limites dos nutrientes eram respeitados, o que também foi considerado correto.

Figura 16 - Resolução não otimizada de 2(b) realizada pela Dupla D2 –G1



Quadro 2: Quantidades máximas e mínimas de nutrientes para cada refeição

Refeição	%	máx/min		Carb.	Prot.	Vit. A	Vit. B1	Vit. B2	Vit. B3	Vit. C	Lipídios	Cálcio	Ferro	Fibras
Café da manhã	20%	mínimo	19%	59,28g	11,78g	152mg	171mg	171mg	2,09mg	11,4mg	10,45g	190mg	2,85mg	1,14g
		máximo	21%	81,9g	29,4g	420mg	630mg	735mg	10,5mg	94,5mg	17,43g	346,5mg	5,46mg	3,15g
Lanche da manhã	5%	mínimo	4%	12,48g	2,48g	32mg	36mg	36mg	0,44mg	2,4mg	2,2g	40mg	0,6mg	0,24g
		máximo	6%	23,4g	8,4g	120mg	180mg	210mg	3mg	27mg	4,98g	99mg	1,56mg	0,9g
Almoço	35%	mínimo	34%	106,08g	21,08g	272mg	306mg	306mg	3,74mg	20,4mg	18,7g	340mg	5,1mg	2,04g
		máximo	36%	140,4g	50,4g	720mg	1080mg	1260mg	18mg	162mg	29,88g	594mg	9,36mg	5,4g
Lanche da tarde	5%	mínimo	4%	12,48g	2,48g	32mg	36mg	36mg	0,44mg	2,4mg	2,2g	40mg	0,6mg	0,24g
		máximo	6%	23,4g	8,4g	120mg	180mg	210mg	3mg	27mg	4,98g	99mg	1,56mg	0,9g
Jantar	30%	mínimo	29%	90,48g	17,98g	232mg	261mg	261mg	3,19mg	17,4mg	15,95g	290mg	4,35mg	1,74g
		máximo	31%	120,9g	43,4g	620mg	930mg	1085mg	15,5mg	139,5mg	25,73g	511,5mg	8,06mg	4,65g
Lanche da noite	5%	mínimo	4%	12,48g	2,48g	32mg	36mg	36mg	0,44mg	2,4mg	2,2g	40mg	0,6mg	0,24g
		máximo	6%	23,4g	8,4g	120mg	180mg	210mg	3mg	27mg	4,98g	99mg	1,56mg	0,9g

B) Os que estao com a cor de preenchimento azul estao dentro da minima e da maxima, os que estao em vermelho

		Carb.	Prot.	Vit. A	Vit. B1	Vit.B2	Vit. B3	Vit. C	Lipidios	Calcio	Ferro	Fibras
café da manha	quantidade total de nutrientes	65,695	14,54	280,96	363,65	302,1	4,545	70,56	13,125	244,33	2,76	1,52
lanche da manha	quantidade total de nutrientes	30,3	12,88	46	64,75	208,5	0,5	18,825	0,485	116,3	0,525	0,4
almoco	quantidade total de nutrientes	109,43	31,375	608,11	230,83	513,25	9,67	115,535	248,995	297,77	6,593	5,29
lanche da tarde	quantidade total de nutrientes	15,97	5,35	22,5	139,12	115,12	0,7875	6,6375	3,4275	86,175	1,1475	0,7875
janta	quantidade total de nutrientes	114,885	25,535	575,44	599,8	556,7	8,7375	115,35	19,61	301,68	8,435	1,77
lanche da noite	quantidade total de nutrientes	28,905	3,4	46	68,5	124,5	0,58	18	2,41	57,35	0,73	0,475

Fonte: Dupla D2 –G1 (2016)

As duplas D8 e D16, na alternativa 2(a), calcularam todas as ingestões de nutrientes separadamente e depois somaram todos os nutrientes juntos, ingeridos no dia, o que remete ao erro de interpretação citado anteriormente. Essas duplas não calcularam as alternativas 2(b) e 2(c).

Já a dupla D17, em 2(a), calculou separadamente as ingestões de nutrientes por alimento em cada refeição, não somando os valores relativos ao mesmo nutriente por refeição – o que também remete ao erro de interpretação, citado anteriormente. Também não calculou 2(b) e 2(c).

A dupla D9 procedeu do mesmo modo que a dupla D17 para resolver a alternativa 2(a). No entanto, para verificar se a ingestão dos alimentos satisfazia os limites estabelecidos relativos à ingestão de nutrientes, a dupla somou as quantidades totais de cada nutriente, existentes nos alimentos ingeridos considerados em cada refeição, e armazenou os resultados numa matriz, que usaram para comparar aos limites iniciais fornecidos. Desse modo, resolveu corretamente a alternativa 2(b), mas não apresentou a resolução de 2(c).

A dupla D11, ao resolver 2(a), também calculou todas as ingestões de nutrientes separadamente, por refeição, e, no final, somou todas as quantidades de todos os nutrientes juntos no dia, o que não tem significado prático. Aqui também se nota o erro de interpretação. No entanto, para verificar os limites para ingestão de nutrientes por refeição, a dupla somou apenas os valores dos mesmos nutrientes presentes nos alimentos e em cada refeição, armazenando os resultados em uma matriz, que possibilitou realizar a resolução correta de 2(b). Essa dupla também não apresentou a resolução de 2(c).

Já a dupla D18 fez os cálculos corretamente em 2(a), calculou tudo separadamente por refeição (não usando produto entre matrizes) e depois somou as quantidades dos mesmos nutrientes presentes nos diferentes alimentos em cada refeição. Porém, não apresentou um resumo desses cálculos em uma matriz separadamente, o que dificultou a visualização de seus resultados. Também comparou os totais de nutrientes ingeridos por refeição aos limites estabelecidos, resolvendo corretamente 2(b). Essa dupla também não apresentou a resolução de 2(c).

Finalmente, a dupla D19 apresentou, na planilha, apenas matrizes numéricas referentes a cada refeição realizada, em cujas linhas indicavam os alimentos ingeridos e em cujas colunas indicavam os nutrientes correspondentes à ingestão do alimento ingerido. Mas não apresentaram os cálculos que geraram essas matrizes. Também não apresentaram as resoluções de 2(b) e de 2(c).

Destaca-se que, nessa tarefa, diferentemente do esperado, a maioria dos estudantes não foi capaz-de perceber como deveria armazenar os dados para usar o produto entre matrizes adequadamente, tendo em vista gerar os resultados desejados. Também houve confusão na interpretação das perguntas realizadas, o que indica a presença de dificuldade de compreensão na resolução de problemas mais complexos, especialmente quando eles exigem mais raciocínio e mais abstração, para uma adequada resolução.

Nesse caso, foi possível concluir que, no que diz respeito à resolução do segundo problema realizado pelos estudantes do G1, os resultados indicam que, devido às exigências de compreensão – não somente dos seus objetivos, mas também do conhecimento sobre uso adequado de armazenamento de dados em matrizes e de aplicações de operações entre elas, além da necessidade de compreensão do uso adequado dos recursos tecnológicos digitais, disponibilizados no ambiente da planilha –, a tarefa não favoreceu a compreensão e dificultou a percepção do uso de matrizes e de suas operações na resolução de problemas.

Esse fato remete à possibilidade de um trabalho de pesquisa que pode ser realizado futuramente. Talvez a tarefa teria gerado melhores resultados, se tivesse sido proposta inicialmente a resolução com o uso dos recursos da planilha de um problema mais simples, resolvido em sala de aula, com a intermediação do professor (como o proposto para o grupo G2), para somente depois dar prosseguimento à tarefa, com a proposição de resolução de um terceiro problema mais complexo, extra sala de aula, como aquele que foi apresentado ao grupo G1.

Em relação aos problemas propostos no grupo G2, destaca-se que, pelo fato de terem que fazer os cálculos manualmente, foram propostos problemas semelhantes aos propostos no G1, porém, com uma quantidade menor de dados, para facilitar os cálculos realizados e evitar erros numéricos, provocados pela repetição. Os resultados do G2 estão apresentados na Tabela 2 e ilustrados na Figura 15, respectivamente.

Tabela 2 - Resultados de respostas da Tarefa 6 (G2 – 13 grupos/individual)

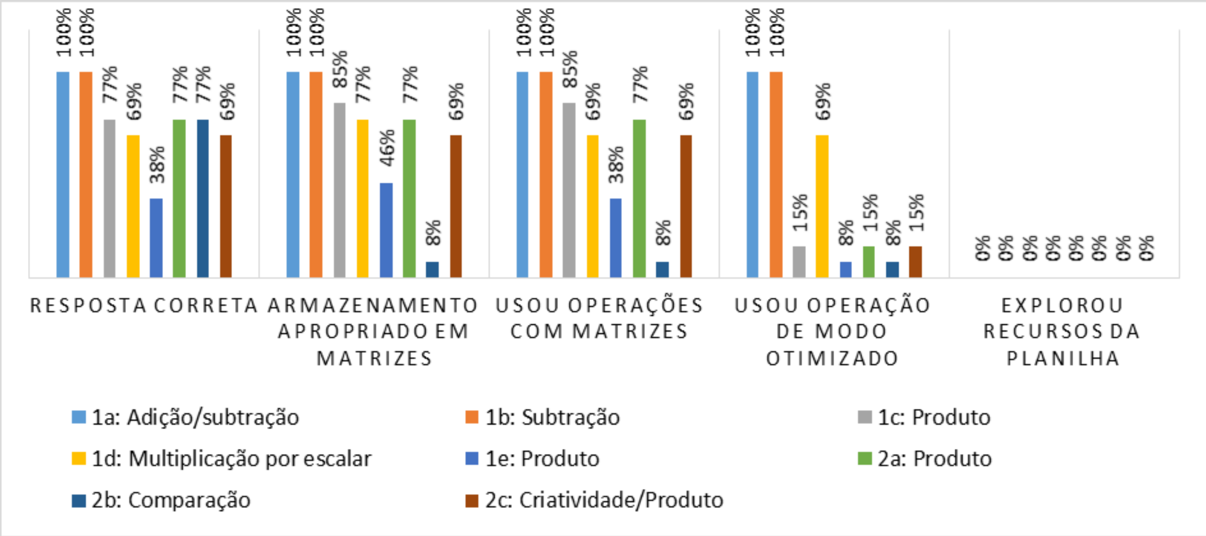
Alternativa	**Resposta correta (%)**	**Armazenamento apropriado em matrizes (%)**	**Usou operações com matrizes (%)**	**Usou operação de modo otimizado (%)**	**Explorou recursos da planilha (%)**
1 (a): Adição/subtração	100	100	100	100	0
1 (b): Subtração	100	100	100	100	0
1 (c): Produto	77	85	85	15	0
1 (d): Multiplicação por escalar	69	77	69	69	0
1e: Produto	38	46	38	8	0
2 (a): Produto	77	77	77	15	0
2b: Comparação	77	8	8	8	0
2 (c): Criatividade/Produto	69	69	69	15	0

Fonte: Autora.

Os resultados indicam que, no G2, em relação às alternativas 1(a) e 1(b), que envolviam adições ou subtrações entre matrizes, todos conseguiram resolver as questões propostas, com uso de matrizes de modo adequado e otimizado.

Verificou-se que algumas duplas, tais como D1, D5, D7 e D11, optaram pelo armazenamento dos dados em matrizes linha, de ordem 1x8, o que não é muito comum. No entanto, isso não comprometeu os cálculos realizados, pois as resoluções das operações foram adequadamente apresentadas.

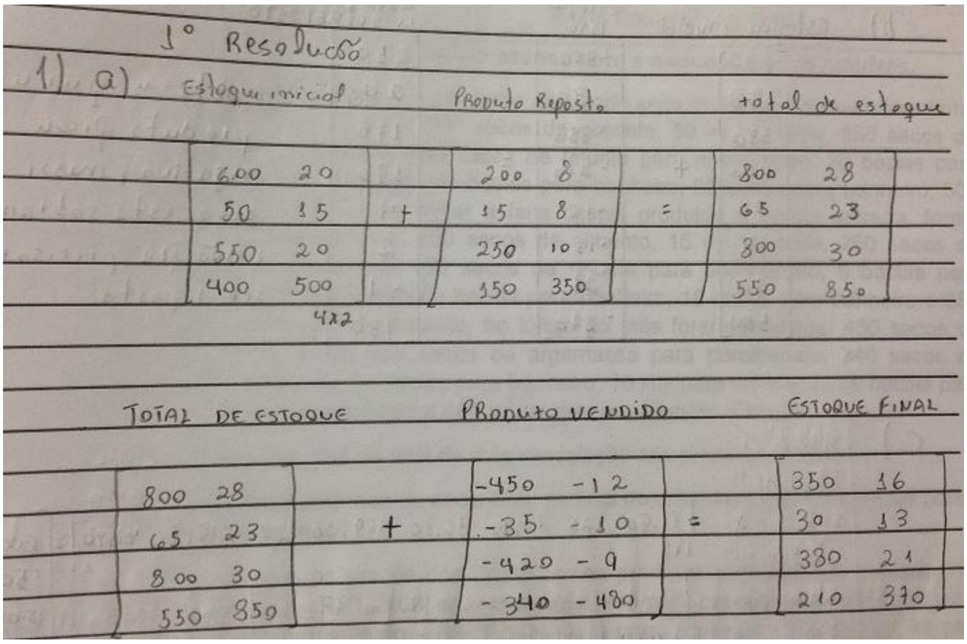
Figura 17 - Resultados das respostas da Tarefa 6 (G2)



Fonte: Autora.

Além disso, observou-se, durante o desenvolvimento do primeiro problema, realizado em aula, que a dupla D6, ao armazenar os dados informados na alternativa 1(a), optou por armazenar os oito valores relativos às quantidades de oito itens diferentes numa matriz de ordem 4X2, o que estava incorreto (ver Figura 18).

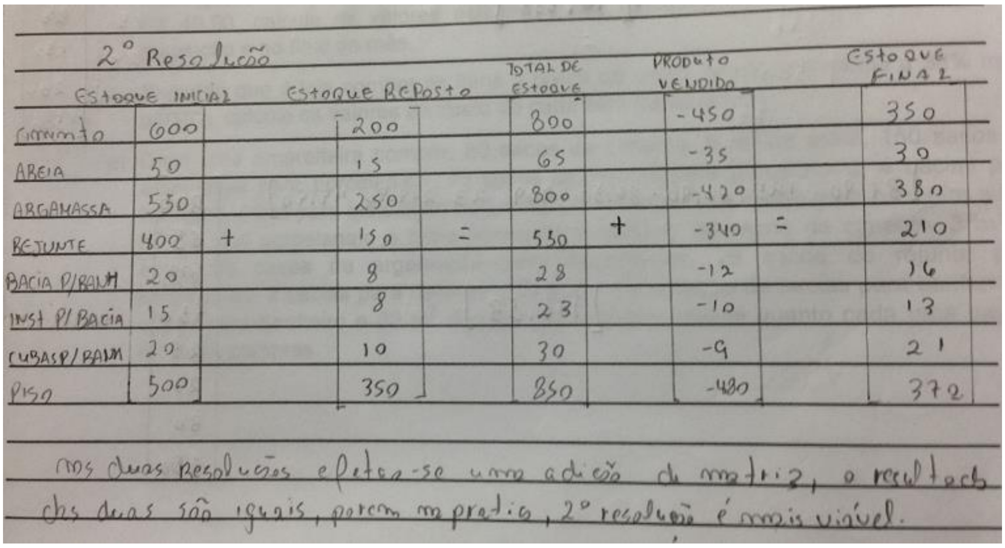
Figura 18 - Primeiro modo de resolução da questão 1(a) de D6 (G2) - Tarefa 6



Fonte: Dupla D6 – G2 (2016)

Após terem sido questionados sobre isso, repensaram e refizeram os cálculos, conforme apresentado na Figura 19. Foi solicitado aos estudantes que não deixassem os dois modos de resolução registrados no trabalho.

Figura 19 - Segundo modo de resolução da questão 1(a) de D6 (G2) - Tarefa 6



2° Resolução

	ESTOQUE INICIAL	ESTOQUE REPOSTO	TOTAL DE ESTOQUE	PRODUTO VENDIDO	ESTOQUE FINAL
Cimento	600	200	800	-450	350
AREIA	50	15	65	-35	30
ARGAMASSA	550	250	800	-420	380
REJUNTE	400	150	550	-340	210
BACIA P/BANH	20	8	28	-12	16
INST P/ BACIA	15	8	23	-10	13
CUBAS P/ BANH	20	10	30	-9	21
PISO	500	350	850	-480	372

nas duas Resoluções efetua-se uma adição de matriz, o resultado das duas são iguais, porem na pratica, 2° resolução é mais viável.

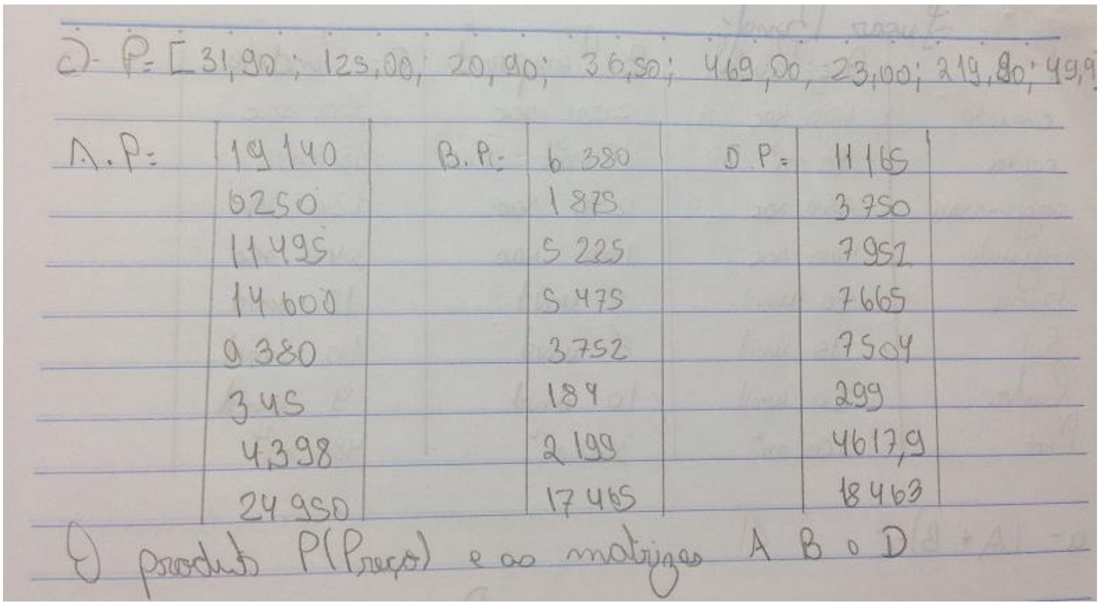
Fonte: Dupla D6 –G2 (2016)

Em relação à alternativa 1(c), que envolveu produto entre matrizes, houve 77% de respostas corretas, sendo que 85% indicaram que usaram produto entre matrizes, mas somente 15% agrupou os dados para usarem o produto de matrizes de modo otimizado.

As duplas D9, D10 e D11 erraram os cálculos, tendo sido identificados os seguintes equívocos:

– No caso da dupla D9, os estudantes armazenaram as quantidades estocadas em matrizes (8x1), por exemplo, $A_{8\times1}$, e os preços em uma matriz (1x8), por exemplo $P_{1\times8}$, e, ao indicarem o produto, o escreveram na ordem $A_{8\times1}\,P_{1\times8}$, o que geraria, pelo produto entre matrizes, uma matriz de ordem (8x8), com 64 elementos. Além disso, eles indicaram como resultado uma matriz (8x1), cujos elementos eram apenas produtos simples, obtidos entre quantidades estocadas e preços correspondentes, e não resultados de somatórios, como era esperado no produto de matrizes (ver Figura 20). Além do problema de cálculo, também foi identificado o erro de interpretação, pois o problema solicitava os valores totais dos montantes relativos aos estoques que existiam no início do mês, no meio do mês e no final do mês, ou seja, deveriam obter como resposta apenas três valores resultantes dos cálculos efetuados.

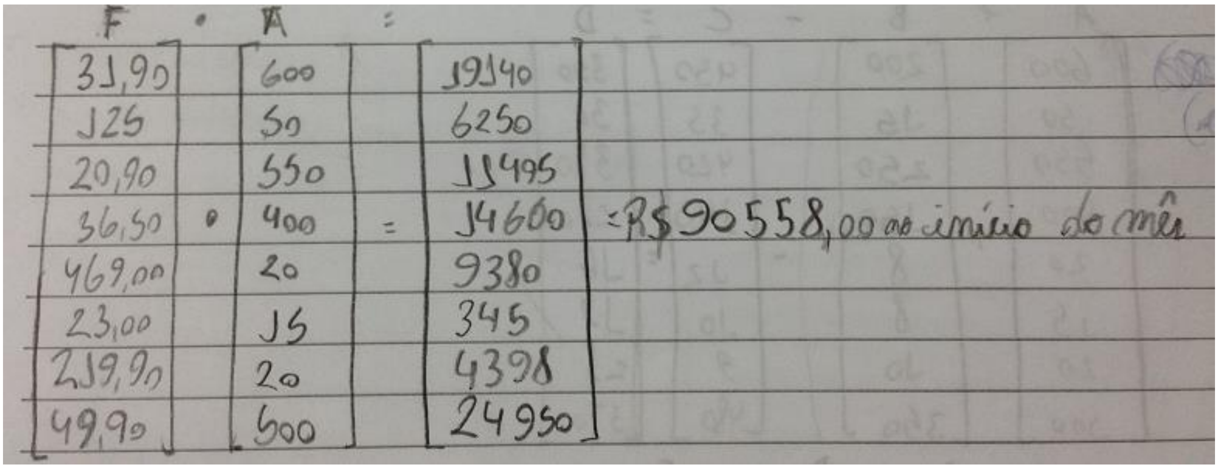
Figura 20 - Resolução da questão 1(c) de D9 (G2) - Tarefa 6



Fonte: Dupla D9 – G2 (2016)

– A dupla D10 armazenou os preços numa matriz 8x1 e indicou o produto entre matrizes (8x1) x (8x1), que não pode ser calculado. Além disso, multiplicaram os elementos das mesmas posições, obtendo uma matriz 8x1 como resultado. Para finalizar, igualaram essa matriz a um valor único final, aparentemente obtido (não indicaram como realizaram os cálculos) pela soma de todos os elementos resultantes dos produtos simples realizados entre os elementos correspondentes (ver Figura 21).

Figura 21 - Resolução da questão 1 (c) de D10 (G2) - Tarefa 6

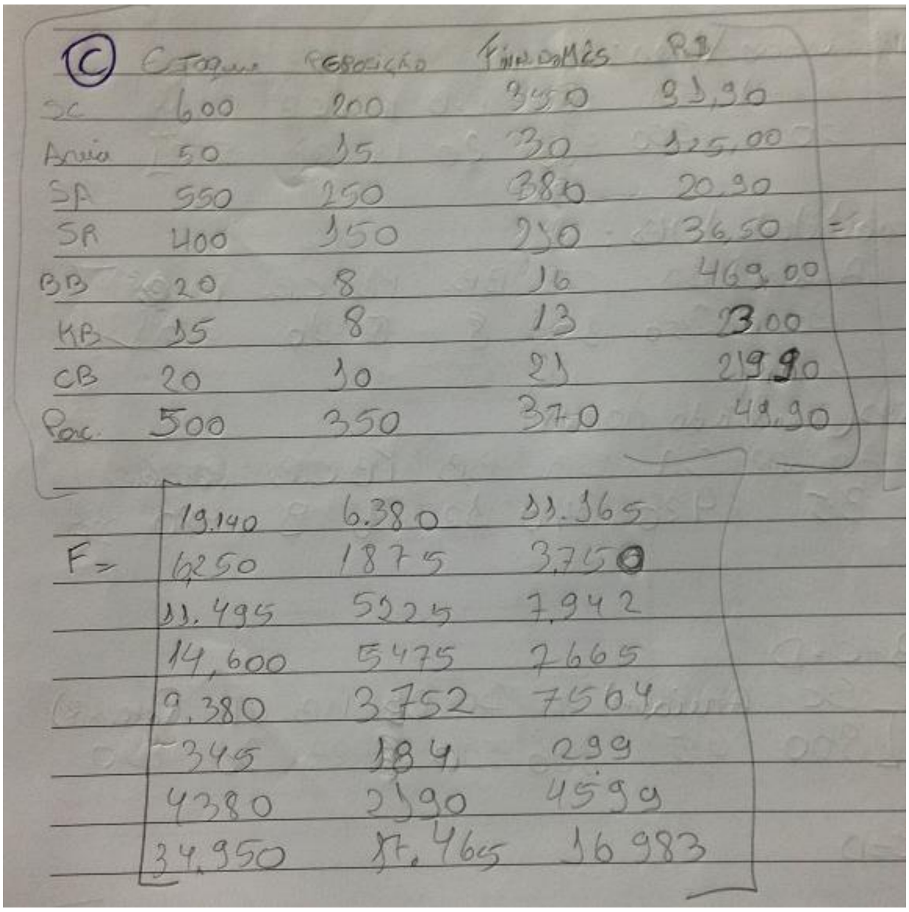


Fonte: Dupla D10 – G2 (2016)

– A dupla D11 foi a que apresentou o registro mais surpreendente. Resolveram armazenar todos os dados numa única matriz (8x4). As linhas representando os itens considerados; as três primeiras colunas, os valores dos estoques: inicial, intermediário e final; e na última coluna os preços dos produtos. Não indicaram operação alguma, apenas forneceram como reposta uma matriz 8x3 contendo os valores em reais relativos aos montantes referentes às quantidades dos itens estocados (ver Figura 22).

Os erros cometidos pelas três duplas indicam que houve falta de compreensão do produto entre matrizes.

Figura 22 - Resolução da questão 1(c) de D11 (G2) - Tarefa 6



Fonte: Dupla D11 – G2 (2016)

Além disso, o fato de que apenas 15% fizeram uso do produto otimizado, também indicou que existiu, no G2, dificuldades de percepção quanto à abrangência do uso do produto, no sentido de tornar os cálculos mais rápidos e eficientes.

Na alternativa 1(d), verificou-se 69% de ocorrências de repostas corretas, sendo que 69% fizeram uso adequado no armazenamento de dados por meio de matrizes, bem como fizeram uso da multiplicação por escalar de modo adequado.

As dificuldades encontradas nessa tarefa, relativas aos 31% de respostas equivocadas, referem-se à dificuldade de interpretação. Como exemplo, podem ser citadas as resoluções das duplas D9 e D11, que, ao invés de trabalharem simplesmente com a matriz de custos dos produtos, consideraram as matrizes que haviam calculado equivocadamente em 2(c), referentes aos valores dos montantes dos itens estocados (que foram calculados separadamente) e multiplicaram esses valores por $0{,}38$. Nesse caso, além de considerarem as matrizes de dados erradas, também erraram ao calcular os valores correspondentes dos descontos e não dos valores descontados dos itens. Além disso, as duplas D6 e D13 não apresentaram resolução para essa alternativa, o que também indica que não compreenderam o que estava sendo solicitado.

Em relação aos resultados da alternativa 1(e), foi possível constatar que houve apenas 38% de respostas consideradas corretas, sendo que 38% fizeram uso do produto entre matrizes para obterem seus resultados.

Destaca-se que apenas uma dupla D4 apresentou o uso correto e otimizado do produto entre matrizes, que representou 8% das resoluções. Nessa alternativa, foi possível verificar que as duplas D3, D6, D8, D9, D10, D11 e D13 (54%) não entregaram suas resoluções.

Da observação realizada durante o desenvolvimento da tarefa, foi possível perceber que eles demoraram muito para resolver as alternativas anteriores, o que os deixou sem tempo para pensar e finalizar a última alternativa, relativa ao primeiro problema proposto. Assim, provavelmente as duplas não entregaram as resoluções da alternativa 1(e) pelo fato de não terem tido mais tempo para resolver essa alternativa, durante o período da aula.

Esse é um problema que se enfrenta no ensino presencial. O tempo de desenvolvimento da tarefa fica limitado ao período da aula. Como existe uma diversidade muito grande em relação ao tempo de aprendizagem de cada estudante, isso dificulta a realização das tarefas em sala de aula, pois elas dependem diretamente do tempo que cada estudante precisa para compreendê-las.

Também foi possível observar que as duplas D1, D5, D7 e D12 apresentaram o uso correto do produto, mas os calcularam separadamente, por meio de dois produtos entre matrizes.

Verificou-se, ainda, que a dupla D1 chegou ao resultado correto, mas apresentou, em seus registros escritos, equívocos conceituais acerca do produto entre matrizes.

Nesse caso, os estudantes armazenaram os preços dos itens em uma matriz coluna, de ordem 8x1, chamando-a de $F_{8\times1}$, e armazenaram em outra matriz linha, de ordem 1x8, as quantidades de itens referentes à compra realizada pela construtora “A”, chamando-a de $C_{1\times8}$. Para obterem o valor gasto pela construtora, os estudantes indicaram o cálculo do seguinte produto entre matrizes: $F_{8\times1}\,C_{1\times8}$, que, caso fosse corretamente realizado, geraria uma matriz resultante do produto 8x8, e não uma matriz 1x1, como indicado. Assim, o registro algébrico indica claramente a presença do erro conceitual em relação ao produto de matrizes.

Esse erro foi verificado também no registro da dupla D2, o que impediu os estudantes de prosseguirem o cálculo, exatamente por não saberem como continuar.

Em relação ao problema 2, verificou-se que houve 77% de acertos em relação às alternativas 2(a) e 2(b) e que houve 69% de acertos em relação à alternativa 2(c).

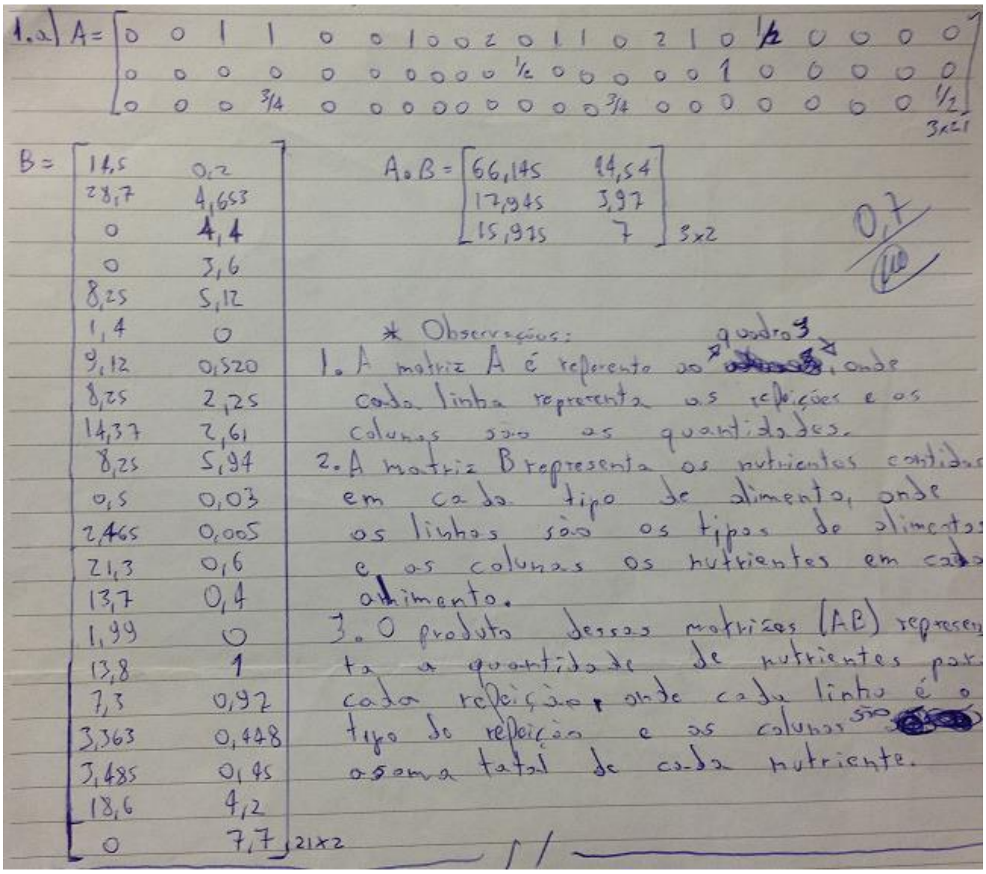
Apenas as duplas D1 e D4 (15%) armazenaram os dados de modo correto e usaram o produto de modo otimizado na resolução de todas as alternativas do segundo problema.

No entanto, em relação a essas duas duplas, verificou-se que:

- A dupla D1 transpôs a matriz de nutrientes, fornecida inicialmente, sem necessidade; não utilizaram operações entre matrizes para verificar 2(b) e não forneceram em linguagem natural o cardápio utilizado na alternativa 2(c).
- A dupla D4, além de resolver tudo corretamente, inclusive utilizando o produto de modo otimizado – que indicaram por AB, em 2(a) –, também se utilizou de operações entre matrizes para verificar 2(b), apresentando um modo criativo para essa verificação, ou seja, utilizou as operações entre matrizes em 2(b) de modo otimizado, o que representou 8% das duplas. Armazenou os limites mínimos em uma matriz que representaram por C e armazenou os limites máximos em uma matriz que representaram por D. Fizeram as subtrações: $AB-C$ e $D-AB$, que os possibilitou verificar que, como todos os elementos das matrizes resultantes eram positivos, os limites mínimos e máximos,

respectivamente, eram respeitados, em todas as refeições. No entanto, não resolveram 2(c) (Ver figuras 23 e 24).

Figura 23 - Resolução da questão 2(a) de D4 (G2) - Tarefa 6



Fonte: Dupla D4 – G2 (2016)

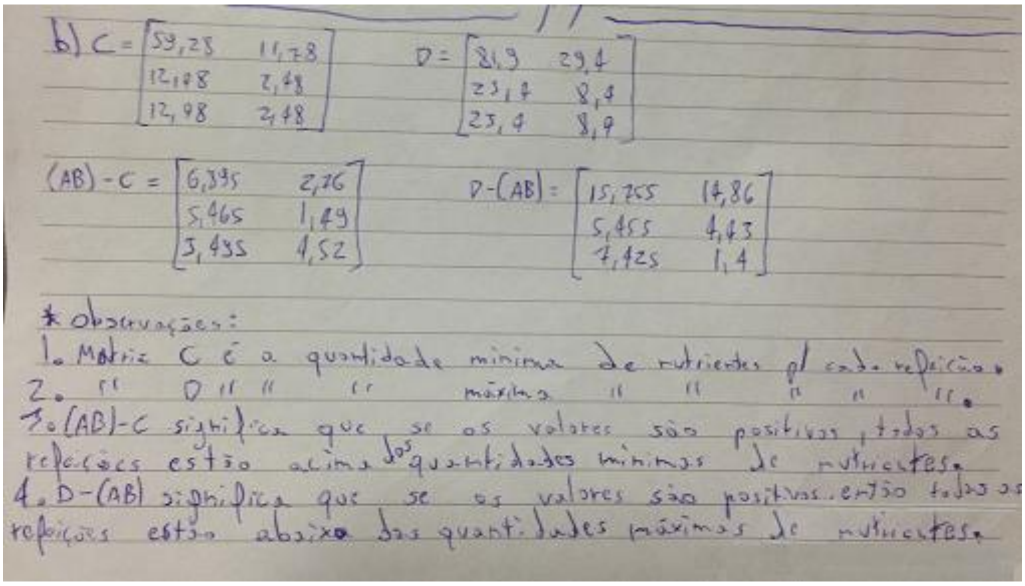
Ainda, em relação ao segundo problema, também se verificou, no G2, que as duplas D2, D5, D7, D8, D9, D12 e D13 resolveram tudo corretamente, mas calcularam todas as quantidades totais para cada refeição separadamente, por meio de três produtos, tanto em 2(a) quanto em 2(c), não explorando o produto de modo otimizado.

A dupla D3 também resolveu tudo corretamente e calculou as quantidades totais para cada refeição separadamente, por meio de três produtos, tanto em 2(a) quanto em 2(c). No entanto, diferente das outras, não forneceram cardápio em linguagem natural.

Também se verificou que as duplas D6, D10 e D11 não entregaram as resoluções acerca do problema 2.

Observando as resoluções apresentadas pelos estudantes do G2 para o segundo problema, nota-se que a maioria, assim como ocorreu no grupo G1, não percebeu que poderiam usar o produto entre matrizes de modo a facilitar os cálculos e as análises realizadas

Figura 24 - Resolução da questão 2(b) de D4 (G2) - Tarefa 6



b) $C = \begin{bmatrix} 59,25 & 11,78 \\ 12,08 & 2,48 \\ 12,98 & 2,48 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 81,9 & 29,4 \\ 23,7 & 8,4 \\ 23,4 & 8,9 \end{bmatrix}$

$(AB) - C = \begin{bmatrix} 6,395 & 2,76 \\ 5,465 & 1,49 \\ 3,435 & 4,52 \end{bmatrix}$ $D - (AB) = \begin{bmatrix} 15,755 & 14,86 \\ 5,455 & 4,43 \\ 7,425 & 1,4 \end{bmatrix}$

* observações:
1. Matriz C é a quantidade mínima de nutrientes p/ cada refeição.
2. " D " " " máxima " " " " ".
3. (AB)-C significa que se os valores são positivos, todos as refeições estão acima dos quantidades mínimas de nutrientes.
4. D-(AB) significa que se os valores são positivos, então todas as refeições estão abaixo das quantidades máximas de nutrientes.

Fonte: Dupla D4 – G2 (2016)

Ao concluir a análise dessa tarefa, para ambos os grupos, é possível concluir que, ao ser solicitada a mudança de representação do problema, apresentado em linguagem natural, para sua representação em linguagem algébrica, verifica-se muitas dificuldades encontradas pelos estudantes nessa transição de registros.

De acordo com a teoria de Duval (2003), esse indicativo revela que o conceito de matrizes ou de suas operações, apesar de ter sido estimulado por meio da tarefa proposta, não foi plenamente compreendidos por muitos estudantes, que, ao explicitarem seus raciocínios por meio de registos simbólicos, não conseguiram articular e coordenar os diferentes registros semióticos referentes ao objeto matemático matrizes, envolvido na resolução dos problemas propostos.

Por outro lado, também foram identificadas duplas, nos dois grupos, que foram capazes de resolver os problemas de modo adequado, o que indica que a tarefa favoreceu a compreensão desses estudantes em relação ao objeto matemático matrizes.

6.2.6 Tarefa 8

O objetivo dessa tarefa consistiu em identificar conhecimentos prévios sobre áreas de triângulos e sobre o uso de determinantes no cálculo de áreas de triângulos.

Nessa tarefa, se propôs, inicialmente, para ambos os grupos, que resolvessem um desafio, apresentado em *slides*, elaborados em *Power Point*, que envolvia o cálculo de áreas de triângulos.

Num desses problemas, seria possível aplicar a fórmula clássica da Geometria Plana para cálculo de área de triângulo, que envolve comprimento da base e da altura. No entanto, no outro problema, para encontrar a solução facilmente, seria necessário relembrar da fórmula que envolve determinantes, pois, por meio do gráfico, era possível obter as coordenadas planas dos vértices dos triângulos dados.

O objetivo principal dessa tarefa era relembrar a importância do conceito prévio de determinantes e de seus usos, visando despertar os interesses dos estudantes para o estudo da teoria de determinantes, tendo em vista suas diversas aplicações em situações práticas do contexto da Engenharia Civil.

Ressalta-se que o diferencial dessa tarefa não está na exploração do uso de recursos tecnológicos digitais interativos, mas no fato de possibilitar aos estudantes transitar entre diferentes registros de representação semiótica, estimulando a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos.

O problema fornecia as informações gráficas que possibilitariam, por meio do resgate de seus conhecimentos prévios, envolvendo conceitos de Geometria Plana, a obtenção dos registros simbólicos, acerca das medidas ou das coordenadas dos vértices, que poderiam ser reutilizados nos registros algébricos referentes às fórmulas de áreas que fossem adequadas para obterem as soluções desejadas.

Nos dois grupos, após a coleta de dados, foi solicitado que entregassem suas resoluções iniciais para posterior identificação de conhecimentos prévios. Em seguida, foi apresentada, em *slides*, a demonstração da fórmula para cálculo da área do triângulo por meio de seus vértices. Além disso, os dois problemas iniciais foram resolvidos no quadro, por meio da fórmula apresentada. Os resultados da análise dos registros estão apresentados nos Quadros 13 e 14.

Quadro 13 - Resultados de respostas da Tarefa 8 (G1 – 34 respondentes)

Exercício	Acertos	Erros	Não lembrou ou não conseguiu calcular
Triângulo 1	26	5	3
Triângulo 2	4	14	16

Fonte: Autora.

Conforme se verifica no Quadro 13, em relação à área do Triângulo 1, no grupo G1, foram realizados 31 cálculos de áreas (entre acertos e erros). Destaca-se que, nessas resoluções:

– 28 estudantes tentaram usar a fórmula $Area = \frac{b \times h}{2}$, sendo que 26 deles a usaram corretamente, e dois estudantes erraram ao obter as medidas da base ou da altura de modo equivocadas.

– Um estudante (A12) tentou usar a fórmula $Area = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_A \end{vmatrix}$, mas também errou o cálculo, pois se esqueceu de repetir o primeiro vértice.

– Um estudante (A1) simplesmente somou e subtraiu valores, fornecendo o resultado errado.

– Um estudante (A36) apresentou equivocadamente o cálculo da área como sendo a soma dos comprimentos dos lados do triângulo.

Além disso, no caso do Triângulo 1, apenas três estudantes disseram não conseguir lembrar como calcular a área.

Também se destaca que apenas um estudante (A30) mostrou ter conhecimento sobre a fórmula do determinante para cálculo de área de triângulos, pois a usou para comprovar o resultado da área do Triângulo 1. Isso se explica pelo fato de o estudante já ter cursado a disciplina de Álgebra Linear no semestre anterior.

Em relação à área do Triângulo 2, 50% do grupo G1 afirmou não se lembrar ou não saber de algum procedimento para obtê-la. Além disso, também se percebeu que, dos 18 cálculos apresentados para a área do Triângulo 2:

– Apenas um estudante (A30) usou a fórmula do determinante para obter o resultado.

– Sete estudantes usaram indevidamente a fórmula $Area = \frac{b \times h}{2}$, errando o cálculo da área, sendo que, dentre eles, um estudante (A23) inventou um modo para usá-la que o permitisse chegar ao resultado conhecido, o que indica um erro mais grave ainda.

- Seis estudantes tentaram usar a fórmula $Area = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_A \end{vmatrix}$, mas somente três deles acertaram (A28, A32 e A33). Os outros três estudantes (A7, A12 e A35) se esqueceram de repetir o primeiro vértice, o que é um erro muito comum entre alunos de Geometria Analítica.
- Dois estudantes simplesmente somaram e subtraíram valores, fornecendo resultados errados.
- Um estudante (A36) indicou equivocadamente a área como sendo a soma dos comprimentos dos lados.
- Um estudante (A29) foi criativo e tentou resolver o problema geometricamente. Aparentemente, tentou calcular a área, inscrevendo o triângulo num retângulo, subdividindo-o em cinco partes, para somar as áreas das figuras geradas pelo triângulo. Mas não teve sucesso, pois as medidas dos lados das figuras geométricas não eram paralelas aos eixos.

Quanto aos erros no uso da fórmula $Area = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_A \end{vmatrix}$, destaca-se que o estudante A33 disse que essa fórmula equivaleria a $Area = \frac{1}{2}det$. Nesse caso, nota-se a confusão em relação ao conceito de determinantes e também o erro quanto à notação matemática, eis que o estudante indica que a área seria a metade do cálculo do determinante de uma matriz retangular, o que é uma contradição. Também não informa o argumento da função determinante, ou seja, indica apenas det, enquanto o correto é $det(A)$. Além disso, também se esqueceu que se deve considerar o módulo do determinante, ou seja:

$$Area = \frac{1}{2}\left\|det(A)\right\|, \qquad \text{onde: } A = \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix}$$

De modo geral, também se verificou, nos registros, que, dentre os estudantes que forneceram respostas, 14 não utilizaram na resposta final a sigla u.a. para representar unidades de área. Além disso, um estudante (A16) usou "m" para indicar unidades de área; outro estudante (A36) usou "cm" e outro estudante (A33) usou

"m^2". Isso indica que 50% não indicou a unidade de medida ou se equivocou na sua apresentação, ou seja, têm dificuldades de expressão ou de preocupação com o rigor da escrita simbólica matemática. Os demais estudantes usaram u.a. para representar unidades de área.

Quadro 14 - Resultados de respostas da Tarefa 8 (G2 – 21 respondentes)

Exercício	Acertos	Erros	Não lembrou ou não conseguiu calcular
Triângulo 1	15	2	4
Triângulo 2	5	7	9

Fonte: Autora

Conforme se verifica no Quadro 14, em relação à área do Triângulo 1, no grupo G2, foram realizados 17 cálculos de áreas (entre acertos e erros). Destaca-se que, nessas resoluções:

- quinze estudantes usaram a fórmula $Area = \frac{b \times h}{2}$, sendo que dois deles (E11 e E17) erraram a fórmula (o primeiro errou o cálculo numérico da altura e o segundo errou a escrita da expressão da fórmula, esquecendo de dividir por 2).
- dois estudantes usaram corretamente a fórmula $Area = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_A \end{vmatrix}$.

Além disso, quatro estudantes do grupo G2 indicaram que não se lembravam ou que não conseguiram calcular a área do Triângulo 1.

Em relação à área do Triângulo 2, nota-se que, de 12 cálculos realizados (entre acertos e erros):

- seis estudantes usaram equivocadamente a fórmula $Area = \frac{b \times h}{2}$. Salienta-se que, no grupo G2, 2 estudantes (E9 e E12) usaram equivocadamente a fórmula da distância entre pontos (vértices) para encontrar a altura e, por esse motivo, erraram o cálculo da área.
- seis usaram a fórmula $Area = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_A \end{vmatrix}$, sendo que cinco estudantes (E6, E8, E11, E21, E22) a usaram corretamente e um estudante (E1) esqueceu de repetir o primeiro vértice.

Além disso, no caso do G2, em relação à área do Triângulo 2, nove estudantes indicaram que não se lembravam como calcular ou apresentaram algumas tentativas de cálculo, mas não conseguiram finalizar. Dentre eles, um estudante (E15) apresentou a seguinte fórmula de Heron: $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (onde a, b, c são as medidas dos lados do triangulo e p é o semiperímetro correspondente), mas fez uso inadequado dela.

Outro estudante (E5) sugeriu aplicar a fórmula de Heron, mas disse não se lembrar da sua expressão. E, ainda, outro estudante (E16) sugeriu transformá-lo em um triângulo retângulo para calcular sua área, o que seria impossível. Talvez estivesse sugerindo decompor o triângulo em dois triângulos retângulos e trabalhar com eles.

Nesse último exemplo, se verifica a dificuldade dos estudantes em se expressarem em linguagem natural para indicar seus raciocínios, o que também se nota frequentemente na correção de registros de avaliações escritas, quando são solicitadas justificativas para as respostas simbólicas.

Ressalta-se que, no grupo G2, nenhum estudante usou a fórmula do determinante para encontrar a área do triângulo.

Também cabe destacar que, dos 21 respondentes, oito estudantes não usaram “u.a.” no registro de suas respostas, um deles (E3) usou “m^2”, outro (E16) usou a palavra “área”; dois estudantes (E13 e E23) usaram “cm^2” e apenas nove usaram “u.a.”. Assim, no grupo G2, também apareceram dificuldades de expressão ou de preocupação com o rigor da escrita simbólica matemática na finalização do problema.

6.2.7 Tarefa 9

Essa tarefa foi desenvolvida somente com o grupo G1. Visou explorar recursos da planilha para compreensão do método de triangulação para cálculos de determinantes. Nessa tarefa, também foi solicitado que respondessem a um questionário sobre suas percepções sobre a proposta.

Desse modo, inicialmente, são apresentadas as percepções da professora sobre o desenvolvimento da tarefa, bem como são apresentados resultados das resoluções relativos aos exercícios propostos. Em seguida, são apresentadas as percepções dos estudantes, indicadas por meio do emprego de técnicas da análise de conteúdo em dados coletados com uso do questionário aplicado.

6.2.7.1 Percepções docentes

A Tarefa 9 foi desenvolvida no laboratório computacional da Universidade na qual a pesquisa foi aplicada. Inicialmente, foram retomados os conceitos teóricos sobre o significado dos determinantes, bem como sobre o método de triangulação visto anteriormente.

A professora iniciou orientando os estudantes sobre os recursos disponíveis para a realização de cálculos de determinantes, existentes no ambiente da planilha, obtidos por meio de diferentes métodos.

Num primeiro momento, os estudantes, trabalhando em computadores individuais, com a orientação da professora, perceberam a existência de procedimentos prontos na planilha, as quais, a partir de dados de entrada adequados, geravam resultados automaticamente para algumas funções matemáticas predefinidas. Perceberam que o modo mais fácil para se obter o determinante de uma matriz quadrada, numa planilha, seria usando a função determinante e entenderam que poderiam usar esse recurso na verificação de seus próprios cálculos, para validar seus procedimentos.

Além disso, para se familiarizarem com o ambiente da planilha e com a função preexistente para o cálculo do determinante, foram obtidos os determinantes de algumas matrizes que já estavam previamente armazenadas numa planilha, como exemplos. Também foram retomadas as aplicações de determinantes nos cálculos das áreas dos triângulos que haviam sido discutidos na Tarefa 8, como exemplos de usos desse conceito.

Após essa primeira etapa, foi solicitado que eles resolvessem individualmente, em seus computadores, um exemplo sobre o cálculo do determinante pelo método de triangulação, com intermediação da professora. A proposta era de que o método fosse resolvido por meio de operações entre as células da planilha, as quais armazenavam uma matriz quadrada, para a qual se deseja calcular o valor do determinante.

Destaca-se que, durante essa resolução, foram sendo retomadas as propriedades que envolviam as operações elementares, e foram feitos questionamentos pela professora sobre as implicações no valor do determinante, da matriz modificada, e quais deveriam ser as compensações a serem realizadas, de modo a manter o determinante da matriz original.

A aprendizagem foi sendo mediada por meio de perguntas, as quais propiciaram reflexões acerca do método e das compensações necessárias. As conclusões foram sendo registradas na planilha, ao longo da resolução, para que pudessem ser usadas no cálculo final do determinante.

Durante essa tarefa, foi possível perceber que os estudantes apresentaram muitas dúvidas ao trabalhar com os comandos do *software*, especialmente para colar apenas números e para construir as operações elementares com os elementos da matriz. Demorou para que todos conseguissem realizar o exercício proposto. Cabe, também, lembrar que essa turma era grande e que era preciso atender 34 estudantes em seus computadores, individualmente.

No entanto, com a intermediação da professora, e da ajuda cooperativa dos colegas que haviam conseguido compreender mais facilmente o processo, as dificuldades iniciais foram superadas.

Segundo Oliveira (2009), essa demora é comum no uso da planilha, pois é necessário esclarecer a utilização dos comandos e procedimentos necessários. No entanto, o autor salienta que, ao serem superadas as dúvidas e a ansiedade inicial, o uso lúdico intrínseco ao computador contribui motivando à aprendizagem.

Após serem apresentadas as diferentes abordagens para o cálculo do determinante por meio da planilha, foi solicitado aos estudantes que resolvessem individualmente os exercícios disponibilizados nas planilhas, os quais envolviam cálculos de determinantes.

Salientou-se que deveriam aplicar o método de triangulação, desenvolvido com recursos tecnológicos digitais disponibilizados pela planilha e que poderiam comprovar seus resultados por meio do uso da função determinante preexistente.

Nessa tarefa, algo curioso aconteceu. Pela primeira vez no laboratório computacional todos ficaram em silêncio e começaram as suas resoluções individuais, não solicitando a ajuda imediata da professora. Geralmente, os trabalhos eram realizados em duplas e essa foi a primeira tarefa que tiveram que realizar sozinhos. Porém, não foi dito que não poderiam conversar entre eles. Apenas foi dito que deveriam resolver os exercícios individualmente para que, no final da aula, pudessem enviar à professora suas próprias resoluções.

Provavelmente pelo fato de terem trabalhado em duplas nas tarefas anteriores, alguns estudantes pensaram que outros colegas fariam novamente o trabalho por eles. Ao solicitar a entrega do trabalho individual, isso os desacomodou, tirando-os de suas zonas de conforto.

Após o primeiro momento de silêncio e de concentração em suas próprias resoluções, conforme as dúvidas foram surgindo, os estudantes começaram a solicitar a ajuda da professora.

As perguntas que surgiram indicaram que os estudantes estavam com dúvidas não somente relacionadas aos comandos da planilha, mas também sobre o método de triangulação. À medida em que foram sendo esclarecidas, eles acabavam conseguindo realizar a tarefa. Foi possível perceber que a intervenção da professora foi fundamental para que pudessem realizar as resoluções de modo adequado e para que pudessem compreender o método abordado.

Nessa tarefa, participaram 34 estudantes do G1. Um resumo dos resultados dos registros acerca da análise das planilhas enviadas pelos estudantes está apresentado no Quadro 15.

Quadro 15 - Resultados de respostas da Tarefa 9 (G1– 34 respondentes)

Descrição do registro da tarefa	Percentual	Usaram recursos	
		Função da planilha	Manipulação de dados e inserção de fórmulas
Não fizeram a tarefa - copiaram o trabalho de um colega.	6	-	-
Não usaram método de triangulação, apenas calcularam os determinantes pela função da planilha.	6	6	-
Não mostraram o cálculo do determinante pelo processo de triangulação, mas apenas pela função da planilha.	18	18	-
Não usaram recursos da planilha, mas digitaram os valores calculados na planilha e fizeram as compensações corretamente. Também não indicaram o cálculo do determinante como sendo o termo principal, no final do processo.	9	-	-
Usaram recursos da planilha e fizeram compensações corretamente. Também não indicaram, no final do processo, o cálculo do determinante como o termo principal.	20	20	20
Não usaram a função da planilha para comprovação de cálculos dos determinantes nem intermediários e nem o final.	15	-	15
Fizeram tudo corretamente	26	26	26
Total	100	70	61

Fonte: Autora.

Os registros dos estudantes evidenciaram que 70% deles usaram a função para o cálculo de determinantes, o que permite obter o resultado, sem o conhecimento do método de resolução. Cabe lembrar que eles deveriam usar esse recurso apenas para conferir ou validar os resultados obtidos pelo uso do método de triangulação, contudo, 24% dos estudantes fizeram uso exclusivamente desse recurso. Nesses casos, provavelmente os estudantes não devem ter compreendido o método de triangulação e, desse modo, não souberam como proceder para realizar o cálculo do determinante por meio dos recursos de programação da planilha.

Também foi possível constatar que 61% fizeram uso dos recursos de manipulação de dados e da inserção de fórmulas, tendo em vista compreender e realizar o procedimento do método de triangulação por meio desses instrumentos. Nesse caso, se observou que 15% resolveram não utilizar a função da planilha para verificação de seus resultados. Talvez isso se explique por já conhecerem os resultados dos determinantes, o que pode tê-los levado à compreensão de que a comprovação era desnecessária.

Além disso, foi possível perceber que 46% (destacados pela cor cinza no Quadro 15) fizeram uso de ambos recursos, explorando ao máximo todas as ferramentas disponíveis na tarefa, o que indica que compreenderam o método e a tarefa proposta, ou seja aproveitaram ao máximo os recursos tecnológicos disponíveis, o que pode ter facilitado e contribuído com a aprendizagem.

Na análise dos registros, também foi possível perceber um indicativo de cópia de trabalhos. No diário de bordo, consta que durante o desenvolvimento da tarefa, um estudante (A27) estava com várias dúvidas, que foram sendo esclarecidas, com a ajuda da professora, no decorrer da atividade. Também, consta que havia dois estudantes (A6 e A36) sentados próximos a ele que, aparentemente, não estavam conseguindo resolver os problemas, mas não estavam preocupados em tentar compreender a proposta e resolver sozinhos a tarefa apresentada, pois não solicitavam ajuda da professora. Nesse caso, o estudante A27 passou o seu arquivo para os outros dois, que o enviaram como se fossem seu.

Nesse caso, destaca-se a falta de interesse dos estudantes pela proposta, o que dificulta a aprendizagem. Esse é um problema comum na disciplina de Álgebra Linear, conforme constata Celestino (2000) em suas pesquisas, mas que se verificou num percentual de 6%, considerado pequeno nessa turma.

Nota-se que a maioria dos estudantes (61%), diferentemente daqueles que apenas copiaram, tentou superar suas dificuldades e conseguiu finalizar suas próprias tarefas, explorando a manipulação de dados e a inserção de fórmulas, o que provavelmente os ajudou a compreender o método de triangulação.

Após o término da tarefa, também foi solicitado que respondessem ao questionário "Atividade 9 – Questionário sobre método de triangulação com planilha *Excel*" (apresentado no Anexo 3) sobre suas percepções quanto ao uso da planilha na aprendizagem do método proposto. Eles responderam após o término da aula e os enviaram por *e-mail* à professora. A análise qualitativa do questionário está apresentada a seguir.

6.2.7.2 Percepções discentes

Por meio da Análise de Conteúdo, do tipo categorial, de 28 registros de estudantes que participaram da Tarefa 9, relativos às respostas do questionário aplicado, percebeu-se que 100% dos estudantes indicaram ter gostado da tarefa. Ao ser realizada a unitarização das respostas, foram percebidas 128 unidades de registros, que possibilitaram identificar quatro categorias finais emergentes: *"Percepções sobre como a tarefa ajudou a compreensão do método"; "Explicações sobre o método ou finalidade"; "Percepções sobre suas compreensões"; "Motivos pelos quais gostaram da proposta de Ensino"*, as quais são apresentadas a seguir. No Anexo 30, encontra-se o quadro de categorização completo.

(i) "Percepções sobre como a tarefa ajudou a compreensão do método"

Nessa categoria final, que representou 41,40% do conteúdo presente em todas as respostas, foram identificadas quatro categorias intermediárias: "*Auxiliou a aprendizagem*" (21,86%); "*Pela praticidade no uso do recurso*" (10,95%); "*Possibilitou perceber uso na prática*" (6,25%); e "*Por possibilitar a realização de exercícios*" (2,34%); as quais são apresentadas a seguir.

Na categoria intermediária "*Auxiliou a aprendizagem*", os estudantes indicaram que gostaram da tarefa pois ela possibilitou: compreender o método (8,59%); perceber detalhes do método (3,91%), ampliar seus conhecimentos (2,34%); visualizar o processo (2,34%); refletir sobre o método (1,56%); reforçar a parte teórica (1,56%) e facilitar a aprendizagem (1,56%).

A seguir, são apresentados alguns exemplos, que ilustram como os estudantes indicaram que a tarefa lhes possibilitou compreender o método:

> Sim, gostei pois ajudou-me a compreender melhor as atividades propostas em aula (A14, 2016).
> Gostei, achei que foi bem didático, ajudando a compreender o método para depois ser usado na resolução dos cálculos (A35, 2016).
> Ajudaram, pois tirei dúvidas e compreendi melhor como aplicar o método de triangulação (A26, 2016).
> Inicialmente atrapalharam um pouco, pois eu não havia compreendido muito bem como realizar algumas funções no Excel, mas após compreender melhor o processo de escalonamento de matrizes ficou mais claro (A32, 2016).

Também são apresentados, na sequência, exemplos de registros, onde os estudantes indicam que a tarefa lhes possibilitou perceber melhor os detalhes do método ou aprimorar seus conhecimentos:

> Ajudaram, pois além de nos mostrar uma outra ferramenta para a resolução destas matrizes, também nos ajudam a praticar esse tipo de cálculos, mostrando detalhes passo a passo (A10, 2016).
> Ajudaram, pois ao usar um software, percebi coisas as quais realizando no caderno não havia visto. [...] (A18, 2016).
> Sim, pois com elas aprimorei meus conhecimentos a respeito ~~do Excel~~ e do método de triangulação. [...] (A20, 2016).

Destacam-se também os registros em que os estudantes indicaram perceber que a tarefa ajudou a visualizar o processo de triangulação, o que facilitou a compreensão:

> Ajudaram, pois no Excel, se consegue visualizar bem os comandos, assim ajudando na compreensão (A11, 2016).
> Ajudaram, pois fica mais fácil de visualizar o que vemos em aulas teóricas (A19, 2016).
> Ajudaram, acho que foi uma maneira mais pratica de poder visualizar o processo de triangulação, e facilitou bastante a minha compreensão de como fazer (A31, 2016).

Além disso, apresentam-se exemplos de registros nos quais os estudantes indicaram perceber que a tarefa os ajudou a refletir sobre o método, ou a reforçar a parte teórica, ou, ainda, a facilitar a aprendizagem:

> Gostei, [...] eu acho que ajudam bem mais a aprender álgebra, pois fazem eu raciocinar um pouco mais (A31, 2016).
> Eu gostei, [...] Elas demonstram o porquê de se fazer algo, e não simplesmente como fazer [...] (A12, 2016).
> Gostei, pois ajudou na fixação do conteúdo. (A18, 2016).
> Sim, me facilitaram o aprendizado pois, reforçaram a parte teórica das aulas. [...] (A33, 2016).
> Ajudaram na compreensão, [...], sem mencionar que para fazer os cálculos é necessária a interpretação do problema, e isso ajuda no aprendizado (A12, 2016).

Conforme o planejamento proposto, esperava-se que os estudantes, ao sentirem a necessidade de manipulação adequada do recurso tecnológico digital, para execução do cálculo automatizado do determinante por meio dos comandos da planilha, repensassem os objetivos e procedimentos do método, o que favoreceria suas compreensões, o que foi comprovado com suas percepções.

Desse modo, na categoria intermediária "*Auxiliou a aprendizagem*", foi possível verificar que alguns estudantes perceberam que a tarefa os ajudou a compreender ou a ampliar seus conhecimentos pelo fato de ter exigido que revisassem o detalhamento dos procedimentos do método de triangulação, para que pudessem raciocinar como deveriam proceder para inserir os comandos adequados nas células, de modo a obter os resultados desejados. Destaca-se o registro do estudante A32 que afirmou que inicialmente a tarefa atrapalhou um pouco, mas que, após ter compreendido melhor o escalonamento de matrizes, a proposta ficou mais clara.

As percepções dos estudantes confirmam os indicativos que Rosa e Viali (2009, p.185) destacam, acerca da contribuição do recurso na apropriação do conceito abordado:

> A partir do momento em que o aluno começa a inserir valores de uma equação, expressão ou função para que esses objetos sejam manipulados pela planilha, ele está estudando as formas e a estrutura desses conceitos. Ao se utilizar a planilha como recurso, o usuário precisa ensinar ao computador como proceder. Dessa forma, ele próprio acaba por se apropriar do conceito que está tentando passar ao computador.

Além disso, as percepções dos estudantes também corroboram com os indicativos apresentados por Morgado (2003, p. 27) sobre as possibilidades do uso didático da planilha, no processo de ensino e de aprendizagem em matemática:

> Ao utilizar planilhas de cálculos, o aluno pode realizar ações em suas células, para descrever a resolução de um problema como a inserção de símbolos alfanuméricos, operações, fórmulas e funções, sendo que essas inserções podem envolver conteúdos de outras células. Os conteúdos descritos nas células, pelo aluno, que são descrições de operações mentais que ele realiza, podem ser executados e, desta forma, os resultados aparecem nas células da planilha. [...] Logo, nas células, as descrições do aluno se transformam num resultado visual daquilo que ele descreveu.

Destaca-se que a última vantagem citada pela autora acerca da possibilidade de visualização dos comandos e de resultados, propiciada pela planilha, também apareceu nos registros dos estudantes.

O uso dos recursos da planilha, por facilitar a percepção de acertos ou erros, também pode ter colaborado com a compreensão dos objetivos e procedimentos do método considerado. Ou seja, o fato de terem que inserir corretamente as fórmulas na planilha, envolvendo os elementos das matrizes consideradas, os fez refletir sobre os aspectos teóricos que haviam sido discutidos na sala de aula, o que possibilitou esclarecer e reforçar teorias apresentadas anteriormente.

As percepções dos estudantes também confirmam as indicações de Fioreze (2010, p. 84) quando afirma que o uso da planilha, na resolução de problemas, além de exigir que se tenha a compreensão dos aspectos teóricos envolvidos, facilita os cálculos e favorece a visualização de erros, o que ajuda na correção dos procedimentos adotados:

> Com as planilhas eletrônicas, podem-se inserir fórmulas que possibilitam minimizar cálculos laboriosos e rotineiros, permitindo assim que se dê mais atenção à construção de procedimentos relacionados à resolução do problema e à verificação e análise do resultado encontrado. Assim como na utilização da calculadora, a montagem das expressões envolvidas na situação demanda que o aluno tenha conhecimento da hierarquia de cada operação em relação às demais, necessitando, quando que necessário, a colocação de parênteses. Essa verificação do erro cometido ao observar os resultados encontrados possibilita que o aluno encontre na expressão o que deve ser corrigido.

E também corrobora com as seguintes afirmações de Morgado (2003, p. 27):

> Após cada execução, o aluno tem a oportunidade de refletir sobre os resultados obtidos [...] Além disso, pode acessar e conferir o conteúdo de cada célula por meio da barra de fórmulas e refletir sobre os resultados, podendo se conscientizar dos erros e acertos cometidos. O professor terá papel preponderante no sentido de auxiliar e examinar os resultados obtidos e conduzir a reflexão do aluno, se este estiver com dificuldades para visualizar os erros cometidos. Desta forma, o aluno pode depurar os conceitos e estratégias utilizadas, ou mesmo algum comando da planilha que tenha utilizado inadequadamente. A partir daí, realiza novas descrições nas células, repetindo o processo até que o problema esteja solucionado.
> Portanto, por meio das planilhas e com o professor mediando a interação aluno-computador, o processo de reflexão e depuração pode ser realizado favorecendo a construção de conceitos matemáticos.

A autora destaca a importância da mediação do professor no processo que facilita a aprendizagem, ajudando a esclarecer as dúvidas que aparecem no decorrer do processo de resolução do problema.

Assim, pelos indicativos da categoria intermediária "*Auxiliou a aprendizagem*", verifica-se que os estudantes perceberam que a tarefa possibilitou uma maior compreensão acerca do método de triangulação, para cálculo de determinantes, uma vez que propiciou raciocínios e reflexões acerca dos objetivos e procedimentos utilizados no método, os quais puderam ser visualizados por meio de comandos, utilizados na planilha, de modo que foi possível perceber importantes detalhes do método, o que favoreceu a aprendizagem, permitindo reforçar os aspectos teóricos que haviam sido tratados, anteriormente, em sala de aula.

Na categoria intermediária ”*Pela praticidade no uso do recurso*”, que representa 10,95% das unidades de registros, os estudantes, ao se referirem às suas percepções sobre como a tarefa ajudou na compreensão do método, indicaram que perceberam maior facilidade na resolução na resolução do método (7,82%, sendo que a metade deles também se referiu à vantagem da rapidez na resolução) e também pelo fato de serem evitados erros de cálculos (3,13%).

Como exemplos de registros que indicam que os estudantes perceberam que os recursos das planilhas facilitaram a resolução do método, apresentam-se:

> Gostei, acredito que isso nos acrescente conhecimento e nos ajuda a ter mais facilidade na hora da resolução de matrizes e outros cálculos, visto que atividades práticas nos mostram as nossas maiores dificuldades e facilidades (A10, 2016).
> Ajudaram, pois aprendemos a facilitar o método de triangulação calculando através das ferramentas tecnológicas, neste caso o Excel. E com isso, adquirimos uma melhor compreensão do que foi explicado em sala de aula (A20, 2016).
> Gostei muito das atividades, pois eu não tinha noção de como o Excel era eficiente para esta área. O Excel é uma ferramenta extremamente útil para cálculos algébricos, pois facilita todo o processo (A23, 2016).

Na sequência, também são apresentados exemplos de registros nos quais os estudantes indicam que perceberam que o recurso tecnológico facilitou a tarefa, pois permitiu resolver os problemas mais rapidamente:

> Gostei, porque desta maneira pode-se resolver as atividades com um método mais rápido, [...] (A2, 2016).
> Sim, auxiliaram no aprendizado com mais rapidez e facilidade (A3, 2016).
> Ajudaram na compreensão, pois esse tipo de atividade torna o conteúdo muito mais “palpável”. Como se economiza muito tempo nos cálculos, pode-se entender melhor o porquê de se fazer determinada operação, [...] (A12, 2016).

Além disso, apresentam-se exemplos de registros em que os estudantes destacam que o uso dos recursos também ajudou na compreensão da teoria e na realização da tarefa, pois permitiu cálculos mais precisos, bem como evitou erros de cálculos:

> Gostei. Por que permitem um cálculo mais preciso e com menores chances de erros de matemática básica, [...] (A32, 2016).
> Ajudaram. Elas facilitaram na compreensão da teoria, uma vez que, não precisei me preocupar com a parte dos cálculos e sim com a gestão de dados das matrizes e das operações que envolviam as questões propostas (A33, 2016).

Destacam-se os registros dos estudantes A12 e A33, quando indicam que a tarefa ajudou na compreensão do método pelo fato de o uso da planilha tornar o processo de resolução mais rápido e com menos erros de cálculos, o que lhes possibilitou terem mais tempo para refletirem acerca dos objetivos e procedimentos do método.

A experiência vivenciada em sala de aula permite afirmar que, geralmente, se observa que a resolução manual do método de triangulação gera um número grande de cálculos, onde os erros numéricos são frequentes. Ou seja, trata-se de um processo tedioso e demorado para os estudantes. No caso dessa tarefa, os estudantes já haviam sentido essas dificuldades em aula anterior, quando tiveram contato com a teoria e com os procedimentos sobre o método abordado, na resolução manual de exercícios.

A planilha ao possibilitar, por meio de seus recursos, a realização de vários cálculos semelhantes, simultaneamente e de modo automático, evita erros comuns de cálculos de matemática básica, o que facilita muito o processo de resolução.

Além disso, foi possível perceber, durante a tarefa, que mesmo quando os estudantes se equivocavam na inserção dos comandos para execução do método, a revisão do processo era realizada facilmente, após os esclarecimentos das dúvidas com a professora ou com os colegas. Esse indicativo corrobora com Oliveira (2009, p.38), quando afirma:

> Em um meio colaborativo de aprendizagem e de interação com o computador, os alunos podem usufruir o experimentar com possibilidades de erros e acertos mais naturais, pois o “deletar” é mais leve e menos lastimoso do que o “apagar”, utilizando-se da borracha. Dispõe-se de modo imediato e correto dos resultados das operações efetuadas e sem o “sacrifício” da aplicação dos algoritmos apresentados na forma tradicional, mas com nova roupagem, mais suave, proveniente da rapidez dos cálculos e da facilidade em (re)fazer e investigar.

Assim, conclui-se, nessa categoria intermediária “*Pela praticidade no uso do recurso*”, que, pelo fato de o recurso da planilha ter possibilitado facilidade, rapidez e precisão na resolução dos problemas tratados, seu uso adequado favoreceu a aprendizagem, ao agilizar o processo de resolução, o que disponibilizou tempo para que os estudantes pudessem refletir sobre o processo, o que favoreceu a compreensão e a significação dos conceitos tratados.

Na categoria intermediária “*Por possibilitar perceber uso na prática*”, que representou 6,25% das unidades de registros, foi possível constatar que 5,47%

indicou que a tarefa possibilitou perceber o uso do método teórico na prática e 0,78% indicou que possibilitou perceber praticidade no uso do recurso em matrizes de grande porte, conforme os exemplos a seguir:

> [...] ao realizar a área dos triângulos, no Excel ficou mais claro para eu entender. Além disso, foi muito bom confirmar os conhecimentos teóricos de forma prática (A18, 2016).
> Ajudaram, pois deram uma melhor compreensão de sua utilidade, assim não ficou algo limitado apenas para realização das atividades dentro da sala de aula, o que deu uma utilidade mais prática (A22, 2016).
> Ajudaram sim, melhorou muito na compreensão do conteúdo e nos mostrou onde poderá ser usado, já nos ensinando como deve ser feito na prática (A28, 2016).
> Ajudaram. Pois compreendemos através de um recurso bom e bastante utilizado para resolução de matrizes muito grandes (A17, 2016).

Os estudantes indicaram que a tarefa lhes possibilitou perceber de que modo eles podem explorar o uso da teoria, apresentada em sala de aula (sobre o método de triangulação para o cálculo de determinantes) na resolução de problemas com uso de planilhas. Indicaram que a tarefa lhes possibilitou confirmar seus conhecimentos teóricos por meio de procedimentos mais práticos, o que foi propiciado pela exploração e pelo uso adequados do recurso tecnológico digital proposto.

Verifica-se que essa percepção efetivamente ocorreu pois, nessa tarefa, os estudantes, além de serem desafiados a inserir comandos que os possibilitassem executar o método de triangulação, em etapas, também foram incentivados a usar uma função preexistente, “determinante”, com o intuito de verificação de seus resultados. Além disso, também puderam perceber de que modo poderiam resolver o problema do cálculo da área de triângulos, por meio do uso de recursos disponibilizados pela planilha. Nesse caso, também foi preciso usar conhecimentos teóricos sobre a fórmula que envolve o cálculo de determinantes por meio de uma matriz gerada a partir dos vértices do triângulo, para a execução de comandos apropriados, que permitissem o cálculo automático, a partir dos dados considerados.

Nessa categoria intermediária, também apareceu o indicativo acerca da facilidade que a planilha proporciona ao se trabalhar com matrizes de grande porte, o que geralmente não é percebido pelos estudantes, quando o método é desenvolvido apenas em sala de aula.

A experiência docente, vivenciada em sala de aula, também permite observar que quando se propõe apenas o desenvolvimento do método por meio de exercícios manuais, geralmente são usados exemplos que envolvem matrizes de, no máximo ordem 5, por causa da quantidade de cálculos gerados. Apesar de os estudantes serem informados sobre a possibilidade de o processo ser realizado por meio de ferramentas computacionais, essa percepção fica prejudicada, uma vez que não a experimentam na prática. Os estudantes, geralmente, ficam envolvidos e preocupados somente com os processos mecânicos e repetitivos, que não propiciam percepções práticas acerca dessa possibilidade.

Os resultados confirmam o que Moran (2013, p. 28) defende, ao se referir aos caminhos que facilitam a aprendizagem, quando indica que "Aprendemos mais quando estabelecemos pontes entre a reflexão e a ação, entre a experiência e a conceituação, entre a teoria e a prática; quando ambas se alimentam mutuamente".

Assim, conclui-se que o uso prático da exploração dos recursos tecnológicos digitais propiciados pela planilha, ao possibilitar reflexões sobre a ação, permitiu ampliar a percepção acerca do uso do método em situações mais práticas e, consequentemente, mais próximas de um possível uso real, que pode envolver matrizes mais complexas.

Já na categoria intermediária *"Por possibilitar a realização de exercícios",* foi identificada em 2,34% das unidades de registros, na qual foi possível verificar que os estudantes perceberam que a tarefa os ajudou na compreensão do método pois possibilitou a realização de mais exercícios, nos quais puderam novamente aplicar o método apresentado, resolvendo os exercícios com uso da planilha, em ambiente que favoreceu a aprendizagem. Como exemplos:

> Ajudaram, pois antes tinha mais dúvidas e com a aula de hoje fazendo novos exercícios ficou mais fácil a compreensão (A2, 2016).
> As atividades em aula com planilhas do Excel ajudaram muito a compreensão do método, visto que foi um exercício de fixação do conteúdo e aprimoramento das técnicas aprendidas (A23, 2016).

Essas percepções sobre o fato de a retomada dos conceitos, pela resolução de exercícios, ter favorecido a aprendizagem, confirmam o que Moran (2013, p. 29) defende quando afirma que "Aprendemos pela criação de hábitos, pela automatização de processos, pela repetição".

Além disso, destaca-se que a tarefa se diferencia da simples resolução manual dos exercícios, pois exigiu novos modos de raciocinar, que possibilitassem resolver o mesmo processo, que haviam realizado manualmente, por meio do uso de comandos a serem inseridos na planilha.

De acordo com a teoria de Duval (1993), considera-se que, nessa tarefa, ao ser estimulado o trânsito entre diferentes registros semióticos, foi propiciada uma atividade cognitiva que envolveu reflexões acerca de objetivos e procedimentos envolvidos, o que favoreceu a compreensão do método abordado.

Assim, conclui-se, nessa categoria intermediária, que, ao ser proposto o desenvolvimento de exercícios sobre o método, realizado com o uso interativo e exploratório dos recursos disponibilizados pela planilha, mediados pelo professor, foi possível aos estudantes revisitar os objetivos e procedimentos do método abordado, bem como foi possível o esclarecimento de dúvidas que surgiram. Desse modo, percebe-se que a tarefa propiciou um ambiente de aprendizagem ativa e desafiadora, que potencializou a compreensão matemática dos conceitos tratados.

(ii) “Explicações sobre o método ou finalidade”

Na categoria final, “*Explicações sobre o método ou finalidade”*, que representou 21,87% das unidades de registros, foram identificadas duas categorias intermediárias: *“Se referiram à finalidade ou à descrição do método”* (representou 19,53%) e “*Forneceram explicações vagas”* (representou 2,34%) as quais são apresentadas a seguir.

Na categoria intermediária “*Se referiram à explicação e finalidade do método*”, que representou 21,87% das unidades de registro, identificou-se que: 9,38% informou a finalidade do método e forneceram explicações incompletas sobre o método; 7,03% se referiram apenas à finalidade; 2,34% se referiram apenas à explicação parcial do método e 0,78% explicaram o método e a finalidade.

A seguir, são apresentados exemplos de registros nos quais os estudantes se referiram apenas à finalidade do método, fornecendo explicações incompletas:

> [...]. O método de triangulação serve para acharmos o determinante de uma maneira mais fácil, e claro, fazendo as compensações no final. (A8, 2016)
> [...], serve para facilitar o cálculo do determinante, pois usando o método, e escalonando a matriz o determinante será igual ao produto da diagonal principal (A10, 2016).
> [...]. A triangulação de matrizes serve para simplificar e facilitar o cálculo de determinantes de matrizes quadradas, tendo em vista que para calcular o determinante de uma matriz triangular basta multiplicar os elementos da diagonal principal (A12, 2016).
> [...]. Serve para calcular o determinante da matriz fazendo triangular superior (A25, 2016).

Outros estudantes apenas se referiram à finalidade:

> [...] no meu entendimento serve para facilitar o processo em achar o determinante de uma matriz (A31, 2016).
> [...] Serve para simplificar uma matriz, assim fica mais fácil de encontrar o determinante de uma matriz específica (A22, 2016).

Também foram identificados registros nos quais os estudantes apenas se referiram à explicação parcial do método:

> [...] O processo de triangulação serve para formar a matriz quadrada em uma matriz triangular, achando o pivô da linha e zerando todos os elementos abaixo dele (A2, 2016).
> [...] serve para transformar uma matriz qualquer em uma matriz triangular superior ou inferior (que o determinante é o Termo principal) através de operações elementares em um processo de escalonamento parcial (A32, 2016).

E, ainda, foi identificado apenas um registro no qual um estudante conseguiu explicar o método e a finalidade:

> [...], esse método é mais uma forma de se resolver uma matriz determinante, transformando-a em uma matriz triangular superior ou inferior e calculando o resultado pela multiplicação entre os elementos da diagonal principal e as compensações. Serve para simplificar o cálculo de uma determinante de ordem maior (A16, 2016).

Segundo Steinbruch e Winterle (1987, p. 446), o método de triangulação pode ser explicado do seguinte modo:

> [...] dada uma matriz quadrada A, de ordem n, se procederão com as linhas (ou colunas) de seu determinante as operações adequadas para transformar a matriz A numa matriz triangular superior (ou inferior), ao mesmo tempo que se efetuarão com o det A as necessárias compensações, quando for o caso, para manter inalterado seu valor, tudo de acordo com as propriedades dos determinantes já vistas e verificadas.

Assim, verifica-se que, nas explicações apresentadas pelos estudantes, que 17,19% explicaram a finalidade do método abordado, porém não conseguiram expressar o processo desenvolvido por meio da linguagem natural. Apenas um estudante (A16) (que representou 0,78% das unidades de registros) apresentou uma explicação que se aproxima da considerada adequada.

Segundo Duval (2003), são as condições cognitivas de acessos aos objetos matemáticos que indicam se houve ou não a compreensão em matemática, o que pode ser identificado quando se observa facilidade na coordenação e a articulação entre os diferentes registros semióticos que representam um objeto matemático.

Nessa tarefa, durante a aula, os estudantes foram estimulados a trabalhar com registros simbólicos, onde foram necessárias transformações do tipo tratamento. Os estudantes foram estimulados a transitar entre registros numéricos e algébricos, de modo a executar o método por meio de comandos algébricos, representados pelas fórmulas inseridas nas células da planilha, os quais geravam automaticamente os registros numéricos correspondentes, que eram interpretados por eles.

No entanto, ao ser solicitado que explicassem, por meio da linguagem natural, o processo utilizado, os estudantes foram estimulados a fazer uma transformação de conversão, passando do registro simbólico para linguagem natural.

Os indicativos dessa categoria intermediária "*Se referiram à explicação e à finalidade do método"* permitem concluir que os estudantes tiveram dificuldades de compreensão matemática em relação ao método de triangulação, pois, ao tentarem realizar a transformação de conversão entre o registro simbólico e o registro da língua natural, muitos não foram capazes de representar o método com clareza. Destaca-se que apenas um estudante (entre 28 respondentes) conseguiu se expressar adequadamente.

Na categoria intermediária, "*Forneceram explicações vagas*", que representou 2,34% das unidades de registro, identificou-se que 1,56% tentou explicar a finalidade, mas não conseguiu e 0,78% apresentou a definição de matriz triangular. Como exemplos:

> [...], serve para detalhar o processo que será executado no problema e para obter o objetivo final (A6, 2016).
> [...]. Serve para simplificar a resolução de problemas com matrizes, um método mais prático em relação a outros, como Teorema de Laplace (A18, 2016).
> [...]. Uma matriz triangular é um tipo de matriz quadrada em que todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos (A3, 2016).

Nessa categoria intermediária, também foi possível perceber a dificuldade que alguns estudantes apresentam em expressar o raciocínio abstrato por meio da língua materna. Percebe-se que os modos simplificados de expressão desses estudantes não possibilitaram expressar o conceito com clareza, e, assim, verifica-se que alguns estudantes indicaram sentir dificuldades de compreensão matemática tanto em relação ao método de triangulação quanto em relação à sua finalidade.

(iii) "Percepções sobre suas compreensões sobre o método"

Na categoria final, “*Percepções sobre suas compreensões sobre o método*”, que representou 19,53% das unidades de registros, foram identificadas três categorias intermediárias: “*Houve percepção de compreensão do método por meio da tarefa proposta*” (17,19%); “*Houve percepção de compreensão do método com apoio de recursos externos à aula*” (1,56%) e “*Houve percepção de compreensão parcial do método*” (0,78%).

Na categoria intermediária “*Houve percepção de compreensão do método por meio da tarefa proposta*”, que representou 17,19%, foi possível verificar que 22 estudantes (de 28 respondentes – o que representa um índice de 79%) afirmaram que a tarefa lhes possibilitou compreender o método, o que é um indicativo que permite concluir que a maioria dos estudantes do G1 percebe que a tarefa favoreceu sua compreensão.

Na categoria intermediária “*Houve percepção de compreensão do método com apoio de recursos externos à aula*”, que representou 1,56% das unidades de registros, dois estudantes indicaram que compreenderam também por meio de outros recursos, tais como: aulas on-line (vídeo-aulas) e livros, conforme mostrado a seguir:

> Não compareci na aula. Contudo, assisti aulas online e acredito ter compreendido [...] (A33, 2016).
> [...] Eu não compreendi totalmente o método na primeira aula, mas depois de estudar em livros e em vídeo aulas na internet, entendi. A aula no Excel do dia 12 de setembro ajudou bastante também (A4, 2016).

Os dois fragmentos de registros nessa categoria intermediária sugerem que, ou pelo fato de um estudante não ter participado da aula teórica, na qual o método foi apresentado, ou em razão de o outro não ter conseguido compreender os objetivos e propósitos do método de triangulação, na primeira aula, acabaram buscando outras fontes de informação para conseguirem superar suas dúvidas, o que, segundo eles, possibilitou suas compreensões.

Nesse caso também foi possível verificar a importância de videoaulas, disponibilizadas na rede, que são recursos que auxiliam a aprendizagem, pois apresentam as informações de modo acessível aos estudantes. Além disso, há a possibilidade de rever a aula quantas vezes for necessário, o que pode que as dúvidas remanescentes sejam esclarecidas.

Nesse sentido, concorda-se com Leão, Rehfeldt e Marchi (2013, p. 34) quando indicam:

> Buscar a conciliação do ensino presencial com o ambiente virtual oportuniza ofertar atividades via internet, tirar dúvidas e promover discussões em relação ao conteúdo. Este novo espaço educativo pode vir a auxiliar no processo pedagógico. Também pode trazer vários benefícios na construção do conhecimento, uma vez que envolve os estudantes com os objetos de estudo, além de favorecer a interação e a coletividade.

Na categoria intermediária "*Houve percepção de compreensão parcial do método*", que representou 0,78%, apenas um estudante indicou que percebia que sua compreensão não era completa, pois ainda estava com dúvidas. Isso é evidenciado pelo seu registro: *"Compreendi parcialmente, ainda tenho algumas dúvidas em expressar a compensação e a mudança como o exercício realizado na aula de hoje com planilhas no Excel determinava. [...]*" (A2, 2016).

A experiência da sala de aula permite afirmar que, pela diversidade de saberes existente entre os estudantes, é praticamente impossível que uma abordagem pedagógica seja adequada a todos. O fato de os estudantes trazerem seus conhecimentos prévios, construídos ao longo da vida, afeta diretamente seus diferentes modos de conhecer e de construir os próprios conhecimentos.

O indicativo de que a tarefa não possibilitou a compreensão desse estudante corrobora com o que indica Perrenoud (2001, p. 26), quando afirma que devido à diversidade de conhecimentos e interesses existente na sala de aula, não é possível atingir a todos ao mesmo tempo com uma única proposta de ensino. Segundo as palavras do autor:

> Toda situação didática proposta ou imposta uniformemente a um grupo de alunos é inadequada para uma parcela deles. Para alguns, pode ser dominada facilmente e, por isso, não constitui um desafio nem provoca aprendizagem. Outros, porém, não conseguem entender a tarefa e, por isso, não se envolvem nela. Mesmo quando a situação está em harmonia com o nível de conhecimento e as capacidades cognitivas dos alunos, pode parecer desprovida de sentido, de interesse, e não gera nenhuma atividade notável em nível intelectual e, por conseguinte, nenhuma construção de novos conhecimentos nem um reforço das aquisições.

Assim, pode-se concluir, na categoria final, "*Percepções sobre suas compreensões sobre o método*", que dentre os 28 respondentes, a maioria dos estudantes afirmou perceber que a tarefa possibilitou a compreensão do método abordado. No entanto, salienta-se que essa percepção pode estar relacionada à capacidade de resolução do método em linguagem simbólica, pois, conforme se verificou na categoria "*Explicações sobre o método ou finalidade",* apesar de alguns estudantes serem capazes de explicar a finalidade do método abordado, não conseguiram expressar o processo desenvolvido por meio da linguagem natural.

Verificou-se que apenas um estudante conseguiu apresentar uma explicação que se aproxima daquela que foi considerada adequada.

(iv) “Motivos pelos quais gostaram da proposta de Ensino”

Nessa categoria final, que representou 17,2% das unidades de registro, foram identificadas três categorias intermediárias: *“Gostaram por ser uma proposta diferenciada”* (13,3%); “*Perceberam vantagens no uso das tecnologias digitais*” (3,12%) e *“Não sentiu dificuldade na aprendizagem”* (0,78%).

Na categoria intermediária *“Gostaram por ser uma proposta diferenciada”*, os estudantes indicaram ter gostado da tarefa por vários motivos: perceberam as aulas mais dinâmicas (3,94%); sentiram mais facilidade na aula (1,56%); por ser um método de ensino mais prático (1,56%); por possibilitar o trabalho cooperativo (1,56%); por possibilitar conhecer outro recurso de resolução de determinantes por meio do uso da tecnologia digital (1,56%); por tornar interessante o uso do recurso tecnológico na medida em que se familiarizavam com o recurso utilizado (0,78%); por ser uma aula diferenciada (0,78%); por possibilitar a participação ativa (0,78%); e por perceberem a dedicação da professora em relação ao aluno (0,78%).

Como exemplos, a seguir são apresentados alguns registros nos quais os estudantes indicam que gostaram da tarefa, pois perceberam as aulas mais dinâmicas:

> Gostei, pois, acho as aulas feitas nos computadores bem mais [...] dinâmicas. (A4, 2016).
> Sim, pois é uma forma, [...] mais dinâmica de aprender o conteúdo. (A28, 2016).
> Sim, me facilitaram o aprendizado [...]. É como se fosse uma revisão das aulas só que de maneira mais dinâmica do que uma simples revisão (A33, 2016).

Essa percepção dos estudantes corrobora a indicação de Morgado (2003, p. 26), quando se refere ao uso de planilhas no ensino:

> É importante ressaltar que as construções por meio de planilhas eletrônicas possibilitam interatividade, ou seja, uma relação dinâmica entre as ações do aluno e as reações do ambiente, resultado de suas operações mentais. Os objetos matemáticos que podem ser representados na tela do computador (fórmulas, tabelas, gráficos, etc.) constituem-se na materialização de ações mentais dos alunos, utilizando os comandos disponíveis pelo aplicativo.

A seguir, também são apresentados outros exemplos de registros, nos quais os estudantes afirmaram ter gostado da proposta ou porque sentiram mais facilidade na realização das tarefas (devido à exploração dos usos dos recursos tecnológicos digitais oferecidos pela planilha) ou pelo fato de a terem considerado como um método de ensino mais prático:

> Sim, principalmente as atividades propostas no computador, pois achei [...] fácil (A3, 2016).
> Gostei, pois, acho as aulas feitas nos computadores bem mais simplificadas [...] (A4, 2016).
> Eu gostei, pois é um método muito mais prático para o ensino [...] (A12, 2016).

O indicativo de que os estudantes gostaram da proposta por sentirem mais facilidade na realização das tarefas corrobora com a lição de Prensky (2001), que afirma que os estudantes, por serem "nativos digitais", estão acostumados com os usos de tecnologias digitais desde a infância e, naturalmente, gostam e sentem facilidade nos seus usos, pois estão familiarizados com eles.

Destaca-se que a proposição de uso desse tipo de recurso tecnológico digital, no desenvolvimento de tarefas no ensino presencial, permite aproximar a realidade da sala de aula daquela que é vivenciada pelo estudante, no seu dia a dia, pois possibilita que eles sintam mais facilidade no desenvolvimento das tarefas propostas.

Ainda nessa categoria intermediária, também são apresentados como exemplos os registros nos quais os estudantes indicaram ter gostado da tarefa, pelo fato de ela ter propiciado a realização de um trabalho cooperativo, conforme os exemplos: *"Gostei. Porque conseguimos aprender a matéria nos ajudando [...]"* (A17, 2016), ou, ainda, *"Gostei, porque [...] tiramos dúvidas uns aos outros"* (A26, 2016).

Destaca-se que, conforme as dúvidas surgiam no decorrer da exploração da planilha, tendo em vista a execução do método de triangulação, por meio de comandos adequados que possibilitassem a obtenção do determinante das matrizes consideradas, houve a intermediação do professor, bem como dos colegas (que já estavam mais familiarizados com o método e com o recurso tecnológico) auxiliando na compreensão do método e dos comandos, o que favoreceu o trabalho cooperativo e o entendimento da proposta.

Fiorentine (2004) indica que, no trabalho cooperativo, todos trabalham se ajudando, cooperando, tendo em vista a realização de tarefas cujo desenvolvimento não demanda negociações conjuntas do grupo.

Devido às dificuldades encontradas, a tarefa acabou propiciando um trabalho cooperativo entre os estudantes, pois, apesar de a tarefa ter sido realizada individualmente, eles tinham um objetivo final comum, que exigia tanto a compreensão do método quanto dos comandos da planilha, o que impulsionou a ajuda mútua. Na medida em que iam compreendendo os processos, com a intermediação do professor, os estudantes também ajudavam os colegas. Desse modo, perceberam que houve cooperação no grupo, a qual foi incentivada pela professora durante toda a tarefa.

Concorda-se com Moran (2000, p. 6, grifo do autor) quando indica:

> É importante ***educar para a autonomia***, para que cada um encontre o seu próprio ritmo de aprendizagem e, ao mesmo tempo, é importante ***educar para a cooperação***, para aprender em grupo, para intercambiar ideias, participar de projetos, realizar pesquisas em conjunto.

Nessa categoria intermediária, os estudantes também afirmaram gostar da tarefa, ou pelo fato de ela ter propiciado conhecer outra maneira de resolução de determinantes por meio do uso da tecnologia digital, ou, ainda, por tornar interessante o uso do recurso tecnológico, na medida em que se familiarizavam com o recurso utilizado, conforme mostrado a seguir:

> Gostei, [...] E claro, conhecemos outro recurso, não só apenas ficamos no papel e lápis, foi interessante conhecer outro modo de resolver. Aulas assim, com o auxílio do computador, com certeza ajudam bastante (A8, 2016).
> Gostei, [...] e sabendo usar as fórmulas corretas e com um pouco de prática a atividade se torna mais interessante (A2, 2016).

Nesse caso, verifica-se que a tarefa, por envolver a exploração e o uso de recursos digitais, além de despertar o interesse dos estudantes, também possibilitou despertar a consciência sobre a necessidade de familiarização com os recursos tecnológico disponíveis, tendo em vista aproveitá-los da melhor maneira possível.

Também foi possível constatar que os estudantes indicaram ter gostado da tarefa ou pelo fato de ela ser uma proposta de ensino diferenciada, ou, ainda, por ter propiciado a participação ativa no trabalho desenvolvido, conforme mostrado a seguir: *"Sim, pois é uma forma, diferente, [...]"* (A28, 2016), ou *"Gostei, porque trabalhamos [...]"* (A26, 2016).

Nota-se que os estudantes perceberam que a proposta era diferenciada e que a tarefa também lhes possibilitou assumir um papel ativo no desenvolvimento dos exercícios propostos, resolvendo-os por meio dos comandos da planilha, o que fez com que eles se envolvessem e que gostassem da tarefa apresentada.

Além disso, nessa categoria intermediária, também foi identificado que um estudante indicou também ter gostado da postura da professora em relação aos estudantes durante a tarefa, conforme apresentado a seguir: *“ [...] gostei também da dedicação da professora para com o aluno [...]”* (A36, 2016). Nesse caso, destaca-se que o registro remete à importância das relações no ambiente da sala de aula e suas influências no ensino e na aprendizagem. Conforme Libâneo (1994, p.249):

> As relações entre professores e alunos, as formas de comunicação, os aspectos afetivos e emocionais, a dinâmica das manifestações na sala de aula fazem parte das condições organizativas do trabalho docente, ao lado de outras que estudamos.

Assim, percebe-se que não somente os aspectos físicos ou práticos são fundamentais no planejamento da proposta de ensino, de modo a promover ambientes que favoreçam a aprendizagem. Além deles, devem ser considerados os aspectos afetivos e emocionais presentes no seu desenvolvimento, uma vez que favorecem a comunicação e potencializam a troca de saberes.

Desse modo, conclui-se, por meio dos indicativos da categoria intermediária *“Gostaram por ser uma proposta diferenciada”*, que os estudantes perceberam diversos motivos pelos quais afirmam ter gostado da tarefa. Indicaram que perceberam uma aula mais dinâmica, que tornou a tarefa mais fácil, e que foi uma proposta de ensino mais prática e diferenciada, que os auxiliou na aprendizagem. Além disso, alguns estudantes também perceberam a importância de suas participações ativas na exploração da tarefa, bem como da possibilidade do trabalho colaborativo, os quais favoreceram a comunicação e, consequentemente, suas aprendizagens.

Já na categoria intermediária “*Perceberam vantagens no uso das tecnologias digitais*”, que representou 3,12% das unidades de registros, verificou-se que: 0,78% destacaram a importância do uso de tecnologias no ensino; 78% acharam interessante em razão de usar um recurso tecnológico digital; 78% consideram o que conhecimento do recurso será útil futuramente e 0,78% consideram que deveria ter mais tarefas no computador, sem a ajuda da professora:

> [...], a inserção das tecnologias no método de ensino é essencial nos dias atuais, posto que vivemos em um mundo extremamente tecnológico (A20, 2016).

> Sim, pois consegui compreender melhor usando o Excel no computador, algo que será muito útil futuramente, e realizar atividades usando algum aparelho digital é algo que me interessa demasiadamente (A22, 2016).
> [...] acho que tinha que ter mais atividades para fazer no computador sem a ajuda da professora (A34, 2016).

Nessa categoria, aparece a percepção sobre a importância da inserção das tecnologias digitais no ensino, o que corrobora com a lição de Masetto (2013, p. 141) quando afirma que, atualmente, as tecnologias, ao serem usadas com a atitude de mediação pedagógica, são importantes estratégias utilizadas no processo de aprendizagem, tendo em vista o desenvolvimento das pessoas. Segundo o autor:

> Algum tempo atrás, a polêmica se instaurava sobre o uso ou não de tecnologias no processo educacional, em virtude da identificação da tecnologia com o uso apenas operacional e comportamentalista das estratégias desvinculadas das preocupações com o desenvolvimento das pessoas.
> A superação desse embate se deu pelo resgate da importância do processo de aprendizagem em nossas instituições escolares e pelo debate da integração do uso de tecnologias com a atitude de mediação pedagógica dos professores.

Também apareceu a percepção de se ter despertado o interesse pelo fato de a tarefa propiciar um ambiente de aprendizagem com uso de um aparelho digital.

Segundo Dewey (1959, p.136), compreende-se que há interesse quando estão presentes duas atitudes: “[...] há o cuidado, a ansiedade pelas futuras consequências, e a tendência para agir, no sentido de assegurar as melhores e evitar as piores consequências”. O interesse está relacionado ao estímulo da ação cuidadosa.

Além disso, o autor também indica que “[...] tomar interesse é ficar alerta, cuidadoso, atento” (DEWEY, 1959, p.138) e ainda que, se uma pessoa tem interesse por algo, “[...] significa que ela se identificou com os objetivos que determinam a atividade e que fornecem os meios e originam os obstáculos para a sua realização” (p.150).

Moran (2013, p. 28-29), ao se referir aos caminhos que facilitam a aprendizagem, afirma:

> Aprendemos pelo interesse, pela necessidade. [...] Aprendemos mais, quando conseguimos juntar todos os fatores: temos interesse, motivação clara, desenvolvemos hábitos que facilitam o processo de aprendizagem; e sentimos prazer no que estudamos e na forma de fazê-lo.

Cabe salientar que o indicativo de que o uso de tecnologias desperta o interesse dos estudantes corrobora com resultados de diversas pesquisas desenvolvidas nessa área. Como exemplo, pode ser citado o trabalho de Rosa e Viali (2009), no qual as pesquisadoras propuseram uma investigação que envolvia a exploração dos recursos da planilha na compreensão de números reais, que indicam que o uso da tecnologia despertou não somente o interesse dos estudantes pela aprendizagem, mas também motivou quem estava aprendendo e quem estava ensinando. Outro exemplo refere-se à pesquisa de Barcelos (2011), que, ao investigar sobre o uso de tecnologias na prática docente de matemática, constatou que o uso de tecnologias, além de despertar o interesse dos alunos, melhorou o comportamento deles e os ajudou na resolução de exercícios.

Desse modo, conclui-se que o fato de a tarefa possibilitar o uso de tecnologias digitais despertou o interesse dos envolvidos, o que provavelmente estimulou a ação cuidadosa e propiciou um ambiente de ensino favorável à aprendizagem.

Ainda na categoria intermediária "*Perceberam vantagens no uso das tecnologias digitais*", também verificou-se que apareceu o indicativo sobre a importância da aprendizagem relativa ao uso das planilhas, no futuro dos estudantes.

O uso das tecnologias digitais está cada vez mais presente no cotidiano das pessoas e, de, modo especial, permeia o mercado de trabalho. Saber fazer uso adequado delas, para resolver problemas práticos, torna-se uma necessidade para os profissionais de diversas áreas, em especial aos da área das Ciências Exatas, na qual se enquadram os futuros profissionais do curso da Engenharia Civil.

Segundo Kenski (2003, p. 4):

> Na atualidade, as tecnologias digitais oferecem novos desafios. As novas possibilidades de acesso à informação, interação e de comunicação, proporcionadas pelos computadores (e todos os seus periféricos, as redes virtuais e todas as mídias), dão origem a novas formas de aprendizagem. São comportamentos, valores e atitudes requeridas socialmente neste novo estágio de desenvolvimento da sociedade.

A autora destaca que os novos desafios relacionados aos usos adequados das tecnologias digitais, no novo estágio de desenvolvimento da sociedade, originam novos modos de aprendizagem. Assim, verifica-se a importância de se propiciar ambientes de aprendizagem que possibilitem interação com diferentes tecnologias digitais, de modo a conciliar o desenvolvimento cientifico, tecnológico e social.

Desse modo, conclui-se que o indicativo sobre a importância da aprendizagem relativa ao uso das planilhas no futuro remete à importância da inserção do uso de recursos tecnológicos como meios de aprendizagem, que propiciam novas formas de raciocínio e de comportamento. O uso adequado das tecnologias no ensino podem contribuir tanto com a formação específica dos estudantes, bem como com a formação integral, capacitando-os para atuarem no mercado de trabalho contemporâneo, que está em constante evolução e no qual o uso de diferentes recursos tecnológicos é uma tendência.

Também foi identificada, na categoria final "*Motivos por terem gostado da proposta de Ensino*", a categoria intermediária "*Por não sentir dificuldade na aprendizagem*", que representou 0,78% dos registros. Nessa, apenas um estudante indicou ter gostado da tarefa por já ter tido contato com o conteúdo anteriormente, conforme demonstra o registro: *"Sim, pois envolve um conteúdo que não é difícil de se compreender e um conteúdo já visto no ensino médio na escola onde eu estudava, assim, já tinha uma noção"* (A6, 2016). Geralmente, no ensino médio, são apresentados somente métodos mais básicos para cálculos de determinantes, tais como a expansão por cofatores (Teorema de Laplace), a Regra de Sarrus, ou a Regra de Chió, conforme apresentam Silva e Barreto Filho (2008), em seu livro didático elaborado para esse nível de ensino. Além disso, destaca-se que esse estudante foi um daqueles que copiou o arquivo para entrega da atividade. Ou seja, verifica-se uma incoerência na escrita desse estudante, o que confirma que ele realmente não compreendeu a proposta da tarefa realizada.

Desse modo, pela análise de conteúdo, conclui-se que, segundo as percepções dos estudantes, todos gostaram da tarefa proposta. A maioria indicou que a proposta favoreceu a compreensão e o aprimoramento de seus conhecimentos sobre o método, bem como possibilitou perceber o seu uso de modo mais prático. Indicaram também ter gostado da proposta diferenciada de ensino, pois a tarefa os possibilitou atuar ativamente num ambiente de aprendizagem dinâmico, interativo, cooperativo e reflexivo. Ainda destacaram que o fato de terem que raciocinar sobre como deveriam proceder para fazer uso adequado dos comandos da planilha, de modo a calcular o determinante por meio do processo do escalonamento parcial, não somente favoreceu a compreensão como também propiciou a fixação do conteúdo visto em sala de aula. Também, citaram as vantagens quanto à facilidade e à rapidez no uso do recurso para execução de cálculos, o que disponibilizou um tempo maior para reflexões críticas sobre os conceitos envolvidos no processo. Citaram a importância da inserção das tecnologias digitais nos contextos de ensino, de modo a despertar o interesse, além de propiciar a apreensão de novos conhecimentos acerca de procedimentos práticos e tecnológicos, vistos em aulas teóricas, que também os preparam para atuações futuras em suas vidas profissionais.

6.2.8 Tarefa 11

Nesta tarefa, se propôs a resolução de uma situação problema, que propiciou aos estudantes o contato com o processo de modelagem matemática, utilizada como método de ensino e de aprendizagem na disciplina de Álgebra Linear. Possibilitou perceber o uso de sistemas lineares na resolução de problemas.

Como um desafio, foi proposto que resolvessem a seguinte situação problema: “Um foguete experimental foi lançado de uma certa altura do chão. Se observou que passados 4 segundos, sua altura atingiu 80 metros, após 9 segundos, atingiu 90 metros, e, após 12 segundos, estava a 55 metros do chão. Pergunta-se: a) De que altura foi lançado? b) Qual a altura máxima atingida pelo foguete? c) Em quanto tempo, após o lançamento, atingiu o chão?”

Os estudantes do G1 receberam as seguintes orientações para suas resoluções:

1. Entregar registro por escrito individual (não digital, manuscrito) com resolução completa - apresentar todo o raciocínio utilizado e as estratégias que foram pensadas para responder às perguntas.
2. A resolução do sistema (se houver) deve se dar pelo método da Eliminação Gaussiana, e o escalonamento parcial pode ser realizado com auxílio do *MATLAB* (como exemplos da aula).
3. A comprovação de resultados também deve ser apresentada.

Os estudantes do G2 receberam as seguintes orientações para suas resoluções:

1. Entregar registro por escrito individual (não digital, manuscrito) com resolução completa - apresentar todo o raciocínio utilizado e as estratégias que foram pensadas para responder às perguntas.
2. A resolução do sistema (se houver) deve se dar pelo método da Eliminação Gaussiana.

3. A comprovação de resultados também deve ser apresentada.

Destaca-se que as características do problema propiciaram que os estudantes usassem conceitos que haviam sido abordados em sala de aula sobre interpolação polinomial, como uma estratégia viável para obtenção do modelo matemático, que lhes possibilitou descrever a trajetória parabólica do foguete experimental considerado.

Por meio dessa abordagem, os estudantes obtiveram um sistema de equações lineares que, ao ser resolvido, possibilitou obter os coeficientes da função quadrática que descreveu a altura do foguete em função do tempo, representada por $h = f(t)$, onde t representava o tempo em segundos.

Além disso, eles tiveram que interpretar o fenômeno e refletir sobre quais seriam as estratégias adequadas que lhes possibilitariam responder aos questionamentos realizados. Para tanto, foi sugerido que fizessem o registro gráfico da função. Nesse sentido, a necessidade da representação gráfica propiciou o resgate de conhecimentos prévios sobre elementos básicos de uma parábola. Para calcularem de que altura o foguete foi lançado, foi preciso calcular o ponto de intersecção da curva com eixo que representava a altura h, ou seja, tiveram que calcular o valor da função $h = f(t)$, quando $t = 0$.

Além, disso, para calcular a altura máxima atingida pelo foguete, tiveram que usar o conceito de ponto de máximo da função, que estava relacionado ao vértice da curva parabólica. Também, tiveram que pensar sobre a intersecção da curva com o eixo do tempo, para determinarem em quanto tempo após o lançamento o foguete atingiria o chão. Assim, foi necessário calcular os pontos de intersecção com o eixo t, ou seja, tiveram que calcular quais seriam os zeros da função. Nesse caso, precisaram resgatar conhecimentos prévios sobre o algoritmo para encontrar as raízes da equação $f(t) = 0$, pois se tratava de uma equação de segundo grau.

No grupo G1, participaram dessa tarefa trinta estudantes, que entregaram suas resoluções por escrito, seguindo as instruções recebidas. A análise dos registros estão apresentadas no Quadro 16.

No G1, verificou-se que 100% dos estudantes apresentaram o modelo matemático obtido por meio da interpolação polinomial, dentre os quais 97% estavam corretos. Verificou-se que apenas o estudante A31 (3%) apresentou o modelo errado, sendo que, em seu trabalho, numa folha, consta uma solução obtida por meio do uso do método de Gauss-Jordan, com erro na resolução de sistemas, e, na outra folha, consta o valor da função correta, mas não apresenta os cálculos correspondentes.

Quadro 16 - Resultados de respostas da Tarefa 11 (G1– 30 respondentes)

<table>
<tr><th>Critério</th><th colspan="6">Avaliação</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Modelo matemático</td><td rowspan="3">Apresentou</td><td rowspan="3">100%</td><td rowspan="2">Corretamente</td><td rowspan="2">97%</td><td>Completo</td><td>23%</td></tr>
<tr><td>Incompleto</td><td>74%</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td colspan="3">3%</td></tr>
<tr><td>Não apresentou</td><td colspan="5">0%</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Métodos utilizados</td><td rowspan="2">Eliminação Gaussiana</td><td rowspan="2">94%</td><td colspan="2" rowspan="2">Arredondamentos</td><td>Sim</td><td>27%</td></tr>
<tr><td>Não</td><td>67%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Gauss-Jordan</td><td rowspan="2">6%</td><td colspan="2" rowspan="2">Erro de cálculo</td><td>Sim</td><td>3%</td></tr>
<tr><td>Não</td><td>3%</td></tr>
<tr><td>Não apresentou</td><td colspan="5">0%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Recursos tecnológicos</td><td colspan="2" rowspan="2">Usou</td><td colspan="2" rowspan="2">20%</td><td>MATLAB</td><td>13%</td></tr>
<tr><td>GeoGebra</td><td>7%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Não usou</td><td colspan="4">80%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Verificação numérica</td><td colspan="2">Apresentou</td><td colspan="4">20%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Não apresentou</td><td colspan="4">80%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Registro gráfico</td><td colspan="2">Apresentou</td><td colspan="4">50%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Não apresentou</td><td colspan="4">50%</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Alternativa a</td><td rowspan="2">Resposta</td><td>Correta</td><td colspan="4">90%</td></tr>
<tr><td>Incorreta</td><td colspan="4">10%</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Justificativa</td><td rowspan="3">Apresentou</td><td rowspan="3">90%</td><td>Corretamente</td><td colspan="2">67%</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td colspan="2">0%</td></tr>
<tr><td>Incompleta</td><td colspan="2">23%</td></tr>
<tr><td>Não apresentou</td><td colspan="4">10%</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Alternativa b</td><td rowspan="2">Resposta</td><td>Correta</td><td colspan="4">90%</td></tr>
<tr><td>Incorreta</td><td colspan="4">10%</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Justificativa</td><td rowspan="3">Apresentou</td><td rowspan="3">77%</td><td>Corretamente</td><td colspan="2">27%</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td colspan="2">3%</td></tr>
<tr><td>Incompleta</td><td colspan="2">47%</td></tr>
<tr><td>Não apresentou</td><td colspan="4">23%</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Alternativa c</td><td rowspan="2">Resposta</td><td>Correta</td><td colspan="4">70%</td></tr>
<tr><td>Incorreta</td><td colspan="4">30%</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Justificativa</td><td rowspan="3">Apresentou</td><td rowspan="3">83%</td><td>Corretamente</td><td colspan="2">23%</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td colspan="2">17%</td></tr>
<tr><td>Incompleta</td><td colspan="2">43%</td></tr>
<tr><td>Não apresentou</td><td colspan="4">17%</td></tr>
</table>

Fonte: Autora

Foi possível notar, também, que apenas 23% apresentaram o processo de modelagem inicial de modo completo, justificando a abordagem escolhida, estabelecendo significados para as letras adotadas no modelo matemático obtido. A maioria, 74%, apresentou essa etapa da modelagem de modo incompleto, não explicando o motivo pelo qual a abordagem foi escolhida ou os significados das letras escolhidas para representar as incógnitas.

Apesar da informação de que deveriam usar o método de resolução “Eliminação Gaussiana”, observou-se que 94% seguiu as orientações e que 6% optou pelo uso do método de Gauss-Jordan.

Além disso, dentre os 94% que usaram a Eliminação Gaussiana, 67% usaram os coeficientes fracionários encontrados, enquanto que 27% optaram pelo arredondamento dos coeficientes, sendo que essa simplificação deveria ser evitada tendo em vista evitar erros de arredondamentos desnecessários. Assim, verifica-se a dificuldade que esses estudantes demostram em trabalhar com expressões algébricas em que aparecem números fracionários.

Em relação aos estudantes A31 e A34, que optaram pelo método de Gauss-Jordan, nota-se que A31 apresentou cálculos com erros no processo de escalonamento e A34 apenas indicou a matriz inicial e a final, após o escalonamento completo, mas não indicou por qual processo a obteve.

Conforme as orientações da tarefa, no G1, os estudantes poderiam ou não fazer uso dos recursos tecnológicos, utilizados em aula, para resolverem o sistema linear. Esperava-se que a maioria dos estudantes optaria pelo uso dos recursos do *MATLAB* para obter o resultado do escalonamento ou dos recursos do GeoGebra para gerar os gráficos de seus modelos, mas isso não se verificou. A maioria, 80%, não indicou ter feito uso de recursos tecnológicos e apresentou seus cálculos manualmente. Dentre os 20% que indicaram ter usado, apenas 13% se referiram ao uso do *MATLAB* e 7% se referiram ao uso do GeoGebra.

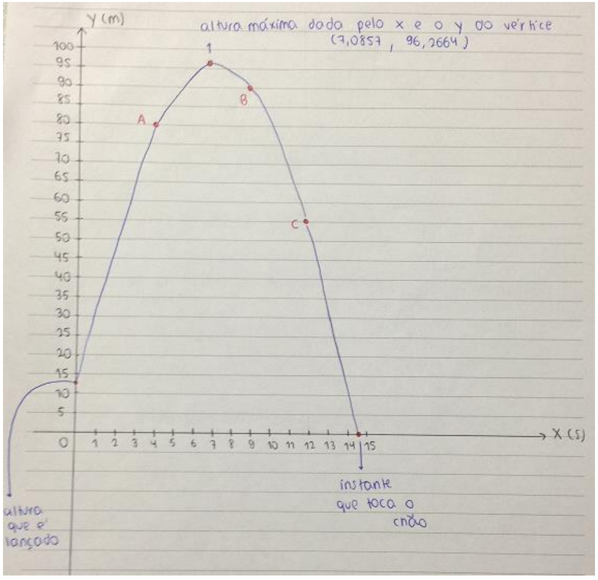
Em relação à comprovação de resultados, observou-se que a maioria (80%) dos estudantes do G1 não fez uso dos recursos de verificação numérica para validação do modelo matemático obtido.

Também foi possível notar que apenas a metade (50%) fez uso do registro gráfico para justificar suas respostas ou para comprovar seus resultados. Como exemplo, apresenta-se, na Figura 25, o registro gráfico apresentado pelo estudante A4.

Já em relação às respostas consideradas corretas, observou-se que, em relação às alternativas “a” e “b”, houve 90% de acertos, enquanto que, na “c”, houve 70%.

Assim, os resultados indicam que a tarefa possibilitou que a maioria dos estudantes reconheceu o uso prático de conceitos tratados inicialmente de modo abstrato, em sala de aula, o que provavelmente lhes possibilitou (re)significá-los. A tarefa propiciou perceber que o uso do método de interpolação polinomial gerou um sistema de equações lineares que, para ser resolvido, necessitou de um método de resolução apropriado. Como exemplos, apresentam-se, nas Figuras 26 e 27, as resoluções dos estudantes A4 e A12.

Figura 25 - Registro gráfico realizado por A4 na Tarefa 11



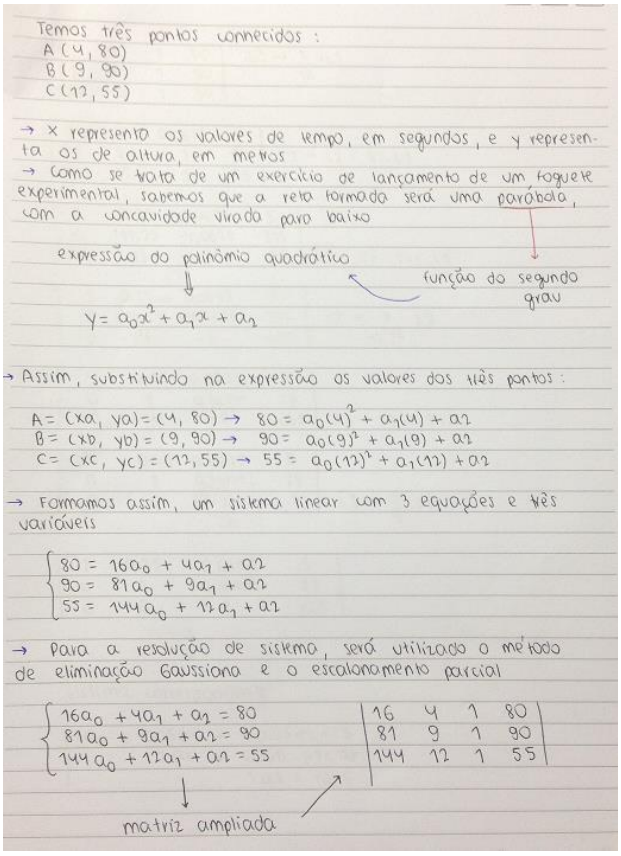
Fonte: A4 – G1 (2016)

A Figura 26 ilustra o registro sobre a explicação do estudante A4 sobre o processo de modelagem realizado.

A Figura 27 ilustra o registro da resolução do sistema linear gerado pelo método da Eliminação Gaussiana, realizado pelo estudante A12.

Além disso, para responder às questões, os estudantes usaram conhecimentos prévios sobre funções de segundo grau, tais como o cálculo do vértice e dos zeros. Como exemplos, apresentam-se as resoluções de alguns estudantes referentes às alternativas “a”, “b” e “c”, que podem ser visualizados nas Figuras 28, 29 e 30, respectivamente.

Figura 26 - Explicação do processo de interpolação polinomial de A4


Temos três pontos conhecidos:
A (4, 80)
B (9, 90)
C (12, 55)

→ x representa os valores de tempo, em segundos, e y representa os de altura, em metros
→ Como se trata de um exercício de lançamento de um foguete experimental, sabemos que a reta formada será uma parábola, com a concavidade virada para baixo

expressão do polinômio quadrático — função do segundo grau

$y = a_0x^2 + a_1x + a_2$

→ Assim, substituindo na expressão os valores dos três pontos:

$A = (xa, ya) = (4, 80) \rightarrow 80 = a_0(4)^2 + a_1(4) + a_2$
$B = (xb, yb) = (9, 90) \rightarrow 90 = a_0(9)^2 + a_1(9) + a_2$
$C = (xc, yc) = (12, 55) \rightarrow 55 = a_0(12)^2 + a_1(12) + a_2$

→ Formamos assim, um sistema linear com 3 equações e três variáveis

$$\begin{cases} 80 = 16a_0 + 4a_1 + a_2 \\ 90 = 81a_0 + 9a_1 + a_2 \\ 55 = 144a_0 + 12a_1 + a_2 \end{cases}$$

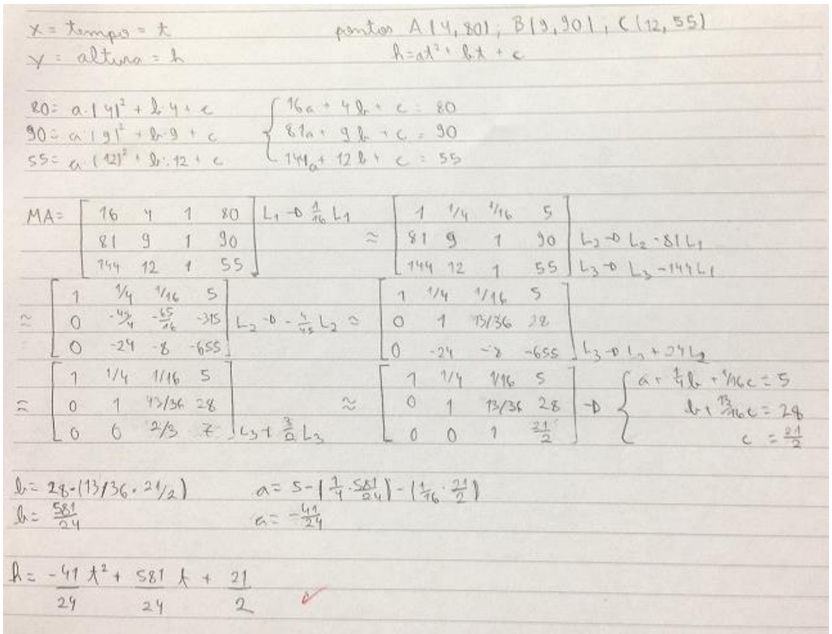
→ Para a resolução de sistema, será utilizado o método de eliminação Gaussiana e o escalonamento parcial

$$\begin{cases} 16a_0 + 4a_1 + a_2 = 80 \\ 81a_0 + 9a_1 + a_2 = 90 \\ 144a_0 + 12a_1 + a_2 = 55 \end{cases} \qquad \left|\begin{matrix} 16 & 4 & 1 & 80 \\ 81 & 9 & 1 & 90 \\ 144 & 12 & 1 & 55 \end{matrix}\right|$$

matriz ampliada

Fonte: A4 – G1 (2016)

Figura 27 - Resolução do Sistema Linear realizado por A12


x = tempo = t
y = altura = h

pontos A (4, 80); B (9, 90); C (12, 55)
$h = at^2 + bt + c$

$80 = a \cdot (4)^2 + b \cdot 4 + c$
$90 = a \cdot (9)^2 + b \cdot 9 + c$
$55 = a \cdot (12)^2 + b \cdot 12 + c$

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = 80 \\ 81a + 9b + c = 90 \\ 144a + 12b + c = 55 \end{cases}$$

$$MA = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 1 & 80 \\ 81 & 9 & 1 & 90 \\ 144 & 12 & 1 & 55 \end{bmatrix} L_1 \rightarrow \tfrac{1}{16}L_1 \approx \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/16 & 5 \\ 81 & 9 & 1 & 90 \\ 144 & 12 & 1 & 55 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \rightarrow L_2 - 81L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 144L_1 \end{matrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/16 & 5 \\ 0 & -45/4 & -65/16 & -315 \\ 0 & -24 & -8 & -655 \end{bmatrix} L_2 \rightarrow -\tfrac{4}{45}L_2 \approx \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/16 & 5 \\ 0 & 1 & 13/36 & 28 \\ 0 & -24 & -8 & -655 \end{bmatrix} L_3 \rightarrow L_3 + 24L_2$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/16 & 5 \\ 0 & 1 & 13/36 & 28 \\ 0 & 0 & 2/3 & 7 \end{bmatrix} L_3 \cdot \tfrac{3}{2}L_3 \approx \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/16 & 5 \\ 0 & 1 & 13/36 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & \tfrac{21}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a + \tfrac{1}{4}b + \tfrac{1}{16}c = 5 \\ b + \tfrac{13}{36}c = 28 \\ c = \tfrac{21}{2} \end{cases}$$

$b = 28 - (13/36 \cdot 21/2)$
$b = \frac{581}{24}$

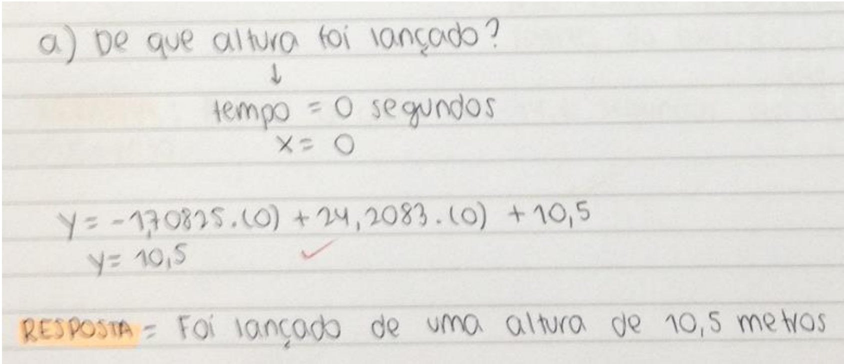
$a = 5 - \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{581}{24}\right) - \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{21}{2}\right)$
$a = -\frac{41}{24}$

$$h = -\frac{41}{24}t^2 + \frac{581}{24}t + \frac{21}{2}$$

Fonte: A12 – G1 (2016)

A Figura 28 ilustra o registro sobre a resolução da alternativa “a” realizado pelo estudante A4.

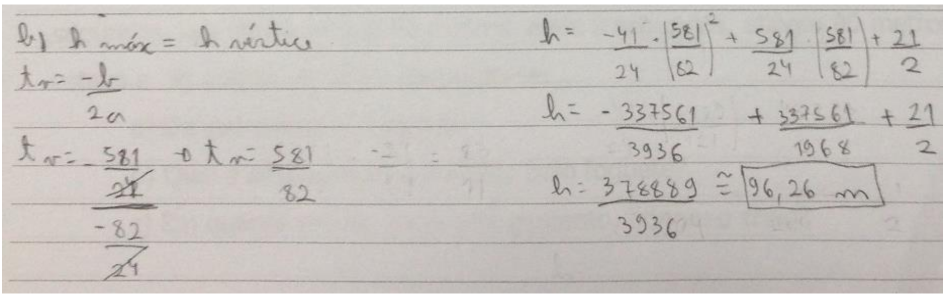
Figura 28 - Resolução da alternativa "a" da Tarefa 11 realizado por A4



Fonte: A4 – G1 (2016)

A Figura 29 ilustra o registro sobre a resolução da alternativa "b" realizado pelo estudante A12, que envolveu o cálculo do vértice da parábola.

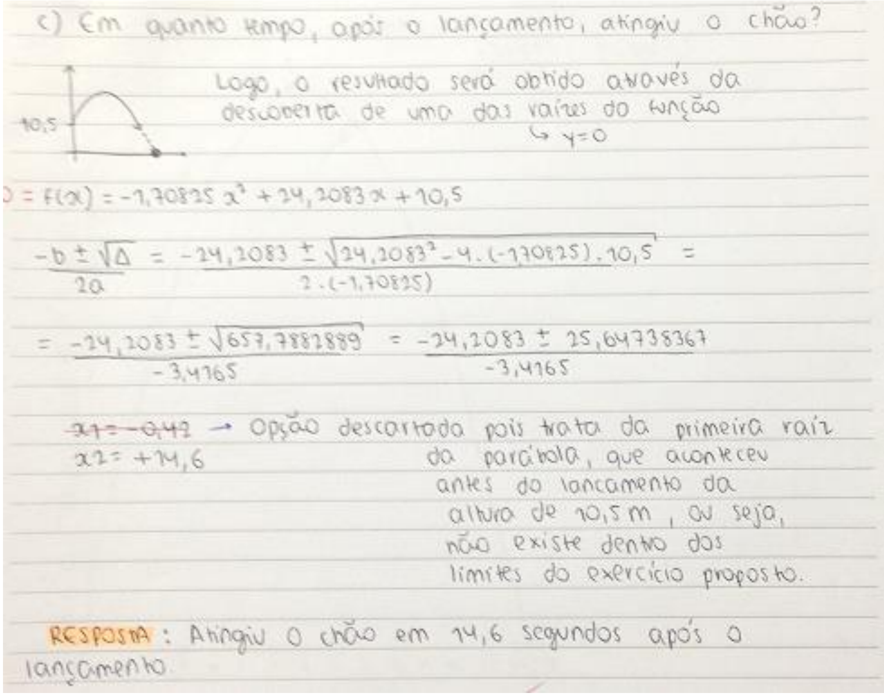
Figura 29 - Resolução da alternativa "b" da Tarefa 11 realizado por A12



Fonte: A12 – G1 (2016)

A Figura 30 ilustra o registro sobre a resolução da alternativa "c" realizado pelo estudante A4, que envolveu o cálculo dos zeros da função.

Figura 30 - Resolução da alternativa "c" da Tarefa 11, realizada por A4



c) Em quanto tempo, após o lançamento, atingiu o chão?

10,5

Logo, o resultado será obtido através da descoberta de uma das raízes da função
↳ y=0

$0 = f(x) = -1{,}70825\,x^2 + 24{,}2083\,x + 10{,}5$

$\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-24{,}2083 \pm \sqrt{24{,}2083^2 - 4.(-1{,}70825).10{,}5}}{2.(-1{,}70825)} =$

$= \dfrac{-24{,}2083 \pm \sqrt{657{,}7882889}}{-3{,}4165} = \dfrac{-24{,}2083 \pm 25{,}64738367}{-3{,}4165}$

~~$x_1 = -0{,}42$~~ → Opção descartada pois trata da primeira raiz da parábola, que aconteceu antes do lançamento da altura de 10,5 m, ou seja, não existe dentro dos limites do exercício proposto.

$x_2 = +14{,}6$

RESPOSTA: Atingiu o chão em 14,6 segundos após o lançamento.

Fonte: A4 – G1 (2016)

Quanto ao indicativo de 10% de respostas incorretas observadas em "a" e "b", foi possível verificar que: na alternativa "a", os estudantes A13, A23 e A25: não apresentaram cálculos nem apresentaram justificativas, e, na alternativa "b", A13, A23 não apresentaram cálculos nem apresentaram justificativas. Ainda, o estudante A29 argumentou, mas não concluiu, ou seja, não apresentou resposta ou cálculos adequados que a comprovasse. Além disso, na alternativa "c", na qual 30% das respostas estavam erradas, verificou-se que os estudantes A13, A17 e A23 não apresentaram nem cálculos nem justificativas, e que os estudantes A30, A31, A32, A33, A35 e A36 apresentaram cálculos com respostas erradas (com justificativas incorretas).

Como exemplo desse último caso, pode ser citado o registro do estudante A31 (2016), que afirmou: "*Com o GeoGebra sabe-se que a altura máxima é de* $96{,}26$ *e o tempo é igual a* $7{,}05$ *segundos*". No entanto, o estudante não explicou como procedeu no aplicativo para obter esses valores. Depois, justificou, em linguagem natural: "*O tempo de atingir a altura máxima é igual ao tempo de queda*" e apresentou o cálculo numérico: $7{,}05\ \text{s} \times 2 = 14{,}10\ \text{s}$, que está incorreto, pois o foguete não foi lançado do chão. Nesse registro, o que também se nota é que, no gráfico apresentado, aparece o ponto no qual a parábola corta o eixo x, indicado por $14{,}59$, que seria a resposta correta. O estudante, contudo, não conseguiu interpretar graficamente esses dados. Esse mesmo erro foi apresentado no registro do estudante A33, o que sugere que podem ter trabalhado em conjunto.

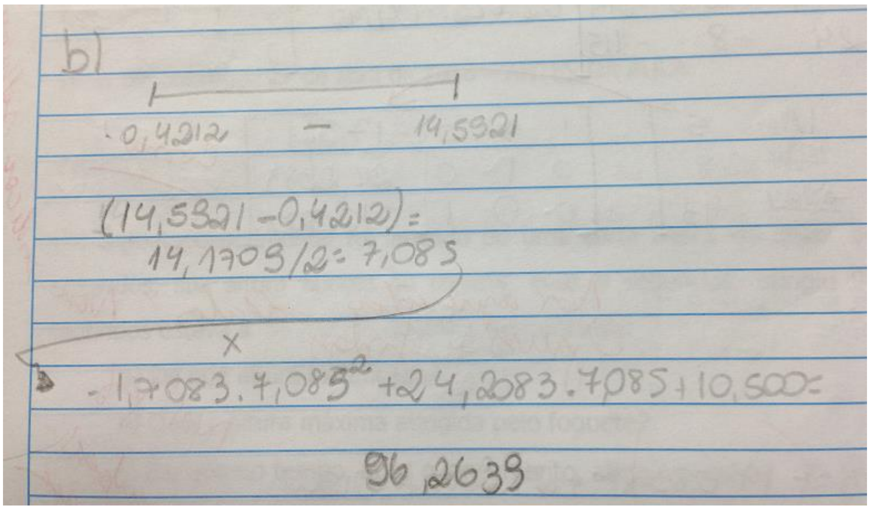
Em relação as justificativas apresentadas, verificou-se que:

- Na alternativa “a”, 90% justificaram suas repostas, sendo que 67% apresentaram justificativas coerentes e 23% apresentaram justificativas incompletas.
- Na alternativa “b”, 77% apresentaram justificativas, sendo que 27% justificaram corretamente, 47% apresentaram justificativas incompletas e 3%, equivocadas.
- Na alternativa “c”, 83% justificaram suas repostas, sendo que apenas 23% apresentaram justificativas consideradas corretas; 43% apresentaram justificativas incompletas e 17% apresentaram justificativas equivocadas.

Percebe-se que, em todas as alternativas, apesar de a maioria fornecer respostas objetivas corretas (cálculos numéricos ou algébricos), nota-se a dificuldade que os estudantes sentem em apresentar, em linguagem natural, justificativas adequadas referentes aos raciocínios utilizados e sobre procedimentos algébricos adotados. Como exemplo, pode ser citada a resolução da alternativa “b”, apresentada pelo estudante A31 (Figura 31).

Nesse caso, percebe-se que o estudante fez uma representação gráfica das raízes da parábola (que já havia calculado anteriormente, na alternativa “c”, usando a fórmula de Báskara) e apresentou o cálculo do vértice, calculando a abscissa pela média entre as raízes obtidas. Em seguida, substituiu o valor encontrado na expressão da função para obter a altura máxima, mas não identificou qual seria a resposta para a pergunta realizada.

Figura 31 - Resolução da alternativa "b" da Tarefa 11 realizado por A31



Fonte: A31 –G1 (2016)

No G2, participaram dessa tarefa 21 estudantes, que entregaram suas resoluções por escrito, seguindo as instruções recebidas. A análise dos registros escritos está apresentada no Quadro 17.

No G2, verificou-se que 95% dos estudantes apresentaram o modelo matemático obtido por meio da interpolação polinomial, dentre os quais 90% estavam corretos. O estudante E15 (5%) não apresentou a modelagem e o estudante E8 (5%) cometeu erro de escalonamento, na resolução do sistema linear.

No entanto, no G2, verificou-se que nenhum estudante apresentou o processo de modelagem inicial de modo completo, pois a maioria não justificou a escolha da abordagem escolhida. Apenas o estudante E1 (5%) se referiu ao fato de a trajetória poder ser descrita por meio de uma curva parabólica, e 15 estudantes (71%) não estabeleceram significados para as letras adotadas nos modelos matemáticos elaborados.

Apesar de o trabalho especificar que deveriam usar o método de resolução Eliminação Gaussiana, observou-se que 5% optaram pelo método de Gauss-Jordan e que outros 5% não apresentaram a resolução. Nesse grupo, também se observou que, dentre aqueles que seguiram as orientações, 66% trabalharam com números fracionários no escalonamento, evitando erros de arredondamento. Além disso, 24% optaram por trabalhar com valores aproximados, evidenciando a dificuldade que os estudantes sentem em trabalhar com números fracionários.

Quadro 17 - Resultados de respostas da Tarefa 11 (G2 – 21 respondentes)

<table>
<tr><th>Critério</th><th colspan="6">Avaliação</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Modelo Matemático</td><td rowspan="3">Apresentou</td><td rowspan="3">95%</td><td rowspan="2">Corretamente</td><td rowspan="2">90%</td><td>Completo</td><td>0%</td></tr>
<tr><td>Incompleto</td><td>90%</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td colspan="3">5%</td></tr>
<tr><td>Não apresentou</td><td colspan="5">5%</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Métodos utilizados</td><td rowspan="2">Eliminação Gaussiana</td><td rowspan="2">90%</td><td colspan="2" rowspan="2">Erro de Arredondamento</td><td>Sim</td><td>24%</td></tr>
<tr><td>Não</td><td>66%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Gauss-Jordan</td><td rowspan="2">5%</td><td colspan="2" rowspan="2">Erro de Cálculo</td><td>Sim</td><td>0%</td></tr>
<tr><td>Não</td><td>5%</td></tr>
<tr><td>Não apresentou</td><td colspan="5">5%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Recursos tecnológicos</td><td colspan="2" rowspan="2">Usou</td><td colspan="2" rowspan="2">5%</td><td>MATLAB</td><td>0%</td></tr>
<tr><td>Geogebra</td><td>5%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Não usou</td><td colspan="4">95%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Verificação numérica</td><td colspan="2">Apresentou</td><td colspan="4">5%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Não apresentou</td><td colspan="4">95%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Registro gráfico</td><td colspan="2">Apresentou</td><td colspan="4">86%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Não apresentou</td><td colspan="4">14%</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Alternativa a</td><td rowspan="2">Resposta</td><td>Correta</td><td colspan="4">81%</td></tr>
<tr><td>Incorreta</td><td colspan="4">19%</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Justificativa</td><td rowspan="3">Apresentou</td><td rowspan="3">81%</td><td>Corretamente</td><td colspan="2">71%</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td colspan="2">0%</td></tr>
<tr><td>Incompleta</td><td colspan="2">10%</td></tr>
<tr><td>Não apresentou</td><td colspan="4">19%</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Alternativa b</td><td rowspan="2">Resposta</td><td>Correta</td><td colspan="4">100%</td></tr>
<tr><td>Incorreta</td><td colspan="4">0%</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Justificativa</td><td rowspan="3">Apresentou</td><td rowspan="3">100%</td><td>Corretamente</td><td colspan="2">57%</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td colspan="2">0%</td></tr>
<tr><td>Incompleta</td><td colspan="2">43%</td></tr>
<tr><td>Não apresentou</td><td colspan="4">0%</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Alternativa c</td><td rowspan="2">Resposta</td><td>Correta</td><td colspan="4">95%</td></tr>
<tr><td>Incorreta</td><td colspan="4">5%</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Justificativa</td><td rowspan="3">Apresentou</td><td rowspan="3">95%</td><td>Corretamente</td><td colspan="2">14%</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td colspan="2">5%</td></tr>
<tr><td>Incompleta</td><td colspan="2">76%</td></tr>
<tr><td>Não apresentou</td><td colspan="4">10%</td></tr>
</table>

Fonte: Autora

Como esse era o grupo que não utilizava recursos tecnológicos, não se esperava que eles usassem algum tipo de recurso para comprovação de resultados, no entanto, o estudante E6 (5%) apresentou um gráfico gerado pelo GeoGebra para comprovar seus resultados. Destaca-se que, durante as aulas, em *slides*, apareciam gráficos gerados no ambiente do GeoGebra, e a professora se referia ao uso desse aplicativo para suas construções, o que pode ter motivado o uso desse recurso pelo estudante.

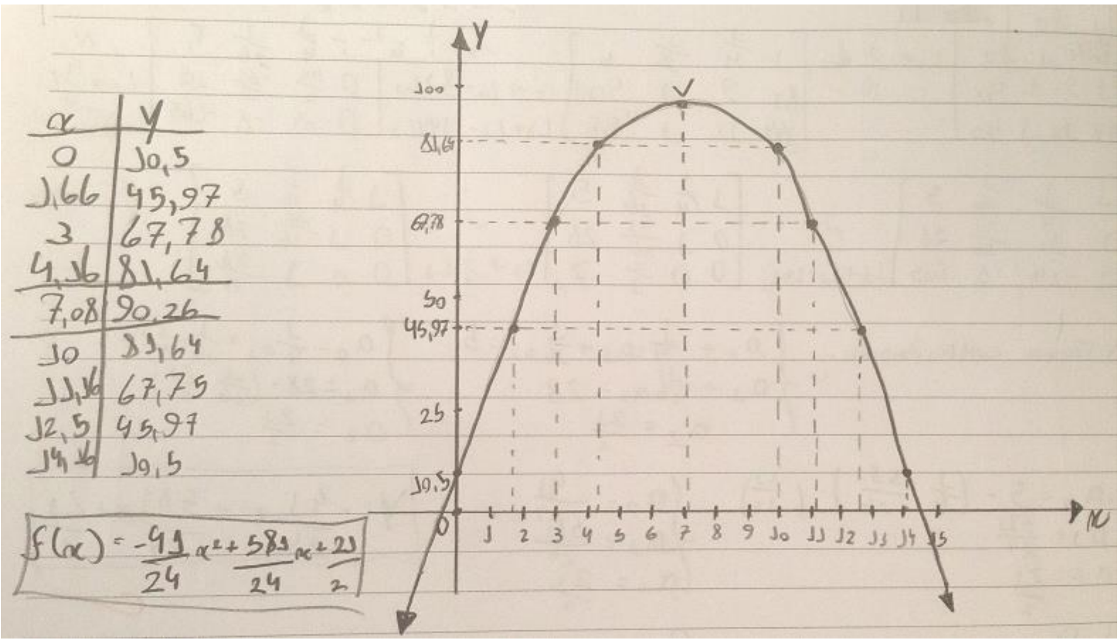
Em relação à comprovação de resultados, observa-se que a maioria (95%) dos estudantes do G2 não fez uso do recurso de verificação numérica. No entanto, foi possível observar que a maioria dos estudantes do G2 (86%) fez uso do registro gráfico para justificar suas respostas ou para comprovar seus resultados.

Em relação às respostas corretas, observa-se que:

- Na alternativa “a”, verificou-se 81% de acertos, sendo que todos apresentaram justificativas, das quais 71% foram consideradas adequadas e 10% incompletas.
- Na alternativa “b”, verificou-se que 100% apresentaram respostas consideradas corretas. Porém, das justificativas apresentadas, 57% foram consideradas adequadas e 43%, incompletas.
- Na alternativa “c”, 95% dos estudantes responderam corretamente, sendo que 14% das justificativas estavam completas e 76% foram consideradas incompletas.

O fato de a maioria ter optado por usar o registro gráfico (86%), bem como o registro tabular, também apresentado pela maioria (67%), pode ter favorecido a compreensão matemática do problema, explicando os altos percentuais de respostas corretas para as alternativas “a”, “b” e “c”. Como exemplo, pode ser visualizado o registro do Estudante E17, na Figura 32.

Figura 32 - Registros gráfico e tabular apresentados por E17 na Tarefa 11



Fonte: E17 –G2 (2016)

No entanto, verifica-se que existe a dificuldade de expressão em linguagem natural acerca das justificativas para os procedimentos adotados, especialmente em relação às alternativas “b” e “c”, o que se verifica nos altos índices de 43% e 76% de justificativas consideradas incompletas, apresentadas pelos estudantes. Esse é um indicativo importante acerca das dificuldades existentes no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear, que apareceu nos dois grupos analisados.

As atividades propostas foram elaboradas de modo a estimular o trânsito entre os registros, especialmente no sentido de possibilitar a percepção e de estabelecer relações entre a linguagem natural e a linguagem simbólica necessárias na resolução de problemas próprios da Álgebra Linear. Mas se verificou que muitos estudantes sentiram dificuldades em se expressar adequadamente, em linguagem natural, talvez por não compreenderem os conceitos envolvidos, ou por não se preocuparem com o rigor que é necessário nessa representação.

Já em relação às respostas fornecidas pelos estudantes que foram consideradas incorretas, verificou-se que: em “a”, foi identificado que 19% dos estudantes (E3, E10, E13, E24) não apresentaram cálculos, nem apresentaram justificativas para as respostas; em “b”, não foram identificadas respostas incorretas; e, em “c”, verificou-se que o estudante E8 (5%) errou na interpretação do problema. Ele partiu do pressuposto de que o foguete havia sido lançado do solo e, em sua justificativa, afirmou: “*Em quanto tempo atinge o chão* $\rightarrow$ *achar as raízes*” (E8, 2016). Para isso, igualou a função a zero e usou Báskara para encontrar suas raízes. Depois, afirmou: ”$x_1 =$*parte e* $x_2 =$*retorna.* $x_2 - x_1 = 15{,}09$ *segundos*”, o que não está correto, pois, no momento do lançamento (no instante inicial), o tempo deveria ter sido considerado igual a zero.

De modo geral, nota-se que, embora a professora tenha orientado os dois grupos a fazer uso da resolução gráfica, para comprovação de seus resultados, esse fato ocorreu com maior frequência no G2, onde apareceram os maiores percentuais de acertos em relação às alternativas “b” e “c”, o que indica que o trânsito entre os diferentes registros realizados pelos estudantes do G2 pode ter favorecido a compreensão do problema e a interpretação de resultados.

6.2.10 Tarefa 12

Nessa tarefa, buscou-se estimular o uso dos diferentes métodos de resolução de sistemas lineares, por meio da abordagem de resolução de problemas e da modelagem matemática, tendo em vista estimular a compreensão e a aprendizagem significativa dos conceitos envolvidos. Para tanto, foram propostas três situações problema, para os dois grupos, que abrangiam os três diferentes tipos de solução possíveis para sistemas de equações lineares.

O G1 desenvolveu a tarefa no laboratório computacional, onde puderam fazer uso dos recursos do *MATLAB,* e o G2 desenvolveu a tarefa em sala de aula tradicional.

Aos dois grupos, foi solicitado que trabalhassem em duplas e que fizessem a modelagem matemática dos problemas, na qual deveriam utilizar, para as resoluções, qualquer método abordado em aula, desde que o considerassem adequado. Além disso, foi solicitado que todos os estudantes deveriam apresentar seus próprios registros escritos, nos quais deveriam constar a expressão mais completa possível do raciocínio utilizado em todo o processo. Nos dois grupos, durante a atividade, a professora atuou como mediadora do processo, questionando, quando necessário, de modo a estimular a interpretação crítica dos estudantes acerca de seus resultados.

Cabe destacar que o primeiro problema estava relacionado à produção de móveis, onde constavam vários dados iniciais, que, ao serem equacionados, deveriam ser representados por um sistema com três equações, três incógnitas e solução única. O segundo problema tratou do cálculo do fluxo de água em uma rede, no qual a maioria das informações já estava organizada graficamente, por meio de um grafo da rede considerada. Esse problema, ao ser modelado matematicamente, deveria gerar um sistema com três equações, três variáveis e infinitas soluções. O terceiro problema referiu-se ao fluxo de caixa de um estacionamento, que, ao ser modelado, deveria gerar um sistema linear com duas equações, duas incógnitas e sem solução.

Os resultados das análises dos registros escritos entregues pelos estudantes dos dois grupos estão apresentados nos Quadros 18 e 19**.**

No G1, verificou-se que tanto no problema 1 (100%) quanto no problema 3 (89%), a maioria dos estudantes descreveu as incógnitas ou variáveis, mas isso não ocorreu no problema 2 (0%). O motivo para tal foi que as situações apresentadas nos problemas 1 e 2 eram diferentes daquelas que eles já haviam trabalhado em sala de aula. Assim, eles lembraram da necessidade de descrever as letras utilizadas no processo de modelagem no problema 1. Contudo, no problema 2, como já haviam trabalhado anteriormente–com problemas semelhantes, não sentiram a necessidade de explicar o significado das letras utilizadas no modelo matemático construído.

Quadro 18 - Resultados de respostas da Tarefa 12 (G1 – 18 duplas/individual)

Critérios		Problema 1	Problema 2	Problema 3
Descreveu incógnitas ou variáveis	Sim	100%	0%	89%
	Não	0%	100%	11%
Usou matrizes	Sim	94%	0%	0%
	Não	6%	100%	100%
Modelo matemático	Sim	89%	100%	89%
	Não	0%	0%	11%
	Parcial	11%	0%	0%
Método de resolução	Gauss-Jordan	50%	67%	61%
	Eliminação Gaussiana	33%	28%	6%
	Matriz inversa	17%	0%	6%
	Não fez	0%	6%	28%
Uso do *MATLAB*	Sim	89%	61%	22%
	Não	11%	39%	78%
Solução(ões) reais	Correta	89%	44%	56%
	Equivocada	0%	17%	6%
	Parcialmente correta	0%	22%	0%
	Não forneceu	11%	22%	38%
Justificativa	Sim	89%	72%	61%
	Não	11%	28%	39%
	Adequada	78%	66%	28%
	Inadequada	6%	6%	33%
Alternativa b	Correta	-	78%	-
	Equivocada	-	0%	-
	Parcialmente correta	-	11%	-
	Não fez	-	11%	-
Alternativa c	Correta	-	28%	-
	Equivocada	-	44%	-
	Parcialmente correta	-	17%	-
	Não fez	-	11%	-

Fonte: Autora

Destaca-se que os estudantes foram alertados sobre a importância de explicitar o significado das incógnitas, ou das variáveis consideradas, no processo de modelagem matemática. No entanto, em geral, notou-se a falta desse cuidado quando eles trabalham com algo que já supõem ser conhecido.

Os dados constantes no Quadro 18 evidenciam que os estudantes fizeram uso de matrizes para a organização de dados apenas quando foi necessário, ou seja, no problema 1 (94%); contudo, no problema 3, havia poucos dados a ser considerados e eles não sentiram necessidade de fazer uso da estrutura matricial para a organização dos dados.

Verificou-se que 100% das duplas do G1 forneceram o modelo correto para o problema 2. Já em relação aos problemas 1 e 3, verificou-se que 89% das duplas apresentaram modelos apropriados e que 11% das duplas apresentaram modelos parcialmente corretos para o problema 1. Também, 11% (D8 e D18) não conseguiram apresentar modelos para o problema 3.

No Problema 1, a dupla D1 apresentou o modelo parcialmente equivocado, pois apresentaram uma equação a mais e depois indicaram que essa deveria ser desconsiderada. Escreveram "$x+y+z=2700$ (quantidade de móveis = Σ tempo semanal)". Provavelmente essa dupla se confundiu com a modelagem matemática de um problema de mistura, visto em aula, no qual existia uma equação que remetia à soma de todas as incógnitas consideradas.

Além disso, no G1, um dos estudantes da dupla D6 apresentou o modelo correto para o problema 1, e o outro estudante apresentou um modelo diferente, equivocado. Isso ocorreu em razão de que houve dúvida na construção do modelo. Ao tentarem resolver o primeiro modelo gerado, com o auxílio do *MATLAB*, perceberam que o aplicativo gerava valores negativos para produção dos móveis, o que não poderia ser realizado na prática. Assim, os estudantes desconfiaram que poderiam ter cometido algum erro e solicitaram ajuda da professora. Ao serem questionados sobre os significados das incógnitas consideradas e das relações que existiam entre eles, conseguiram refazer o equacionamento matemático, o que os possibilitou obter o modelo matemático correto. Nesse caso, provavelmente um dos estudantes se esqueceu de trocar o modelo no trabalho escrito.

Algo semelhante ocorreu com a dupla G12, que apresentou, em seus registros, somente o modelo final correto. Mas, durante a aula, observou-se que, na primeira tentativa, também obtiveram o modelo errado, e, ao resolverem pelo *software,* perceberam que estava incorreto. Com a intervenção da professora, eles também conseguiram obter o modelo correto, na segunda tentativa de modelagem.

Nesse caso, destaca-se a importância da medição do professor no processo de ensino e de aprendizagem, pois essa possibilita e facilita o esclarecimento de dúvidas, propicia o diálogo construtivo, em sala de aula, estimula a reflexão e a troca de saberes, o que potencializa a construção dos conhecimentos científicos abordados.

Quanto à escolha do método de resolução dos sistemas lineares gerados, no G1, a preferência foi pelo uso do método de Gauss-Jordan, sendo que 50% das duplas fez uso dele para resolver o problema 1, 67% para resolver o problema 2 e 61% para resolver o problema 3.

A justificativa para essa preferência pode estar associada à facilidade de interpretação da solução final, referente ao sistema simplificado. Além disso, para os estudantes do G1, também pode estar associada à facilidade de realização do escalonamento completo da única matriz ampliada no *MATLAB,* por meio de uma função chamada rref(A).

O segundo método mais escolhido foi a Eliminação Gaussiana, sendo que 33% o usou na resolução do problema 1, 28% o escolheu para resolver o problema 2 e 6% para resolver o problema 3.

No caso da Eliminação Gaussiana, é preciso proceder ao escalonamento parcial da matriz ampliada, correspondente ao sistema original, para que depois se proceda a resolução do sistema simplificado, por retrosubstituição de variáveis. Cabe destacar que não existe uma função do *MATLAB* que faça o escalonamento parcial diretamente. Assim, é preciso inserir fórmulas adequadas para realizar o processo do escalonamento parcial passo a passo. Provavelmente, por esses motivos, esse método não tenha sido muito utilizado na resolução dos problemas do G1.

Já o método da Matriz Inversa foi utilizado por 17% das duplas (D2, D15 e D18) para resolver o problema 1. Nenhuma dupla o usou para resolver o problema 2 e 6% (D1) propuseram seu uso na resolução do problema 3.

Talvez a dificuldade de compreensão, aliada a dificuldade de execução no *MATLAB* fez com que o método da matriz inversa fosse o menos utilizado pelos estudantes do G1, em todos os problemas.

Observou-se uma dificuldade de compreensão, ou de expressão dessa compreensão, nos registros dos estudantes. Foram verificados alguns indícios que remetem a essa percepção, como, por exemplo, o apresentado pela dupla D2, que, apesar de indicar o uso do método da Matriz Inversa no Problema 1, não apresentou o cálculo, somente a fórmula algébrica. Outro exemplo foi o da dupla D18, que apresentou a fórmula errada do método da Matriz Inversa e também não indicou de que modo procederam para obter o vetor solução apresentado.

Ainda, no problema 1, a dupla D6, em seus registros, apesar de ter optado pelo método de Gauss-Jordan, afirmou que "*Não é possível fazer por matriz inversa pois não é quadrada*". Nesse caso, os estudantes se referiram ao fato de a matriz ampliada não ser quadrada, o que indica o equívoco conceitual. Esse mesmo fato ocorreu com as duplas D5 e D7, porém, na resolução do problema 2. Isso indica que, ao realizarem essa tarefa, os estudantes, dessas duplas não compreendiam como deveriam utilizar o método da Matriz Inversa.

Cabe destacar, no entanto, que os estudantes da dupla D10, ao apresentarem suas resoluções para o problema 3, souberam justificar corretamente, em linguagem natural, o motivo pelo qual não poderiam usar o método da Matriz Inversa. Verificaram que a inversa da matriz dos coeficientes das variáveis não existia e, como não poderiam utilizar o primeiro método escolhido, optaram por usar Gauss-Jordan na resolução do sistema linear. Verifica-se que os estudantes dessa dupla indicaram ter conhecimento sobre o uso adequado do método da Matriz Inversa e também souberam escolher outo método de resolução que possibilitasse obter a solução para o problema, caso existisse. Nota-se que a tarefa propiciou reflexões sobre características dos métodos, favorecendo a compreensão dos seus usos apropriados.

No G1, em relação ao uso dos recursos tecnológicos disponíveis para as resoluções dos três problemas, observou-se que 89% fizeram uso do *MATLAB* para resolver o problema 1; 61% fizeram uso do recurso para resolver o problema 2 e apenas 22% optaram por resolver o problema 3 com os recursos tecnológicos disponíveis.

Em relação ao problema 1, a observação dos estudantes no desenvolvimento da tarefa levou à compreensão de que, quando o *software* gerava uma solução única, eles conseguiam interpretá-la com mais facilidade. Isso justifica o maior percentual de uso do *MATLAB* na resolução do problema 1 e o maior percentual de repostas corretas (89%).

No problema 2, também se verificou que a maioria (61%) fizeram uso dos recursos tecnológicos disponíveis, inclusive quando optaram pelo método da Eliminação Gaussiana. Destaca-se que, no problema 2, aparecia o caso da existência de infinitas soluções. Assim, após o escalonamento parcial ou completo, aparecia uma linha nula na matriz equivalente. A observação dos estudantes durante a realização dessa problema possibilitou perceber que o resultado obtido por meio do *MATLAB* gerou insegurança nos estudantes no momento da interpretação dos resultados. Os resultados do Quadro 18 indicam que foi nesse problema que se verificou o menor percentual de respostas consideradas corretas

(44%), tendo apenas 22% sido consideradas parcialmente corretas. Além disso, também foi possível perceber que o fato de a matriz ampliada inicial, do problema 2, estar num formato aparentemente próximo da matriz escalonada, pode ter motivado a realização do processo manual, pelos estudantes, que também gerou erros de cálculos.

Já no problema 3, verificou-se que apenas 22% das duplas fizeram uso dos recursos tecnológicos disponíveis, o que representou o menor percentual verificado. Além disso, como 62% das duplas apresentaram resoluções para o problema 3, verifica-se que 40% optaram por não utilizar o *MATLAB.*

Destaca-se que a observação dos estudantes, durante a tarefa, mostrou que muitos tentaram resolver o sistema do problema 3 usando o método de Gauss-Jordan, diretamente pela função rref(A), mas sentiram dificuldades na interpretação do resultado obtido, não conseguindo chegar a uma conclusão final sobre qual seria a solução correspondente. Como se tratava de um sistema pequeno, que possuía apenas duas equações e duas incógnitas, a maioria das duplas optou por realizar e a apresentar a resolução do processo manualmente.

Desse modo, a maior dificuldade verificada no problema 3 referiu-se à intepretação do resultado, pois, nesse caso, o problema não admitia solução. Apesar de ele ser o mais simples, os resultados indicaram que ele teve o maior percentual de dificuldade de resolução, pois 38% das duplas não forneceram a solução para o problema.

No entanto, o problema 3, apesar de apresentar dificuldades de interpretação, não foi o que apresentou o menor percentual, pois foram verificadas 56% de respostas corretas. No G1, o problema que teve o menor percentual de respostas corretas foi o 2 (44%), que admitia infinitas soluções. Verificou-se que as duplas D2, D4 e D17 (17%) apresentaram soluções equivocadas. Não fizeram a retrossubstituição no método da Eliminação Gaussiana e chegaram a uma resposta que não correspondia à matriz escalonada. Já as duplas D8, D11, D12 e D10 (22%) apresentaram soluções consideradas parcialmente corretas. As três primeiras não fizeram a retrossubstituição no método da Eliminação Gaussiana, mas conseguiram chegar a uma resposta equivalente para o problema. E a dupla D10, apesar de resolver corretamente pelo método de Gauss-Jordan, fornecendo as infinitas soluções, não finalizaram a resolução, apresentando todas as informações numa resposta única. Já as duplas D13, D16, D17 e D18 (22%) não apresentaram soluções para o problema 2. A dupla D13 não fez e as duplas D16 e D17 fizeram o escalonamento total da matriz ampliada, mas não souberam finalizar a resolução do sistema simplificado correspondente.

Além disso, em relação ao problema 2, também foram propostas duas alternativas, “b” e “c”, tendo sido realizado dois questionamentos relacionados à solução do problema de fluxo em rede, visando estimular a interpretação das infinitas soluções em situações práticas.

Verificou-se, na alternativa “b”, que 78% das respostas estavam corretas e 11%, parcialmente corretas (nesse caso, as duplas D15 e D18 somente calcularam o fluxo no arco 3 e não no arco 1), bem como que 11% não apresentaram solução (D13 e D16).

Em relação à alternativa “c”, foi possível constatar 28% de respostas consideradas corretas, 44% de respostas consideradas equivocadas e 17% consideradas parcialmente corretas. Também, verificou-se que 11% não apresentaram resoluções (D13 e D16).

Nas justificativas de “c” consideradas parcialmente corretas (17%), verifica-se que D1 apresentou incoerências na conclusão apresentada acerca de fluxos máximos e mínimos em cada arco da rede e, ainda, que as duplas D5 e D15 apresentaram respostas finais confusas, não registrando ideias claras acerca de fluxos máximos e mínimos em cada arco da rede.

Ainda na alternativa “c”, em relação aos 44% de respostas consideradas erradas, verificou-se que as duplas D2, D3, D4, D6, D8 e D12 não souberam interpretar os resultados calculados para indicar quais seriam os fluxos máximos e mínimos em cada arco da rede, na resposta final, para os limites estabelecidos para a variável livre. Além disso, verificou-se que D9 não apresentou os cálculos e, ainda, D17 não apresentou cálculos que justificassem suas respostas.

Quanto às justificativas fornecidas para os cálculos realizados e as conclusões obtidas, verificou-se que:

- No problema 1, 89% dos estudantes apresentaram justificativas, tendo 78% sido consideradas adequadas e 6%, inadequadas.
- No problema 2, 72% apresentaram justificativas, tendo 66% sido consideradas adequadas e 6%, inadequadas.
- No problema 3, 61% forneceram justificativas, porém, somente 28% foram consideradas adequadas e 33%, inadequadas.

Os resultados indicam que os estudantes sentem mais dificuldades para justificarem a inexistência da solução.

Dentre os 28% de justificativas consideradas corretas, como exemplo, destaca-se o registro da dupla D14, que explicou de modo adequado e preciso como entendia a impossibilidade da existência de um conjunto solução, apresentando: "$\begin{cases} x+y=0 \\ 0=1 \rightarrow \text{inverdade matemática} \end{cases}$" e declarando: "*Não existem valores para as variáveis que satisfaçam todas as equações do sistema simultaneamente. Desse modo, o sistema não possui solução".*

Dentre os 33% de justificativas apresentadas de modo equivocado, destacam-se alguns exemplos, registrados a seguir.

Algumas duplas não compreendem o significado da inexistência de solução de um sistema linear e não conseguem argumentar cientificamente, de modo coerente. Como exemplos, a dupla D4 afirmou: "*Solução Impossível, não tem uma solução possível, pois com apenas essas informações não se tem certeza do número exato de carros como de motos já que o valor do estacionamento é igual para ambos os veículos".*

Os estudantes da dupla D13, após o escalonamento da matriz ampliada, concluíram que "*0=1 $\Rightarrow$ inverdade. R: Sistema Incompatível, com a inverdade 0=1. Não existem valores possíveis de satisfazerem as duas equações*". Nesse caso, constata-se um erro frequente que se percebe em resoluções de sistemas lineares, quando ocorre a inexistência de um conjunto solução. Ao invés de se referirem ao tipo de solução, os estudantes apresentam a classificação do sistema, o que não foi solicitado. Além disso, não deixam claro que não existe um conjunto solução, pois afirmam não existir valores possíveis, mas não especificam que valores são esses.

Verificou-se que, na resolução do problema 3, que não possuía solução, houve muita dificuldade de compreensão dos processos realizados e dos seus significados. Notou-se também a dificuldade de aceitação, por parte dos estudantes, sobre o fato de que podem existir problemas reais sem solução.

Ao final da tarefa, alguns estudantes (A12, A18, A29, A33, A36), após concluírem que o problema 3 não tinha solução, perguntaram como isso seria possível, pois se tratava de um problema que poderia ser real, envolvendo um número total de veículos (carros e motos) e um valor total em dinheiro arrecadado. A professora questionou se não haveria a possibilidade de os dados informados estarem errados. Após refletirem, compreenderam e concordaram que isso seria possível na realidade.

Essa dificuldade é um obstáculo epistemológico, criado pelo próprio sistema de ensino escolarizado, onde, geralmente, apresentam-se situações problema para as quais sempre existem soluções.

Já no G2, conforme resultados do Quadro 19, verificou-se que os estudantes, assim como no G1, também se preocuparam em descrever as incógnitas ou variáveis no problema 1 (43%) e no problema 3 (57%), o que não fizeram no problema 2. Provavelmente, isso se deu por já se sentirem familiarizados com a modelagem do segundo problema, com a qual já haviam trabalhado anteriormente.

Em relação ao uso de matrizes, os resultados indicam que fizeram uso apenas na organização de dados do Problema 1 (93%). Em relação à obtenção do modelo matemático, notou-se que 100% das duplas os forneceram corretamente, tanto para o problema 1 quanto para o problema 2. Já no problema 3, 93% forneceram o modelo correto.

Quadro 19 - Resultados de respostas da Tarefa 12 (G2 – 14 duplas/individual)

Critérios		Problema 1	Problema 2	Problema 3
Descreveu incógnitas ou variáveis	Sim	43%	0%	57%
	Não	57%	100%	43%
Usou Matrizes	Sim	93%	0%	0%
	Não	7%	100%	100%
Modelo matemático	Sim	100%	100%	93%
	Não	0%	0%	7%
	Parcial	0%	0%	0%
Método de resolução	Gauss-Jordan	64%	86%	86%
	Eliminação Gaussiana	29%	7%	7%
	Matriz Inversa	7%	0%	0%
	Não fez	0%	7%	7%
Solução(ões) reais	Correta	86%	71%	64%
	Equivocada	7%	7%	29%
	Parcialmente correta	0%	14%	0%
	Não forneceu	7%	7%	7%
Justificativa	Sim	64%	86%	93%
	Não	36%	14%	7%
	Adequada	64%	79%	29%
	Inadequada	0%	7%	64%
Alternativa b	Correta	-	86%	-
	Equivocada	-	7%	-
	Parcialmente correta	-	0%	-
	Não fez	-	7%	-
Alternativa c	Correta	-	64%	-
	Equivocada	-	29%	-
	Parcialmente correta	-	0%	-
	Não fez	-	7%	-

Fonte: Autora

Quanto à escolha dos métodos de resolução, verifica-se que também houve a preferência pelo método de Gauss-Jordan, usado por 64% das duplas no problema1, por 86% no problema 2 e por 86% no problema 3. O método da Eliminação Gaussiana também foi utilizado pelos estudantes, sendo que 29% das duplas o escolheram para resolver o problema 1, 7% para o problema 2 e 7% o usaram no problema 3. O método da Matriz Inversa foi utilizado somente na resolução do problema 1 por 7% das duplas. Esses resultados também permitiram concluir que os estudantes sentiram mais facilidade no uso do método de Gauss-Jordan. Além disso, verifica-se que apenas uma dupla (D14) não conseguiu resolver os problemas 2 e 3.

Em relação aos métodos de resolução, também se notou que muitas duplas apenas usaram o método diretamente e não se preocuparam em identificá-lo. Por exemplo, no problema 1, isso ocorreu com as duplas D1, D5, D7, D10, D14; no problema 2, com D1, D4, D6; e, no problema 3, com D11. Além disso, a dupla D7, ao final do trabalho, afirmou: "*Todas as equações por Gauss-Jordan*", o que indica dificuldade na compreensão do método ou de expressão em linguagem natural. E ainda, a dupla D10 também indicou, ao final do trabalho, que "*Todas questões foram feitas por Escalonamento Completo*", ou seja, não se referiu corretamente ao nome do método de Gauss-Jordan, o que indica a falta de cuidado na expressão dos procedimentos adotados em linguagem natural.

Também cabe destacar que, na resolução do problema 3, a dupla D2 indicou que tentaram usar inicialmente o método da Matriz Inversa, mas que, ao realizarem o cálculo do determinante (apresentado no registro), perceberam que o método não poderia ser usado, pois não existia a inversa da matriz dos coeficientes. Então, após essa tentativa, decidiram usar o método de Gauss-Jordan. Ainda, em relação à resolução do problema 3, verificou-se que a dupla D3 optou por resolvê-lo primeiramente pelo método da Eliminação de Variáveis, e, para comprovar, usaram o método da Eliminação Gaussiana.

Em relação às soluções que foram apresentadas, verificou-se que:

- No problema 1, 86% das duplas apresentaram a solução corretamente, 7% apresentaram a resposta equivocada, pois erraram o escalonamento realizado no método de Gauss-Jordan (dupla D6), e 7% não conseguiram fornecer a solução, pois não conseguiram realizar o escalonamento corretamente, o que os impediu de prosseguir com a resolução (D14).

- No problema 2, 71% forneceram a resposta corretamente, 7% forneceram a resposta equivocada, 14% forneceram a resposta parcialmente correta e 7% não apresentaram resolução (dupla D14). A resposta considerada equivocada foi identificada nos registros da dupla D5, pois os estudantes forneceram apenas as infinitas soluções matemáticas e não consideraram que as variáveis representavam fluxos de água em canos de uma rede hidráulica, que necessariamente deveriam ser positivos ou nulos. Além disso, em relação aos 14% de respostas consideradas parcialmente corretas, verificou-se que: (i) os estudantes da dupla D13, apesar de não terem finalizado o método da Eliminação Gaussiana (não fizeram a retrosubstituição de variáveis), mesmo assim, conseguiram chegar numa solução correta, alternativa; e (ii) a dupla D7, apesar de obter a solução geral e os limites corretos para a variável livre, não apresentou a solução final.
- No problema 3, 64% das soluções foram consideradas corretas, 29% equivocadas e 7% não apresentaram resolução.

Quanto às justificativas apresentadas, verifica-se que, para o problema 1, 64% das duplas apresentaram justificativas adequadas e 36% não o fizeram.

No problema 2, 86% justificaram suas respostas, sendo que 79% o fizeram de modo adequado e 7%, não (D7). Nesse caso, a dupla D7 não concluiu sua resposta, reunindo a resolução matemática, irrestrita, às possíveis soluções reais, que restringiam as infinitas soluções e a dupla. Além disso, nesse problema, 14% não apresentaram justificativas (D5 e D14), pois a dupla D5 forneceu apenas a solução do sistema e não considerou que as variáveis precisavam ser todas positivas ou nulas e, ainda, D14 não apresentou a resolução do problema.

Em relação ao problema 3, verificou-se que 93% apresentaram justificativa e apenas 7% não o fizeram (dupla D14 não apresentou a resolução do problema). Nesse caso, nota-se que apenas 29% das justificativas apresentadas foram consideradas adequadas e 64%, inadequadas. Os resultados indicam que esse foi o problema em que os estudantes do grupo G2 tiveram maior dificuldade na identificação do tipo de solução existente, que, nesse caso, é relacionada à inexistência da solução e à elaboração de justificativas adequadas.

A seguir são apresentadas as justificativas consideradas inadequadas:

> Não existe solução, pois nenhum número satisfaz as variáveis x e y (D1, 2016).

> Conclui-se que o sistema é incompatível, pois, na segunda equação, tem-se uma inverdade (0 =-310), outro motivo para notar isso é multiplicar a taxa por veículo com a quantidade total de veículos (5,5x120 = 660), sendo que o problema nos diz que o total arrecadado foi de 350 (D4, 2016).
> O sistema é incompatível, porque na 2ª equação o 0 é diferente de -310. O problema é uma inverdade porque cada veículo é 5,50R$, então 120 veículos multiplicados por 5,50R$ = 660,00R$, e o justo no dia o caixa registrou R$350,00 (D5, 2016).
> Não existe. Pois não há valores que satisfaçam x e y. Classificação: Sistema Incompatível, pois não existe solução (D6, 2016).
> O sistema é incompatível, pois na 2ª equação o 0 $\neq$ -310. Ainda são 120 veículos então 120 x 5,50 = 660 e não -310. Assim temos uma inverdade (D7, 2016).
> Não é possível determinar a quantidade de cada tipo específico de veículo. Sabe-se que a soma é 120. Mesmo que o sistema apresentasse solução, nãos seria possível identificar as quantidades separadamente pois o valor da tarifa é único (D8, 2016).
> Para justificar disseram: “O sistema é incompatível, pois na 2ª equação o 0 $\neq$ -310. Além disso, lendo o problema, o total de veículos são 120 (não especificando). Como cada tarifa, independente de cada veículo é de R$ 5,50, logo 120 veículos x R$ 5,50 = R$ 660,00. Logo é uma inverdade matemática o problema do caixa registrar: R$350,00. 120x5,50 $\neq$ 350 (D10, 2016).
> O sistema não tem solução pois é incompatível, pois na 2ª equação 0 $\neq$ -310, uma inverdade matemática (D11, 2016).
> O sistema resulta em uma inverdade matemática, logo não existe solução para o problema $\rightarrow$ pode ter ocorrido uma fraude na contagem dos veículos ou do dinheiro (D12, 2016).

Verifica-se que as justificativas apresentadas pelas duplas citadas indicam que esses estudantes (64% das duplas do G2) não compreendem o motivo para um sistema linear não ter solução. Além disso, a justificativa da dupla D8 indica que os estudantes não percebem a diferença entre o conceito de infinitas soluções e da inexistência de solução. Também se verifica que algumas justificativas mostram a compreensão dos estudantes acerca do tipo de sistema abordado e da inconsistência que se verifica no problema, mas não justificam o motivo de o sistema linear gerado não possuir solução numérica.

No entanto, apareceram, nos registros, diferentes abordagens de resolução que os ajudou a comprovar as conclusões obtidas. Por exemplo, D2, para comprovar a inexistência da solução, construiu os gráficos das retas correspondentes às equações do sistema, destacando a inexistência da solução (Figura 33). Nesse registro, além da representação simbólica do problema, os estudantes fizeram, espontaneamente, uso do registro gráfico para comprovar seus resultados, bem como foram capaz de se expressar por meio da linguagem natural.

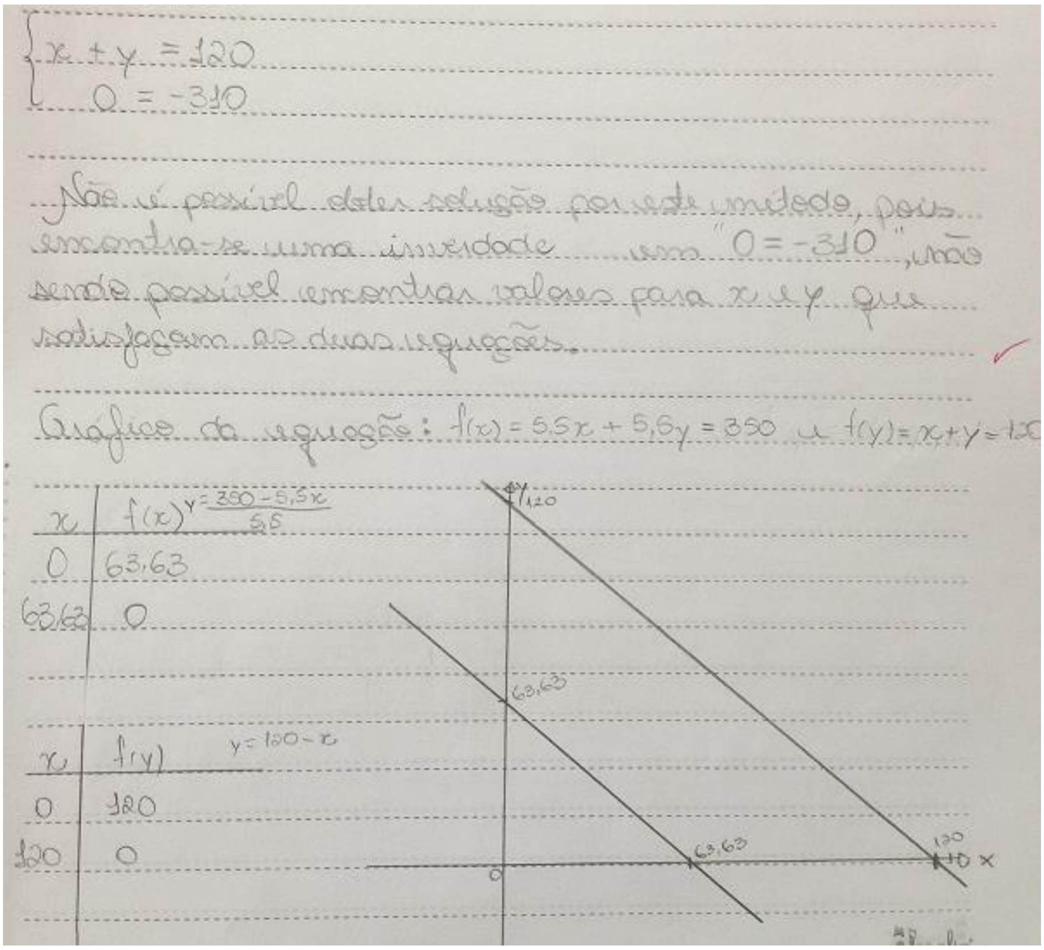
Em relação à alternativa “b” do problema 2, os resultados apresentados no Quadro 18 indicam que 86% das duplas do G2 forneceram respostas corretas, 7%

foram consideradas equivocadas (D13 não apresentou cálculos, apenas a resposta) e 7% não fizeram (dupla 14).

Já na alternativa “c” do problema 2, verificou-se que 64% apresentaram respostas consideradas corretas, 29% forneceram respostas equivocadas e 7% não fizeram (D14).

Nas respostas consideradas equivocadas, verificou-se que as duplas D4, D5 e D10 apresentaram cálculos dos fluxos em todos os arcos, para os valores máximos e mínimos da variável independente, mas não souberam concluir acerca dos limites máximos e mínimos possíveis nos arcos da rede. Além disso, a dupla D13 apresentou alguns cálculos, mas não suficientes para que pudessem obter os limites máximos e mínimos possíveis nos arcos da rede, e, assim, não concluiu corretamente a atividade.

Figura 33 - Registro dupla D2 na Tarefa 12



Fonte: Dupla D12 – G2 (2016)

Destaca-se que, assim como ocorreu no G1, no G2 também foi necessária a intermediação da professora para auxiliar no esclarecimento de dúvidas, o que facilitou o processo modelagem matemática.

Também foram percebidas dificuldades nos dois grupos, sendo que os estudantes do G1 apresentaram mais dificuldades na resolução do problema 2, com infinitas soluções, e os estudantes do G2, na resolução do problema 3, sem solução. Nesse sentido, verificou-se, nos dois grupos, que durante o desenvolvimento da tarefa 12 foi fundamental a mediação do professor, no processo de ensino e de aprendizagem, especialmente no esclarecimento de dúvidas e no estímulo da compreensão por meio de questionamentos.

Também cabe destacar que foi possível perceber, no G1, que além da dificuldade na interpretação dos problemas, alguns também sentiram dificuldades no uso dos recursos tecnológicos.

Nos dois grupos, notou-se a preferência pelo uso do método de Gauss-Jordan, bem como verificou-se o pouco uso do método da Matriz Inversa, além de dificuldades de compreensão, quando utilizado. Assim, a análise dos resultados da tarefa 12 permitiu concluir que a resolução dos problemas propiciou o uso dos diferentes métodos abordados em aula. Isso ocorreu especialmente no G1, pois o uso do *MATLAB*, por facilitar a resolução dos cálculos, favoreceu uma maior exploração dos diferentes métodos.

Desse modo, pela observação realizada em sala de aula e pela análise dos registros escritos, elaborados pelos estudantes, verificou-se que, para a maioria dos estudantes, a tarefa 12 propiciou a aprendizagem significativa dos métodos de resolução e a compreensão matemática dos conceitos envolvidos.

Verificou-se que, para realizarem o processo de modelagem matemática, visando responder adequadamente às perguntas, propostas em linguagem natural, os estudantes precisaram resgatar seus conhecimentos prévios, acerca dos conceitos envolvidos na resolução de sistemas lineares, bem como dos métodos de resolução utilizados, para que, por meio de registros simbólicos e de suas transformações, pudessem obter uma solução simbólica para o problema, a qual também exigiu conhecimentos prévios, que possibilitaram as interpretações adequadas apresentadas.

Desse modo, verifica-se que a tarefa 12 propiciou desafios que envolveram processos de resolução matemáticos, que exigiam conhecimentos teóricos específicos, que os possibilitou ampliar conceitos já existentes, agregado a novos conhecimentos práticos, produzidos por meio da modelagem matemática, nos quais os estudantes puderam perceber o uso de diversas técnicas abstratas na resolução de problemas.

6.2.11 Tarefa 13

Nessa tarefa, o objetivo foi propiciar uma atividade reflexiva para os dois grupos sobre o uso prático da resolução de sistemas lineares no cálculo do equilíbrio de esforços em estruturas. Também visou possibilitar aos estudantes a percepção de relações entre conceitos matemáticos abordados nas disciplinas de Álgebra Linear e Estática, as quais são oferecidas aos estudantes no segundo semestre do curso de Engenharia Civil.

A tarefa foi realizada em duplas, sendo que o G1 a desenvolveu no laboratório computacional e o G2 em sala de aula tradicional.

Inicialmente, foi apresentado o seguinte desafio aos estudantes dos dois grupos: "*Sendo conhecidos os ângulos* α *e* β *e o peso* p *do objeto suspenso pelas cordas presas nos pontos* A *e* B, *é possível escrever um sistema de equações lineares que possibilite determinar os valores das forças,* $\overrightarrow{f_{ca}}$ *(força na corda esquerda) e* $\overrightarrow{f_{cb}}$ *(força na corda direita) em função da força peso* $\vec{p}$ *exercida pelo objeto em suspensão e dos ângulos* α *e* β *dados?"*

Desse modo, foi proposto aos estudantes que, inicialmente, representassem o equilíbrio de esforços para o diagrama de corpo livre fornecido, por meio de um sistema linear. Para tanto, eles tiveram que resgatar conhecimentos prévios sobre trigonometria, para decomposição vetorial das forças atuantes nas cordas, e também sobre leis de física, de modo a garantir o equilíbrio de esforços atuantes sobre o corpo suspenso.

Destaca-se que esses conhecimentos, além de serem trabalhados no ensino médio e na disciplina de Física I, na graduação, também são trabalhados na disciplina de Estática, que ocorre paralelamente à disciplina de Álgebra Linear, no segundo semestre do curso de Engenharia Civil.

Concorda-se com Nóvoa (2009) quando afirma que o tempo presente é de muitas perplexidades e de incertezas para a educação e que existe a necessidade premente de mudanças ambientes escolares, onde existe muita pobreza nas práticas desenvolvidas nos ambientes escolares. O autor destaca que as práticas devem estar centradas no estudante e em problemas concretos, visando relacionar a teoria estudada e a prática, além da reflexão e da construção de conhecimento por meio do desenvolvimento de processos investigativos colaborativos.

A tarefa propiciou um ambiente de aprendizagem favorável à aprendizagem significativa, pois possibilitou relacionar conhecimentos prévios aos conhecimentos algébricos trabalhados, especialmente na compreensão da aplicação da resolução de sistemas lineares em problemas reais, o que permitiu o aprimoramento do conhecimento abstrato abordado na disciplina de Álgebra Linear.

Salienta-se que a expectativa inicial dessa tarefa foi que os estudantes conseguissem obter o modelo matemático, que se tratava de um sistema linear, cujas variáveis eram as forças atuantes nas cordas do esquema, o qual representaria o equilíbrio do corpo suspenso considerado. Posterirormente, a expectativa era de que os estudantes o resolvessem algebricamente, por meio do método da substituição e que tentassem expressar, de modo genérico, os valores das forças $\overrightarrow{f_{ca}}$ e $\overrightarrow{f_{cb}}$ em função do peso $\vec{p}$ e dos ângulos α e β fornecidos..

O objetivo desse exercício algébrico, além de estimular o raciocínio lógico dedutivo (por meio da resolução algébrica do sistema linear), também foi possibilitar aos estudantes dos dois grupos a percepção de que poderiam usar os próprios conhecimentos algébricos para obter as expressões algébricas gerais para o cálculo das forças que atuam na estrutura dada, para ângulos e pesos variados.

Após a obtenção das expressões gerais das forças para que pudessem compreender o uso prático do processo abstrato realizado, foi proposto aos dois grupos que usassem fórmulas algébricas obtidas em situações práticas.

No G1, visando propiciar a exploração e o uso dos recursos tecnológicos nessa aplicação, foi proposto aos estudantes que construíssem, no GeoGebra, um esquema dinâmico de equilíbrio, o qual possibilitaria o cálculo automático de forças atuantes nas cordas, para diferentes pesos e ângulos.

Para isso, por meio de um roteiro fornecido pela professora (Anexo 24), deveriam gerar a construção virtual do esquema, de modo que simulasse o equilíbrio de forças, de acordo com o desenho do diagrama considerado inicialmente.

Destaca-se que, nessa construção, deveriam inserir as fórmulas genéricas das forças (calculadas por eles) que possibilitariam obter os valores das forças atuantes nos elementos da estrutura, para diferentes pesos e para ângulos variados, automaticamente. Um detalhamento maior dessa proposta, com uso do GeoGebra, pode ser encontrado em Kripka et al. (2017).

Assim, no G1, o objetivo dessa segunda etapa da tarefa foi possibilitar que percebessem a importância da resolução algébrica na construção do esquema virtual, a qual permitiu fazer simulações dinâmicas para cálculos dos esforços no GeoGebra, devidos a pesos e ângulos variados.

No G2, como a tarefa foi desenvolvida em sala de aula tradicional, para que percebessem o uso prático das fórmulas obtidas, foi solicitado que as usassem para obterem diretamente os valores das duas forças atuantes no esquema considerado, quando fossem conhecidos valores específicos para o peso e os ângulos, conforme indicado a seguir: "*2) Utilizando as formulas obtidas calcule as forças e* $\overrightarrow{f_{cb}}$ *quando:*

a) $\vec{p} = 50N$ *,* $\alpha = 28{,}28^0$ *,* $\beta = 51{,}75^0$ *b)* $\vec{p} = 100N$ *,* $\alpha = 28{,}28^0$ *,* $\beta = 51{,}75^0$ *"*

Conforme consta no diário de bordo, no início da tarefa, nos dois grupos, os estudantes sentiram dificuldades para compreender o que estava sendo solicitado. Essa dificuldade ocorreu em razão de que os estudantes estão acostumados a trabalhar apenas com valores numéricos e não algébricos, em resoluções de problemas semelhantes.

Como a maioria disse não saber como proceder, foi necessária a intervenção da professora, para ajudá-los a compreender o objetivo da primeira parte da tarefa. Inicialmente, a docente chamou a atenção para o fato de que precisariam utilizar seus conhecimentos, das áreas da Engenharia e da Física, pra que pudessem proceder o equilíbrio de forças no esquema, bem como precisariam usar seus conhecimentos prévios de Geometria para realizar a decomposição vetorial, uma vez que deveriam deixar os valores desconhecidos indicados pelas letras que os representavam. Ao compreenderem tais fatos, passaram para o processo de obtenção do modelo matemático.

Também foi sugerido, nos dois grupos, que resolvessem o sistema linear gerado pelo método da substituição, isolando primeiro a força $\overrightarrow{f_{ca}}$, de modo que todos chegassem às mesmas expressões, indicadas no roteiro. Então, começaram a resolver os problemas.

Pela observação do G1, foi possível perceber que a maioria dos estudantes não teve dificuldades para fazer a decomposição vetorial, tampouco para obter as equações do equilíbrio. Mas, ao serem questionados sobre o sistema linear que representava o equilíbrio de forças, inicialmente, não souberam identificá-lo. Por exemplo, a dupla dos estudantes A8 e A19 sabia identificar que as variáveis eram as forças, mas não percebeu inicialmente que teria que resolver as duas equações lineares juntas para obter a resposta para o problema. Isso ocorreu com várias duplas e a maioria não sabia como prosseguir. Foi necessária a intermediação da professora para que pudessem pudessem esclarecer suas dúvidas e continuar a resolução algébrica do problema proposto.

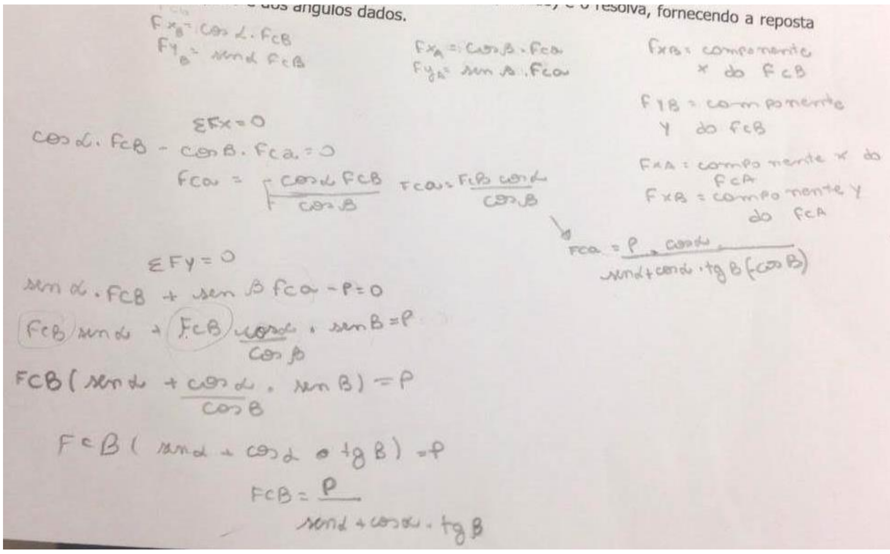
Além disso, no G1, no decorrer da tarefa 13, verificou-se que os estudantes apresentaram várias dificuldades na manipulação algébrica.

Por exemplo, o estudante A18, do G1, estava, num primeiro momento, encontrando dificuldades algébricas para isolar a força $\overrightarrow{f_{ca}}$, mas com a intervenção da professora, percebeu seu erro e conseguiu finalizar o cálculo inicial. Depois disso, ele prosseguiu a resolução, substituindo esse valor na outra equação do sistema, tendo em vista calcular o valor de $\overrightarrow{f_{cb}}$, em função do peso e do ângulos fornecidos. Porém, para finalizar o processo, ao substituir novamente o valor de $\overrightarrow{f_{cb}}$ na expressão de $\overrightarrow{f_{ca}}$, obtida inicialmente (para também expressá-lo em função do peso e do ângulo dados) ele apresentou dificuldades, conforme ilustram as Figuras 34 e 35.

Na Figura 34, é possível observar que, ao substituir o valor algébrico de $\overrightarrow{f_{cb}}$ em $\overrightarrow{f_{ca}}$, o estudante fez com uso inadequado do parêntese no denominador. Na Figura 35, se nota que o estudante também errou ao desenvolver o denominador, ao realizar o desenvolvimento algébrico da substituição de $\overrightarrow{f_{cb}}$ em $\overrightarrow{f_{ca}}$.

A dupla constituída pelos estudantes A3 e A4 foi a única do grupo G1 que apresentou dificuldades para encontrar o equilíbrio de forças, pois considerou apenas que o somatório das forças horizontais deveria ser nulo. Para obterem a segunda equação, afirmou que as somas dos ângulos era 90^0, ou seja, $\alpha + \beta = 90^0$.

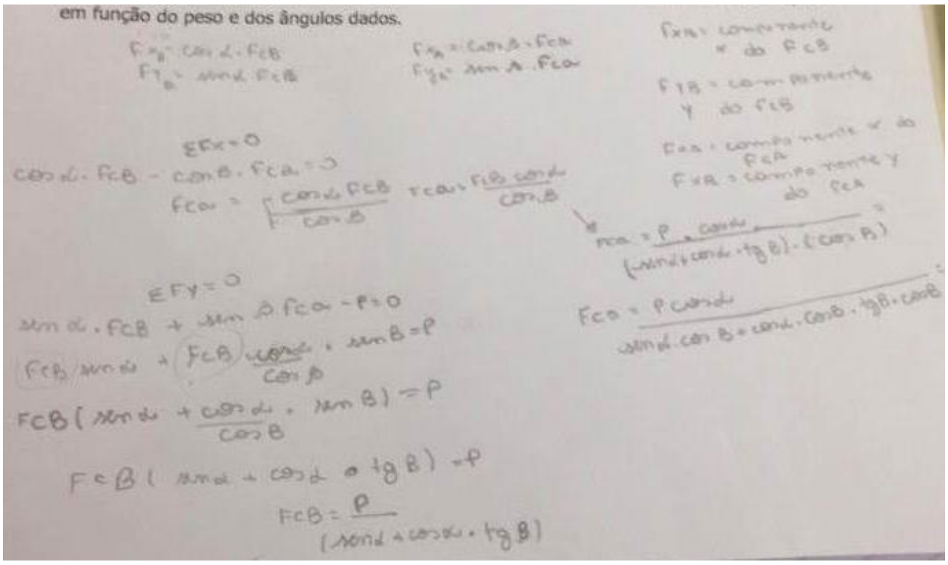
Figura 34 - Primeiro erro algébrico de A18 na substituição de variáveis



Fonte: A18 – G1 (2016)

Ao perceber isso, a professora interveio e informou que essa afirmação nem sempre era verdadeira no problema; e os estudantes pareceram surpresos. Então, a professora sugeriu que, para obter a segunda equação, considerassem que o somatório das componentes das forças na direção do eixo y também deveria ser nulo e a dupla retomou seus cálculos algébricos novamente e não solicitou mais ajuda da professora. Notou-se, pelos seus registos escritos, que essa dupla não conseguiu resolver adequadamente o equacionamento. Esse é um fato curioso que ocorre durante as aulas: os estudantes que geralmente sentem mais dificuldades são aqueles que menos solicitam a ajuda do professor.

Figura 35 -Segundo erro algébrico de A18 na resolução algébrica



Fonte: A18 – G1 (2016)

Em relação aos demais estudantes do G1, percebeu-se que, assim que eles compreenderam a proposta e foram esclarecendo suas dúvidas, conseguiram finalizar seus cálculos.

No G2, após apresentar o problema, a professora perguntou se haviam entendido e se teriam alguma dúvida. Os estudantes responderam negativamente e, em seguida, começaram a trabalhar. A professora ouviu o estudante E24 afirmar ter percebido que o problema envolvia conhecimentos da disciplina de Estática. Assim como ele, outros alunos também comentaram sobre isso, indicando que haviam percebido que precisariam usar outros conhecimentos, que não somente os abordados na disciplina de Álgebra Linear, para conseguir obter a solução do desafio proposto.

Desse modo, muitos estudantes do G2 também já foram fazendo o equilíbrio de esforços diretamente, aplicando fórmulas que já conheciam, mas também sentiram dificuldades em perceber o sistema. Por exemplo, os estudantes E2 e E23, ao apresentarem à professora suas equações do equilíbrio nas direções horizontais e verticais, ao invés de montarem o sistema inicial apenas, já foram resolvendo as equações, isolando $\overrightarrow{f_{ca}}$ em uma delas, em função de $\overrightarrow{f_{cb}}$, e, na outra, isolaram $\overrightarrow{f_{cb}}$ em função de $\overrightarrow{f_{ca}}$. Como não sabiam como continuar, solicitaram ajuda da professora. Então, ao serem questionados se haviam respondido à pergunta inicial, o estudante E23 respondeu que sim, mas quando a professora perguntou: "*Onde está o sistema?*", nenhum componente da dupla soube, de imediato, identificar o sistema. Foi preciso retomar o processo de equacionamento para esclarecer quem seriam as variáveis do problema e de que modo estavam relacionadas pelas equações, para que os estudantes conseguissem perceber que essas equações iniciais obtidas precisariam ser resolvidas conjuntamente, para que pudessem satisfazer as condições iniciais de equilíbrio. Apenas após a intervenção conseguiram identificar o sistema que representava o equilíbrio de forças. Além disso, a professora, ao perceber que essa dupla também sentiu dificuldades na resolução algébrica, sugeriu que deveriam escolher uma equação e isolar uma variável apenas, para depois fazer a substituição dela na outra equação. Após conseguirem identificar o sistema e esclarecerem suas dúvidas, deram prosseguimento aos seus cálculos algébricos.

Outra dupla que também sentiu dificuldades iniciais de compreensão e de entendimento entre eles foi a composta pelos estudantes E1 e E6. Inicialmente, E1 escreveu as equações do balanceamento e aplicou o método de Gauss-Jordan para resolvê-lo. Mas, ao encontrar expressões mais complicadas como respostas, pensou que seus cálculos poderiam estar errados. Já o estudante E6, como não compreendeu o que o colega estava fazendo, solicitou a intervenção da professora para conseguir realizar o equilíbrio de forças. A docente os ajudou a relembrar os conceitos necessários sobre as condições estabelecidas para o equilíbrio e sobre o processo da decomposição vetorial. Após ouvirem as explicações, compreenderam e conseguiram encontrar o sistema de modo adequado e deram prosseguimento às resoluções.

Dificuldades como as apresentadas, relacionadas à aprendizagem de Álgebra, são muito comuns e também foram identificadas em várias pesquisas envolvendo diversos níveis de ensino. Ao trabalhar com estudantes da 7ª série do ensino fundamental, Gil (2008) concluiu que as principais dificuldades de aprendizagem surgem durante a modelagem de problemas algébricos, estando relacionadas à passagem da linguagem natural para a simbólica e no tratamento dos dados, e à relação entre a álgebra e a aritmética, que não são facilmente compreendidas pelos estudantes. No contexto do ensino superior, Coimbra (2008), ao investigar dificuldades relacionadas ao ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, destacou que as concepções matemáticas relativas aos conceitos básicos da Álgebra, construídas ao longo da educação básica, são obstáculos ontogenéticos que geram conflitos nos estudantes quando esses se deparam com novos saberes que devem ser construídos.

Além disso, Ponte (2005, p. 37) indica que o modo como tem sido ensinada faz com que a Álgebra seja percebida apenas como um conjunto:

> [...] de regras de transformação de expressões (monômios, polinômios, frações algébricas, expressões com radicais) e processos de resolução de equações e sistemas de equações [...]. Trata-se, claramente, de uma visão redutora da Álgebra, que desvaloriza muitos aspectos importantes desta área da Matemática.

Desse modo, o autor reconhece que o simbolismo algébrico é parte essencial da Matemática, mas que é necessário estimular a construção desse conhecimento sem perder de vista seus significados, para não recair apenas no formalismo sem sentido.

No G1, assim que finalizaram a primeira parte, foi solicitado que abrissem, nos computadores, um arquivo digital para acessar o roteiro para a construção da representação geométrica do problema, utilizando o GeoGebra.

O estudante A19 logo se manifestou dizendo “*Não sei fazer!*”. Nesse momento, também foi necessária a mediação da professora para orientá-los como deveriam proceder com o roteiro e com os comandos do GeoGebra. Assim, as duplas foram se ajudando e foram construindo individualmente os seus próprios esquemas virtuais.

No final das construções, verificou-se que muitos tiveram dificuldades em inserir as expressões algébricas das forças, pois haviam colocado letras maiúsculas para os vetores, e o GeoGebra não estava reconhecendo as novas variáveis. Assim, tiveram que renomear todos os elementos que não estavam de acordo com o aplicativo.

Quando o estudante A16 conseguiu finalizar a sua construção e percebeu que o aplicativo calculava automaticamente os valores das forças para quaisquer ângulos, afirmou: *“Que massa!”.*

Antes de finalizar a aula, a professora perguntou para os estudantes do G1 se haviam percebido que, por meio de seus conhecimentos de Álgebra Linear e de Física, eles haviam conseguido realizar o equilíbrio de forças e eles responderam afirmativamente. Também foi destacado pela professora que esse procedimento se aplicaria a qualquer estrutura semelhante. Além disso, foram questionados se haviam percebido que as expressões algébricas obtidas haviam possibilitado o cálculo automático das forças no GeoGebra, ao que também responderam afirmativamente.

No G2, na resolução da segunda etapa, verificou-se que também apareceram dificuldades. Por exemplo, o estudante E8 estava trabalhando com o estudante E3, depois de obterem o sistema, perguntaram à professora se os cálculos da alternativa “b” estavam corretos. Foi possível perceber que, ao invés de resolverem algebricamente o sistema para depois substituir os valores dados dos parâmetros fornecidos, eles os substituíram nas equações iniciais e estavam novamente resolvendo o sistema para aqueles valores. Nesse caso, foi preciso novamente a orientação da professora para que compreendessem o que estava sendo solicitado.

Outro fato que ocorreu foi que o estudante E18, ao resolver o sistema constituído pelas equações e forneceu como resposta: $\overrightarrow{f_{cb}} = \frac{P}{[cos(\alpha)tg(\beta) + sen(\alpha)]}$ e $\overrightarrow{f_{ca}} = \frac{\overrightarrow{f_{CB}}\, cos(\alpha)}{cos(\beta)}$, ou seja, expressou $\overrightarrow{f_{ca}}$ em função de $\overrightarrow{f_{cb}}$.

A professora orientou que ele que deveria expressar também $\overrightarrow{f_{ca}}$ somente em função do peso e dos ângulos dados, mas ele ficou bem relutante em relação a isso, dizendo que seria desnecessário. Foi esclarecido ao estudante que caso ele conseguisse expressar ambas forças somente em função dos parâmetros dados, os cálculos ficariam independentes, mas ele não aceitou a orientação. Nesse caso, como um dos objetivos era estimular o raciocínio algébrico, essa atitude negativa acabou atrapalhando o aproveitamento pleno desse estudante na tarefa. Nota-se, em sala de aula, que, às vezes, os estudantes sentem dificuldades em ouvir e em entender os propósitos das atividades e isso acaba atrapalhando muito o aproveitamento deles, como no exemplo citado.

No grupo G2, quando a aula já estava quase no final, foi possível perceber que a dupla dos estudantes E9 e E16 havia cometido o mesmo equívoco dos estudantes E2 e E23 e calcularam os valores da segunda alternativa, não pelas fórmulas, mas pelo sistema original. Infelizmente, devido ao tempo disponível, essa dupla não conseguiu finalizar a tarefa.

Nos dois grupos, percebeu-se que houve, para alguns estudantes, dificuldades com a limitação do tempo, pois eles não conseguiram concluir suas tarefas. No ensino presencial, destaca-se que a limitação do tempo da aula é identificada como um ponto negativo para aprendizagem, pois dificulta que as tarefas propostas sejam plenamente aproveitadas por todos os estudantes. Como o tempo de aprendizagem não é linear, isso acaba impedindo que estudantes que possuem mais dificuldades, possam repensar os problemas, discutirem ideias e rever os conceitos tratados.

De modo geral, os resultados da análise dos registros apresentados pelos estudantes dos dois grupos, para a tarefa 13, estão apresentados nos Quadros 20 e 21, respectivamente.

Quadro 20 - Resultados de respostas da Tarefa 13 (G1 – 34 participantes)

Critérios analisados nas tarefas desenvolvidas	Respostas			
	Sim	Incompleto	Errado	Não
Representou o equilíbrio graficamente	15%	29%	0%	56%
Representou o equilíbrio algebricamente	100%	0%	0%	0%
Identificou o sistema linear	76%	0%	0%	24%
Resolveu adequadamente o sistema	76%	18%	6%	0%
Obteve a solução genérica adequadamente	32%	62%	6%	0%
Construiu o esquema virtualmente	53%	41%	0%	6%

Fonte: Autora

Conforme os resultados apresentados no Quadro 20, verifica-se que, no G1, 15% fizeram o registro gráfico completo para representar o equilíbrio de esforços, 29% fizeram parcialmente e 56% optaram por não usar a representação gráfica. Além disso, 100% fizeram o equilíbrio de esforços por registros algébricos e 76% identificaram que conseguiram identificar o sistema linear gerado.

Ainda no G1, verificou-se que: 76% resolveram o sistema linear adequadamente; 18% apresentaram resoluções incompletas (os estudantes A9 e A19 erraram o cálculo algébrico de uma das forças; A15, A27 e A31 não concluíram o cálculo de uma das forças e A36 não calcularam uma das forças) e 6% (A3 e A4) errou, pois optou por resolver pelo método da comparação e errou a resolução algébrica.

Quadro 21 - Resultados de respostas da Tarefa 13 (G2 – 21 participantes)

Critérios analisados nas tarefas desenvolvidas	Respostas			
	Sim	Incompleto	Errado	Não
Representou o equilíbrio graficamente	10%	19%	0%	71%
Representou o equilíbrio algebricamente	85%	5%	10%	0%
Identificou o sistema linear	71%	0%	0%	29%
Resolveu adequadamente o sistema	48%	24%	10%	19%
Obteve a solução genérica adequadamente	33%	33%	10%	24%
Calcularam da forças pelas fórmulas obtidas	38%	10%	52%	0%

Fonte: Autora

Em relação à obtenção da expressão genérica das forças, verificou-se, no grupo G1, que 32% calcularam corretamente, 62% resolveram parcialmente (A1, A2, A7, A8, A13, A14, A15, A16, A17, A20, A22, A23, A24, A25, A26, A27 não continuaram a simplificação de uma das forças e A5, A21, A9, A18, A19 erraram o cálculo algébrico de uma das forças) e 6% (A3 e A4) erraram ambas.

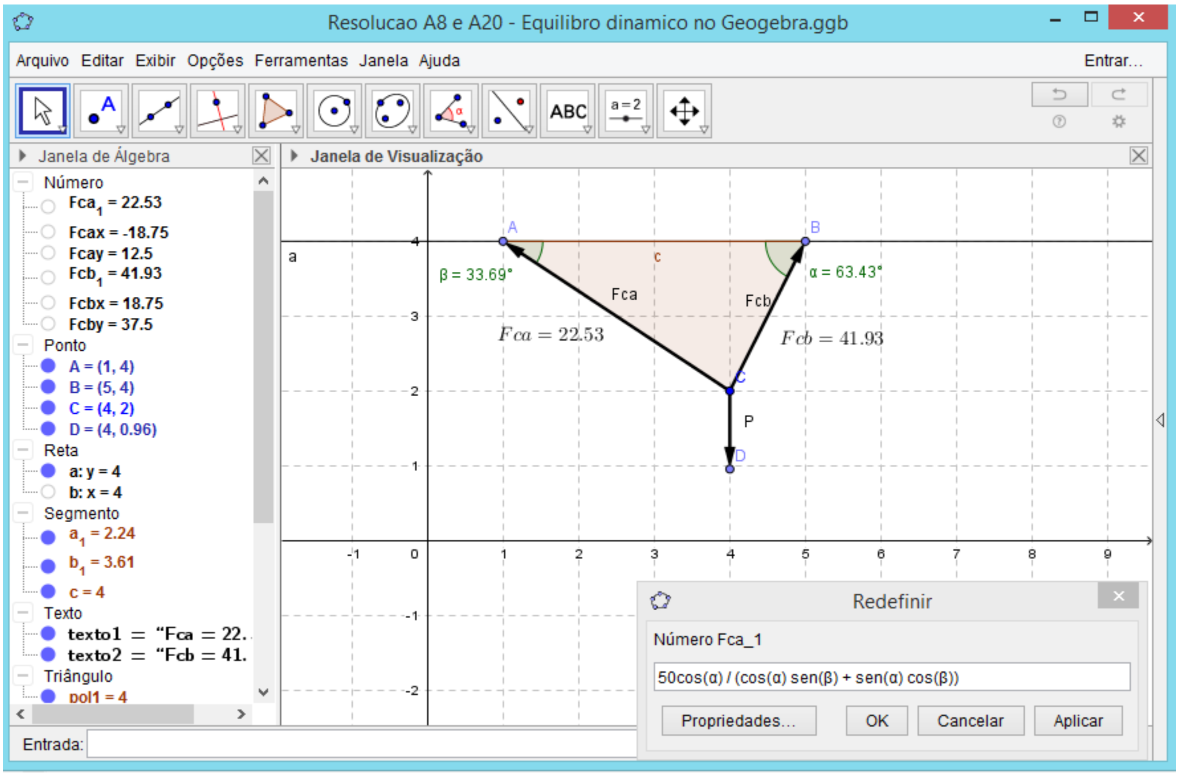
Também constatou-se, no G1, que 53% construiram o esquema virtual completo, 41% construiram o esquema virtual parcialmente e apenas 6% não o fizeram (A13 e A36). Um exemplo de construção realizada pelos estudantes A8 e A20 pode ser observado na Figura 36.

Conforme os resultados apresentados no Quadro 21, verifica-se que, no G2, 10% fizeram o registro gráfico completo para representar o equilíbrio de esforços, 19% fizeram parcialmente e 71% optaram por não usar a representação gráfica.

Além disso, 85% dos estudantes do G2 fizeram corretamente o equilíbrio de esforços por registros algébricos; 5% fizeram o equilíbrio de modo incompleto (E13 não igualou as equações a zero) e 10% (E9 e E15) erraram o equacionamento.

Também foi constatado, nos registros apresentados pelos estudantes do G2, que 71% identificaram ter percebido o sistema linear gerado.

Figura 36 - Esquema virtual, construído no GeoGebra por A8 e A20



Fonte: A18 e A20– G1 (2016)

Quanto à resolução algébrica do sistema linear, verificou-se que 48% dos estudantes do G2 resolveram o sistema linear adequadamente; 24% apresentaram resoluções incompletas (E13 somente isolou uma força, mas não continuou o processo, e os estudantes E4, E6, E7, E11 erraram o cálculo algébrico de uma das forças); 10% (E2 e E23) erraram a resolução algébrica e 19% não resolveram adequadamente (E19 e E24 não resolveram o sistema algebricamente e E9, E15 não puderam resolver adequadamente, pois erraram o equacionamento).

Em relação à obtenção da expressão genérica das forças, verificou-se, no grupo G2, que 33% calcularam corretamente; 33% resolveram parcialmente (os estudantes E4, E6, E7, E11 erraram o cálculo algébrico de uma das forças e E3, E8 e E18 não calcularam uma das forças); 10% (E2 e E23) erraram o cálculo algébrico; e 24% (E9, E13, E15, E19, E24) não calcularam a expressão algébrica de ambas.

Além disso, constatou-se, no G2, que 38% conseguiram calcular corretamente os valores das forças por meio das fórmulas, 10% conseguiram calcular parcialmente (E18 e E25 calcularam apenas uma das forças) e 52% calcularam errado os valores das forças.

Nessa tarefa, percebeu-se a importância da observação participante e do diário de bordo, pois, se tivessem sido considerados apenas os registros escritos, os dados constituídos não seriam suficientes para descrever o que ocorreu no processo de ensino e aprendizagem. Sem registro do diário de bordo, a análise dos resultados poderia ser superficial e não consideraria todas as dificuldades que os estudantes apresentaram no seu desenvolvimento.

Ao final da análise dessa tarefa, percebeu-se que muitos conseguiram finalizar os cálculos algébricos, pois houve a intervenção da professora, que esclareceu dúvidas e ajudou a encontrar caminhos possíveis para suas resoluções.

Também, destaca-se que, no processo de decomposição vetorial, se identificou que ocorreu a aprendizagem significativa, pois foi necessário representar simbolicamente o equilíbrio das forças horizontais e verticais na estrutura dada. Nesse caso, verificou-se, nos dois grupos, que os estudantes acionaram seus conhecimentos prévios ou conceitos “subsunçores” sobre trigonometria, bem como mobilizaram regras já conhecidas para a obtenção de componentes, que interagiram com as novas informações referentes ao equilíbrio de forças abordado e com os dados genéricos, apresentados no problema.

Destaca-se que, na teoria de Ausubel, esse processo é chamado de reconciliação integrativa, sendo que a interação entre conceitos possibilita aos estudantes explorar relações entre conceitos já existentes com novos conhecimentos, o que acaba por modificar ou ampliar os conceitos prévios. Assim, foi possível identificar que houve evolução cognitiva, pois, segundo Moreira (2012, p. 5), “[...] a estrutura cognitiva está constantemente se reestruturando durante a aprendizagem significativa. O processo é dinâmico; o conhecimento vai sendo construído”.

6.2.12 Tarefa 14

O objetivo dessa tarefa foi propiciar significação de conceitos sobre transformações lineares clássicas, do plano no plano por meio de construções algébricas e geométricas, tendo sido propiciadas análises reflexivas sobre os resultados obtidos.

Essa tarefa foi realizada nos dois grupos, sendo que o G1 a desenvolveu no laboratório computacional e o G2 em sala de aula tradicional.

No G1, foi propiciado o uso do GeoGebra e foram propostas análises de transformações de figuras planas que geravam construções geométricas mais complexas, pois elas poderiam ser geradas mais rapidamente, no ambiente do aplicativo. Para tanto, foi disponibilizado um roteiro (Anexo 26), de modo a orientar as tarefas. Foi solicitado aos estudantes que, conforme fossem construindo e observando as características das figuras geométricas construídas e transformadas, no GeoGebra, que fossem respondendo as perguntas, apresentadas no roteiro, sobre suas compreensões.

De modo análogo, no G2, também foi disponibilizado um roteiro (Anexo 27) com tarefas simplificadas, no qual os estudantes também puderam construir e observar registros gráficos das figuras iniciais e das figuras transformadas, os quais foram construídos manualmente, para que pudessem responder às perguntas realizadas.

Os resultados da análise dos registros apresentados pelos estudantes do G1 estão apresentados na Tabela 3.

No G1, para iniciar a Tarefa 14, foi solicitado que construíssem, no ambiente do GeoGebra, o polígono ABCD e que criassem um controle deslizante definido para a variável "a", que poderia assumir valores reais no intervalo real entre -5 e 5.

Também foi solicitado que inserissem a matriz de transformação $M1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ e que calculassem algebricamente as transformações dos vértices A, B, C e D, identificados por T1A, T1B, T1C e T1D. Destaca-se que, nesse caso, a matriz de transformação poderia corresponder à matriz de expansão ou contração uniforme ou de reflexão em torno do eixo x, ou a uma combinação de ambas, conforme os valores assumidos para o parâmetro "a".

Após unirem os pontos transformados, foi solicitado que movimentassem o controle deslizante definido para a variável "a" e observassem o polígono transformado. Além disso, lhes foi pedido que percebessem o que acontecia com a figura transformada e que respondessem à pergunta: **"***11 a) O que acontece com a Figura quando* $a = 1$ *ou* $a = -1$*?".* Nesse caso, esperava-se que os estudantes percebessem que a figura não se modificava quando $a = 1$ e que quando $a = -1$, ocorria a reflexão da figura em torno da origem.

Tabela 3 Resultados de respostas da Tarefa 14 (G1 – 28 participantes)

Questão	Fez (%)	Não fez (%)	Correto (%)	Incompleto ou Parcialmente correto (%)	Errado (%)
11 (a)	100	0	36	57	7
11 (b)	100	0	39	54	7
11 (c)	96	4	32	46	18
12	100	0	29	32	39
20	100	0	75	7	18
22	100	0	61	14	25
23	100	0	57	25	18
31	93	7	54	18	21
34	100	0	50	14	36
35	96	4	4	54	43
43	100	0	79	0	21
44	100	0	0	46	54
50	100	0	0	75	21
Construção no GeoGebra	93	7	57	36	0

Fonte: Autora

Cabe destacar que a professora também orientou, no início da tarefa, que deveriam tentar identificar quais transformações lineares estavam relacionadas às transformações ocorridas nas figuras.

De acordo com os resultados apresentados na Tabela 3, verificou-se que todos os estudantes do G1 responderam à pergunta e 36% foram consideradas respostas adequadas, 57% parcialmente corretas e 7% equivocadas.

Como exemplo de resposta considerada correta, apresenta-se o registro: *"A figura reflete em torno da origem quando* $a = -1$*, quando* $a = 1$ *a figura se sobrepõe a imagem inicial"* (A16, 2016).

Em relação às respostas consideradas parcialmente corretas, observou-se que alguns apenas se referiram ao caso "$a = 1$", conforme os exemplos: *"O tamanho* *da figura permanece o mesmo da original"* (A7, 2016) ou ainda *"Os dois polígonos ficam do mesmo tamanho não havendo contração nem expansão"* (A29, 2016). Outros, em vez de se referirem à transformação de reflexão em torno da origem, usaram termos inadequados como "espelhados na origem" ou "invertidos", conforme os registros a seguir:

> a = -1 o polígono T1A, T1B, T1C, T1D fica <u>espelhado no terceiro quadrante</u>.
> a=1 o polígono T1A, T1B, T1C, T1D fica sobreposto ao polígono A, B, C, D (A2, 2016).
> A figura mantêm o seu tamanho /quando negativo, fica <u>invertida na origem</u> (A12, 2016).

Como exemplos de respostas equivocadas (7%), podem ser citados os seguintes registros: "*A figura reflete em torno da sua origem em -1, em 1 ela se opõem"* (A1, 2016) e "*Os pontos A e T1A se encontrão e isso acontece com os outros pontos*" (A34, 2016).

Em relação à pergunta **"***11 b) O que acontece com a Figura quando* $a > 1$ *ou* $a < -1$*?",* esperava-se que os estudantes percebessem que, quando $a > 1$, ocorria uma expansão uniforme e quando $a < -1$ ocorria, além de uma expansão uniforme, a reflexão simultânea, em torno da origem.

Os resultados indicam que todos do G1 responderam à pergunta e 39% foram consideradas respostas adequadas, 54% parcialmente corretas e 7% equivocadas.

Dentre os 39% de respostas consideradas corretas, aponta-se como exemplos:

> Quando a>1 a figura expande em relação à original; a<-1 expande em relação à figura refletida da original (A8, 2016).
> a>1 ocorre expansão uniforme e, quando a<-1, ocorre expansão uniforme e reflexão em torno da origem (A11, 2016).

Em relação às respostas parcialmente corretas, foi constatado que alguns apenas se referiram ao caso em que $a > 1$, como por exemplo: *"A segunda figura fica maior que a primeira. Pois houve uma expansão uniforme"* (A32, 2106). Outros, ainda, se referiram apenas a mudanças observadas, mas não relacionaram as transformações de expansão de reflexão em torno da origem. Como exemplos:

> Em ambos os casos a figura se distancia cada vez mais da origem só que quando a>1 vai ao primeiro quadrante e a<-1 ao 3º quadrante. Em ambas figuras, sua área aumenta também (A4, 2016).
> A figura se expande linearmente dos dois lados pela origem (A17, 2016).

Quanto às respostas consideradas equivocadas (7%), podem ser citados os exemplos: *"$a > 1$ a figura transformada expande em relação à figura original. $a < -1$ a <u>figura transformada comprime</u> em relação com reflexão na origem"* (A20, 2016) e *"Os pontos T1A T1B T1C e T1D são menores que os pontos A B C D"* (A34, 2016).

Em relação à alternativa *"11 c) O que acontece com a Figura quando $-1 < a < 1$?",* esperava-se que os estudantes percebessem que, quando $0 < a < 1$, ocorria uma contração uniforme e que, quando $-1 < a < 0$, ocorria uma reflexão em torno da origem e também uma contração uniforme.

Os resultados indicaram que 96% dos estudantes responderam à pergunta e 32% foram consideradas respostas adequadas, 46% parcialmente corretas e 18% equivocadas. Dentre as respostas consideradas corretas, são exemplos:

> Quando a<1 a figura comprime em relação à original a>-1 a figura comprime em relação à figura refletida (A8, 2016).
> Quando a<1, ocorre contração uniforme e, quando a>-1, ocorre contração e reflexão em torno da origem (A19, 2016).

Em relação às respostas consideradas parcialmente corretas (46%), verificou-se que alguns estudantes observaram apenas o aumento ou a diminuição da figura geométrica, não observando a mudança de sinais ocorridos nas coordenadas da figura transformada, que se referiam à mudança da posição relativa dos vértices em relação à origem, quando $-1 < a < 0$. Como exemplos: "*A figura contrai linearmente dos dois lados da origem*" (A17, 2016) e "*Há uma contração da figura, ficando com uma área menor que da figura original*" (A29, 2016). Nesse caso, também foi observado que houve dificuldade de expressão em relação ao reconhecimento das transformações pelas suas respectivas denominações, como mostrado a seguir: "*Diminui cada vez mais seu tamanho o quanto mais se aproxima da origem*" (A4, 2016) ou "*As figuras diminuem linearmente*" (A11, 2016).

Em relação aos 18% de respostas consideradas equivocadas, verificou-se que os estudantes ou se referiram ao que não ocorria ou interpretaram de modo equivocado, conforme apresentado nos exemplos a seguir: "*Se -1<a<1 o desenho não se expande*" (A26, 2016) ou "*Os pontos T1A T1B T1C e T1D são maiores que os pontos A B C D*" (A34, 2016).

Em seguida, foi solicitado que eles considerassem $a = 2$, movimentassem os vértices A, B, C e D e observassem as figuras, para, em seguida, responder: *"12) O que aconteceu com as figuras?".* Esperava-se que respondessem que as figuras eram transformadas em figuras semelhantes expandidas, com os tamanhos dos lados duplicados.

De acordo com os resultados da Tabela 3, todos do G1 responderam e 29% forneceram respostas corretas, 32% incompletas e 39% equivocadas. Como exemplo de resposta considerada correta, está a dadapor A13: "*A segunda figura aumenta uniformemente*" (A13, 2016).

Quanto às respostas consideradas incompletas ou parcialmente corretas, houve casos em que os estudantes perceberam a transformação de expansão, porém, afirmaram que a transformação não alterava as características da figura inicial, mas não se referiram a elas especificamente. Nesse caso, apesar de a transformação manter o formato inicial da figura geométrica, os tamanhos dos lados mudam, a área muda, entre outros, o que torna suas respostas parcialmente corretas. Como exemplos: "*A medida que movemos a figura original ocorre apenas expansão sem alterar suas características*" (A8, 2016) ou "*Continua a expansão uniforme, sem mudar suas características"* (A18, 2016). Outros estudantes identificaram algumas características das transformações, mas não associaram-nas à transformação linear abordada, de modo mais específico. Como exemplo: "*A segunda figura acompanha os movimentos dos vértices da primeira, mas com o dobro do tamanho*" (A12, 2012).

Nessa alternativa, verificou-se um percentual maior de respostas equivocadas. Alguns estudantes se referiram à transformação de reflexão, talvez por estarem influenciados pelas respostas fornecidas em alternativas anteriores, como exemplos: "*Elas expandiram e refletiram*" (A16, 2016) e "*Os valores de x e y dobraram seu tamanho expandiu e refletiu*" (A23, 2016). Outros se referiram à transformação de contração, o que não faz sentido, quando $a = 2$. Nesse caso, ao diminuírem a figura original, podem ter se confundido com a transformação de contração uniforme. Como exemplos: "*Elas se expandem ou contraem conforme a movimentação"* (A30, 2016) ou "*Ocorre contração ou expansão uniforme de cada um dos pontos, assim as figuras mantém a proporcionalidade*" (A32, 2016).

Na sequência, foi solicitado que trabalhassem com a matriz de transformação $M2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, tendo em vista observar que tipo de transformações ela gerava, ao ser aplicada nos vetores definidos pelos pontos A, B, C e D, gerando os vetores

T2A, T2B, T2C, T2D. Nesse caso, era esperado que percebessem que a matriz representava a transformação de reflexão em torno do eixo x.

Após os cálculos, foi solicitado que, observando a figura transformada, respondessem à pergunta: *“20) O que acontece com o polígono T2A, T2B, T2C, T2D?”*. Nesse caso, verificou-se que 75% apresentaram respostas consideradas corretas, 7% responderam de modo incompleto e 18% apresentaram respostas equivocadas.

Em relação às respostas consideradas incompletas, verificou-se que houve falta de rigor nas respostas, conforme os exemplos: “*Reflete”* (A1, 2016) e “*A figura está espelhada no eixo x e movendo A B C D o mesmo acontece com T2*” (A26, 2016).

Dentre os 18% que apresentaram respostas consideradas incorretas, foram constatados erros de interpretação ou de expressão em linguagem natural, conforme os exemplos: “*De acordo com o movimento, houve a expansão ou contração uniforme*” (A2, 2016) ou “*Também se expande de maneira refletida à original*” (A21, 2016).

Em seguida, foi solicitado que alterassem, no GeoGebra, a matriz de transformação $M2$, substituindo o elemento (1,1) da matriz, por -1, obtendo: $M2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, para que pudessem observar que tipo de transformação essa nova matriz gerava, ao ser aplicada nos vetores definidos pelos pontos A, B, C e D, gerando os vetores T2A, T2B, T2C, T2D. Nesse caso, era esperado que percebessem que a matriz representava a transformação de reflexão em torno da origem.

Após essa mudança, foi solicitado que respondessem à pergunta: *“22) O que acontece com o polígono T2A, T2B, T2C, T2D?”.* Nesse caso, verificou-se que 61% apresentaram respostas corretas, 14% responderam de modo incompleto e 25% apresentaram respostas equivocadas.

No que se refere às respostas incompletas, também se constatou falta de rigor, conforme os exemplos: “*Reflete a imagem*” (A1, 2016); “*A figura é espelhada em torno da origem*” (A5, 2016) e “*Fica invertido na origem*” (A23, 2016).

Além disso, dentre os 25% de repostas consideradas incorretas ou incompletas, foram constatados erros de interpretação ou houve dificuldade de expressão em linguagem natural, conforme os exemplos: "*Ocorreu a reflexão em torno do eixo y*" (A20, 2016) e "*Ela aparece no 3º quadrante*" (A21, 2016).

Também foi solicitado que movimentassem os vértices A, B, C e D, que definiam a figura original, e que observassem as transformações automáticas das figuras iniciais modificadas, para, em seguida, responder novamente à pergunta: *"23) O que acontece com o polígono T2A, T2B, T2C, T2D?"*.

Como a observação era semelhante ao caso anterior, os resultados verificados também foram semelhantes, sendo que: 57% apresentaram respostas adequadas. Como exemplo: "*Na medida em que movemos o polígono A, B, C e D, o polígono T2A, T2B, T3C, T4D continua refletido em torno da origem"* (A9, 2016); 25% forneceram repostas incompletas ou parcialmente corretas, tais como: *"Os movimentos serão refletidos nesse polígono"* (A2, 2016); e 18% forneceram respostas equivocadas, tais como: "*Ele faz movimentos inversamente proporcionais*" (A12,2016) ou "*Expandiu e refletiu"* (A25, 2016).

Em seguida, foi orientado que os estudantes do G1 armazenassem no GeoGebra a matriz $R = \begin{bmatrix} cos(alfa) & -sen(alfa) \\ sen(alfa) & cos(alfa) \end{bmatrix}$, devendo a mudança do ângulo ser controlada automaticamente por meio de um controle deslizante chamado "$alfa$". Posteriormente, foi solicitado que também inserissem as fórmulas algébricas que forneceriam automaticamente os vetores transformados RA, RB, RC, RD, associados aos pontos A, B, C e D iniciais. Nesse caso, era esperado que percebessem que a matriz representava a transformação de rotação de um ângulo "$alfa$".

Os estudantes foram orientados a unir os pontos relativos aos vetores transformados no GeoGebra e a movimentar o controle deslizante "$alfa$". Em seguida, observando as figuras geradas pela transformação, deveriam responder à seguinte pergunta: *"31) O que acontece com o polígono RA, RB, RC, RD?".* Esperava-se que os estudantes percebessem que o polígono original era transformado num polígono rotacionado em $alfa$ graus.

De acordo com os resultados da Tabela 3, constatou-se que 93% dos estudantes responderam à pergunta e 54% forneceram respostas adequadas, 18% parcialmente corretas e 21% equivocadas.

Como exemplos de respostas consideradas corretas, podem ser citados os registros: “*Conforme mudamos o ângulo no controle deslizante, o polígono RA, RB, RC, RD, rotaciona em relação ao polígono A, B, C, D.*” (A2, 2016) ou “*Rotaciona de acordo com o ângulo, ou seja, rotação de um ângulo*” (A28, 2016).

Em relação às respostas parcialmente corretas (18%), se observou a falta de cuidado com a descrição da transformação e de referenciais adotados. Como exemplos: “*Quando α=0, o polígono transformado RA, RB, RC, RD fica em cima do polígono A, B, C, D, quando mudamos o α, o polígono RA, RB, RC, RD rotaciona em relação aos eixos.”* (A9, 2016) ou, ainda, “*Ela se movimenta mudando o ângulo*” (A21, 2016).

No caso dos 21% de respostas consideradas equivocadas, foram verificados erros de interpretação ou de expressão, assim: “*Se move em torno do ponto A(1,1)*” (A4, 2016); “*Ela se reflete em torno da origem*” (A5, 2016) ou “*Um ângulo rotaciona*” (A14, 2016).

Posteriormente, foi solicitado aos estudantes que representassem os vetores “$\vec{u} = \overrightarrow{OC}$” e “$\vec{v} = \overrightarrow{ORC}$” e que criassem entre eles o ângulo α, associado a um controle deslizante chamado “$alfa$”. Após movimentar o ângulo criado por meio do controle deslizante, deveriam observar as mudanças ocorridas nos vetores para que pudessem responder à seguinte pergunta: *“34) O que acontece com os vetores* “$\vec{u} = \overrightarrow{OC}$” e “$\vec{v} = \overrightarrow{ORC}$”*,?”*. Esperava-se que percebessem que o vetor $\vec{u}$ permanecia imóvel, enquanto que o vetor $\vec{v}$ representava o vetor $\vec{u}$ rotacionado em “$alfa$” graus.

Nesse caso, todos responderam à pergunta e 50% das respostas estavam corretas, 14% incompletas e 36% equivocadas.

Como exemplo de resposta correta, verificou-se: “*O vetor $\vec{u}$ mantêm-se constante, enquanto $\vec{v}$ rotaciona conforme a alteração do ângulo α entre eles*” (A12, 2016).

Em relação aos 14% de respostas incompletas, notou-se que houve dificuldade de expressão por meio da linguagem natural. Como exemplos, podem ser citados os registros: *“Tem o ângulo entre eles aumentado quando o controle deslizante é movido para esquerda”* (A4, 2016) ou “*Acontece a rotação dos vetores”* (A30, 2016).

Além disso, foram identificadas 36% das respostas como incorretas, nas quais os estudantes não descreveram a relação existente entre os vetores observados. Como exemplos: *“Mudam o ângulo e sua declividade, se alterando uniformemente nos vetores”* (A1, 2016); “*Aumentou e diminuiu respectivamente*” (A10, 2016) ou “*Vai aumentar o ângulo entre eles*” (A25, 2016).

Para estimular a percepção conjunta das transformações abordadas, após a inserção das matrizes M1 (expansão ou contração uniforme), de M2 (reflexão em torno da origem) e R (rotação) solicitou-se aos estudantes que movimentassem os pontos iniciais A, B, C ou D e que observassem o que acontecia com todas as figuras transformadas, simultaneamente. Esperava-se que, ao responderem *“35) O que acontece com as figuras transformadas?”*, percebessem que: (i) T1A, T1B, T1C, T1D representavam a figura modificada expandida ou contraída; (ii) T2A, T2B, T2C, T2D - representavam a figura modificada refletida em torno da origem e (iii) RA, RB, RC, RD representavam a figura modificada rotacionada em “$alfa$” graus.

Nesse caso, 96% responderam, mas não houve resposta considerada correta. Verificou-se que 54% forneceram respostas consideradas incompletas, se referindo a uma ou outra transformação, ou ao fato de todas se movimentarem em conjunto. Como exemplos:

> Se movem em conjunto (A4, 2016).
> Continua a rotação do ângulo, mesmo quando há movimento das figuras (A18, 2016).
> Conforme a movimentação dos pontos do polígono A, B, C e D, as figuras aumentam ou diminuem seu tamanho, sofrendo transformações lineares (A35, 2016).

Também se verificou 43% de respostas consideradas equivocadas. Provavelmente, o movimento da figura original tenha confundido os estudantes na interpretação das transformações, como pode ser observado nos registros:

> Em todas ocorre expansão ou a contração conforme movemos os pontos A, B, C e D, sem mudar suas características (A8, 2016).
> Dependendo do movimento dos pontos as figuras contraem-se ou expandem-se (A35, 2016).

Em seguida, foi solicitado aos estudantes do G1 que armazenassem a matriz do cisalhamento horizontal $CH = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, no ambiente do GeoGebra, e que também inserissem o cálculo dos pontos A, B, C e D transformados, identificados por CHA, CHB, CHC, CHD. Nesse caso, era esperado que percebessem que a matriz representava a transformação de cisalhamento horizontal.

Após unirem os pontos transformados, foi solicitado que, movimentando o controle deslizante “a”, respondessem: *“43) O que acontece com o polígono CHA, CHB, CHC, CHD?”*. Esperava-se que percebessem que a figura inicial, após ter sido transformada, correspondia ao efeito do cisalhamento horizontal, ou seja, de deslizamento de bases horizontais. Verificou-se que todos estudantes do G1 responderam a essa pergunta, tendo 79% das respostas sido consideradas adequadas e 21% equivocadas.

Em relação às respostas consideradas corretas, a maioria se referiu ao efeito do cisalhamento horizontal, observado na figura transformada, conforme os exemplos: “*Quando a=0 ele sobrepõe o polígono A, B, C, D. Quando varia ocorre o cisalhamento horizontal”* (A2, 2016) ou “*Ocorreu um cisalhamento horizontal no polígono”* (A18, 2016).

Destaca-se que os estudantes também poderiam ter observado que, quando $a > 0$, ocorria um deslocamento para direita, e, quando $a < 0$, ocorria um deslocamento para esquerda, o que foi verificado em apenas uma resposta: *“Ocorreu Cisalhamento Horizontal, onde o polígono se move conforme a alteração de alfa. Quando a for maior que 1 ela vai para a direita e quando a for menor que 1 ele vai para a esquerda”* (A35, 2016).

Em relação às respostas equivocadas, se observa erros de interpretação ou de construção no GeoGebra que levaram a conclusões equivocadas. São exemplos de erros de interpretação:

> Ele se move do primeiro para o segundo quadrante sendo que, quando o polígono CHA, CHB, CHC e CHD está sobreposto ao A, B, C, D tem a forma de um retângulo ao passo de um paralelogramo (A4, 2016).
> Os vetores aumentam de tamanho e o polígono aumenta e se afasta do original (A7, 2016).
> Formam um retângulo igual a imagem inicial (A16, 2016).

Como exemplos de conclusões erradas decorrentes de erros de construção geométrica, foram identificados os seguintes registros:

> Quando diminui o número no controle ele se contorce parecendo com uma cônica. Em certo ponto fica como um triângulo (A5, 2016).
> Quando diminui o número no controle ele se contorce parecendo com uma cônica, em certo ponto ele fica como um triângulo (parte do retângulo original) (A21, 2016).

De modo semelhante à pergunta 35, após a inserção das matrizes M1, M2, R e CH (cisalhamento horizontal), solicitou-se aos estudantes que movimentassem os pontos iniciais A, B, C ou D e observassem o que acontecia com as figuras transformadas. Esperava-se que, ao responderem: “44) O que acontece com as figuras transformadas?”**,** percebessem que: (i) T1A, T1B, T1C, T1D representavam a figura modificada expandida ou contraída; (ii) T2A, T2B, T2C, T2D representavam a figura modificada refletida em torno da origem; (iii) RA, RB, RC, RD representavam a figura modificada rotacionada em “$alfa$” graus e que (iv) CHA, CHB, CHC, CHD representavam a figura modificada após o efeito de cisalhamento horizontal.

Nessa alternativa, embora todos tenham respondido à questão proposta, não houve resposta considerada correta; 46% forneceram respostas consideradas incompletas e 54% forneceram respostas equivocadas.

No caso das respostas consideradas incompletas, assim como ocorreu nas respostas da pergunta 35, os estudantes identificaram uma ou outra transformação, ou apontaram para o fato de todas se movimentarem em conjunto, mas não foram capazes de reconhecer cada uma, quando observaram todas as transformações ao mesmo tempo ou de descrever os movimentos observados, separadamente. Como exemplos:

> Se movimentam também, algumas de forma igual e outras tipo espelho, pois estão em pontos negativos do plano (A21, 2012).
> Continua o cisalhamento horizontal (A22, 2012).
> Conforme a movimentação dos pontos A, B, C e D, as figuras transformadas sofrem transformações lineares (A32, 2012).

No caso de respostas equivocadas, foram verificados erros de interpretação da observação dos movimentos realizados. Como exemplos:

> Vão todos para o mesmo ponto, pois estão espelhados, conforme os pontos A, B, C, D, se afastam, como vão para o mesmo ponto (A1, 2012).
> Nas figuras RA, RB, RC, RD; T1A, T1B, T1C, T1D; CHA, CHB, CHC, CHD ocorre a expansão ou contração uniforme. Na figura T2A, T2B, T2C, T2D acontece o mesmo porém está refletida (A2, 2012).
> As figuras se movimentam refletidas em torno da origem (A7, 2012).
> Não ocorre transformação, continua ocorrendo o cisalhamento horizontal (A18, 2012).
> Altera todas as transformações menos o polígono CHA, CHB, CHC, CHD (A19, 2012).
> Expandem e refletem (A23, 2012).
> A figura fica inclinada (A30, 2012).

Na finalização da tarefa 14, foi informado aos estudantes do G1 que poderiam ser realizadas composições de transformações, multiplicando-se as suas matrizes de transformação.

Assim, para que pudessem, ao mesmo tempo, refletir a figura em torno da origem (M2) e rotacioná-la (R), foi solicitado que aplicassem o produto M2*R sobre os pontos A, B, C, D, obtendo suas coordenadas transformadas, identificadas por M2RA, M2RB, M2RC, M2RD e M2RA, as quais, ao serem unidas, representariam o polígono transformado.

Após, foi solicitado que movimentassem o controle deslizante do ângulo "$alfa$" e respondessem: **"**50) O que acontece com as figuras?**".** Esperava-se que percebessem que o polígono RA, RB, RC, RD representava a figura inicial modificada, rotacionada em alfa graus, e que o polígono M2RA, M2RB, M2RC, M2RD representava a figura inicial modificada, rotacionada em "$alfa$" graus e refletida em torno da origem, ao mesmo tempo.

Verificou-se que um estudante (4%) forneceu uma reposta considerada adequada: "*A figura MRA, MRB, MRC e MRD é a reflexão do polígono RA, RB, RC e RD, assim quando varia o ângulo 'alfa' no controle deslizante ambas figuras se movimentarão*" (A2, 2016).

Além disso, 75% apresentaram respostas consideradas incompletas, pois se referiam somente ao movimento de rotação de ambas figuras, ou se referiram à transformação de reflexão em torno da origem inadequadamente, usando o termo "espelhamento", como exemplos: "*Da maneira como mudamos o ângulo alfa, as figuras se rotacionam ao redor da origem*" (A1, 2016) ou "*As figuras M2RA .... e RA ... rotacionam espelhadas em torno da origem"* (A7, 2016).

Também foi verificado um índice de 21% de respostas equivocadas, identificadas por dificuldades de expressão ou de erros conceituais. Inclusive, alguns estudantes confundiram a transformação de reflexão com a transformação não linear de translação. Esses indicativos podem ser verificados nos registros:

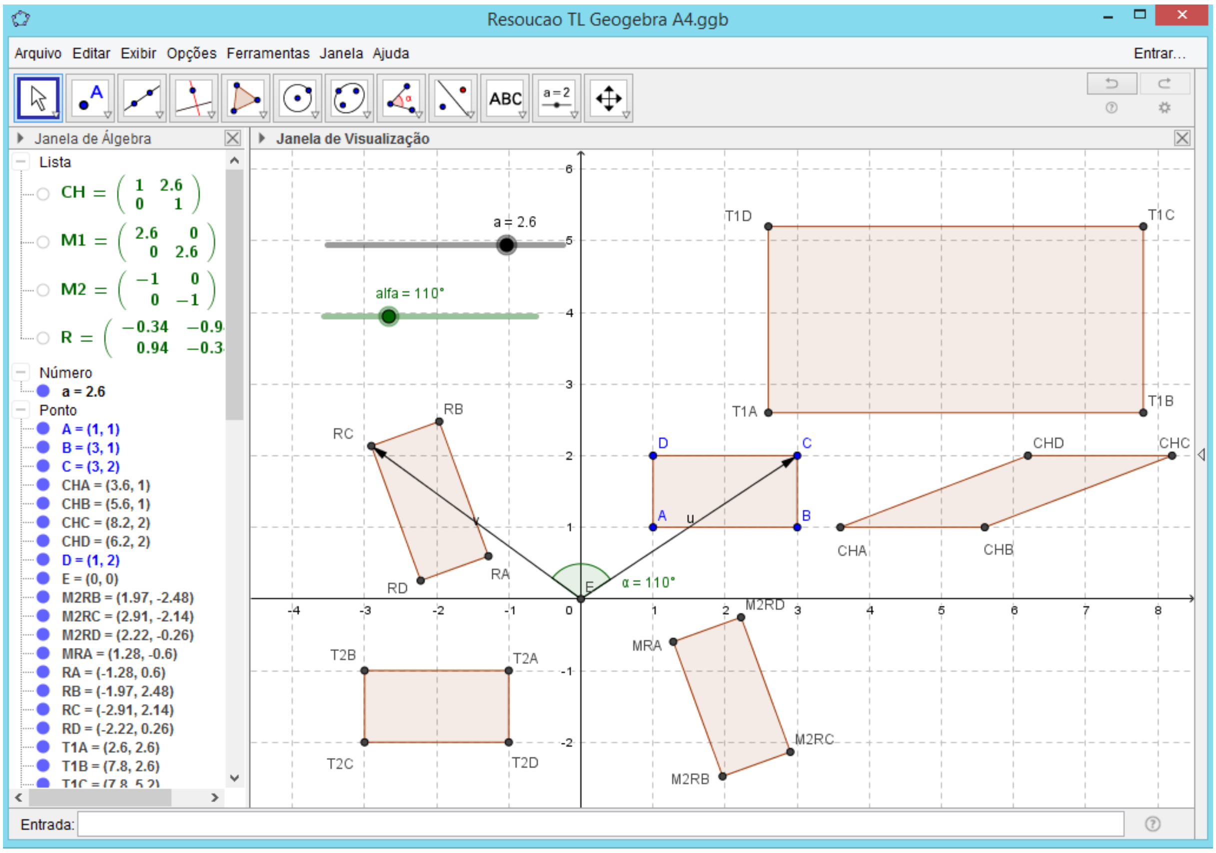
> As duas figuras M2RA, M2RB, M2RC, M2RD e a RA, RB, RC, RD movem-se em diferentes ângulos, sempre alinhados (A5, 2016).
> A figura M2R, M2RB, M2RC e M2RD é o polígono reflexo em torno da origem do polígono RA, RB, RC e RD. É uma transformação não linear, pois ocorre uma translação (A29, 2016).

Também foi solicitado aos estudantes do G1 que, após o término da tarefa, enviassem o arquivo construído para análise. Verificou-se que 93% construiram todo o esquema, finalizaram a tarefa e enviaram o arquivo por e-mail. Apenas 7% optaram por não entregar a construção realizada.

Nos arquivos enviados, 57% das construções foram consideradas corretas e 36% estavam incompletas. Um exemplo da construção final realizada nessa tarefa pode ser visualizado na Figura 37.

De modo geral, foi possível perceber que essa tarefa possibilitou aos estudantes do G1 observar as construções realizadas de modo dinâmico e interativo, por meio do uso dos recursos tecnológicos do GeoGebra. Foi possível perceber que a abordagem didática propiciou um ambiente de aprendizagem favorável à compreensão das transformações lineares propostas, pois possibilitou a experimentação e a interpretação de situações diversas, por meio das reflexões propostas.

Figura 37 - Representações de transformações lineares construídas no GeoGebra por A4



Fonte: A4– G1 (2016)

Destaca-se que a exploração e a ampliação das possiblidades de percepções, acerca de características específicas das transformações lineares planas, foram facilitadas pelo ambiente interativo do GeoGebra, o qual propiciou construções mais complexas, facilitando a observação de um número maior de casos. No entanto, em todas as perguntas realizadas, foram identificadas dificuldades na elaboração de respostas adequadas, de modo que pudessem expressar suas compreensões de modo apropriado em linguagem natural, nas quais deveriam usar termos próprios da área, que fossem adequados para identificar as transformações abordadas.

Em relação aos resultados da Tarefa 14, aplicada em sala de aula para os estudantes do G2, salienta-se que foi orientado que os estudantes trabalhassem com construções geométricas manuais, com o propósito de estimular o trânsito entre diferentes registros.

Os resultados da análise dos registros apresentados pelos estudantes do G2 estão apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 - Resultados de respostas da Tarefa 14 (G2 – 21 participantes)

Questão	Fez (%)	Não fez (%)	Correto (%)	Incompleto ou parcialmente correto (%)	Errado (%)
1(a)	95	5	62	19	14
1(b)	95	5	29	52	14
1(c)	95	5	29	43	24
2	90	10	85	5	0
3(a)	90	10	33	48	10
3(b)	81	19	33	48	0
4	86	14	67	0	19
5(a)	86	14	62	14	10
5 (b)	81	19	38	14	29

Fonte: Autora

A tarefa foi iniciada com a construção gráfica de um segmento AB no plano cartesiano, realizada em folha de papel, construída com lápis e régua.

Na sequência, foi solicitado que calculassem as novas coordenadas do segmento AB e que representassem a figura transformada no plano cartesiano, caso sofresse uma transformação do tipo $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, para valores específicos de “a”.

Nesse caso, esperava-se que os estudantes do G2 reconhecessem que a matriz de transformação poderia corresponder à matriz de expansão ou contração uniforme ou de reflexão em torno do eixo x, ou a uma combinação de ambas, conforme os valores assumidos para o parâmetro “a”.

Em seguida, foi solicitado que respondessem: **“***1 a) O que acontece com a Figura quando* $a=1$ *ou* $a=-1$*?”.* Esperava-se que percebessem que quando $a=1$, o segmento AB não se modificava, e, quando $a=-1$, ocorria a reflexão do segmento AB, em torno da origem.

Nessa alternativa verificou-se que 95% responderam e 62% apresentaram respostas consideradas corretas, 19% apresentaram repostas consideradas parcialmente corretas e 14%, equivocadas.

Como exemplos de respostas consideradas corretas, podem ser citados os registros:

> Quando a = 1: as coordenadas permanecem iguais. Quando a = -1: ocorre uma reflexão em torno da origem, e as coordenadas passam a ser negativas (E10, 2016).
> Quando a = 1 é gerada uma matriz identidade de modo que os pontos A e B não se alteram. Quando a = -1 é gerada uma matriz de reflexão em torno da origem, e os pontos A e B ficam refletidos em torno da origem (E12, 2016).

Em relação às repostas consideradas parcialmente corretas, verificou-se que alguns identificaram corretamente uma transformação, mas erraram a outra, conforme apresenta-se a seguir:

> Quando a = 1, ocorre a expansão ou contração uniforme. Quando a = -1 ocorre a reflexão em torno da origem (E2, 2016)
> Quando a = 1 o segmento AB permanece inalterado. Quando a = -1.

Também foi possível notar, nas respostas da alternativa 1(a), que houve dificuldades em relação à expressão em linguagem natural em relação ao uso de termos adequados, no contexto das transformações lineares estudadas.

Em relação aos 14% de respostas consideradas equivocadas, verifica-se a falta de cuidado na expressão em linguagem natural das observações realizadas. Como exemplos:

> Ocorre uma reflexão em torno da origem (E3, 2016).
> Quando a = -1 ou a = 1 ocorre uma reflexão em torno da origem. (E8, 2016)
> Quando a é substituído por 1 a matriz se mantêm igual. Nesse caso a matriz sofre uma reflexão em torno da origem (E9, 2016).

Em relação à alternativa *“1 b) O que acontece com a Figura quando* $a>1$ *ou* $a<-1$*?”*, era esperado que os estudantes percebessem que, quando $a>1$, ocorria uma expansão uniforme, e quando $a<-1$, além de uma expansão uniforme, ocorria a reflexão simultânea, em torno da origem.

Os resultados da Tabela 4 indicam que 95% responderam a essa pergunta e 29% foram consideradas respostas adequadas; 52% parcialmente corretas e 14% equivocadas.

Como exemplos de respostas corretas, podem ser citados os registros:

> a>1 expande uniformemente; a<-1 expande uniformemente e reflete em torno da origem (E1, 2016).
> Quando a>1, ocorre uma expansão. Quando a<-1, ocorre uma reflexão em torno da origem combinada com uma expansão (E20, 2016).

Quanto às respostas consideradas parcialmente corretas, foi possível perceber várias situações diferentes, que remetem a dificuldades de expressão em linguagem corrente ou de compreensão.

Alguns estudantes se referiram aos termos “expansão” e “contração” como se fossem sinônimos e outros usaram o termo “uniforme” como sinônimo de “expansão”. Como exemplos:

> Quando a>1 ocorre uma expansão ou contração uniforme e quando a<-1 ocorre uma expansão ou contração uniforme e também a reflexão em torno da origem (E2, 2016).
> a>1: uniforme; a<-1: uniforme e reflexão na origem (E16, 2016).

Outros se referiam ao fato de ter havido uma reflexão mas não especificaram o tipo, como por exemplo: “*Quando a>1 é gerada uma matriz que expande o segmento AB. Quando a<-1 é gerada uma reflexão combinada à uma expansão do segmento AB*” (E18, 2016).

Também foi identificado que alguns estudantes não especificaram os casos analisados, tais como: “*Nesse caso a matriz sofre uma expansão uniforme. Nesse caso ele irá se expandir uniformemente e se refletirá pela origem”* (E9, 2016) ou “*Reflexão em torno da origem*” (E15, 2016).

Além disso, foram verificados equívocos na identificação de uma das transformações ocorridas, como o exemplo: *“Quando a>1, ocorre apenas uma reflexão, porém quando a<-1 ocorre uma reflexão combinada com uma expansão”* (E10, 2016). Nesse caso, quando a>1, ocorre apenas uma expansão uniforme, não uma reflexão.

Nessa alternativa, também se verificou que houve um equívoco na identificação do tipo de reflexão envolvida, devido a uma construção gráfica errada, conforme mostrado a seguir: *“a>1 a=2 duplicação do segmento AB. a=-2 reflexão* *em torno do eixo x duplicado*” (E24, 2016). Nesse caso, deveriam ter observado a ocorrência de uma reflexão em torno da origem e não em torno do eixo x.

Também se observou que pelo fato de terem sido orientados a assumirem um valor específico para o parâmetro “a”, alguns estudantes não conseguiram generalizar o resultado, indicando que estaria ocorrendo uma expansão uniforme, quando $a > 1$. Como exemplo, apresenta-se o seguinte registro: “*O tamanho aumenta o dobro com a=2; a=-2 o tamanho aumenta o dobro e reflete em relação à origem, trocando de quadrante”* (E25, 2016).

Quanto às respostas consideradas erradas, verificou-se que os estudantes não conseguiram identificar e explicar as transformações ocorridas. Como exemplos: “*Uma expansão de x=8 e y=4”* (E3, 2016); “*Acontece uma expansão de em x=8 e em y=4*” (E8, 2016) e “*Ele é projetado proporcionalmente dentro do seu quadrante*” (E19, 2016).

Na alternativa **“***1 c) O que acontece com a Figura quando* $-1 < a < 1$*?”***,** esperava-se que os estudantes do G1 percebessem que, quando $0 < a < 1$, ocorria uma contração uniforme e que, quando $-1 < a < 0$, ocorria uma reflexão em torno da origem e também uma contração uniforme.

Os resultados indicam que 95% dos estudantes responderam à pergunta e 29% foram consideradas respostas adequadas, 43% parcialmente corretas e 29% equivocadas. São exemplos de respostas consideradas corretas:

> Entre -1 e 0 a figura contrai uniformemente e reflete na origem. Já no intervalo entre 0 e 1, a figura apenas contrai uniformemente (E5, 2016).
> Quando 0<a<1 ocorre uma contração do segmento, entretanto, quando -1<a<0 ocorre uma contração juntamente com uma reflexão em torno da origem (E10, 2016).

Em relação às respostas consideradas parcialmente corretas, verificou-se que alguns estudantes observaram apenas o aumento ou a diminuição da figura geométrica, não observando a reflexão dos pontos em relação à origem, quando $-1 < a < 0$. Como exemplos: “*Quando -1<a<1 é gerada uma matriz que contrai o segmento AB*” (E12, 2016) ou “*A figura diminuirá o seu tamanho quando -1<a<1*” (E21, 2016). Também foram identificadas dificuldades de expressão em linguagem natural e equívocos conceituais.

> No intervalo 0<a<1 a matriz irá contrair uniformemente. No intervalo -1<a<0 a matriz irá contrair uniformemente e se refletirá pela origem. (E9, 2016).

> Quando $0<a<1$: a figura contrai em direção à origem. Quando $-1<a<0$: a figura expande da origem em direção à reflexão em torno da origem da figura (E6, 2016).
> O tamanho diminui pela metade quando a=0,5; a=-0,5 o tamanho diminui pela metade reflete a origem, trocando o quadrante (E25, 2016).

No caso das respostas consideradas equivocadas, foram verificadas dificuldades de compreensão ou de expressão, conforme apresentado nos exemplos a seguir:

> Quando $-1<a<0$ ocorre a expansão ou contração uniforme e quando $0<a<1$ corre a expansão ou contração uniforme e também a reflexão em torno da origem (E2, 2016).
> Contração onde A=A1 e B=B1.(E3, 2016).
> a=0,5. a=-0,5 (E24, 2016).

Também foram verificados equívocos devido às construções gráficas erradas e houve dificuldades em generalizar os resultados obtidos. Como exemplo: *"$-1<a<1$. a=0,5 segmento AB com seu tamanho duas vezes menor. a=-0,5 reflexão do segmento AB em torno do eixo x"* (E4, 2016).

Na segunda questão apresentada aos estudantes do G2, foi solicitado que, inicialmente, calculassem as novas coordenadas do retângulo ABCD,considerando uma transformação do tipo $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, e que representassem a figura transformada no plano cartesiano. Em seguida, deveriam responder: *"2) O que acontece com o polígono transformado?"*. Esperava-se que identificassem que o polígono transformado ficava refletido em relação ao eixo x.

Nessa alternativa, verificou-se que 90% responderam e 85% apresentaram respostas consideradas corretas e 5% incompletas.

Pelos registros, constatou-se que a maioria conseguiu calcular os pontos transformados e também fez o gráfico corretamente, o que os possibilitou observar e concluir adequadamente. Como exemplos de respostas corretas, apresentam-se os registros: "*O polígono transformado uma reflexão em torno do eixo x*" (E8, 2012) ou "*A figura será refletida em torno do eixo x"* (E25, 2016).

Nessa alternativa, verificou-se apenas uma resposta incompleta, na qual o estudante não conseguiu identificar o tipo de transformação envolvida, assim: *"O polígono é projetado no terceiro quadrante"* (E19, 2016).

Na terceira questão, foi solicitado que, inicialmente, calculassem as novas coordenadas do retângulo ABCD, considerando uma transformação do tipo

$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e que representassem a figura transformada no plano cartesiano, primeiro considerando $\alpha > 0$ e, posteriormente, considerando $\alpha < 0$.

Posteriormente, deveriam responder: **"***3 (a) O que acontece com a figura quando: $\alpha > 0$?".* Esperava-se que identificassem que, no polígono transformado, havia ocorrido o efeito do cisalhamento horizontal, ou seja, o deslizamento de bases horizontais, e que, quando $\alpha > 0$, a base se deslocava para direita.

Nessa alternativa, 90% responderam às perguntas e 33% das repostas foram consideradas adequadas, 48% parcialmente corretas e 10% foram consideradas equivocadas. São exemplos de respostas corretas:

> Quando α>0 ocorre um cisalhamento horizontal voltado para a direita (E12, 2016).
> Se α>0 a figura sofre cisalhamento horizontal, sendo que a parte superior desloca da esquerda para direita (E25, 2016).

Em relação às respostas consideradas parcialmente corretas, a maioria dos estudantes se referiu apenas ao efeito do cisalhamento horizontal, não observando a direção do deslocamento da base para direita. Como exemplo: "*Quando a>0 ocorre o cisalhamento horizontal*" (E2, 2016). Também foram identificadas dificuldades com o registro em linguagem natural, no uso de termos adequados, em relação ao que foi definido em sala de aula, conforme apresentado a seguir: "*É deslizado o segmento DC para a direita"* (E19, 2016).

Quanto às respostas consideradas equivocadas, foram identificadas dificuldades de interpretação, conforme mostrado a seguir: "*O gráfico cresce em torno do eixo x"* (E15, 2016) e *"Ocorre uma expansão em torno do eixo x"* (E18, 2016).

Já em relação à pergunta *"3 (b) O que acontece com a figura quando $\alpha < 0$?",* esperava-se que os estudantes identificassem que, no polígono transformado, havia ocorrido o efeito do cisalhamento horizontal, ou seja, o deslizamento de bases horizontais, sendo que, quando $\alpha < 0$, a base se deslocava para esquerda.

Nessa alternativa, verificou-se que 81% responderam às perguntas e, ainda, 33% das respostas foram consideradas adequadas e 48% parcialmente corretas. Nesse caso, não houve respostas incorretas, pois foi possível perceber que os estudantes que haviam interpretado errado a alternativa 3(a) não responderam à 3(b).

Como exemplos de respostas consideradas corretas, podem ser citados os registros:

> Ocorre um cisalhamento horizontal para esquerda, tornando algumas coordenadas negativas (E10, 2016).
> Se α<0 a figura sofre cisalhamento horizontal, sendo que a parte superior (CD) se desloca da direita para esquerda (E21, 2016).

Nessa alternativa, assim como na anterior, algumas respostas foram consideradas parcialmente corretas, pois os estudantes se referiam apenas ao efeito do cisalhamento horizontal, não observando a direção do deslocamento da base para esquerda. Como exemplo: "*Cisalhamento horizontal"* (E16, 2016). Também foram identificadas dificuldades de expressão, assim: *"É deslizado o segmento DC para a esquerda"* (E19, 2016).

Em seguida, foi solicitado aos estudantes do G2 que calculassem as novas coordenadas do retângulo ABCD, caso fossem transformadas pela lei $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(52^0) & -sen(52^0) \\ sen(52^0) & \cos(52^0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e que representassem a figura transformada no plano cartesiano. Em seguida, deveriam responder à pergunta *"4) O que acontece com o polígono transformado?"*. Esperava-se que os estudantes percebessem que o polígono transformado ficava rotacionado em 52^0 em relação ao original.

De acordo com os resultados, apresentados na Tabela 4, 86% dos estudantes responderam à pergunta e 67% foram consideradas respostas adequadas e 19% equivocadas.

Dentre aqueles que não responderam, destaca-se que foram identificadas dificuldades de tratamento, no registro simbólico. Por exemplo, o estudante E15 apresentou os pontos transformados, representados no plano cartesiano. Mas, como houve erro no cálculo da rotação, os pontos apareceram alinhados, o que o impossibilitou interpretar a transformação ocorrida.

Nessa alternativa, como exemplos de respostas consideradas corretas, podem ser citados os registros: "*Ocorre a rotação de um ângulo de 52º*" (E2, 2016) ou "*O polígono fica rotacionado em um ângulo de 52º*" (E12, 2016). Destaca-se que 67% dos estudantes do G2 conseguiram identificar a transformação de rotação aplicada na figura original e se expressaram de modo adequado em linguagem corrente, em relação às suas percepções.

Em relação às respostas consideradas equivocadas, foram verificados erros de interpretação ou de expressão. Como exemplos:

> Causou uma rotação <u>no triângulo</u> (E3, 2016).
> O polígono transformado causou uma rotação <u>no triângulo</u> (E8, 2016).
> Ocorre uma <u>contração com uma reflexão em torno do eixo x</u> (E18, 2016).
> O polígono rotaciona <u>em relação ao eixo do ponto A</u> e passa para o 4 quadrante (E19, 2016).

Para finalizar a Tarefa 14, foi informado aos estudantes que, ao serem multiplicadas as matrizes de transformação, poderiam ser obtidas composições de transformações.

Posteriormente, foi solicitado que, considerando a seguinte transformação $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\cos(52^0) & sen(52^0) \\ -sen(52^0) & -\cos(52^0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, calculassem as novas coordenadas do retângulo A, B, C e D, e que as representassem no plano cartesiano. Em seguida, foi solicitado que respondessem à seguinte pergunta: **“***5 a) Observando o efeito da matriz de transformação utilizada, quais efeitos foram combinados?”.* Esperava-se que os estudantes percebessem que a figura inicial ficava rotacionada em 52º e refletida em tono da origem.

De acordo com os resultados, contatou-se que 86% dos estudantes responderam a essa pergunta e 62% foram consideradas respostas adequadas, 19% foram consideradas repostas parcialmente corretas e 10% equivocadas.

Como exemplos de respostas consideradas corretas, são apresentados os seguintes registros:

> Nesse caso houve uma reflexão em torno da origem da matriz de nº 4 e pode-se dizer uma rotação de 232º em relação ao eixo x (E9, 2016).
> Refletiu em torno da origem, após rotacionar 52º (E14, 2016).
> Houve uma combinação de rotação e de reflexão em torno da origem (E20, 2016).

Em relação aos 19% de respostas consideradas parcialmente corretas, constatou-se que alguns estudantes se referiram apenas ao efeito da rotação. Como exemplos: “*Ocorreu uma rotação no retângulo*” (E3, 2016) e “*Com a transformação ocorreu uma rotação no retângulo*” (E8, 2016). Já outros estudantes não conseguiram interpretar corretamente o efeito da reflexão em torno da origem, conforme mostrado nos registros a seguir:

> A matriz de transformação obteve um efeito de rotação de um ângulo igual a 52º e efeito de reflexão em torno do eixo x (E4, 2016).

> Foram combinados os efeitos de rotação de um ângulo de 52º e de reflexão em torno do eixo, porem como existem valores negativos na matriz ela não ficará totalmente refletida (E13, 2016).

Quanto às repostas consideradas equivocadas, foram identificados dificuldades de tratamento no registro simbólico (foram identificados erros nos cálculos dos pontos transformados) e também dificuldades de compreensão das transformações e de expressão dos registros em linguagem corrente, conforme mostrado a seguir:

> Foram combinados os efeitos de rotação de um ângulo de 52º e de reflexão em torno do eixo, porém como existem valores negativos na matriz ela não ficará totalmente refletida (E13, 2016).
> Foram negativados o eixo “y” e aos 52º em “x” (E19, 2016).

Posteriormente, foi solicitado aos estudantes que respondessem à seguinte pergunta: *“5 b) A matriz utilizada foi obtida pelo produto de quais matrizes de transformação? Indique como foi calculada”*. Esperava-se que os estudantes percebessem que a matriz considerada na alternativa 5(a) poderia ser obtida pelo produto entre as matrizes de reflexão em torno da origem e a matriz de rotação de 52^0 (ou o contrário).

Verificou-se que 81% apresentaram repostas e 38% foram consideradas corretas, 14% parcialmente corretas e 29% equivocadas. Como exemplos de respostas consideradas corretas, podem ser citados os registros:

> Matriz de reflexão $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ X Matriz de rotação $\begin{bmatrix} \cos(52^0) & -sen(52^0) \\ sen(52^0) & \cos(52^0) \end{bmatrix}$
> (E1, 2016)
> Foram multiplicados a matriz de reflexão em torno da origem e a matriz de rotação de um ângulo.
> $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(52^0) & -sen(52^0) \\ sen(52^0) & \cos(52^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(52^0) & sen(52^0) \\ -sen(52^0) & -\cos(52^0) \end{bmatrix}$
> (E2, 2016)

Em relação aos 14% de respostas consideradas parcialmente corretas, notou-se a existência de dificuldades de expressão por meio da linguagem natural ou simbólica. Como exemplos, podem ser citados os registros:

> Matriz inicial vezes uma matriz de rotação de 52º, seguido de uma reflexão em torno da origem

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\left(52^0\right) & -sen\left(52^0\right)\\ sen\left(52^0\right) & \cos\left(52^0\right)\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}0{,}2 & -1{,}1 & -0{,}3 & 1\\ -1{,}4 & -3 & -3{,}6 & -2\end{bmatrix}$$ (E9, 2016)

Matriz de rotação (52º) e matriz de reflexão em torno da origem, obtida através do produto entre elas (E21, 2016)

Destaca-se que o estudante E9, apesar de explicar corretamente em linguagem natural como se obtém a composição de transformações, ao usar a linguagem simbólica para explicar o raciocínio, apresenta um erro conceitual (o primeiro produto de matrizes indicado não existe). Além disso, apesar de alguns estudantes argumentarem corretamente por meio da linguagem natural, nota-se que há dificuldades em se expressarem por meio da linguagem simbólica, pois não apresentaram como a composição foi calculada algebricamente.

Quanto às repostas consideradas equivocadas, verificou-se que a maioria explicou como procedeu ao cálculo das transformações dos vértices da figura original, mas não responderam à pergunta realizada. Nessa alternativa, também foram identificadas dificuldades de expressão em linguagem corrente. Como exemplos, são apresentados os seguintes registros:

> Foram utilizados os valores opostos nas questões 4 e 5(a). As matrizes de transformação envolveram um ângulo de 52º e seu seno e seu cosseno. A forma como foi calculada: utilizamos a primeira matriz, composta por quatro elementos, usando o valor decimal dos seno e cosseno e, posteriormente, cada posição do retângulo foi calculada separadamente (E15, 2016).
> A matriz utilizada foi obtida pelo produto das matrizes de transformação e coordenadas dos vértices da figura (E16, 2016).
> $\begin{bmatrix}-\cos\left(52^0\right) & sen\left(52^0\right)\\ -sen\left(52^0\right) & -\cos\left(52^0\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix}=$ Foi utilizado o produto de matrizes (E19, 2016).

De modo, geral, observa-se que, na tarefa realizada pelos estudantes do G2, apareceram dificuldades de tratamento no registro simbólico, devido a erros de cálculos algébricos dos pontos transformados, bem como foram identificadas dificuldades de conversão do registro simbólico para o gráfico. Ambos dificultaram as interpretações, realizadas em algumas alternativas, especialmente aquelas que envolviam matrizes de rotação. Destaca-se que esses erros poderiam ter sido evitados caso os estudantes de G2 também tivessem tido oportunidade de fazer uso de recursos tecnológicos digitais, de modo adequado.

No G2, também foram identificadas dificuldades na elaboração de registros com uso apropriado da linguagem natural ou da linguagem simbólica. Verificou-se que alguns estudantes apresentaram falta de clareza dos conceitos ou fizerem uso inadequado de termos próprios da Álgebra Linear, que os possibilitassem se expressar corretamente, de modo a explicitar as transformações abordadas.

6.2.13 Tarefa 15

O objetivo dessa tarefa consistiu em possibilitar aos estudantes a percepção sobre o uso de transformações lineares em problemas de criptografia.

Salienta-se que somente nessa tarefa foi realizada a troca de abordagem pedagógica. Assim, foi propiciada aos estudantes do G2 a exploração do uso de recursos tecnológicos do *MATLAB,* enquanto que os estudantes do grupo G1 não tiveram essa possibilidade.

A ideia foi propiciar a troca de experiências, com a realização de uma tarefa com uma didática diferente daquelas que estavam sendo vivenciadas por eles, em outras tarefas, para que pudessem perceber diferenças, vantagens ou desvantagens de ambas abordagens. Assim, os estudantes do G2 realizaram a tarefa no laboratório computacional da Universidade, enquanto os estudantes do G1 a desenvolveram em sala de aula tradicional.

Nos dois grupos, foram apresentadas informações gerais e conceitos básicos sobre criptografia, por meio do uso de vídeo disponível na rede e de *slides* elaborados pela professora. Também foi apresentado o método das transformações lineares, como um método alternativo para envio de mensagens criptografadas, o que permitiu mostrar aos estudantes aplicações do uso de matrizes, do produto entre matrizes e da matriz inversa, em processos de codificação e de decodificação de mensagens.

Destaca-se que, ao se desenvolver essa tarefa, buscou-se estimular a aprendizagem significativa, por meio da interação entre conceitos subsunçores, já existentes sobre transformações lineares (abordados em sala de aula), e novas informações obtidas, acerca de processos envolvidos em métodos de criptografia, visando propiciar um ambiente de aprendizagem favorável à construção de novos conhecimentos, por meio da reconciliação integrativa.

Após a explicação do método, foi solicitado aos estudantes que se reunissem em duplas para pensarem nas resoluções dos problemas propostos.

No grupo G1, participaram dessa tarefa 24 estudantes, totalizando 12 duplas, enquanto que, no grupo G2, participaram 22 estudantes, totalizando 11 duplas. Os resultados gerais para G1 e G2 estão apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 - Resultados de respostas da Tarefa 15 para G1 e G2

Grupo	Cálculos corretos apresentados (%)		Concluiu (%)		Generalizou (%)		Dificuldades (%)	
	Sim	Parcial	Sim	Não	Sim	Não	Linguagem natural	Linguagem simbólica
G1	85	15	69	23	85	15	85	8
G2	100	0	17	83	42	58	25	58

Fonte: Autora

No G1, verificou-se que 85% dos cálculos apresentados estavam corretos. No G2, no qual as duplas puderam realizar os cálculos por meio do *software MATLAB*, foi possível perceber que 100% dos cálculos apresentados foram considerados corretos.

No G1, 69% das duplas concluíram a tarefa. Apenas as duplas 5 e 7 não conseguiram finalizar a questão (5), pois não conseguiram calcular manualmente a matriz inversa pelo processo prático, e a dupla 8 não concluiu a resposta da questão 4, pois deixou como respostas os números obtidos pela transformação armazenados numa matriz resultante, não fornecendo o código final sequencial, referente à palavra codificada.

No G2, foi possível constatar que apenas 17% conseguiram concluir toda a tarefa, apesar de os estudantes terem o auxílio do computador, para a realização dos cálculos solicitados. Nesse caso, somente as duplas 4 e 7 conseguiram concluir a tarefa e, com exceção delas e da dupla 12, todas as outras duplas não concluíram ou não fizeram a questão 4. A dupla 12 apenas não conseguiu fazer a questão 3. Dentre todas as duplas que não resolveram a questão 4, apenas a dupla 3 justificou que não conseguiu resolver por falta de tempo. Mas, provavelmente, pode ser que esse tenha sido o motivo pelo qual tantas duplas não tenham conseguido concluir toda a tarefa.

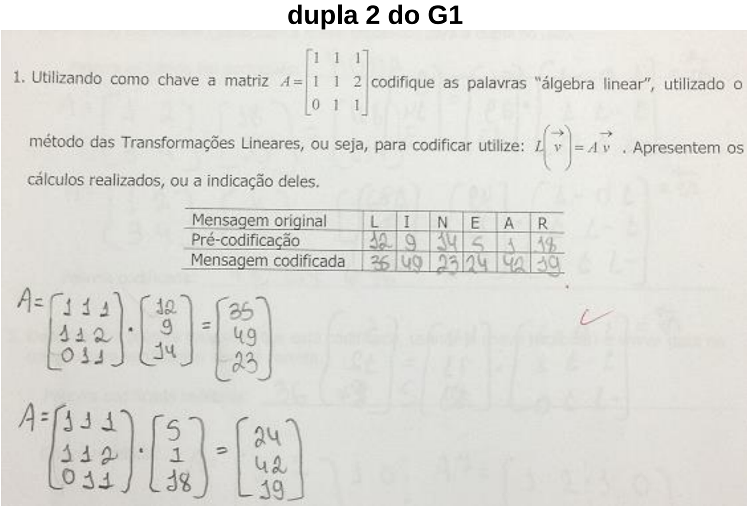
Pela observação, realizada em sala de aula, foi possível perceber que os estudantes do G2, devido à falta de familiaridade com o recursos tecnológicos digitais, sentiram dificuldades na inserção dos dados de modo adequado, para que os cálculos pudessem ser executados corretamente, por meio de fórmulas adequadas. Essas dificuldades demandaram mais tempo, o que certamente os impossibilitou de finalizar a tarefa.

Ao serem questionados se seria possível generalizar o processo de codificação ou de decodificação por meio de um único produto matricial, verificou-se, no G1, que 85% das duplas conseguiram perceber esse fato, o que inclusive explicitaram por meio de seus registros numéricos. Também foi possível perceber que, ao tentarem responder a essa pergunta em linguagem natural, os estudantes mostraram dificuldades para se expressar, pois referiram apenas o modo de armazenamento dos vetores, mas não o produto envolvido na transformação, conforme apresentado a seguir:

> Sim, basta dividir as letras em grupos de 3 (quantidade de colunas da matriz chave) e dispô-las em colunas (D1, 2016).
> É possível, desde que a matriz de pré-codificação tenha 3 linhas, não importando o número de colunas, mas todas as colunas precisam ter 3 linhas (D4, 2016).
> É possível codificar fazendo apenas um produto de matrizes, basta armazenar a pre-codificação em uma matriz 3X2 e fazer o produto com a matriz a (D6, 2016).

Percebe-se que, no registro da dupla D6, além do erro de representar uma matriz por uma letra minúscula "a", apesar de os estudantes citarem o produto entre matrizes, eles não esclarecem como os números devem ser armazenados na matriz 3X2 e sugerem que a ordem do produto deveria ser 3X2 por uma 3X3, o que não pode ser calculado. Destaca-se que, dentre as duplas de G1 que perceberam a generalização, apenas a D2 apresentou dificuldades com uso da linguagem simbólica, conforme apresentado na Figura 38.

Figura 38 - Uso equivocado da linguagem simbólica no cálculo de transformações lineares da dupla 2 do G1



Fonte: D2– G1 (2016)

Dentre os 15% do G2 que não conseguiram perceber a generalização, podem ser citados os seguintes exemplos:

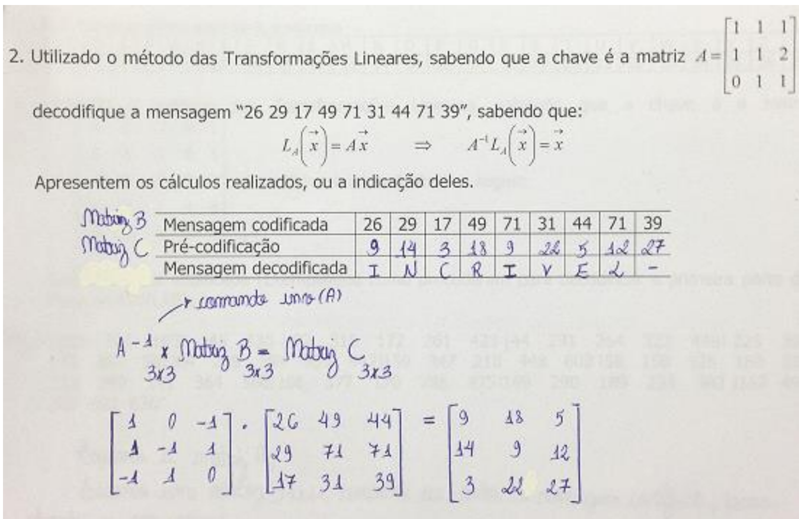
> Não, pois a matriz chave é 3x3 e a palavra a ser codificada tem 6 letras, então não é possível realizar apenas um produto, é necessário dividir em dois a palavra (3 letras cada) e realizar dois produtos (D2, 2016).
> Não, pois não é possível multiplicar uma matriz de ordem 3x3 por outros de ordem 6x1. Logo não existiriam linhas suficientes na primeira matriz para ser multiplicada para cada elemento da 2ª matriz (D11, 2016).

No G2, ao serem questionados se seria possível generalizar o processo de codificação ou de decodificação por meio de um único produto matricial, constatou-se que 42% das duplas perceberam que seria possível. Nesse caso, apenas 17% conseguiram se expressar corretamente em linguagem natural e 25% apresentaram dificuldades em suas respostas. Como exemplos de respostas consideradas corretas:

> Sim, fazendo uma matriz 3x5 para a pré-codificação, preenchendo os dados por colunas ($a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{12}, \ldots$). Assim, a matriz $A_{3\times3}$ vezes a matriz $B_{3\times5}$ (de pré-codificação) resultará na matriz $C_{3\times5}$ (da mensagem codificada). Distribuindo a mensagem pré-codificada em uma matriz com mesmo número de linhas da matriz chave, em quantas colunas forem necessárias, permitindo a multiplicação (D4, 2016).
> Pode ser feito! Fazer A vezes a pré-codificação em um a matriz 3x5 (D8, 2016).

Destaca-se que os estudantes das duplas D4 e D8, além da explicação em linguagem natural, também apresentaram cálculos numéricos que comprovaram suas percepções. Um exemplo desses registros pode ser visualizado na Figura 39.

Figura 39 - Cálculos numéricos da decodificação realizada pela dupla D4 (G2)



2. Utilizado o método das Transformações Lineares, sabendo que a chave é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

decodifique a mensagem "26 29 17 49 71 31 44 71 39", sabendo que:

$$L_A(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}L_A(\vec{x}) = \vec{x}$$

Apresentem os cálculos realizados, ou a indicação deles.

Matriz B	Mensagem codificada	26	29	17	49	71	31	44	71	39
Matriz C	Pré-codificação	9	14	3	18	9	22	5	12	27
	Mensagem decodificada	I	N	C	R	I	V	E	L	-

comando uns (A)

$A^{-1}_{3x3} \times \text{Matriz } B_{3x3} = \text{Matriz } C_{3x3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 26 & 49 & 44 \\ 29 & 71 & 71 \\ 17 & 31 & 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 & 5 \\ 14 & 9 & 12 \\ 3 & 22 & 27 \end{bmatrix}$$

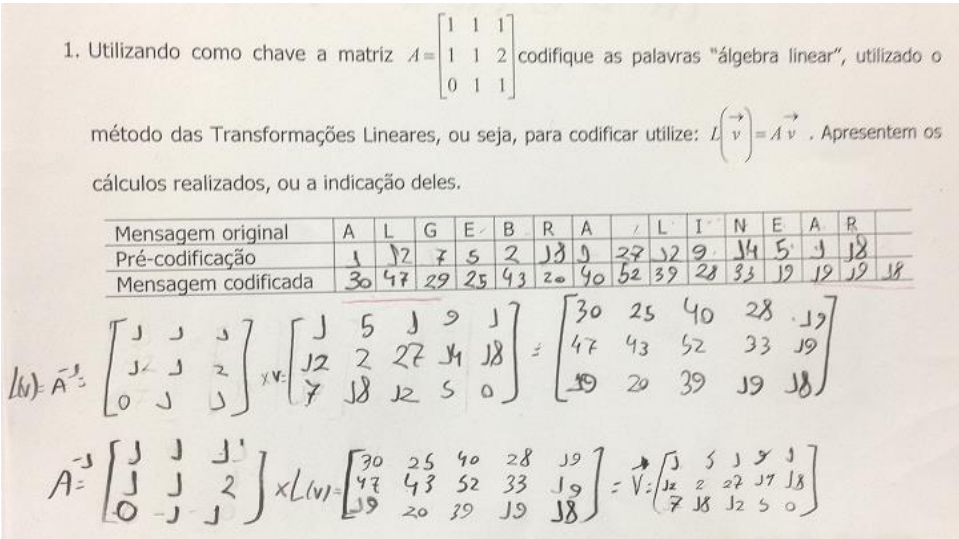
Fonte: D4– G2 (2016)

Em relação às respostas consideradas parcialmente corretas, verificou-se que os estudantes do G2 apresentaram dificuldades no uso da linguagem natural.

> Sim, armazenando os vetores em uma matriz que possua o mesmo número de linhas que a matriz chave, para poder efetuar o produto (D6, 2016).
> Sim, pois pode-se armazenar os vetores em uma única matriz e multiplicá-la por uma matriz chave para codificá-la (D9, 2016).
> Sim é possível codificar apenas com um produto, desde que a ordem das matrizes seja compatível para a multiplicação (D12, 2106).

Apenas a dupla D12 apresentou cálculos numéricos que comprovam suas compreensões, apesar de apresentarem dificuldades no uso da linguagem simbólica, conforme pode ser observado na Figura 40.

Figura 40 - Cálculos numéricos da codificação realizada pela dupla D12 (G2), com dificuldades no uso da linguagem simbólica



Fonte: D12– G2 (2016)

De modo geral, no G1, verificou-se que em 85% dos registros das duplas foram identificadas dificuldades no uso da linguagem natural e em apenas 8% de percebeu-se dificuldades relativas ao uso da linguagem simbólica. Já no G2, foram identificadas dificuldades no uso da linguagem simbólica em 58% dos registros e em apenas 25% deles foram identificadas dificuldades relativas ao uso da linguagem natural.

O baixo percentual de dificuldades encontrado no uso da linguagem natural no G2 se explica pelo fato de que em 58% dos registros os estudantes afirmam que não seria possível generalizar os processos de codificação ou de decodificação por meio de um único produto matricial, e, assim, não encontraram dificuldades para expressar a justificativa, que consideraram estar correta.

Nessa tarefa, destacam-se os altos percentuais de dificuldades: (i) em relação ao uso das linguagens natural dos estudantes do G1 (85%), nas tentativas de justificarem a possibilidade de proceder a codificação ou decodificação por meio de um produto único e (ii) em relação ao uso da linguagem simbólica dos estudantes do G2 (58%) no desenvolvimento das questões apresentadas.

No entanto, verificou-se que, apesar dessas dificuldades, a maioria dos estudantes, dos dois grupos, chegou às respostas corretas, tanto no processo de codificação quanto no processo de decodificação.

Também chamou a atenção as dificuldades encontradas por alguns estudantes do G1 para o cálculo numérico (manual) da matriz inversa, o que os impediu de finalizar a tarefa. Provavelmente essas duplas teriam êxito caso tivessem feito uso dos recursos tecnológicos digitais do aplicativo *MATLAB*.

Além disso, foi possível notar que a falta de familiaridade com os recursos tecnológicos digitais do *MATLAB* dos estudantes do G2 acabou dificultando a resolução das questões e exigiu um tempo maior para que fossem desenvolvidas. Também se verificou que 58% das duplas do G2 não foram capaz de pensar modos diferentes de armazenamento, tendo em vista otimizar os processos de codificação e decodificação. Assim, foi possível concluir que o objetivo pretendido no G2, relativo ao uso de recursos do software *MATLAB* para agilizar o processo de codificação e decodificação, tendo em vista estimular a criatividade e a análise crítica de resultados, não foi alcançado por muitos estudantes.

Esse é um indicativo que permite afirmar que o uso isolado de tecnologias digitais não potencializou a aprendizagem para a maioria dos estudantes de G2. O fato de os estudantes não estarem familiarizados com os recursos tecnológicos digitais disponíveis, tendo em vista explorá-los de modo adequado nas tarefas propostas, dificultou o processo, ao invés de facilitá-lo.

6.3 Análise sobre conhecimentos prévios, ampliados ou construídos e aprendizagem significativa

Nessa seção são apresentados os resultados da análise das respostas dos questionários iniciais, intermediários e finais, a partir dos quais buscou-se inicialmente identificar conhecimentos prévios, ou seja, o que os estudantes já traziam presentes em sua estrutura cognitiva antes da intervenção e, posteriormente, conhecimentos construídos ou ampliados ao longo do semestre. Buscou-se, também, identificar conhecimentos que remetessem a ocorrências de compreensões efetivas dos conceitos tratados e de aprendizagens significativas no processo, conforme mostrado a seguir.

6.3.1 Identificação de conhecimentos prévios

Nessa seção, são apesentados os resultados sobre a identificação de conhecimentos prévios dos estudantes, no início da disciplina, identificados por meio da análise de conteúdo, do tipo categorial, realizado com dados coletados por meio de questionários, aplicados em ambos os grupos.

Destaca-se que nos dois grupos foram identificadas as mesmas três categorias finais emergentes.

A seguir, apresenta-se a descrição da análise realizada. Cabe ressaltar que essas apresentações são compostas por descrição das categorias, interpretações e conclusões nas quais destacam-se trechos dos registros dos participantes como exemplos.

6.3.1.1 Conhecimentos prévios - G1

Ao serem aplicadas as técnicas da análise de conteúdo do tipo categorial na avaliação de todas as respostas escritas relativas do questionário inicial (ver Anexo 2), fornecidas por 36 participantes do G1, foi possível identificar três categorias finais emergentes: "*Justificativas sobre dificuldades na explicação de conceitos e usos de conhecimentos prévios*" (40,13% das unidades de registros do G1), "*Compreensão sobre conceituação de conhecimentos prévios*" (37,5% das unidades de registros do G1) e "*Percepções de usos de conhecimentos prévios*" (22,37% das unidades de registros do G1), as quais são apresentadas a seguir.

Destaca-se que, ao ser realizada a unitarização das respostas, no G1 foram constatadas 152 unidades de registros que possibilitaram identificar as três categorias finais, descritas a seguir.

(i) Justificativas sobre dificuldades na explicação de conceitos e de usos de conhecimentos prévios - G1

Nessa categoria final, acerca das justificativas sobre dificuldades de explicação de conceitos e de usos de conhecimentos prévios, que representou 40,13% das unidades de registros, foram identificadas cinco categorias intermediárias: “*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de matrizes*” (13,16%), “*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de determinantes*” (12,5%), “*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de funções lineares*” (5,92%), “*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de sistemas lineares*” (5,26%) e “*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de vetores*” (3,29%). A seguir, apresenta-se o modo como estes estudantes justificaram suas dificuldades.

Na categoria intermediária “*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de matrizes*”, foi possível identificar que 55% dos estudantes sentiram dificuldades em suas explicações. Nesse caso, verificou-se que 33% afirmaram que não conseguiam se lembrar do conceito ou dos seus usos e 14% referiram-se apenas ao fato de não conseguir se lembrar do conceito de matrizes, conforme mostrado a seguir:

> Sim, me lembro de ter aprendido o básico de matrizes, mas não me recordo o que são e nem para que são utilizadas. (A9, 2016)
> Lembro de ter aprendido de forma rápida. Não sei o que são ou como utilizá-los na área de Engenharia Civil ou em qualquer outra área. (A33, 2016)
> Eu aprendi, mas não me lembro o que é. (A21, 2016)

Nesses registros, aparece a indicação de uma aprendizagem superficial, sem aprofundamento, quando os estudantes afirmam ter aprendido o “básico” ou ainda “de forma rápida”.

Verificou-se, também, que 8% dos estudantes afirmaram não saber se expressar sobre conceitos ou usos. Como exemplo: “*Lembro mas não sei explicar*.” (A3, 2016) e *“[...] não sei definir sua função ou definição, mas sei resolvê-la.”* (A23, 2016). Nesses exemplos, foram observadas dificuldades na elaboração de ideias para expressar o conhecimento em linguagem natural, que os estudantes afirmam ter. Provavelmente, essas dificuldades de expressão são devidas ao fato de ainda não possuírem a compreensão do referido conceito.

Conclui-se que, na categoria intermediária “*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de matrizes*”, apesar de 100% afirmarem lembrar-se de ter aprendido esse conceito anteriormente, 55% dos estudantes do G1 indicaram sentir dificuldades para lembrarem-se ou para expressarem-se, ou seja, provavelmente deve ter ocorrido a aprendizagem mecânica sobre matrizes e possibilidades de usos para a maioria dos estudantes, uma vez que esses conceitos foram facilmente esquecidos por eles.

Na categoria intermediária "*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de determinantes*", que representou 12,5% das unidades de registros, verificou-se que 56% dos estudantes apresentaram tais dificuldades.

Foi possível identificar que 33% desses estudantes afirmaram não conseguir lembrar-se do conceito ou de seus usos enquanto 17% disseram não se lembrar apenas do conceito. Como exemplos:

> Lembro de ter aprendido, porém não lembro conceito e utilização. (A5, 2016).
> Aprendi porém não lembro o que são e para que servem. (A20, 2016).
> [...] O mesmo caso, não me recordo pelo nome mas ao começar estudar saberei um pouco. (A29, 2016).

Verificou-se que 6% dos estudantes afirmaram que não sabem explicar o conceito de determinantes. Como exemplo: *"Sim, aprendi no 2º ano do ensino médio, porém não sei me esclarecer e explicar."* (A6, 2016).

Assim, como no caso de matrizes, nota-se que no caso de determinantes também há o indicativo de que houve aprendizagem mecânica, pois apesar de 80% dos estudantes indicarem que lembram-se de ter visto esse conteúdo, observou-se que a maioria justificou não conseguir explicar ou não conseguiu se lembrar do conceito ou de seus usos.

Na categoria intermediária "*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de funções lineares*", que representou 5,92% das unidades de registros, constatou-se que 26% dos estudantes apresentaram dificuldades em suas explicações.

Verificou-se que 17% deles afirmaram não conseguir lembrar-se do conceito de funções lineares. Como exemplos:

> Lembro pouco, mas aprendi no ensino médio e graduação. (A2, 2016).
> Não estudei este conteúdo tão profundamente. Tive função de primeiro grau e de segundo grau. (A18, 2016).
> Já tive um estudo mas não me recordo como é. (A35, 2016).

Nessa categoria intermediária, também foi possível identificar que 6% afirmaram não se lembrar do conceito e de usos e que 3% não souberam explicar nem o conceito de funções lineares e nem para que servem, conforme mostrado a seguir: "*Lembro de ter estudado mas não sei o que são ou para que servem*" (A33,

2016) ou "*Sim, aprendi no 2º ano do ensino médio, porém não sei me esclarecer e explicar.*" (A6, 2016).

Os registros citados ilustram bem o que nota-se sobre muitos conceitos aqui investigados. Os estudantes afirmam ter aprendido, mas se lembram "pouco" ou "não sabem explicar". Lembram-se de ter estudado, mas não se recordam do significado. Afirmam que não estudaram aprofundadamente, mas não conseguem explicar do que lembram. Nesses casos, três situações podem ter acontecido. Os estudantes podem estar iludindo-se, acreditando ter aprendido algo que de fato não compreendem e, por esse motivo, não são capazes de explicar o conceito abordado; podem lembrar-se de fatos isolados e, desse modo, não conseguem elaborar uma ideia completa para explicar seu conhecimento de modo coerente; ou, ainda, podem não ter se sentido confiantes para expressarem suas lembranças, mesmo que não descrevessem o conceito completamente.

Na categoria intermediária "*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de sistemas lineares*", que representou 5,26% das unidades de registros, verificou-se que 22% dos estudantes sentiram dificuldades em suas explicações.

Nesse caso, 8% dos estudantes referiram-se apenas ao fato de não conseguirem lembrar-se do conceito e 8% deles afirmaram não se lembrar do conceito e de usos de sistemas lineares. Conforme mostrado a seguir:

> Não lembro do conteúdo. (A12, 2016)
> Não lembro o que são sistemas lineares, mas já devo ter visto sim. (A29, 2016)
> Talvez não me recordo pelo nome. (A29, 2016)
> Lembro vagamente o que aprendi porém não me recordo para que servem e o que são. (A20, 2016)
> Ouvi falar mas não me lembro muito bem, e não sei para que servem. (A36, 2016)

As justificativas remetem à falta de profundidade ou de significado do conceito, o que indica a ausência da aprendizagem significativa.

Além disso, 6% dos estudantes justificaram ter aprendido, mas não sabiam o conceito ou não sabiam se explicar, conforme os exemplos: *"Lembro mas não sei explicar."* (A3, 2016) e *"[..] Estudei no pré-vestibular e usava para encontrar as soluções de um sistema, mas não sei a função disso ou onde é aplicado."* (A33, 2016).

Nesse caso, apesar de 58% terem indicado que lembravam-se de ter aprendido ou estudado sistemas lineares, 33% forneceram explicações, 22%

justificaram sentir dificuldades de lembrança ou de capacidade de explicação do conceito de sistemas lineares ou de seus usos e 3% simplesmente disseram que lembravam-se mas não forneceram explicação alguma. Esses resultados também confirmam a hipótese da aprendizagem ter sido mecânica.

Na quinta categoria intermediária "*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de vetores*", que representou 3,29% das unidades de registros, verificou-se que 14% dos estudantes sentiram dificuldades em suas explicações.

Constatou-se que 8% dos estudantes afirmaram não se lembrar do conceito de vetores, conforme os exemplos: *"Sim, mas bem pouco, visto superficialmente."* (A4, 2016), *"Sim, lembro de ter visto no ensino médio mas não de forma aprofundada."* (A26, 2016) e "*Estudei. Mas não lembro das outras perguntas.*" (A28, 2016).

Além disso, 3% dos estudantes disseram não saber explicar o conceito de vetores e 3% dos estudantes indicaram não se lembrar do conceito ou para que eles servem.

Assim, na categoria intermediária "*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de vetores*" também aparece a falta de profundidade, o que leva a falta de significados no tratamento desse conceito. Destaca-se que apesar de 89% afirmarem que lembram-se de ter aprendido, apenas 28% dos estudantes explicaram o conceito e apenas 14% deles preocuparam-se em justificar a dificuldade da lembrança.

(ii) Compreensão sobre conceituação de conhecimentos prévios - G1

Nessa categoria final, acerca das compreensões dos estudantes sobre conceituação de conhecimentos prévios, que representou 37,5% das unidades de registros consideradas no G1, foram identificadas cinco categorias intermediárias: "*Conceituou função linear*" (9,2%), "*Conceituou ou não conceituou matrizes*" (7,9%), "*Conceituou ou não conceituou sistemas lineares*" (7,9%), "*Conceituou vetores*" (6,58%) e "*Conceituou ou não conceituou determinantes*" (5,92%). A seguir, apresenta-se o modo como esses estudantes apresentaram suas compreensões acerca dos conceitos envolvidos.

Na categoria intermediária "*Conceituou função linear*", verificou-se que dentre 39% dos estudantes que apresentaram suas explicações, 19% deles conceituaram função linear como uma função de 1º grau e, além disso, também apareceram uma referência à sua característica geométrica e uma referência ao modo de expressão pelo registro algébrico (apesar de incompleta), conforme mostrado a seguir:

> [...] são funções de primeiro grau. (A8, 2016)
> São funções do primeiro grau que descrevem uma reta no plano cartesiano. (A12, 2016)
> [...], função de 1º grau (ax+b). (A19, 2016)

Conforme conceituam Silva e Barreto Filho (2008, p.90, grifo do autor): "a função polinomial de 1º grau em que o termo independente é nulo ($b=0$) passa a ser chamada *função linear* e tem a forma: $f(x)=ax$". Assim, verifica-se que 19% dos estudantes apresentaram conceituações próximas da conceituação considerada correta, porém, estavam incompletas. Em nenhuma explicação houve referência à necessidade do termo independente ser nulo, que é a principal característica algébrica da função linear, o que a diferencia da função de 1º grau.

Também nessa categoria intermediária verificou-se que 11% dos estudantes apresentaram explicações equivocadas para o conceito, nas quais identificam-se a falta de clareza quanto ao significado dos conceitos e das palavras utilizadas, conforme os exemplos a seguir:

> Função linear apresenta apenas o termo independente na equação. (A13, 2016)
> São equações de primeiro grau onde a variável é nula. (A17, 2016)
> É quando a variável é igual a zero e apresenta o termo independente maior que zero. (A27, 2016)
> Funções lineares é método para resolver determinados problemas. (A30, 2016).

Além disso, constatou-se que 6% dos estudantes explicaram o conceito como uma relação existente entre duas variáveis, o que remete ao conceito de função, mas não define o que significa o termo linear. Ou seja, não está errado, mas está incompleto, como pode ser verificado nos exemplos:

> Funções lineares são a relação de duas variáveis. (A7, 2016)
> Funções de graus os quais determinam por exemplo um certo valor que é variável dependente da quantidade de objetos que foram comprados. (A10, 2016)

Verificou-se, também, que apenas 3% dos estudantes apresentaram uma explicação parcialmente correta do conceito, referindo-se apenas à sua representação gráfica (geométrica), conforme mostrado a seguir: "*A função linear define uma reta que passa pela origem, [...]*" (A23, 2016).

Desse modo, em relação ao conceito função linear, foi possível concluir que apesar de 69% dos estudantes afirmarem ter lembrado que aprenderam o conteúdo anteriormente, apenas 39% deles propuseram explicações acerca de suas compreensões, sendo que 25% dos estudantes apresentaram suas conceituações de modo incompleto, 11% apresentaram conceituações consideradas equivocadas e apenas 3% dos estudantes apresentaram a compreensão do conceito do ponto de vista geométrico, mas não descreveram as características algébricas da função, o que, indicando que não seriam capazes de fazer a conversão de registros.

Assim, conclui-se que quando os estudantes referem-se ao termo “função linear” há falta de clareza em relação ao conceito e também em relação aos termos que os discentes usaram para expressarem-se, pois não foi possível identificar uma conceituação matemática, elaborada pelos estudantes, que fosse considerada adequada para descrevê-la.

Nessa categoria final, em relação aos conhecimentos prévios sobre matrizes, foi identificada a categoria intermediária “*Conceituou ou não conceituou matrizes*”, que representou 7,9% das unidades de registros consideradas.

Verificou-se que, apesar de 100% dos estudantes afirmarem lembrar-se ter aprendido esse conceito, apenas 34% dos estudantes apresentaram suas explicações sobre matrizes, as quais possibilitaram identificar duas subcategorias intermediárias: “*Conceituou matrizes*” (que representou 4,6% das unidades de registros) e “*Não conceituou matrizes*” (que representou 3,3% das unidades de registros).

Na subcategoria intermediária “*Conceituou matrizes*”, verificou-se que 19% dos estudantes conceituaram matrizes, sendo que 11% referiram-se à ideia de conjuntos organizados e 8% dos estudantes as associaram ao conceito de determinante.

Nesse caso, 11% dos estudantes apresentaram o conceito de matriz como um conjunto (ou agrupamento), em que apareceram ideias de conjuntos organizados, por linhas e colunas, com elementos numéricos ou simbólicos, envolvendo ideias de armazenamento de dados ou de agrupamentos de números. Como exemplos:

> [...] conjuntos de números organizados entre parênteses em linhas e colunas onde podia-se somar e subtrair os elementos. (A2, 2016)
> [...] conjunto retangular o qual inclui números símbolos ou expressões. (A5, 2016)

> Compreendo como dados que são armazenados em linhas e colunas. (A31, 2016)
> São agrupamentos de números em linhas e colunas. (A32, 2016)

Segundo Kolman e Hill (2006, p. 9): “Uma matriz $A_{m \times n}$ é um arranjo retangular de mn números reais (ou complexos) distribuídos em m linhas horizontais e n colunas verticais” e conforme Boldrini et al. (1980, p. 1) consiste numa “tabela de elementos dispostos em linhas e colunas”. Desse modo, conclui-se que 11% dos estudantes apresentaram explicações próximas das existentes na literatura, o que indica que compreenderam o conceito e que souberam expressar-se corretamente.

Além disso, verificou-se que 8% dos estudantes associaram o conceito de matrizes ao conceito de determinantes, afirmando que suas resoluções se dão por meio do cálculo de determinante, o que está incorreto. Essa confusão conceitual provavelmente deve-se ao fato do determinante ser definido como uma função que associa uma matriz quadrada a um número complexo. Como exemplos, podem ser citados os registros:

> A resolução se dá por meio do determinante, que é a soma das diagonais dos elementos das matrizes, subtraindo-se as diagonais inversas. (A7, 2016)
> [...] podem ser resolvidos por determinantes. (A16, 2016)

Em relação à subcategoria intermediária “*Não conceituou matrizes*”, verificou-se que 15% dos estudantes tentaram explicar o conceito, mas não conseguiram elaborar uma conceituação que pudesse ser considerada adequada. Alguns apenas exemplificaram, com matrizes numéricas ou algébricas, outro citou modos de resolução, outro referiu-se ao fato de estarem dispostas em colunas e outro estudante disse lembrar que eram usadas nomenclaturas, mas não as apresentou.

Assim, conclui-se, em relação ao conhecimento prévio sobre matrizes, que apesar de 100% dos estudantes afirmarem que lembram-se de ter aprendido o conceito, apenas 11% dos estudantes conseguiram expressar-se corretamente. Isso indica um baixo percentual de compreensão ou de capacidade de expressão verbal desses estudantes em relação a esse conceito.

Em relação aos conhecimentos prévios sobre sistemas lineares, foi identificada a categoria intermediária “*Conceituou ou não conceituou sistemas lineares*”, que representou 7,9% das unidades de registros.

De modo geral, dentre todas as respostas fornecidas pelos estudantes, 58% afirmaram lembrar-se de terem aprendido sistemas lineares anteriormente, 39% afirmaram não se lembrar de que aprendeu e 3% afirmaram não ter aprendido.

Nesse caso, verificou-se que dentre os 58% que indicaram lembrar-se de ter aprendido, apenas 35% dos estudantes tentaram explicar o conceito, o que possibilitou identificar duas subcategorias intermediárias "*Conceituou sistemas lineares*" (que representou 5,93% das unidades de registros) e "*Não Conceituou sistemas lineares*" (que representou 1,97% das unidades de registros), as quais são apresentadas a seguir.

Em relação à subcategoria intermediária "*Conceituou sistemas lineares*", que representou 26% das explicações dos estudantes, contatou-se que 14% apresentaram suas compreensões, identificando sistemas lineares como conjuntos de equações. Como exemplos:

> É um conjunto de equações lineares aplicadas num mesmo conjunto. (A5, 2016)
> Sistemas lineares são o conjunto de equações que possuem mais de uma incógnita. A partir da substituição das partes das equações, é possível obter essas incógnitas. (A7, 2016)
> São equações simultâneas com várias variáveis. (A17, 2016)
> São equações com duas ou mais variáveis. (A32, 2016)

Segundo Callioli, Domingues e Costa (1990, p. 2), um sistema linear: "é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, consideradas simultaneamente".

Além disso, segundo Steinbruch e Winterle (1987, p. 505):

> Equação linear é uma equação da forma:
> $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$
> na qual $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as variáveis; $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são os respectivos coeficientes das variáveis e b é o termo independente. [...]
> A um conjunto de equações lineares se dá o nome de sistemas de equações lineares: [...]

Considerando essas definições, percebe-se que as explicações aproximam-se das conceituações apresentadas na literatura, pois relacionam sistemas lineares a um conjunto de equações ou apenas a equações (deixando a ideia de conjunto implícita). No entanto, a primeira não faz menção ao fato de existirem várias incógnitas e as demais não apresentam a necessidade das equações serem lineares. Desse modo, verifica-se que apesar de estarem próximas da correta, as conceituações são consideradas incompletas, o que pode indicar problemas na compreensão ou dificuldade de expressão do conceito.

Além disso, verificou-se que 12% dos estudantes apresentaram conceituação equivocada, pois definiram sistemas lineares apenas como uma equação ou, ainda, apresentaram inconsistências em suas explicações, conforme mostrado a seguir:

> Uma equação aonde somente o termo independente, e a variável sendo igual a zero (A27, 2016)
> [...], são uma equação com incógnitas, assim, para descobrir os valores delas. (A35, 2016)
> Equações de 1º grau durante o ensino médio e no primeiro semestre de graduação, equações com uma variável e expoente 1. (A2, 2016)

Verifica-se, nesses registros, a falta de compreensão do conceito bem como a falta de cuidado com a expressão em linguagem natural utilizada em relação ao significado dos conceitos, o que levou ao equívoco conceitual.

Já na subcategoria intermediária "*Não conceituou sistemas lineares*", que representou 9% das explicações fornecidas pelos estudantes, verificou-se que alguns estudantes, ao invés de conceituarem sistemas lineares, apenas se referiram aos objetivos de sua resolução ou aos métodos de resolução existentes. Como exemplos:

> Sistemas lineares é um sistema onde tenho que achar a incógnita do sistema. (A30, 2016).
> São sistemas que podem ser resolvidos pelo método de escalonamento ou determinante. (A16, 2016).

Desse modo, conclui-se, em relação à compreensão de sistemas lineares, que apesar de 58% dos estudantes indicarem embrar-se de ter aprendido esse conceito, apenas 35% dos estudantes tentaram explicá-lo, sendo que dentre esses, apenas 14% apresentaram conceituações próximas das consideradas adequadas, mas que foram consideradas incompletas. Isso significa que esse conhecimento prévio estava ausente na maioria das estruturas cognitivas dos estudantes do G1.

Nessa categoria final, também foi identificada a categoria intermediária "*Conceituou vetores*", que representou 6,58% das unidades de registro.

Destaca-se também que, em relação aos conhecimentos prévios sobre vetores, verificou-se que 89% dos estudantes afirmaram lembrar-se de ter aprendido esse conceito e, ainda, 61% afirmaram ter visto esse conteúdo ou em curso pré-vestibular ou no primeiro semestre de graduação, nas disciplinas de Física ou

Álgebra Linear. Essas informações explicam o motivo de se ter verificado um percentual maior de lembranças para esse conceito, presentes em suas memórias.

No entanto, desses 89%, apenas 28% apresentaram explicações para o conceito. Nesse caso, 11% dos estudantes explicaram vetores por suas características, afirmando possuírem intensidade, direção ou sentido. Como exemplos: "*Vetores possuem intensidade, direção e sentido*" (A7, 2016) ou "*Vetores indicam sentido e direção*." (A13, 2016).

Conforme definem Ramalho Júnior, Ferraro e Soares (2009, p.116):

> Os vetores são entes matemáticos amplamente utilizados em Física. Eles representam grandezas que só ficam definidas quando são conhecidos seu módulo, sua direção e seu sentido. Grandezas desse tipo são denominadas grandezas vetoriais. [...] Vetor é o ente matemático caracterizado pelos elementos módulo, direção e sentido, sendo representado por um segmento de reta orientado.

De acordo com essa definição, verifica-se que as explicações apresentadas pelos estudantes não conceituaram, de fato, o que são os vetores, apenas descreveram suas características, o que deixa a conceituação incompleta.

Além disso, 11% dos estudantes conceituaram equivocadamente vetores como forças e também referiram-se a algumas de suas características, conforme os exemplos a seguir: "*Eles são basicamente forças que indicam um sentido.*" (A9, 2016) ou "*são forças que possuem direção, sentido e intensidade, ".* (A31, 2016).

Também na categoria intermediária "*Conceituou vetores*", verificou-se que 3% dos estudantes referiram-se à representação geométrica de vetores e 3% dos estudantes referiram-se à relação existente entre vetores e pontos do plano cartesiano, conforme os exemplos a seguir: "*[...] vetores são "setas" que determinam direção e sentido.*" (A23, 2016) *ou "Vetores são os pontos que existem no plano cartesiano (milhares de pontos)."* (A30, 2016).

Na primeira explicação, ao definir vetores como "setas", o estudante referiu-se corretamente à representação geométrica de vetores como segmentos de reta orientados. Mas, quando descreveu suas características, esqueceu-se da intensidade, o que deixa sua conceituação incompleta. A segunda explicação também está incorreta, pois define vetores apenas como pontos. A lembrança remete ao conceito de representação algébrica de vetores no plano cartesiano e de sua relação biunívoca com os pares ordenados, o que é visto na própria disciplina de Álgebra Linear. Destaca-se que o estudante A30 já havia cursado anteriormente a disciplina e, por esse motivo, deve ter lembrado-se dessa associação.

No caso de conhecimentos prévios acerca de vetores, no G1, conclui-se que, apesar de 89% indicarem que lembram-se de ter aprendido o conceito, apenas 28% propuseram explicações acerca de suas compreensões. No entanto, verificou-se que 17% apresentaram conceitos incompletos (próximos do que se considera correto) e 11% apresentaram conceituações consideradas equivocadas. Assim, nenhuma das explicações pode ser considerada totalmente correta. Isso indica que existiram dificuldades na aprendizagem matemática desse conceito, uma vez que seus significados não estão claramente presentes na estrutura cognitiva dos estudantes.

Em relação aos conhecimentos prévios acerca de determinantes, foi identificada a categoria intermediária *“Conceituou ou não conceituou determinantes”,* que representou 5,92% das unidades de registros consideradas.

Além disso, destaca-se que 80% dos estudantes do G1 afirmaram que haviam aprendido o conceito, 14% deles indicaram não se lembrar de ter aprendido e, ainda, 6% afirmaram que não aprenderam esse conteúdo anteriormente.

Apesar de 80% dos estudantes afirmarem ter aprendido, apenas 25% deles apresentaram explicações que possibilitaram identificar duas subcategorias intermediárias “*Não Conceituou Determinantes*” (que representou 4,61% dos registros) e “*Conceituou Determinantes*” (que representou 1,31% dos registros).

Na subcategoria intermediária “*Não Conceituou Determinantes*”, que representou 19% das explicações dos estudantes, verificou-se que 16% afirmaram que se lembravam que o termo era algo relacionado à matrizes e 3% deles referiu-se ao seu modo diferenciado de cálculo. Como exemplos: ”*Lembro somente ter relação com matrizes*” (A7, 2016) ou “[...] *usa-se a multiplicação e tem uma maneira diferente de resolver*.” (A22, 2016).

Segundo Boldrini et al. (1980, p. 66), o determinante se refere: “ao número associado a uma matriz quadrada $A=\left[a_{ij}\right]$ ”. Considerando esse entendimento, o qual apresenta o conceito de determinantes como uma relação entre matrizes quadradas e escalares, estabelecida por meio da fórmula de Laplace (ou por expansão em cofatores) percebe-se que na categoria intermediária “não conceituou determinantes”, apesar dos estudantes terem lembrado-se de conceitos aos quais o determinante está relacionado, não conseguiram apresentar o conceito do determinante corretamente.

Na subcategoria intermediária "*Conceituou Determinantes*", que representou 6% das explicações dos estudantes, verificou-se que eles apresentaram conceitos que foram considerados parcialmente corretos. Como exemplos:

> Associa cada matriz, quadrada, transformando em um número real. (A15, 2016)
> [...] Seriam os números de uma matriz, que por meio de algumas técnicas específicas para cada tipo de matriz, calcula-se um número resultante. (A32, 2016)

Assim, conclui-se, em relação à conceituação do conhecimento prévio sobre determinantes, que apareceu a verbalização relacionada à dificuldade de lembrança sobre a aprendizagem de determinantes e verificou-se, também, uma dificuldade ainda maior na compreensão do conceito, pois apenas 6% dos participantes foram capazes de expressar o conceito de modo parcialmente correto.

(iii) Percepções de usos de conhecimentos prévios - G1

Nessa categoria final, acerca das percepções sobre usos dos conhecimentos prévios, que representaram 22,37% dos registros considerados, foram identificadas as seguintes categorias intermediárias: "*Usos de vetores*" (9,87%), "*Usos de matrizes*" (4,6%), "*Usos de determinantes*" (3,95%), "*Usos de sistemas lineares*" (2,63%) e "*Usos de funções lineares*" (1,32%). A seguir, mostra-se o modo como estes estudantes exemplificaram suas compreensões.

Na categoria intermediária "*Usos de vetores*", que representou 9,87% das unidades de registros, verificou-se que 42% dos estudantes indicaram ter lembrado-se de aplicações. Nesse caso, 25% deles lembraram-se de seus usos na representação de forças, conforme demonstra-se a seguir:

> [...] para aplicações práticas em problemas de força. Servem para indicar no plano direção, sentido e intensidade. (A32, 2016)
> [...] usava para achar o módulo, direção e sentido de diversas forças aplicadas em um corpo para entender sua reação à essas forças. (A33, 2016)

Além disso, 14% dos estudantes lembraram-se do uso de vetores na decomposição vetorial e um estudante também lembrou-se do uso no cálculo de áreas, afirmando: *"Vetores servem para decomposição de forças, calcular áreas."* (A33, 2016).

Destaca-se que essa foi a categoria que teve maior frequência, o que indica que os estudantes do G1 lembraram-se e sentiram mais facilidade para expressarem-se em relação ao uso de vetores do que em relação aos demais conceitos prévios investigados.

Geralmente, o conceito de vetores é introduzido no ensino médio, na disciplina de física, com intuito de representação de grandezas vetoriais. Patrício (2011), ao se referir às dificuldades de aprendizagem do conceito de vetor, destaca que sua apresentação no ensino médio é predominantemente plana, e prioriza-se a aplicação em situações problema. Segundo ele: “na Física do Ensino Médio, o vetor é utilizado como uma ferramenta essencial no estudo de assuntos como cinemática, estática, dinâmica e ondulatória” (PATRÍCIO, 2011, p,16). O autor indica que esse tipo de apresentação acaba por tangenciar o conceito de vetor, que vem a ser discutido somente em disciplinas específicas da área de matemática, em cursos superiores.

No caso especifico do curso de Engenharia Civil, esses conceitos são novamente retomados no início do curso, sendo usados para cálculos de esforços em estruturas, em disciplinas de Física ou Estática. Isso acaba facilitando a lembrança dos estudantes quanto aos seus usos em problemas de representação de forças ou de decomposição vetorial, o que justifica ser o mais lembrado na categoria final “*Percepções de usos de conhecimentos prévios*”.

Ainda nessa categoria intermediária, 3% dos estudantes afirmaram que os vetores são usados em situações práticas, mas não souberam exemplificar concretamente, conforme se apresenta a seguir: “*Sim, lembro em estudar vetores em Física principalmente no estudo de vetores. Servem para interpretar situações quem podem ocorrer no dia a dia ou não”* (A14, 2016).

Nesse caso, o estudante indica que sabe que são usados em problemas de física, mas não conseguiu se expressar sobre a finalidade, o que também revela dificuldades de aprendizagem ou de expressão de sua compreensão.

Cabe destacar que o percentual de lembrança ou de capacidade de expressão em linguagem natural apresentado pelos estudantes nessa categoria intermediária “Usos de vetores” ainda é pequeno, pois 58% deles não se lembraram ou não souberam expressar como são usados, o que é um indicativo relevante. Afinal, esse é um conceito apresentado aos estudantes desde o ensino médio, em diferentes contextos, por meio de aplicações práticas em resoluções de problemas e que poderia ter propiciado a aprendizagem significativa para a maioria deles. No entanto, não é o que se verifica.

Na categoria intermediária "*Usos de matrizes*", que representou 4,6% das unidades de registros, foi possível perceber que apenas 20% dos estudantes do grupo G1 lembram-se de contextos nos quais as matrizes podem ser utilizadas.

Dentre eles, 11% dos estudantes indicaram que seus usos estão associados à resolução de sistemas lineares e apenas um estudante (A31) lembrou-se de citar seu uso no armazenamento de dados. Como exemplos:

> Sim, forma comum para resolver os sistemas lineares. (A15, 2016)
> [...] bastante usado em programação, em algoritmos para armazenamento de dados, resoluções de sistemas lineares. (A31, 2016)
> [...] Intuito de resolução de sistemas. (A35, 2016)

Nessa categoria intermediária, 6% dos estudantes referiram-se ao uso de matrizes na resolução de determinantes. Dentre esses estudantes, apenas um afirmou não se lembrar de usos em situações práticas, mas lembrou-se de seu uso teórico, associado ao cálculo de determinantes enquanto outro se referiu ao uso no cálculo de áreas de polígonos, o que, implicitamente, remete ao conceito de determinante, conforme os registros apresentados a seguir:

> Nunca utilizei-as em algo prático, apenas resoluções de exercícios para conhecimento teórico e alguns conhecimentos prévios facilitam a resolução de determinantes. (A34, 2016)
> Podem ser utilizadas para calcular a área de um polígono a partir do conhecimento das coordenadas de seus pontos. (A7, 2016)

Também ocorreu na categoria intermediária "*Usos de matrizes*" que 3% dos estudantes afirmaram saber que as matrizes podem ser usadas no cotidiano, mas não souberam exemplificar com uma situação especifica.

Os resultados dessa categoria intermediária indicam que os estudantes do G1 que recordam-se dos "*Usos de matrizes*", lembram-se dos dois enfoques principais sobre uso de matrizes, geralmente abordados no ensino médio: uso em determinantes e na resolução de sistemas.

Como exemplo desse tipo de enfoque, pode ser citado o livro-texto de matemática de Barreto e Xavier (2008), o qual propõe o ensino e a aprendizagem de matrizes, seguido de determinantes e de resolução de sistemas lineares. Nesse livro, o capítulo sobre matrizes inicia contando um pouco da história, afirmando que seu estudo propiciará a resolução de determinantes e de sistemas lineares. Em seguida, apresenta uma definição teórica sobre conceito de matrizes, define tipos de matrizes numéricas, igualdade e operações, sem associação alguma a significados reais. Ou seja, trata do assunto como um conceito teórico e abstrato, distante do uso cotidiano dos estudantes. Apenas no final do capítulo, ou em poucos exercícios, apresenta o uso de tabelas como instrumentos para trabalhar com dados reais.

A sequência didática sugerida dificulta que estudantes percebam os diferentes usos reais que podem ser associados ao conceito. Assim, a proposta de ensino pode levar à aprendizagem mecânica, não significativa, conforme os pressupostos de Ausubel (1968), na qual os conceitos são facilmente esquecidos, justamente por não estarem associados aos conhecimentos prévios existentes.

Conclui-se que, na categoria intermediária "*Usos de matrizes*", como apenas 20% dos estudantes de G1 lembraram-se desse conceito, provavelmente a aprendizagem para a maioria dos estudantes do G2 tenha sido mecânica, pois essa informação não estava presente em suas estruturas cognitivas.

Já na categoria intermediária "*Usos de determinantes*", que representou 3,95% das unidades de registros, verificou-se que apenas 17% dos estudantes do G1 souberam citar exemplos de usos, sendo que 8% deles citaram seu uso na resolução de sistemas e apenas um estudante lembrou-se do uso associado à resolução de problemas que geravam sistemas lineares, conforme os exemplos: *"é utilizado para resolver sistemas"* (A16, 2016) e "*São utilizados principalmente na resolução de problemas envolvendo sistemas lineares."* (A32, 2016).

Além disso, 3% dos estudantes indicaram que determinantes são usados para resolver matrizes e 3% deles lembraram-se do uso de determinantes para calcular a matriz inversa. Nesses casos, as lembranças remetem aos usos teóricos apenas, sem relação com algo prático.

Na categoria intermediária "*Usos de determinantes*", 3% dos estudantes disseram lembrar-se do uso no cotidiano, mas não souberam exemplificar como, especificamente, conforme demonstra-se a seguir: *"São utilizadas para facilitar nossa vida, chegando mais rápido na resolução do problema".*

Prezotti Filho (2014) indica como problemática a abordagem de determinantes em livros didáticos do Ensino Médio, nos quais frequentemente apresenta-se sua definição como um valor numérico relacionado a matrizes quadradas, despida de significado. Segundo o autor, essa abordagem é consenso entre autores de tais livros didáticos.

Os resultados dessa categoria intermediária, sobre lembranças de usos de determinantes, indicam que, dentre os poucos que se lembraram, a maioria recorda-se de usos teóricos e apenas um estudante lembrou-se do uso desse conceito na resolução de problemas. Nesse caso, provavelmente, os estudantes ao terem contato com esse conceito, não viram exemplos de usos em situações-problema próximas de seus cotidianos. Assim, também conclui-se que o enfoque desse conteúdo no ensino médio, que privilegia a abordagem abstrata desse conceito nessa etapa do ensino, distancia-se de uma abordagem com construção de significados e contribui com a aprendizagem mecânica, o que, consequentemente, implica no seu esquecimento.

Na categoria intermediária "*Usos de Sistemas Lineares*", que representou 2,63% das unidades de registros, apenas 11% dos estudantes citaram que se lembravam de aplicações.

Nesse caso, 8% dos estudantes afirmaram que os sistemas podem ser aplicados na resolução de problemas, mas não citaram nenhum exemplo especifico. Como exemplo: *"Lembro que a partir de um problema eu posso extrair dado formando um sistema com incógnitas e números para chegar a um resultado."* (A31, 2016).

Apenas 3% deles afirmaram que sistemas lineares podem ser usados na construção de gráficos. Nesse caso, é possível que tenha ocorrido confusão sobre lembranças do uso de registros gráficos na resolução geométrica de sistemas lineares com duas variáveis.

Destaca-se que o registro gráfico é uma abordagem que, se explorada de maneira adequada, possibilita a compreensão do significado da solução de um sistema linear. Segundo Battaglioli (2008), essa proposta é pouco explorada nos livros didáticos. A autora, ao investigar a abordagem de sistemas lineares presentes em três livros didáticos do Ensino Médio, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM), segundo a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003), indica que os registros algébricos ainda são privilegiados e que os algoritmos são priorizados, em detrimento da análise de resultados para interpretação e classificação dos sistemas. A autora destaca que, apesar dos registros gráficos e do registro na língua natural estarem presentes em dois dos três livros analisados, o registro gráfico aparece em textos explicativos, sendo pouco explorado nos exercícios resolvidos ou propostos.

Desse modo, a dificuldade identificada nessa categoria intermediária, sobre a compreensão de que sistemas lineares podem ser usados na construção de gráficos, deva-se ao fato de o estudante ter tido contato com a abordagem de resolução gráfica de sistemas lineares, mas que não compreendeu o significado da construção geométrica proposta.

Salienta-se, também, que na categoria intermediária "*Usos de Sistemas Lineares*", apesar de 11% dos estudantes indicarem recordar-se de aplicações, apenas 8% deles citaram o uso na resolução de problemas, o que consiste no objetivo principal do estudo desse conceito matemático.

Desse modo, conclui-se que a maioria dos estudantes não compreende seu significado, pois não sabe explicar para que servem ou em que contexto aplicam-se. A abordagem, privilegiadamente algébrica, na resolução de sistemas, com pouca ênfase em tarefas que possibilitem reflexões por meio da articulação entre diferentes registros semióticos, não propicia um ambiente de aprendizagem que possibilite aos estudantes perceberem relações existentes entre suas diferentes representações, o que impossibilita a compreensão matemática do conceito.

Na categoria intermediária "*Usos de Funções Lineares*", que representou 1,32% das unidades de registros, constatou-se que apenas 6% dos estudantes forneceram exemplos, conforme mostrado a seguir: *"usado como função para calcular valores reais"* (A23, 2016) e *"podem servir para o cálculo do lucro/prejuízo básico de uma empresa, por exemplo"* (A4, 2016).

Essa foi a categoria intermediária de menor frequência, que indica que poucos estudantes lembraram-se em que situações as funções lineares podem ser utilizadas. Nesse caso, apareceram apenas dois tipos de lembranças: uma relativa ao uso teórico para calcular valores reais de variáveis dependentes e outra sobre o uso em uma situação prática.

Nessa categoria também se percebe a falta de compreensão do conceito, pois, de modo semelhante ao conceito de sistemas lineares, os estudantes também não conseguem perceber seus usos cotidianos ou a sua importância no desenvolvimento da ciência, relativo ao tratamento quantitativo de fenômenos.

No entanto, no caso do estudo de funções, é possível perceber que além do tratamento algébrico e abstrato também aparecem nos livros didáticos o enfoque histórico e exemplos diversificados de seus usos em diversas situações-problema que poderiam possibilitar a compreensão do objeto matemático abordado, conforme apresentado em Silva e Barreto Filho (2008). Porém, a aprendizagem significativa depende do trabalho realizado pelo professor e pelo estudante em sala de aula que pode ou não estimular a significação desse conceito.

Concorda-se com Duval (1988; 2011), que afirma que, devido à diversidade de registros de representação semiótica utilizados na representação de funções (figural, simbólico, gráfico e língua natural), a compreensão desse objeto matemático não é fácil, pois existe a dificuldade dos estudantes de estabelecerem conexões entre as diferentes representações de uma função e adquirir a habilidade de transitar entre essas representações. Essas dificuldades de compreensão ajudam a explicar o fato de 94% dos estudantes não terem recordado sobre os possíveis usos de funções lineares, conforme os resultados indicaram.

6.3.1.2 Conhecimentos prévios - G2

Ao serem aplicadas as técnicas da análise de conteúdo do tipo categorial na avaliação de todas as respostas escritas relativas ao questionário inicial (ver Anexo 2), fornecidas por 25 participantes grupo G2, também foi possível identificar três categorias finais emergentes: "*Justificativas sobre dificuldades na explicação de conceitos e usos de conhecimentos prévios*" (que representam 47,72% das unidades de registros do G2) ; "*Compreensão sobre conceituação de conhecimentos prévios*" (35,23%) e "*Percepções de usos de conhecimentos prévios*" (17,05%).

Destaca-se que, ao ser realizada a unitarização das respostas, foram percebidas 88 unidades de registros no G2, que possibilitaram identificar as três categorias finais, as quais são apresentadas a seguir.

(i) *Justificativas* sobre dificuldades na explicação de conceitos e de usos de conhecimentos prévios – *G2*

Nessa categoria final, acerca das justificativas sobre dificuldades de explicação de conceitos e de usos de conhecimentos prévios, que representou 47,72% das unidades de registros consideradas, foram identificadas cinco categorias intermediárias: "*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de matrizes*" (18,17%), "*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de determinantes*" (13,64%), "*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de funções lineares*" (6,82%), "*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de sistemas lineares*"

(5,68%) e “*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de vetores*” (3,41%). A seguir, demonstra-se o modo como estes estudantes justificaram suas dificuldades.

Na categoria intermediária “*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de matrizes*” verificou-se que 64% dos estudantes afirmaram sentir dificuldades em elaborar explicações, muito embora 80% dos estudantes responderem quelembravam-se de ter aprendido esse conteúdo anteriormente,.

Nesse caso, verificou-se que 32% dos estudantes indicaram que não se lembravam do conceito de matrizes e nem de seus usos, conforme os exemplos a seguir:

> Lembro de ter aprendido, no 2° grau, mas não lembro sua compreensão e para que são utilizadas. (E18, 2016)
> Sim, todavia não me recordo o que são e nem para que são utilizadas. (E20, 2016)

Verificou-se, também, que 12% dos estudantes, apesar de não apresentarem o conceito, referiram-se apenas ao esquecimento do uso de matrizes, conforme os exemplos:

> Não me lembro para que são utilizadas. (E6, 2016)
> Lembro de ter estudado, mas não de como são utilizadas. (E22, 2016)
> Lembro de ter estudado matrizes durante o ensino médio, porém não lembro para que são, apenas como são representadas. (E23, 2016)

Além disso, 8% dos estudantes indicaram não se lembrarem apenas do conceito, apesar de um estudante citar conceitos relacionados, conforme apresentado a seguir:

> Lembro de ter aprendido, mas não exatamente do conteúdo (E17, 2016)
> Me lembro vagamente do material passado no ensino médio, lembro-me sobre as matrizes inversas, Gauss-Jordan, determinantes e outros métodos. (E4, 2016)

Ainda nessa categoria intermediária, 8% dos estudantes, após se referirem ao conceito, afirmaram não saber em que contexto as matrizes são utilizadas, conforme mostrado pelos registros apresentados a seguir: “*Porém não sei para que são utilizadas*” (E8, 2016) ou, ainda, “*No entanto, não sei para que são utilizadas*” (E12, 2016).

Assim, foi possível concluir, na categoria intermediária “*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de matrizes*”, que apesar de 80% dos estudantes do G2 afirmarem lembrar-se de terem aprendido sobre matrizes e seus usos anteriormente, verificou-se que 64% deles justificaram sentir dificuldades em elaborar suas explicações. Em todos os casos apresentados nos quais os estudantes indicam que não se recordam do conceito ou do uso de matrizes, verifica-se que a aprendizagem foi mecânica, pois eles lembram-se de, em algum momento, já ter contato com essas informações, mas não conseguem explicar os conceitos. Nesse caso, não houve aprendizagem significativa, pois os conhecimentos não permaneceram nas estruturas cognitivas dos estudantes.

Apenas 4% (um estudante) indicaram não saber se expressar, afirmando: "*Sim, porém não sei explicar o que são, nem para que servem.*" (E10, 2016). Nesse caso, o estudante expressa, literalmente, sua dificuldade na elaboração de ideias para expressar seu conhecimento em linguagem natural. Porém, salienta-se que a dificuldade de expressão pode estar associada ao fato dele ainda não ter compreensão completa do conceito.

Na outra categoria intermediária "*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de determinantes*", que representou 13,64% das unidades de registros e 48% dos estudantes, verificou-se que 32% dos estudantes afirmaram não se lembrar do conceito de determinantes, nem de seus usos; 8% afirmaram ter aprendido, mas não conceituaram e disseram não saber para que serve; 4% afirmaram que não compreendem o conceito de determinantes, nem seus usos e 4% afirmou não se lembrar do uso de determinantes. A seguir, são apresentados alguns registros que ilustram esses indicativos:

> Aprendi no ensino médio, porém não me recordo o que é e utilização. (E14, 2016)
> Sim, aprendi, porém não sei para que são utilizadas. (E10, 2016)
> Foge-me sua compreensão e para que são utilizadas. (E18, 2016)

Assim, na categoria intermediária "*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de determinantes*", verificou-se que apesar de 60% dos estudantes do G2 afirmarem que se lembravam de ter aprendido esses conteúdos, 48% deles indicaram sentir dificuldades na lembrança ou na compreensão de determinante. Assim como ocorreu com o conceito de matrizes, foi possível perceber que provavelmente houve aprendizagem mecânica, pois se observou que 52% indicaram não se lembrar do conceito ou de seus usos. Apenas um estudante reconheceu que não compreende o conceito ou os usos de determinantes.

Já na categoria intermediária "*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de funções lineares*", que representou 6,82% as unidades de registros, foi possível constatar que 24% dos estudantes apresentaram dificuldades em suas explicações. Nesse caso, 20% afirmaram ou indicaram não se lembrarem do conceito de funções lineares nem de seus usos e 4% afirmaram não compreender o conceito. Como exemplos:

> Me recordo levemente então melhor não opinar. (E4, 2016).
> Lembro dos gráficos vagamente. (E3, 2016).
> Lembro de ter estudado no ensino médio, porém não recordo para que servem. (E23, 2016).
> Realmente, algo do qual falta-me compreensão. (E18, 2016).

Nos registros supracitados verificam-se os termos "*recordo levemente*" ou "*lembro...vagamente*", que indicam a falta de clareza do conceito ou, de fato, a ausência desse conhecimento prévio. Os estudantes afirmam ter aprendido o conceito anteriormente, mas não conseguem explicar suas compreensões.

Assim como foi destacado no G1, as respostas fornecidas pelos estudantes do G2 indicam que, possivelmente, eles lembram-se de fatos isolados, o que os impossibilita apresentar o conceito de modo adequado. Esse fato também remete à falta de compreensão, ou de aprendizagem significativa, que impede a elaboração de uma explicação coerente para expressar o conceito corretamente.

Destaca-se, também, que aparece, nessa categoria intermediária, a insegurança que alguns estudantes sentem ao serem questionados sobre conceitos matemáticos, o que pode ser percebido no registro do estudante E4, ao justificar que é "*melhor não opinar*" por se recordar "*levemente*" sobre o conceito.

Da experiência vivenciada em sala de aula, percebe-se que os estudantes das áreas das ciências exatas, nesse caso do curso de Engenharia Civil, sentem inseguranças e dificuldades no uso da linguagem natural para explicar seus raciocínios lógico-matemáticos, o que se verifica explicitamente no registro do estudante E4. Essa dificuldade, ou insegurança, pode ter influenciado os estudantes, o que explica a ocorrência de tantas respostas curtas e vagas, que muitos participantes da pesquisa forneceram em relação às perguntas realizadas.

Na categoria intermediária "*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de sistemas lineares*", que representou 5,68% das unidades de registros, verificou-se que 20% dos estudantes do G2 sentiram dificuldades na elaboração das explicações apresentadas e que, dentre eles, 16% indicaram não se lembrarem do conceito de sistemas lineares, nem de seus usos, e 4% indicaram não se recordarem do conceito de sistemas lineares, conforme mostrado a seguir:

> Sistemas lineares, realmente é algo esquecido. (E18, 2016)
> Não lembro sobre esse assunto, e por isso não sei responder para que eles servem. (E23, 2016)
> Sistemas lineares resolvem problemas como já se descreve “lineares”. Algo em especifico não me recordo no momento. (E4, 2016)

No grupo G2, apenas 36% indicaram lembrar-se de ter aprendido ou estudado sistemas lineares anteriormente. Além disso, dentre esses 36%, verificou-se, nessa categoria, que 20% deles justificaram sentir dificuldades de lembrança ou de capacidade de explicação do conceito de sistemas lineares ou de seus usos, o que também confirma a hipótese da aprendizagem ocorrida ter sido mecânica.

Na categoria intermediária “*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de vetores*”, que representou 3,41% das unidades de registros, verificou-se que 12% dos estudantes sentiram dificuldades em suas explicações.

Constatou-se que 8% dos estudantes afirmaram não se lembrarem do conceito de vetores, nem de seus usos, conforme os exemplos: *“Lembro da professora cobrando, mas não lembro para que são e para que serve”* (E7, 2016) ou *“Sim, semestre passado, mas não lembro”* (E16, 2016). Além disso, o estudante E14, que representou 4% dos estudantes, não respondeu às perguntas, apenas afirmou ter aprendido superficialmente: “*Aprendido EM e primeiro semestre do curso, porém em forma iniciada*” (E14, 2016), o que indica que também não se lembra do conceito de vetores, nem de seus usos.

Assim, na categoria intermediária “*Dificuldades na explicação de conceitos e usos de vetores*” também aparece a falta de compreensão desse conceito. Destaca-se que apesar de 92% afirmarem que lembram ter aprendido vetores anteriormente, apenas 44% dos estudantes apresentaram explicações sobre o conceito e usos e, além disso, 12% deles indicaram sentir dificuldades para explicá-los.

(ii) Compreensão sobre conceituação de conhecimentos prévios - G2

Nessa categoria final acerca das compreensões dos estudantes sobre conceituação de conhecimentos prévios, que representou 35,23% das unidades de registros consideradas no G2, foram identificadas cinco categorias intermediárias: “*Conceituou ou não conceituou vetores*” (11,34%), “*Conceituou ou não conceituou matrizes*” (10,21%), “*Conceituou ou não conceituou determinantes*” (5,7%), “*Conceituou sistemas lineares*” (4,56%) e “*Conceituou função linear*” (3,42%). A seguir, demonstra-se o modo como estes estudantes apresentaram suas compreensões acerca dos conceitos envolvidos.

Na categoria intermediária “*Conceituou ou não conceituou vetores*”, que representou 11,34% das unidades de registro, de modo geral, em relação aos conhecimentos prévios sobre vetores, verificou-se, no G2, que 92% dos estudantes afirmaram lembrar de ter aprendido esse conceito. Destaca-se, ainda, que 20% dos estudantes afirmaram ter visto esse conteúdo no ensino médio e 52% deles o viram no primeiro semestre de graduação, na disciplina de Física, o que pode explicar o motivo dessa categoria ter sido a de maior frequência nesse grupo, indicando o maior percentual de lembranças desse conceito em suas memórias.

No entanto, desses 92%, apenas 40% deles apresentaram explicações para o conceito, o que possibilitou identificar duas categorias intermediárias: “*Conceituou vetores*”, que representou 10,20% dos registros e “*Não conceituou vetores*”, que representou 1,14% dos registros.

Na categoria intermediária “*Conceituou vetores*”, verificou-se que 36% dos estudantes apresentaram conceituações e, nesse caso, 16% dos estudantes explicaram vetores por suas características, afirmando possuírem intensidade, direção ou sentido. Como exemplos: “*Sim. Representam valores onde é necessário saber sua orientação e sentido*” (E1, 2016) ou “*Direção, sentido e intensidade*” (E15, 2016).

Conforme a definição de Ramalho Júnior, Ferraro e Soares (2009), apresentada na seção 6.3.1.1 (ii), verifica-se que as conceituações apresentadas pelos estudantes são incompletas, pois não remetem ao conceito de vetor como um ente matemático caracterizado por seus elementos: intensidade, sentido e direção.

Além disso, 12% dos estudantes conceituaram vetores como forças, o que remete a um equívoco conceitual, conforme mostrado a seguir:

> Forças no plano. São vetores: tem direção, sentido e direção. (E11, 2016)
> Eles são representados por setas normalmente e significam forças atuantes em certo ponto.“ (E23, 2016)
> Sim, entendo como uma força ou posição no espaço. (E24, 2016)

No G2 também apareceu essa confusão, o que, provavelmente, se deve aos exemplos utilizados nas disciplinas de Física, quando geralmente os vetores são usados na representação de forças.

Também na categoria intermediária "*Conceituou vetores*", verificou-se que 4% dos estudantes conceituaram equivocadamente vetores como retas, conforme o registro: *"[...] vetores são retas que tem sentido e direção."* (E2, 2016).

Segundo Steinbruch e Winterle (1987, p. 1):

> Sabe-se que vetores no plano ou no espaço podem ser representados por *segmentos orientados*. Todos os segmentos orientados que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento são *representantes* de um mesmo vetor. [...]

Desse modo, verifica-se que o estudante fez uma associação equivocada sobre a representação gráfica de vetores, referindo-se ao uso de retas ao invés de segmentos de retas orientados, o que indica a presença de um equívoco conceitual na estrutura cognitiva do estudante.

Ainda na categoria intermediária "*Conceituou vetores*", verificou-se que apenas 4% dos estudantes conceituaram vetores como representações de grandezas, caracterizadas por suas intensidades, direções e sentidos, conforme o registro: *"São representações gráficas de alguma grandeza, como módulo, sentido e direção*" (E12, 2016). Mas ainda foram verificadas dificuldades na expressão do conceito de modo adequado.

Na categoria intermediária "*Não conceituou vetores*", verificou-se que 4% dos estudantes não apresentaram uma conceituação em linguagem natural, apenas referiram-se genericamente à representação gráfica, apresentando uma seta, conforme mostrado a seguir: " *Sim, Física I, são vetores (→).*" (E5, 2016).

Nesse registro, verifica-se um exemplo relativo a uma tendência comum entre os estudantes da área das ciências exatas: a tentativa de simplificação em suas explicações científicas. Esse indicativo geralmente é percebido em registros escritos, especialmente em avaliações, quando são solicitadas justificativas para as respostas encontradas nas questões de Álgebra Linear.

A falta de clareza percebida no registro escrito, no qual também se verificou a dificuldade de expressão, indica a existência de dificuldades de compreensão dos conceitos matemáticos abordados.

A experiência vivenciada em sala de aula indica que, geralmente, a maioria dos estudantes, ao ter contato com o ensino e a aprendizagem de tais conceitos, acaba não refletindo sobre eles, o que torna a aprendizagem mecânica, isolada e superficial, sem conexões com seus conhecimentos prévios, impedindo que ocorra a aprendizagem significativa. Desse modo, os novos conceitos não são integrados às suas estruturas cognitivas por meio de interações com conceitos subsunçores pré-existentes, não sendo assimilados por meio de processos de diferenciações progressivas ou de reconciliações integrativas. E, assim, facilmente ocorre o esquecimento dos novos conceitos, pois não estão conectados na rede de conhecimento já existente, a qual é construída pelos estudantes ao longo da vida.

No caso de conhecimentos prévios acerca de vetores, concluiu-se que, apesar de 92% indicarem que lembravam-se de ter aprendido o conceito, apenas 40% propuseram explicações acerca de suas compreensões. Porém, assim como no G1, no G2 também não houve identificação de alguma explicação que pudesse ser considerada totalmente correta. Isso também indica que provavelmente existiram dificuldades na compreensão desse conceito, entre os estudantes do G2, uma vez que seus significados não estão claramente presentes em suas estruturas cognitivas.

Nessa categoria final, em relação aos conhecimentos prévios acerca de matrizes, foi identificada a categoria intermediária "*Conceituou ou não conceituou matrizes*", que representou 10,21% das unidades de registros consideradas.

Destaca-se que, pela análise, verificou-se que 80% dos estudantes afirmaram lembrar-se de ter aprendido esse conceito, 20% afirmaram não se lembrar de ter aprendido e 4% afirmaram que não aprenderam o conceito anteriormente.

Apesar de 80% indicarem que se lembravam de ter aprendido, verificou-se que apenas 36% dos estudantes apresentaram explicações sobre matrizes, as quais possibilitaram identificar duas subcategorias intermediárias: "*Conceituou matrizes*" (que representou 7,93% das unidades de registros), na qual 28% dos estudantes apresentaram suas conceituações, e "*Não conceituou matrizes*" (que representou 2,28% das unidades de registros), na qual 8% dos estudantes apresentaram explicações sobre matrizes, mas não se referiram especificamente à sua conceituação.

Na subcategoria intermediária "*Conceituou matrizes*", verificou-se que 28% dos estudantes conceituaram matrizes, sendo que 16% deles referiram-se à organização por linhas e colunas. Como exemplos, podem ser citados os seguintes registros:

> [...] Me lembro vagamente de como era feito: linha x coluna. [...] (E6, 2016)

> [...] constituído de um sistema de linhas e colunas, onde determinada equação era respondido por meio da combinação desses números dispostos (posso ter me confundido com determinantes). (E9, 2016)
> [...] De um modo básico, combinávamos um sistema composto por linhas e colunas com fórmulas variáveis. Cada elemento possui uma representação. I $\rightarrow$ linha; J $\rightarrow$ coluna. (E15, 2016)

Além disso, 8% dos estudantes conceituaram matrizes como tabela, tais como: "*São valores tabelados, na minha compreensão*" (E12, 2016) ou "*recordando que são 'tipos de tabela', tendo multiplicação ou divisão, matriz inversa*" (E14, 2016) e 4% conceituaram matrizes, simplesmente, como um modo de resolução, como mostrado a seguir: "*Sim, é um meio de resolver incógnitas de uma função por meio de outra que tem algum termo em comum."* (E24, 2016).

Conforme as definições de matrizes de Kolman e Hill (2006) e Boldrini et al. (1980), apresentadas na seção 6.3.1.1 (ii), verificou-se que apenas as conceituações que se referiam às matrizes como tabelas (8%) são as que mais se aproximam das consideradas adequadas.

Em relação à subcategoria intermediária "*Não conceituou matrizes*", verificou-se que 8% dos estudantes tentaram explicar o conceito, mas não conseguiram. O estudante E4 apenas se referiu a tipos ou métodos que usam matrizes e o estudante E23 referiu-se apenas à lembrança de sua representação, mas não as apresentou, conforme os registros, a seguir:

> Me lembro vagamente do material passado no ensino médio, lembro-me sobre as matrizes inversas, Gauss-Jordan, determinantes e outros métodos. (E4, 2016)
> Lembro de ter estudado matrizes durante o ensino médio, porém não lembro para que são, apenas como são representadas. (E23, 2016)

Conclui-se, em relação ao conhecimento prévio dos estudantes do G2 sobre matrizes, que apesar de 80% deles afirmarem que se lembram de ter aprendido o conceito, apenas 8% apresentaram conceituações próximas das disponíveis na literatura, o que indica um baixo percentual de compreensão ou de capacidade de expressão verbal desses estudantes em relação a esse conceito.

Nessa categoria final, também foi possível identificar, em relação aos conhecimentos prévios sobre determinantes, a categoria intermediária *"Conceituou ou não conceituou determinantes",* que representou 5,7% das unidades de registros consideradas.

Nesse caso, destaca-se que 60% dos estudantes do G2 afirmaram que haviam aprendido, 36% deles indicaram não se lembrar de ter aprendido e, ainda, 4% afirmaram que não aprenderam esse conteúdo anteriormente. Porém, apesar de 80% dos estudantes afirmarem que aprenderam, apenas 20% deles apresentou explicações que possibilitaram identificar duas subcategorias intermediárias "*Não conceituou determinantes*" (que representou 4,56% dos registros) e "*Conceituou determinantes*" (que representou 1,14% dos registros).

Na subcategoria intermediária "*Não conceituou determinantes*", 16% dos estudantes apresentaram suas explicações, mas não conceituaram determinantes. Nesse caso, 4% os associaram ao uso de matrizes em outras disciplinas, 4% referiram-se apenas ao método de Sarrus, 4% referiram-se ao método de Sarrus e citaram existências de outras fórmulas e 4% disseram saber calcular, mas não indicaram de que modo fariam o cálculo, conforme os exemplos, a seguir:

> No ensino básico vagamente, porém na faculdade sim, pois já fiz cadeiras de *MATLAB* onde se usa muito matrizes em geral. (E4, 2016)
> Lembro que é feito pelas diagonais da esquerda para a direita mantém-se o sinal; da direita para a esquerda inverte o sinal. (E6, 2016)
> Determinantes de um modo geral é a aplicação de multiplicações. Diagonal principal subtrai posteriormente da diagonal secundária. Existem inúmeros tipo de determinantes, podendo ser calculadas a det(x) com uma fórmula preestabelecida. Determinantes 2x2 ou 3x3 até mesmo 1x1 são consideradas quadradas. (E15, 2016)
> Sim, sei calcular mas não sei a sua utilização. (E24, 2016)

Na subcategoria intermediária "*Conceituou determinantes*", que representou 4% das explicações dos estudantes e 1,14% das unidades de registros, apenas um estudante (E1) conceituou o determinante como um valor associado a uma matriz, mas referiu-se ao cálculo do determinante de modo equivocado, conforme o registro, a seguir: "*Sim. É um valor que representa uma matriz obtida através da diferença da multiplicação de suas diagonais*" (E1, 2016). Nesse caso o estudante indicou lembrar-se do cálculo do determinante de ordem 2, o qual também tentou explicar com dificuldades. Além disso, como esse método não é válido para qualquer matriz de ordem maior que 2, portanto sua conceituação foi considerada equivocada.

Conforme a definição apresentada por Boldrini et al. (1980), também apresentada na seção 6.3.1.1 (ii), conclui-se que, no G2, nenhuma das explicações apresentadas para conceituar determinantes foram adequadas. Dentre os 20% de estudantes que apresentaram explicações sobre determinantes, verificou-se que a maioria remete-se à lembrança de modos de resolução, mas não foi capaz de apresentar conceitos adequados, ou até mesmo próximos do que poderia ser considerado adequado.

Nesse caso, em relação à conceituação do conhecimento prévio sobre determinantes, verifica-se, no G2, uma dificuldade ainda maior na compreensão do conceito, pois nenhum estudante foi capaz de expressar o conceito de determinante corretamente.

Em relação aos conhecimentos prévios acerca de sistemas lineares, foi identificada a categoria intermediária "*Conceituou sistemas lineares*", que representou 4,56% das unidades de registros e 16% das explicações dos estudantes.

Cabe destacar que, dentre todas as respostas fornecidas pelos estudantes, somente 36% afirmaram lembrar-se de ter aprendido sistemas lineares anteriormente. Contudo, dentre os 36% que indicaram lembrar-se de ter aprendido, verificou-se que apenas 16% dos estudantes apresentaram explicações sobre o conceito.

Constatou-se que 8% dos estudantes conceituaram sistemas lineares como conjunto de equações. Como exemplos: *"são um conjunto de equações com incógnitas que podem ser resolvidas ou não através de cálculos envolvendo matrizes*" (E11, 2016) ou *"Sim, resolve uma incógnita em comum de várias equações"* (E24, 2016). Além disso, 4% dos estudantes conceituaram sistemas lineares como um modo de resolver equações com várias variáveis, conforme o registro: "*É uma forma de resolver equações onde estão presentes duas ou mais variáveis*" (E1, 2016).

Considerando as definições de Callioli, Domingues e Costa (1990) e de Steinbruch e Winterle (1987), apresentadas na seção 6.3.1.1 (ii), percebe-se que as explicações aproximam-se da conceituação apresentada na literatura, pois relacionam sistemas lineares a um conjunto de equações ou a várias equações, porém não apresentam a necessidade das equações serem lineares. Além disso, a explicação de E24 não faz menção ao fato de existirem várias incógnitas.

Desse modo, verifica-se que apesar de estarem próximas da conceituação correta, elas foram consideradas incompletas, o que pode indicar problemas na compreensão ou dificuldade de expressão do conceito.

Nessa subcategoria intermediária, também se verificou que 4% dos estudantes apresentaram conceituação equivocada, referindo-se ao conceito de sistemas lineares como análise de incógnitas e igualdade de variáveis, conforme mostrado a seguir: *"Analisando incógnitas e igualando algumas variáveis para* *solucionar a solução*” (E15, 2016). Nesse último registro destaca-se a falta de cuidado com a expressão em linguagem natural escrita, quanto ao significado desses conceitos, o que indica falta de clareza, o que, consequentemente, leva ao equívoco conceitual.

Conclui-se, em relação à compreensão de sistemas lineares, que apenas 36% dos estudantes do G2 indicaram lembrar-se desse conceito. Além disso, dentre os 16% que apresentaram suas compreensões, apenas 12% elaboraram conceituações consideradas próximas da correta, mas que estavam incompletas. Isso indica que o conceito de sistemas lineares não está completamente compreendido dentre aqueles que afirmaram lembrar-se dele e, ainda, que esse conhecimento prévio está ausente na maioria das estruturas cognitivas dos estudantes do grupo G2.

Já em relação à categoria intermediária “*Conceituou função linear*”, identificada em 3,42% das unidades de registros consideradas, verificou-se que apenas 12% dos estudantes forneceram explicações sobre esse conceito, apesar de 40% dos estudantes afirmarem lembrar-se de ter aprendido esse conceito anteriormente. Verificou, também, que 56% dos estudantes afirmaram não se lembrar de ter aprendido “função linear” e 4% não responderam.

Nessa categoria intermediária, verificou-se que 8% dos estudantes apresentaram o conceito de “função linear” associado ao conceito de função de 1º grau, conforme mostrado a seguir:

> [...] Funções lineares podem designar funções do 1° grau com variáveis e incógnitas. (E15, 2016)
> Se for o mesmo nome que a função de 1° grau, tivemos em introdução ao cálculo. Representa uma reta onde a altura é obtida a partir do eixo x. (E1, 2016)

De acordo com a conceituação de Silva e Barreto Filho (2008), apresentada na seção 6.3.1.1 (ii), verificou-se que esses estudantes apresentaram conceituações próximas da conceituação considerada correta. No entanto, foram consideradas incompletas, pois não citaram a necessidade do termo independente ser nulo. Destaca-se, também, que o estudante E1 também citou sua lembrança sobre o fato da representação gráfica de uma função linear ser uma reta, o que também está correto.

Além disso, verificou-se que 4% dos estudantes conceituaram função linear como uma função definida por uma equação linear, caracterizada por um gráfico simples, mas não explicaram que tipo de gráfico seria, conforme o registro a seguir: "*É uma função caracterizada por um gráfico simples, é formado por uma equação de 1° grau*" (E9, 2016). Nesse caso, o estudante se refere ao conceito de modo vago e impreciso, o que possibilita identificar a falta de clareza quanto ao significado do termo "função linear".

Em relação ao conceito "função linear", conclui-se que apesar de 40% dos estudantes terem afirmado que se lembravam de ter aprendido o conteúdo anteriormente, apenas 12% deles apresentaram explicações sobre suas compreensões, que foram consideradas próximas da adequada mas incompletas. Isso indica que, para a maioria dos estudantes do G2, há desconhecimento ou falta de clareza em relação ao conceito "função linear" e em relação aos termos que os estudantes usaram para expressarem suas compreensões.

(iii) Percepções de usos de conhecimentos prévios – G2

Nessa categoria final, acerca das percepções sobre usos dos conhecimentos prévios, que representaram 17,05% dos registros considerados, foram identificadas três categorias intermediárias: "*Usos de vetores*" (14,77%), "*Uso de sistemas lineares*" (1,14%) e "*Uso da função linear*" (1,14%). A seguir, apresenta-se o modo como os estudantes exemplificaram suas compreensões.

Na categoria intermediária "*Usos de vetores*", que representou 14,77% das unidades de registros, verificou-se que 52% dos estudantes indicaram ter lembrado de aplicações, sendo que:

- 16% dos estudantes lembraram-se do uso de vetores relacionados à determinação de sentido e direção, conforme o exemplo: *"Sim, em física para identificar sentido e direção"* (E10, 2016).
- 16% deles lembrarm-se de seus usos associados à representação de forças, conforme demonstra-se a seguir: *"Servem, em física, para representar forças*" (E12, 2016) e "*Vetores são essenciais para indicar forças atuantes no sistema*" (E15, 2016).
- 8% dos estudantes (que representou 2,28% das unidades de registros) lembrarm-se de seus usos na decomposição vetorial, afirmando: *"Lembro de decomposição vetorial"* (E3, 2016) ou *"Usados para decompor forças em relação à um ângulo FR=F. sen alfa ou cos alfa"* (E6, 2016).

Desse modo, foi possível verificar que, no grupo G2, dentre os 52% que indicaram lembrar-se de usos de vetores, 40% fizeram associação direta à lembrança do uso de vetores na representação de forças.

Ainda na categoria intermediária “*Usos de vetores*”, 8% dos estudantes afirmaram que se lembravam do uso de vetores relacionados à outras disciplinas, conforme apresenta-se a seguir:

> Sim, pois como citei acima já fiz cadeiras em que se utiliza álgebra; como informática aplicada à engenharia, estática. Resistência de materiais I e II, entre outras. (E4, 2016)
> [...] São utilizados para indicar qualquer grandeza e servem como base em várias áreas da física. (E18, 2016)

Nesses casos, os estudantes indicaram que perceberam os usos em diferentes disciplinas mas não explicaram de que modo, o que revela dificuldades de aprendizagem ou de capacidade de expressão em linguagem natural.

Também nessa categoria, 4% dos estudantes referiram-se de modo mais genérico em relação ao uso de vetores para representar grandezas, conforme o exemplo: *“São utilizados para indicar qualquer grandeza…*” (E18, 2016). No entanto, verificou-se, nesse caso, um equívoco conceitual, pois os vetores não são usados para representar qualquer grandeza, mas sim grandezas vetoriais, ou seja, aquelas que são caracterizadas por terem uma direção, uma intensidade e um sentido.

No G2, assim como no G1, essa foi a categoria identificada com maior frequência em relação à lembrança dos usos dos conceitos, o que indica que nesse grupo os estudantes também lembraram-se e conseguiram expressar-se melhor em relação ao uso de vetores do que em relação aos demais conceitos prévios investigados.

Os motivos que justificam essa percepção são os mesmos apresentados na seção 6.3.1.3 (i), para o grupo G1, ou seja, pelo fato desse conceito ser introduzido no ensino médio e também por ser retomado no primeiro semestre do curso de Engenharia Civil.

Em relação aos indicativos percebidos na categoria intermediária “*Usos de vetores*” obtidos pela análise dos registos dos estudantes do G2, concluiu-se que a maioria das lembranças referentes aos usos de vetores estão associadas à representação de forças. Além disso, destaca-se que apesar de 92% afirmarem lembrar-se de ter aprendido esse conceito, apenas 52% apresentaram compreensões sobre seus usos, considerado um percentual pequeno quando se considera que foi um conceito abordado por meio de seu uso em situações práticas, tanto no ensino médio, quanto no primeiro semestre do curso de Engenharia.

Assim, os resultados indicam que ainda existem muitas dificuldades apresentadas pelos estudantes, tanto na compreensão do conceito de vetores, como de seus usos. Verifica-se que, mesmo tendo contato com esse conceito em diversas situações de aprendizagem, que, teoricamente, deveriam possibilitar a aproximação entre conhecimentos teóricos e práticos, a maioria dos estudantes não consegue estabelecer relações entre as áreas da Matemática, da Física e da Engenharia, reconhecendo as conexões existentes entre os conhecimentos construídos.

Talvez a explicação para esse indicativo esteja no fato de o ensino e de a aprendizagem ainda estarem ocorrendo de modo fragmentado, em disciplinas, desde o ensino médio, o que provoca distanciamentos entre os conhecimentos, que são comuns entre elas. Além disso, provavelmente, também não deve ter havido, durante o processo de aprendizagem, a atitude reflexiva na construção do conhecimento que poderia ter propiciado a reestruturação cognitiva, o que pode ter dificultado a compreensão matemática dos conceitos bem como pode ter dificultado a ocorrência da aprendizagem significativa.

Nessa categoria final, também foi identificada a categoria intermediária "*Usos de Sistemas Lineares*", que representou 1,14% das unidades de registros. Nesse caso apenas 4% dos estudantes (um estudante dentre os 25 participantes) citaram que lembravam-se do uso de sistemas lineares na resolução de problemas com características lineares, conforme o exemplo: *"Sistemas lineares resolvem problemas como já se descreve 'lineares'"* (E4, 2016). Constatou-se que o estudante referiu-se corretamente ao uso do conceito, que consiste no objetivo principal do estudo desse conceito matemático, mas que o fez de modo genérico e vago. Não citou um exemplo específico e nem esclareceu o que significa, na matemática, um problema ser reconhecido com um problema linear.

Em relação à categoria intermediária "*Usos de Sistemas Lineares*", conclui-se que, apesar de 36% os estudantes afirmarem que se lembravam de ter aprendido esse conceito anteriormente, apenas 4% deles foram capazes de explicar para que serve ou em que contexto é aplicado. Como já foi explicado em relação aos resultados semelhantes, verificados no G1, isso provavelmente deve-se à abordagem privilegiadamente algébrica na resolução de sistemas lineares, o que não propicia a aprendizagem reflexiva nem tampouco estimula o trânsito entre diferentes registros semióticos. Assim, os estudantes acabam não percebendo as relações existentes entre suas diferentes representações semióticas, o que impossibilita a compreensão matemática do conceito.

Na categoria intermediária “*Usos de Funções Lineares*”, que representou 1,12% das unidades de registros, verificou-se que apenas 4% dos estudantes (um estudante) apresentaram explicações sobre o uso de funções lineares, conforme o registro a seguir: *“Sim, para encontrar a incógnita da função”* (E13, 2016).

Nessa categoria intermediária percebeu-se, também, a falta de compreensão do conceito, pois 96% dos estudantes não conseguiram explicar seus usos cotidianos nem a importância das funções no desenvolvimento da ciência relacionado ao tratamento quantitativo de fenômenos investigados.

Assim como no caso dos vetores, no caso do estudo de funções, os conceitos envolvidos e os diferentes usos são geralmente tratados tanto no ensino médio como no primeiro semestre da graduação da Engenharia Civil. Desse modo, também era esperado que os estudantes estivessem familiarizados com tais conceitos básicos e que trouxessem presentes em suas estruturas cognitivas os conhecimentos prévios necessários para que pudessem ser ampliados durante a disciplina de Álgebra Linear. Mas, infelizmente, conforme os resultados obtidos na pesquisa inicial realizada, verificou-se que isso não ocorreu para a maioria dos estudantes do Grupo G2.

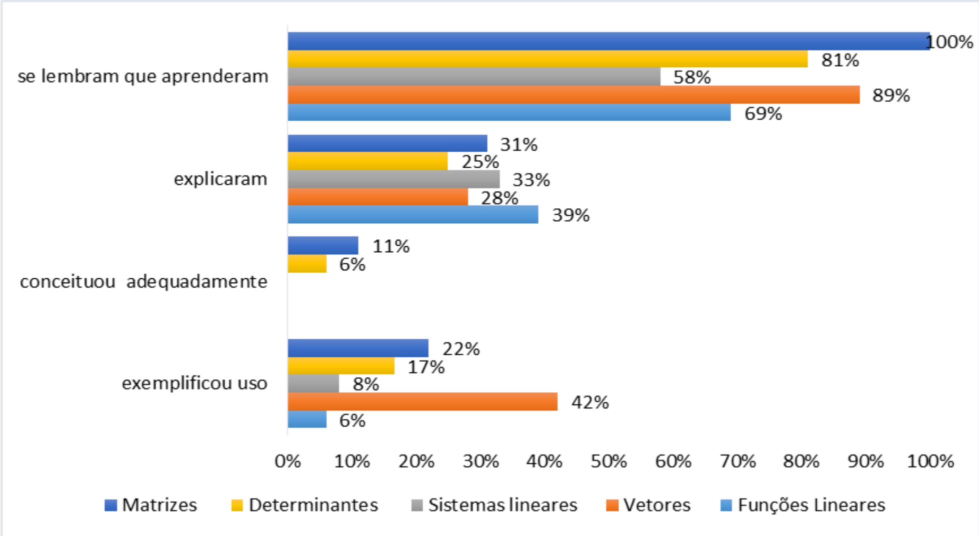
Destaca-se, ainda, que, no G2, não foram identificadas as categorias “*Usos de matrizes*” e “*Usos de determinantes*”, pois os estudantes não apresentaram registos relacionados à lembrança desses conteúdos.

6.3.1.3 Conclusões sobre conhecimentos prévios

De modo geral, a análise dos dados relativos aos conhecimentos prévios dos dois grupos revela que as lembranças dos estudantes são poucas acerca dos conceitos e dos usos já abordados no ensino médio ou apreendidos no primeiro semestre da graduação e que foram menos frequentes no G2. Indicam que a maioria das aprendizagens foi mecânica e não significativa, conforme definido por Ausubel (MOREIRA; MASINI, 1982), pois os conceitos não permaneceram na memória permanente da maioria dos estudantes. Provavelmente foram armazenados em suas memórias temporárias e depois esquecidos.

Os resultados gerais (ver resumo nas Figuras 41 e 42) confirmam o que se percebe pela experiência docente na atuação como professora de matemática no ensino superior.

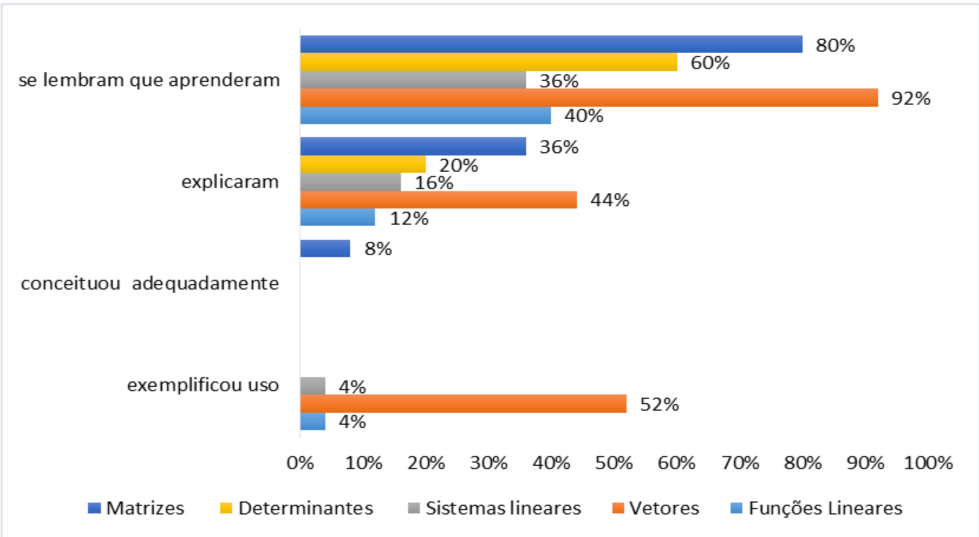
Figura 41 - Resultados gerais - conhecimentos prévios e usos do G1



Fonte: Autora

Foi possível constatar a existência inicial de muitas lacunas e dificuldades de compreensão existentes sobre conhecimentos matemáticos prévios entre os estudantes de Álgebra Linear nos dois grupos, o que provavelmente contribuiu com as dificuldades de ampliação desses conceitos, propiciados pelos conhecimentos construídos na disciplina.

Figura 42 - Resultados - conhecimentos prévios e usos do G2



Fonte: Autora

Os resultados obtidos corroboram com os indicativos de percepção de dificuldades de aprendizagem acerca de conhecimentos prévios, necessários ao estudo de Álgebra Linear, que foram observados pelos autores Barros, Fernandes e Araújo (2016) em um teste diagnóstico, aplicado a estudantes ingressantes em curso técnico no ensino superior, em Portugal. Os autores identificaram que mais da metade dos estudantes também não respondeu às questões ou respondeu incorretamente, concluindo que os estudantes não apresentam conhecimentos prévios adequados à aprendizagem de Álgebra Linear.

A constatação desse fato, ou seja, de que os conceitos prévios não estão presentes nas estruturas cognitivas da maioria dos estudantes, não permitem que novas informações sejam assimiladas por meio de interações, pode ser um indicativo que ajuda a explicar a dificuldade em se propiciar ambientes de ensino que favoreçam a compreensão e a aprendizagem significativa de conceitos da Álgebra Linear.

Além disso, segundo uma pesquisa realizada em Minas Gerais, por Resende e Mesquita (2013), as principais dificuldades identificadas por estudantes e professores do ensino fundamental e médio nos processos de ensino e de aprendizagem de matemática se referem à compreensão da linguagem matemática, o que gera dificuldades de interpretação e de proposição de questionamentos, e à assimilação, que ocorre, segundo os estudantes, pelo pouco tempo e empenho que dispõem para se dedicarem aos estudos. Na referida pesquisa, os professores entrevistados indicaram que a maior dificuldade dos estudantes é a falta de conhecimentos anteriores, o que leva à aprendizagem mecânica, não significativa.

Esses resultados também corroboram com os resultados percebidos pela análise aqui apresentada, que indicam que a aprendizagem mecânica se explica pela falta de aprofundamento e de significação, quando a maioria dos estudantes não consegue explicar ou exemplificar os usos de conceitos que, supostamente, já deveriam ter sido apreendidos anteriormente.

Como, geralmente, a maioria dos conceitos matemáticos no ensino fundamental e médio é abordada apenas do ponto de vista teórico, sem reflexões sobre possíveis usos em situações práticas, acabam se tornando desinteressantes, o que não provoca interações com conhecimentos prévios e implica uma aprendizagem mecânica. As novas informações abordadas no contexto da sala de aula acabam sendo armazenadas de modo arbitrário, sem que haja interação com conceitos subsunçores. Desse modo, acabam não possibilitando a efetivação de novas conexões, interagindo com conhecimentos práticos, já existentes na estrutura cognitiva dos estudantes, fazendo com que o conhecimento não seja assimilado com significados, sendo facilmente esquecido.

Além disso, verificou-se que a compreensão matemática não ocorre facilmente. Segundo Duval (2013), a compreensão em matemática está relacionada às condições cognitivas da compreensão de acesso aos objetos matemáticos, que se dá por meio da diversidade de registros semióticos e de suas coordenações e articulações.

Os resultados indicaram que quando os estudantes não conseguiram acessar seus conhecimentos para expressá-los por meio de algum tipo de representação, especialmente por meio da linguagem natural, não houve a compreensão matemática do objeto matemático investigado, pois, na maioria dos casos, eles não foram capazes de reconhecê-los ou de representá-los de modo adequado por meio de algum tipo de registro semiótico de representação.

Além disso, em relação ao reconhecimento de conhecimentos prévios matemáticos, cabe salientar que, na maioria das vezes, o questionamento realizado remeteu a conceitos que não eram fáceis de ser compreendidos pelos estudantes e que exigiram deles clareza em suas compreensões e rigor nos diferentes modos escolhidos para suas representações.

Também é preciso levar em consideração que muitas vezes os modos de representação dos objetos matemáticos não são naturais, sendo necessários usos e compreensões de criações artificiais que possibilitam expressar os conhecimentos científicos matemáticos criados. Desse modo, o reconhecimento da linguagem figural, simbólica, gráfica e os termos específicos da língua natural, presentes na construção do conhecimento acadêmico e científico, dificultam o processo de aprendizagem, especialmente quando ocorrem no nível superior. Essa talvez seja a principal dificuldade dos estudantes ao ingressarem no ensino superior, em relação a compreensão ou ampliação dos conceitos matemáticos: a dificuldade de reconhecimento dos objeto matemáticos representados em diferentes contextos por meio de registos semióticos diferentes.

6.3.2 Identificação de conhecimentos finais

Nesta seção, são apesentados os resultados sobre a identificação de conhecimentos ampliados ou construídos e aprendizagem significativa dos estudantes, em dados coletados por meio de questionários que foram aplicados tanto ao final da disciplina quanto nove meses após o seu término, conforme apresentado nos Anexos 5 e 7.

Também foram utilizadas técnicas da análise de conteúdo, do tipo categorial, e, nos dois grupos, foram identificadas três categorias finais emergentes: "*Compreensão de conceitos*"; "*Percepções gerais sobre usos dos conhecimentos construídos na disciplina*" e "*Percepções sobre o método de ensino e de aprendizagem usado na disciplina*", as quais são apresentadas a seguir.

Nesta seção, em ambos os grupos, no processo de unitarização para realizar a codificação dos questionários em unidades de registro, optou-se por identificar o "*Questionário final*" pelo número 1 e o "*Questionário Compreensão e Aprendizagem Significativa*" pelo número 2. Além disso, os estudantes do G1 foram identificados pela letra "A" e os estudantes do G2 pela letra "E".

Assim, as unidades de registro ficaram identificadas por: nº do questionário. nº da questão, identificação do estudante, nº do fragmento, ano de aplicação do questionário. Por exemplo, a referência "(2.1.A30.4, 2017)" indica o questionário 2, a questão 1, do estudante A30 do G1, a quarta unidade de registo, aplicado em 2017.

6.3.2.1 Identificação de conhecimentos finais - G1

Ao serem aplicadas as técnicas da análise de conteúdo do tipo categorial na avaliação de todas as respostas escritas relativas ao "*Questionário final*" (ver Anexo 5), fornecidas por 30 participantes do grupo G1 e também pelas respostas relativas às questões 1, 2, 3 e 7 do "*Questionário Compreensão e Aprendizagem Significativa*" (ver Anexo 7), fornecidas por 21 participantes do G1, foi possível identificar três categorias finais emergentes: "*Compreensão de conceitos*" (que representou 52,61% das unidades de registro); "*Percepções gerais sobre usos dos conhecimentos construídos na disciplina*" (39,42%); e "*Percepções sobre o método de ensino e de aprendizagem usado na disciplina*" (7,97%), as quais são apresentadas a seguir. Um resumo da categorização pode ser encontrado no Anexo 33.

Destaca-se que, ao ser realizada a unitarização das respostas no G1, foram percebidas 652 unidades de registro que possibilitaram identificar as três categorias finais, apresentadas a seguir.

(i) “*Compreensão de conceitos*” - *G1*

Nessa categoria final, foram identificadas cinco categorias intermediárias: “*Compreensões de matrizes*” (representou 11,2% das unidades de registro); “*Compreensões sobre sistemas lineares*” (representou 10,89% das unidades de registro); “*Compreensões sobre vetores*” (representou 9,97% das unidades de registro); “*Compreensões de determinantes*” (representou 9,51% das unidades de registro); “*Compreensões sobre autovalores e autovetores*” (representou 6,44% das unidades de registro) e “*Compreensões sobre transformações lineares*” (representou 4,6% das unidades de registro).

Na categoria intermediária “*Compreensões de matrizes*”, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: “*Compreensões de matrizes no final da disciplina*” (6,91%) e “*Lembranças sobre matrizes, após nove meses*” (4,29%).

Na subcategoria intermediária “*Compreensões de matrizes no final da disciplina*”, verificou-se mais duas subcategorias intermediárias, quais sejam “*Percepções sobre compreensão de matrizes, no final da disciplina*” (4,92%) e “*No final da disciplina, como conceituaram matrizes*” (1,99%).

Na subcategoria intermediária “*Percepções sobre compreensão de matrizes no final da disciplina*”, verificou-se que em 3,85% das unidades de registro, os estudantes afirmaram que perceberam que a disciplina possibilitou compreender matrizes ou usos, conforme os exemplos:

> Sim, Com o aprofundamento da matéria no curso superior, foi possível perceber melhor o que são matrizes e onde elas podem ser utilizadas [....] (1.1.A13.1, 2016).
> Sim, eu já possuía um conhecimento sobre matrizes aprendido na escola, porém, o que eu sabia era muito básico. Agora entendo de fato como poder utilizar uma matriz (1.1.A23.1, 2016).
> Sim, eu compreendo e consigo explicar com clareza o que são matrizes e onde posso utilizá-la, visto que foi bem repassado o conteúdo (1.1.A28.1, 2016).

Também se verificou que em 0,61% das unidades, os estudantes destacaram que a abordagem de matrizes possibilitou perceber associações da teoria com usos práticos, conforme mostrado a seguir:

> [...] nos mostrou e ensinou com clareza, demostrando exemplos de aplicação e diferentes métodos para utilizá-las e solucioná-las [...] (1.1.A10.2, 2016).
> A disciplina me possibilitou aprender e retomar muitos conceitos sobre matrizes e onde posso aplicá-las na engenharia [...] (1.1.A31.1, 2016).

Nesses registros, verificou-se que o uso de exemplos envolvendo situações problema ajudou na compreensão das matrizes e de suas finalidades.

Ainda nessa subcategoria, constatou-se, em 0,31% das unidades de registro, que os estudantes destacaram que a utilização de recursos tecnológicos facilitou compreender matrizes: *"[...] Proporcionou a utilização de programas, nos mostrando meios mais fáceis de resolução"* (1.1.A10.3, 2016) e *"[...] e, ao longo do semestre, com o auxílio de [...], softwares [...] pude ampliar esse conhecimento"* (1.1.A20.3, 2016).

Essas percepções corroboram com os resultados obtidos por Chereguini (2013) ao propor a exploração do conceito de multiplicação de matrizes com uso de situações problema e de tecnologias digitais. Segundo a autora, a sequência didática proposta, além de despertar o interesse, também possibilitou a compreensão do conceito e propiciou um maior envolvimento dos estudantes nas tarefas.

Nessa subcategoria, apenas um estudante, que representou 0,15% das unidades de registro, afirmou, ao final da disciplina, que percebeu que a disciplina não possibilitou compreender matrizes, conforme mostrado a seguir: "*Mais ou menos, pois sinto grande dificuldade em calcular algumas matrizes mais complexas"* (1.1.A1.1, 2016).

Destaca-se que, em relação ao questionário final, dentre 30 respondentes, apenas um estudante (3%) afirmou que ainda sentia dificuldades em trabalhar com matrizes mais complexas, ou seja, foi possível perceber que 97% indicaram que a disciplina possibilitou a compreender matrizes. Assim, a maioria dos estudantes indicou que a proposta favoreceu a compreensão da temática.

Já na subcategoria intermediária "*No final da disciplina, como conceituaram matrizes*", que representou 1,99% das unidades de registro, verificou-se 1,38% dos estudantes conceituou matrizes como tabelas (ou elementos) organizadas por linhas e colunas, conforme os exemplos a seguir:

> Matrizes são tabelas de elementos organizados em linhas e colunas, [...] (1.1.A7.1, 2016).

> [...], matrizes são tabelas organizadas por linhas e colunas. [....] (1.1.A16.2, 2016).
> [...] matrizes são um conjunto de números agrupados em linhas e colunas [...] (1.1.A32.2).

Destaca-se que 25% (dentre os 36 participantes da pesquisa) apresentaram o conceito adequadamente, muito próximo daquele que foi considerado correto, definido por Boldrini et al. (1980, p. 1), apresentado na seção 6.3.1.1 (ii).

Além disso, nessa subcategoria, em 0,46% das unidades de registro, verificou-se 8% dos participantes conceituaram matrizes como tabelas, conforme os exemplos:

> [...] Matrizes são tabelas que facilitam na organização de dados [...] (1.1.A11.2).
> [...], a disciplina possibilitou entender desde conceitos básicos de matrizes, compreendendo que matrizes é uma tabela [...] (1.1.A18.2).
> [...] as matrizes são tabelas com um conjunto numérico que é denominado como elemento da matriz. [...] (1.1.A30.2).

Nesses casos, verificou-se também que as conceituações apresentadas estavam próximas da considerada adequada.

Apenas um estudante (0,15% das unidades de registro) conceituou matrizes como uma forma de organizar dados, mas não disse como, conforme mostrado a seguir: *"[...], matrizes são uma forma de organizar dados de forma simples [...]"* (1.1.A12.2, 2016). Nesse caso, apesar de compreender a finalidade de matrizes, o estudante não foi capaz de expressar adequadamente, por meio da linguagem natural, o conceito de matrizes.

Assim, destaca-se que, dentre os 30 respondentes do questionário final, constatou-se que, apesar de 97% afirmarem que a disciplina possibilitou compreender matrizes, somente 43% apresentaram conceituação, dentre as quais 40% foram consideradas adequadas.

No início da disciplina, na identificação de conhecimentos prévios, dentre os 36 participantes, apenas 11% havia conseguido se expressar de modo adequado. No final da disciplina, verificou-se que 33% dos estudantes apresentaram conceitos de matrizes considerados adequados, o que possibilita afirmar que houve uma maior compressão ou ampliação do conceito de matrizes no G1.

Na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre matrizes, após nove meses*", que representou 4,29% das unidades de registro, verificou-se que, em 2,29%, os estudantes indicaram se lembrar de ter estudado matrizes, conforme os exemplos: “*Inicialmente aprendemos os tipos e as operações envolvendo matrizes [...]*” (2.1.A10.1, 2017) ou “*O que eu lembro era sobre matrizes [...]*” (2.1.A36.1, 2017).

Em 0,77% das unidades de registro, os estudantes indicaram se lembrar dos processos de escalonamento em matrizes, conforme os exemplos: *“[...] Escalonamento de matrizes principalmente. [...]”* (2.3.A8.2, 2017) ou *“[...], escalonamento”* (2.1.A23.6, 2017). Provavelmente, essas lembranças se devem ao fato de esse procedimento ter sido utilizado em diversos métodos e na resolução de problemas variados.

Também se constatou, em 0,61% das unidades de registro, que os estudantes indicaram se lembrar espontaneamente do conceito de matrizes:

> [...] são linhas e colunas de números [...] (2.1.A17.2, 2017).
> [...] Conjunto de elementos (números) distribuídos entre linhas e colunas; [...] (2.1.A19.2, 2017).
> [...] são tabelas que possuem números e tem a função de organizar alguma coisa dentro delas [...] (2.1.A22.5, 2017).
> [...] um conjunto numérico [...] (2.1.A30.2, 2017).

Salienta-se que, no questionário que foi respondido nove meses após o término da disciplina, não houve perguntas diretas sobre os conceitos, ou seja, eles foram apresentados espontaneamente. As três primeiras conceituações indicam que os estudantes se recordam do conceito considerado adequado, o que representou 14% dos respondentes desse último questionário. Esse é um indicativo de presença do conceito na memória permanente, o que explicita a presença da aprendizagem significativa desse conceito para esses estudantes.

Ainda na subcategoria intermediária “*Lembranças sobre matrizes, após nove meses*”, também foi possível verificar que: em 0,31% das unidades de registro, os estudantes indicaram se lembrar de ter estudado operações envolvendo matrizes, conforme o exemplo: “*[...] operações envolvendo matrizes, tais como multiplicação, escalonamento e soma [...]*” (2.1.A10.2, 2017); e, em 0,31% das unidades de registro, os estudantes indicaram se lembrar de ter estudado tipos de matrizes, conforme o exemplo “*[...], matriz superior, matriz inferior [...]*” (2.1.A36.4, 2017).

Desse modo, foi possível constatar, nessa subcategoria intermediária, que as lembranças dos estudantes do G1 sobre matrizes estão associadas ao método de escalonamento utilizado, ao conceito, às operações estudadas e aos tipos de matrizes abordados.

Na categoria intermediária "*Compreensões sobre sistemas lineares*", que representou 10,89% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: "*Compreensão sobre sistemas lineares ao final da disciplina*" (7,21%) e "*Lembranças sobre sistemas lineares, após nove meses*" (3,68%).

Na subcategoria intermediária "*Compreensão sobre sistemas lineares ao final da disciplina*", foram identificadas três subcategorias intermediárias: "*Percepções sobre compreensão de sistemas lineares e aplicações, no final da disciplina*" (3,84%); "*No final da disciplina, como conceituaram sistemas lineares*" (2,76%) e "*No final da disciplina, lembraram de métodos de resolução de sistemas lineares*" (0,61%).

Na subcategoria intermediária "*Percepções sobre compreensão de sistemas lineares e aplicações, ao final da disciplina*", verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 3,38%, os estudantes afirmaram que perceberam que a disciplina possibilitou a compreensão dos sistemas lineares, conforme o exemplo: "*Sim a disciplina possibilitou que eu compreendesse o que é um sistema [...]*" (1.3.A34.1, 2016).
- Em 0,31%, os estudantes destacaram que a abordagem favoreceu a compreensão ou o aprimoramento de sistemas lineares, conforme o registro: "*[...] com o auxílio de explicações e exercícios aprimorei o conhecimento de como resolver sistemas lineares com mais de duas incógnitas*" (1.3.A20.2, 2016).
- Em 0,15%, um estudante indicou que a disciplina não possibilitou compreender sistemas lineares, conforme o exemplo: "*Alguns sistemas são muito complexos e sinto dificuldade em aprender*" (1.3.A1.1, 2016).

Destaca-se que, em relação ao questionário final, dentre os 30 respondentes, apenas um estudante indicou que a disciplina não possibilitou compreender sistemas lineares. Assim, do mesmo modo que o ocorrido com as matrizes, percebe-se que a maioria (97% dos respondentes) indicou que conseguiu compreender esse conceito.

Na subcategoria intermediária "*No final da disciplina, como conceituaram sistemas lineares*", que representou 2,76% das unidades de registro, verificou-se que em 1,07% os estudantes conceituaram sistemas lineares como um conjunto de equações lineares com variáveis. Assim:

> [...] os sistemas lineares são um conjunto de equações lineares com n variáveis [...] (1.3.A12.2, 2016).
> Um sistema linear é um conjunto de duas ou mais equações lineares com, no mínimo, duas variáveis [...] (1.3.A16.1, 2016).
> É um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas [...] (1.3.A27.1, 2016).
> São sistemas de equações lineares com variáveis, onde na disciplina foi estudado como achar estas incógnitas [...] (1.3.A35.1, 2016).

Destaca-se que essa foi a conceituação de sistemas lineares que teve maior frequência entre as respostas do G1. Conforme a definição apresentada na seção 6.3.1.1 (ii), por Callioli, Domingues e Costa (1990), foi possível concluir que, no final da disciplina, 23% dos respondentes (dentre 30 participantes) conceituaram corretamente sistemas lineares.

Em 0,77% das unidades de registro, 17% dos respondentes conceituaram sistemas lineares apenas como <u>conjunto de equações lineares</u>, o que se aproxima da conceituação considerada correta, porém, foram consideradas incompletas, pois os estudantes não se referem ao fato de existirem incógnitas (ou varáveis comuns), conforme mostrado a seguir: “*[...] são conjuntos de equações lineares [...].”* (1.3.A9.2, 2016) ou “*[...] sistemas lineares são um conjunto de equações lineares [...]”* (1.3.A14.2, 2016).

Em 0,61% das unidades de registro, 13% dos respondentes conceituaram sistemas lineares como conjunto de equações com incógnitas (ou variáveis), não caracterizando as equações como lineares, o que foi considerado incorreto, conforme pode ser observado nos exemplos, a seguir:

> Sistemas lineares são conjuntos de equações com incógnitas a serem solucionadas, [...] (1.3.A7.1, 2016).
> [...] sistemas lineares contêm equações com variáveis, as quais tem por objetivo encontrar um valor para satisfazer a equação e achar uma possível solução para o problema [...] (1.3.A26.2, 2016).

Em 0,31% das unidades de registro, 7% dos respondentes conceituaram sistemas lineares apenas como conjunto de equações, não caracterizando as equações como lineares e não citando a existência de várias variáveis), o que também foi considerado incorreto, conforme mostrado a seguir: *“[...] É um conjunto de equações [...]”* (1.3.A17.2, 2016).

Conclui-se, na subcategoria intermediária "*Ao final da disciplina, como conceituaram sistemas lineares*", que, dentre os respondentes, 60% conceituaram sistemas lineares, sendo que 23% o fizeram de modo adequado, o que indica que havia compreensão desse conceito, no final da disciplina, para esses estudantes.

Além disso, verificou-se que 17%, apesar de conceituarem sistemas lineares como um conjunto de equações lineares, não citaram a existência de variáveis comuns. Nesse caso, pode ter havido apenas descuido em relação à expressão em linguagem natural do conceito, pois apresentaram conceitos muito próximos do considerado correto.

Os demais conceituaram sistemas lineares apenas como conjunto de equações, mas não caracterizaram as equações como lineares, o que indica que esses estudantes ainda não compreenderam o significado do termo linear, nem das relações existentes entre as equações envolvidas no sistema.

No início da disciplina, na identificação de conhecimentos prévios, dentre os 36 participantes do G1, ninguém havia conseguido se expressar de sobre esse conceito de modo adequado. Apenas 14% havia apresentado conceituações próximas das consideradas corretas. Ao final da disciplina, verificou-se que 23% dos estudantes apresentaram conceitos de sistemas lineares que foram considerados adequados e 17% apresentaram conceituações próximas das consideradas como corretas, o que possibilita afirmar que houve compressão ou ampliação desse conceito no G1.

Na subcategoria intermediária "*No final da disciplina, lembraram de métodos de resolução de sistemas lineares*", que representou 0,61% das unidades de registro, os estudantes destacaram o estudo dos métodos de escalonamentos utilizados na resolução de sistemas, conforme mostrado a seguir:

> [...] são transformados em matriz e resolvidos por Gauss, deixando um sistema simples, fácil de achar suas incógnitas (1.3.A17.3, 2016).
> [...] pude compreender onde são utilizados e como resolver sistemas com várias incógnitas a partir de Gauss-Jordan ou Eliminação Gaussiana (1.3.A23.2, 2016).
> [...] estuda métodos de escalonamento para resolver e descobrir as variáveis de um sistema (1.3.A30.2, 2016).

Nessa subcategoria, é possível perceber que houve, para esses estudantes, a ampliação de conhecimentos, não somente pela compreensão de novas técnicas, mas também quando indicam que agora percebem que podem resolver sistemas com diversas variáveis (não apenas com duas ou três) por meio dos métodos estudados.

Em relação à categoria intermediária "*Lembranças sobre sistemas lineares, após nove meses*", que representou 3,68% das unidades de registro, verificou-se que, em 1,54% deles, os estudantes se lembraram, espontaneamente, dos métodos de resolução e dos processos de escalonamento de matrizes envolvidos, conforme apresenta-se a seguir:

> [...] Lembro-me dos processos de pivotação, Gauss [...], Jordan. [...] (2.1.A2.5, 2017).
> [...] onde foram aprendidos os métodos de resolução de sistemas de Gauss, Gauss-Jordan, matriz inversa entre outros [...] (2.1.A12.3, 2017).
> [...], resolução de sistemas lineares por matrizes pelo método de escalonamento, entre outros [...] (2.1.A26.3, 2017).
> Os conteúdos que nós estudamos e eu relembro é Gauss- Jordan; Eliminação Gassiana, [...] (2.1.A34.1, 2017).

Além disso, em 0,15% das unidades de registro, um estudante se referiu ao conceito de sistemas lineares, conforme mostrado a seguir: *"[...] Sistemas lineares- é um conjunto de equações lineares.* [...]" (2.1.A30.4, 2017), que, conforme foi citado anteriormente, está incompleto. Os demais não citaram conceituações.

Nesse caso, na categoria intermediária "*Lembranças sobre sistemas lineares, após nove meses*", verifica-se que a maior frequência das lembranças está associada aos métodos de resolução de sistemas, que foram trabalhados em grande parte do semestre, inclusive em resolução de problemas, que possibilitava a percepção de suas importâncias e utilidades. Percebe-se que a maioria dos estudantes não se referiu ao conceito envolvido e, talvez, isso se justifique pelo fato de não julgarem ser importante essa conceituação. Como o último questionário era composto por questões mais abertas, os estudantes, em suas repostas, citaram apenas o que mais chamou sua atenção no semestre.

Na categoria intermediária "*Compreensões sobre vetores*", que representou 9,97% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: "*Compreensão de vetores, ao final da disciplina*" (8,28%) e "*Lembranças sobre vetores, após nove meses*" (1,69%).

Na subcategoria intermediária "*Compreensão de vetores, no final da disciplina*", foram constatadas três subcategorias intermediárias: "*Percepções sobre compreensão ou ampliação do conceito de vetores, ao final da disciplina*" (4,14%); "*Modos como compreenderam que ampliou o conceito de vetores, ao final da* *disciplina*” (2,91%) e “*Conceituações sobre o conceito de vetores, ao final da disciplina*” (1,23%).

Na subcategoria intermediária “*Percepções sobre compreensão ou ampliação do conceito de vetores, ao final da disciplina*” verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 3,53%, os estudantes afirmaram que perceberam, ao final do semestre, que a disciplina lhes possibilitou compreender ou ampliar o conceito de vetores, conforme os exemplos: “*Ampliou sim, pois compreender os vetores na álgebra foi algo difícil mas ajudou sim a ampliar o conhecimento de vetores*.” (1.4.A1.1, 2016) ou “*Ajudou a ampliar o conceito de vetor e de espaço vetorial, [...]*” (1.4.A16.1, 2016).
- Em 0,46%, os estudantes afirmaram que a disciplina possibilitou compreender ou ampliar o conceito de vetores, mas afirmam que ainda não conseguiram compreender muito bem. A seguir, são apresentados exemplos que ilustram essas afirmações:

> Ampliou um pouco o conceito, mas não consegui compreender muito bem e ter total domínio sobre o conteúdo, mas ajudou na questão da Álgebra Linear, no conceito de vetores. (1.4.A13.1, 2016).
> Compreender, pois eu não tinha conhecimento sobre o assunto. Ainda não entendi muito bem, mas com esforço e dedicação irei adquirir conhecimento sobre ele. (1.4.A20.1, 2016).
> Possibilitou, mas não consegui compreender muito bem, sendo sincera. Tem a ver com vetores, seus sentidos, direção e adição ou multiplicação por números reais (1.4.A21.1, 2016).

- Em 0,15%, um estudante afirmou que percebeu, ao final do semestre, que a disciplina não lhe possibilitou compreender ou ampliar o conceito de vetores, conforme mostrado a seguir: “*Achei confuso esse conteúdo e não compreendi os conceitos passados*” (1.4.A11.1, 2016).

Na subcategoria intermediária “*Percepções sobre compreensão ou ampliação do conceito de vetores, ao final da disciplina*”, foi possível verificar que 77% dos respondentes do questionário final do G1 afirmaram que a disciplina possibilitou compreender ou ampliar o conceito de vetores, 10% afirmaram que possibilitou, mas ainda não compreendem bem, e 3% afirmaram que a disciplina não possibilitou que compreendesse esse conceito. Os demais não responderam de modo explícito. Desse modo, conclui-se que a maioria dos estudantes percebeu que a disciplina possibilitou compreender ou ampliar o conceito de vetores.

Na subcategoria intermediária "*Modos como compreenderam que ampliou o conceito de vetores, ao final da disciplina*", que representou 2,91% das unidades de registro, constatou-se que:

- Em 1,23%, os estudantes indicaram que compreenderam a representação algébrica de vetores, conforme os exemplos:

> [...] Pois mostrou que vetores podem ser vistos de forma algébrica, assunto qual jamais pensei, mostrou as diferentes variações que eles podem sofrer (1.4.A10.2, 2016).
> [...], pois mostrou uma nova maneira de calcular e interpretar o vetor, com a ajuda de sistemas e matrizes (1.4.A16.2, 2016).
> Possibilitou que eu ampliasse o meu conceito de vetores. Porque eu jamais pensava em vetores como foi explicado, nunca tinha pensado na forma algébrica e com a disciplina ajudou muito (1.4.A28, 2016).
> [...] que eles tinham módulo, direção e sentido, mas não lembrava como se fazia as operações entre eles, e também não compreendia muito bem como se representava eles no plano e no espaço. […] e com isso tornou-se mais fácil de entender a importância deles para representação de forças, descolamentos. Também entendi que um vetor no plano ou no espaço se comporta como um ponto, cada ponto, ou par ordenado é um único vetor (1.4.A32.2, 2016).

- Em 0,77%, os estudantes indicaram que compreenderam melhor, pois a disciplina lhes possibilitou perceber usos dos vetores no cálculo estrutural, conforme os exemplos:

> [...] principalmente pelos exemplos citados em aula pelo fato de estar muito ligado a engenharia civil, principalmente em cálculo de estruturas (1.4.A5.2, 2016).
> [...] aprofundamos mais o estudo de vetores, compreendendo melhor a utilização dele em Estática entre outras disciplinas [...] (1.4.A19.2, 2016).
> […], onde são usados e como são usados na Engenharia, como por exemplo, no cálculo de estruturas metálicas para achar as cargas da estrutura, e na estrutura, pode ter como exemplo treliças (1.4.A26.2, 2016).

- Em 0,61%, os estudantes disseram ter compreendido melhor o conceito de vetores e como aplicá-los, mas não especificaram de que modo, conforme mostrado a seguir:

> [...], pois com base nos meus conhecimentos eu apenas sabia de vetores da física. Agora na álgebra, a matéria possibilitou entender mais sobre eles e aplicá-los no dia-a-dia (1.4.A18.2, 2016).
> [...], posto que ampliou a sua utilidade na área (1.4.A22.2, 2016).
> [...], no início meu conceito de vetores era limitado apenas em forças, vetores que indicam força, com o estudo dos espaços vetoriais descobrimos outras utilidades, isso ampliou o conceito de vetores que eu conhecia (1.4.A14.2, 2016).

- Em 0,15%, um estudante indicou que percebeu que o conceito envolve elementos de espaços vetoriais, como matrizes: "*[...], pois normalmente* *associa-se a vetores a ideia da Física, ou seja, de forças. Agora entendo que vetores abrangem uma maior área, como matrizes por exemplo*” (1.4.A12.2, 2016).

- Em 0,15%, um estudante destacou que o uso do GeoGebra possibilitou a compreensão visual do conceito, conforme o exemplo: “*[...] as atividades nas quais foram usados recursos tecnológicos como o Geogebra possibilitou a compreensão visual, [...]”* (1.4.A2.2, 2016).

Na subcategoria intermediária “*Modos como compreenderam que ampliou o conceito de vetores, ao final da disciplina*”, constatou-se que a percepção mais frequente sobre a ampliação do conceito foi da compreensão da representação algébrica de vetores (27%), seguida da percepção de usos em outras disciplinas ou contextos (17% especificaram os usos e 13%, não). Em 3% dos respondentes, verificou-se que um estudante se referiu ao conceito de vetores como um elemento de um espaço vetorial e outro destacou que o uso do recursos tecnológicos digitais favoreceu sua compreensão. Assim, foi possível concluir que – conforme subcategoria anterior –, dentre os 77% estudantes do G1 que afirmaram que a disciplina possibilitou ampliar o conceito de vetores, 60% destacaram, por meio do registro escrito, os modos como a disciplina possibilitou ampliá-los, o que confirma que de fato houve, para esses estudantes, a ampliação desse conhecimento, segundo os aspectos que eles indicaram.

Na subcategoria intermediária “*Conceituações sobre o conceito de vetores, no final da disciplina*”, que representou 1,23% das unidades de registro, apareceram diversos tipos de conceituações.

Em 0,47% das unidades de registro, os estudantes indicaram que compreendem o conceito de vetor vinculado apenas à ideia de um representante de uma grandeza vetorial:

> [...] Tendo em vista que ele depende de sua intensidade, direção e sentido (1.4.A9.4, 2016).
> [...]Tendo em vista o quão importante ele é, dependendo de sua intensidade, direção e sentido e qual espaço em que ele está aplicado (1.4.A19.4, 2016).

Nesses casos, os estudantes conceituam vetores apenas citando seus elementos ou características (intensidade, direção e sentido), o que foi considerado incompleto, por não se referirem ao conceito especificamente, conforme definido por

Ramalho Júnior, Ferraro e Soares (2009), apresentado na seção 6.3.1.1; (ii) ou por Steinbruch e Winterle (1987), apresentado na seção 6.3.1.2 (ii).

Em 0,31% das unidades de registro, dois estudantes indicam que compreendem um vetor como um conjunto de infinitos segmentos orientados e citam suas características:

> Os espaços vetoriais tem como objetivo uma direção, sentido e comprimento e com as operações forma-se o espaço vetorial. Vetor é conjunto de infinitos segmentos orientados (1.4.A30.1, 2016).
> […] de acordo com o meu entendimento, vetores são infinitos segmentos que possuem direção, força e sentido, sendo equipolentes (1.4.A31.2, 2016).

No primeiro caso, observa-se dificuldade na expressão do conceito, mas verifica-se que o estudante compreende as características e o modo de representação por meio de segmentos orientados. Na segunda conceituação, observa-se que há uma compreensão mais ampla do conceito, pois o estudante se refere a um conjunto infinito de segmentos equipolentes, ou seja, apareceu a ideia de um vetor como um representante de um conjunto constituído por infinitos segmentos equipolentes (ou seja, que possuem direções iguais, sentidos iguais e intensidades iguais). Nesses casos, as conceituações foram consideradas próximas das anteriormente citadas como corretas, que são adotadas em contextos de resolução de problemas de física.

Salienta-se que, além dessa compreensão, que também foi retomada inicialmente na disciplina, esperava-se que os estudantes ampliassem esse conceito e que passassem a compreender vetores conforme a definição apresentada por Steinbruch e Winterle (1987, p.19):

> Os elementos do espaço vetorial V serão chamados vetores, independentemente da sua natureza. [...] A justificativa está no fato de as operações de adição e de multiplicação por escalar realizadas com esses elementos de natureza tão distinta se comportarem de forma idêntica, como se estivéssemos trabalhando com os próprios vetores do R^2 ou do R^3.

Nesse sentido, verificou-se, em 0,15% das respostas, que um estudante afirmou compreender um vetor como um elemento de um espaço vetorial, assim: "*O estudo de espaços vetoriais possibilitou inserir os vetores em espaços vetoriais reais e subespaços, ampliando o conceito inicial e vetores (direção, sentido e comprimento)*" (1.4.A7.1, 2016). O estudante indica ter compreendido o conceito ampliado apresentado, que está vinculado ao conceito prévio que já tinha e indica que ocorreu a aprendizagem significativa, conforme definido por Ausubel.

Em 0,15%, um estudante disse que compreendeu vetores como retas que possuem coordenadas, conforme o exemplo: *“[...] Os vetores são retas que possuem coordenadas*” (1.4.A34.2, 2016), o que foi considerado equivocado.

Em 0,15% das respostas, outro estudante indicou que compreendeu vetores como segmentos de retas que possuem direção, sentido e comprimento, que podem ser representados geometricamente, conforme o registro a seguir: “*São segmentos de retas que contêm direção, sentido e comprimento. Podem ocorrer em diversas dimensões como na bidimensional, tridimensional...*” (1.4.A35.1, 2016). Essa conceituação também foi considerada próxima das corretas, adotadas em contextos de física.

Destaca-se que, na investigação anteriormente realizada sobre conhecimentos prévios do G1, relativa à conceituação de vetores, não houve nenhuma explicação considerada totalmente correta, dentre aquelas que foram apresentadas pelos estudantes no início da disciplina. Apesar de algumas delas estarem próximas da correta, elas estavam incompletas.

Os resultados dessa subcategoria intermediária “*Conceituações sobre o conceito de vetores, ao final da disciplina*” indicam que a metade das conceituações apesentadas pelos estudantes do G1, ao final da disciplina, foi considerada próxima das corretas, o que corresponde a aproximadamente 13% do total de respondentes. No entanto, observou-se que a maioria delas estava vinculada ao conceito de representantes de grandezas vetoriais e remete aos conceitos definidos, no contexto de física, por Ramalho Júnior, Ferraro e Soares (2009), apresentada na seção 6.3.1.1 (ii) ou por Steinbruch e Winterle (1987), apresentados na seção 6.3.1.2 (ii), que também foram trabalhadas no decorrer da disciplina. Apenas um estudante (A7) se referiu ao conceito ampliado de vetores, conforme definido por Steinbruch e Winterle (1987), citada nesta seção. Também foi possível perceber que não aparecem conceitos de vetores estritamente vinculados à representação de forças. Ao final da disciplina, verificou-se que aparecem conceituações mais completas e próximas daquelas consideradas corretas, apresentadas na literatura, e que em apenas uma delas verificou-se ter havido um equívoco conceitual. Desse modo, é possível afirmar que a disciplina possibilitou aprimorar as compreensões iniciais do conceito de vetores (ou sua ressignificação), para esses estudantes que conseguiram se expressar de modo adequado em linguagem natural, conforme é adotado no contexto da física, e que possibilitou identificar a ampliação desse conceito apenas para o estudante A7.

Na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre vetores, após nove meses*", que representou 1,69% das unidades de registro, verificou-se, em 1,08% delas, que os estudantes se lembravam de ter estudado vetores, e, em 0,46% das ocorrências, indicaram que se lembraram de ter estudado espaços vetoriais, verificando-se, apenas em 0,15% dos casos, que um estudante se referiu à definição de espaços vetoriais, assim: *"[...] Espaços Vetoriais: objetivo uma direção, sentido e comprimento e com as operações forma-se o espaço vetorial [...]".* (2.1.A30.7, 2017).

Concluiu-se, nessa subcategoria intermediária, após nove meses, que, com exceção do estudante A30, alguns respondentes se recordaram apenas dos nomes de tópicos relativos aos vetores que foram estudados, mas não citaram lembranças específicas sobre eles, como usos ou conceitos. No caso do estudante A30, apesar de se referir à definição de espaços vetoriais, o faz de modo superficial e impreciso, indicando que não foi capaz de compreender o conceito, pois não conseguiu apresentar seu registro em linguagem natural de modo adequado.

Na categoria intermediária "*Compreensões de determinantes*", que representou 9,51% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias, quais sejam "*Compreensão de determinantes ao final da disciplina*" (6,9%) e "*Lembranças sobre determinantes*" (2,61%).

Na subcategoria intermediária "*Compreensão de determinantes ao final da disciplina*", foram constatadas duas subcategorias intermediárias: "*Percepções sobre compreensão de determinantes e aplicações, ao final da disciplina*" (3,99%) e "*Ao final da disciplina, como conceituaram determinantes*" (2,91%).

Na subcategoria intermediária "*Percepções sobre compreensão de determinantes e aplicações, ao final da disciplina*", verificou-se que, em 3,84% das unidades de registro, os estudantes indicaram que a disciplina possibilitou compreender o conceito de determinantes e seus usos, conforme o exemplo: "*Sim, compreendi claramente onde ele pode ser utilizado e tal importância do seu uso. Entendi o que são determinantes*" (1.2.A28.1, 2016). Em apenas 0,15% das unidades de registros, um estudante indicou que a disciplina não possibilitou compreender aplicações de determinantes, conforme mostrado a seguir: *"[...] ficou um pouco de dúvidas referentes à sua aplicação [...]*" (1.2.A2.2, 2016).

Nesse caso, verificou-se que todos os estudantes do G1 indicaram que a disciplina lhes possibilitou compreender o conceito de determinantes e apenas um estudante indicou que a disciplina não contribuiu para que ele compreendesse sua aplicação.

Na subcategoria intermediária "*Ao final da disciplina, como conceituaram determinantes*", que representou 2,91% das unidades de registro, verificou-se que em 1,38% das respostas, os estudantes conceituaram determinantes como números associados a matrizes quadradas, conforme os exemplos:

> Determinantes são números associados a determinadas matrizes quadradas [...] (1.2.A7.1, 2016).
> O determinante está associado a uma matriz quadrada, onde resolvendo esta, por diversos métodos, ela se transforma em um número" (1.2.A35.1, 2016).

Nesse caso, 30% dos respondentes apresentaram conceituações próximas da considerada adequada, definida por Boldrini et al. (1980), apresentada na seção 6.3.1.1 (ii).

Além disso, em 0,77% das unidades de registro, os estudantes conceituaram determinantes como um número resultante ou associado a uma matriz. Apesar de ser uma conceituação próxima do considerada correta, está incompleta, pelo fato de não limitarem às matrizes quadradas, conforme registro a seguir: *"[...] Determinante é um número associado a uma matriz [...]"* (1.2.A18.2, 2016).

Em 0,46% das unidades de registro, percebeu-se que os estudantes conceituaram determinantes como uma função, conforme os exemplos:

> [...] o determinante é uma função que permite encontrar um valor numérico associado a uma matriz quadrada [...] (1.2.A12.2, 2016).
> Determinante é uma função matricial é uma matriz quadrada se torna um número [...] (1.2.A30.1, 2016).
> [...] determinantes são uma função [...] (1.2.A32.2, 2016).

Nesses casos, com exceção do A32, que não explica a função, os demais estudantes apresentaram uma ampliação desse conceito, conforme apresentado em sala de aula, indicando que compreenderam o conceito e que foram capazes de expressá-lo em linguagem corrente de modo adequado.

Além disso, em 0,15% das unidades, constatou-se que um estudante, equivocadamente, conceituou o determinante como um número que pode ser representado por uma matriz: *"[...], pois são números escalares reais que podem ser representados por matrizes [...]"* (1.2.A4.2, 2016). O estudante não percebeu que a função determinante não é unívoca, ou seja, há um problema na compreensão do conceito devido a um tratamento. Ao se calcular o determinante, há uma mudança de representação dentro do próprio registro simbólico, no qual ocorre o fenômeno da não congruência, não compreendido pelo estudante.

Também se verificou que, em 0,15% das unidades de registro, um estudante conceituou determinante apenas como um número, o que foi considerado um equívoco: “[...] Determinante é um número [...]” (1.2.A31.2, 2016).

Cabe lembrar que, no início da disciplina, no reconhecimento de conhecimentos prévios do G1, a maioria dos estudantes havia indicado que sentia dificuldades para se lembrar sobre a aprendizagem de determinantes e apenas 6% dos participantes havia sido capaz de expressar o conceito de determinante adequadamente.

Assim, na subcategoria intermediária “*Ao final da disciplina, como conceituaram determinantes*” concluiu-se que, dentre os respondentes, 37% dos estudantes apresentaram conceitos adequados, o que indica que, para esses alunos, houve a compreensão ou o aprimoramento do conceito.

Na subcategoria intermediária “*Lembranças sobre determinantes*”, que representou 2,61% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 1,53% das respostas, os estudantes indicaram que, após nove meses, se lembravam que haviam estudado na disciplina o conceito determinantes.
- Em 0,46%, os estudantes se lembraram da definição de determinantes:

> [...] e determinantes são números que representam matrizes (2.1.A17.4, 2017).
> [...]; Determinante: É um número associado a uma matriz quadrada [...] (2.1.A19.4, 2017).
> [...] Determinante: Um número relacionado a uma matriz quadrada [...] (2.1.A22.3, 2017).

- Em 0,31%, os estudantes indicaram ter se lembrado do estudo de cálculos de determinantes: *“[...] Após começou-se o estudo dos determinantes das matrizes e seus respectivos cálculos [...]”* (2.1.A10.4, 2017).
- Em 0,31%, os estudantes indicaram ter se lembrado dos métodos de resolução abordados: “*Métodos de Laplace; Métodos de Triangulação; [...]* (2.1.A6.1 , 2017) ou *“[...] regra de Sarros [...]”* (2.1.A34.2, 2017).

Conclui-se, na subcategoria intermediária “*Lembranças sobre determinantes*”, que, após nove meses, 30% (dentre os respondentes) se lembraram espontaneamente da aprendizagem de determinantes. Além disso, 10% também apresentaram a definição, com um índice de 7% (dois estudantes) de respostas adequadas, ou seja, verifica-se que, para esses dois alunos, houve a compreensão do conceito, tendo esse conteúdo permanecido em sua memória, o que indica a presença da aprendizagem significativa. Também ressalta-se que, no início da disciplina, no reconhecimento de conhecimentos prévios, os estudantes que haviam conceituado adequadamente determinantes foram A15 e A32 e que aqueles que se lembraram desse conceito, nove meses após o término da disciplina, foram os estudantes A19 e A22, ou seja, não foram os mesmos participantes.

Na categoria intermediária "*Compreensões sobre autovalores e autovetores*", que representou 6,44% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias: "*Compreensão de autovalores ou autovetores ao final da disciplina*" (5,67%) e "*Lembranças sobre autovalores e autovetores*" (0,77%).

Na subcategoria intermediária "*Compreensão de autovalores ou autovetores ao final da disciplina*", foram identificadas quatro subcategorias intermediárias: "*Conceituaram autovalores e autovetores*" (2,29%); "*Percepções sobre compreensão do conceito de autovalores e autovetores e de usos, ao final da disciplina*" (1,84%); "*Associações realizadas sobre o conceito de autovalores e autovetores, ao final da disciplina*" (1,23%) e "*Apenas conceituaram autovetores*" (0,31%).

Na subcategoria intermediária "*Conceituaram autovalores e autovetores*", constatou-se que dentre as 2,29% unidades de registro, em 0,61% das respostas, os estudantes conceituaram autovetores e autovalores como valores ou vetores que possibilitam a existência de vetores, assim:

> Autovalores e autovetores são valores e vetores que fazem com que um vetor, após uma transformação linear continue existindo [...] (1.6.A14.1, 2016).
> [...] São valores que tornam o vetor existente (1.6.A18.2, 2016).
> São valores utilizados que possibilitam que haja a existência de vetores [...] (1.6.A22.1, 2016).

Boldrini et al. (1980, p.180) apresentam os conceitos de autovalor e de autovetor do seguinte modo: "Seja $T: V \to V$, um operador linear. Se existirem $v \in V$, $v \neq 0$ e $\lambda \in R$, tais que: $T(v) = \lambda v$, λ é um autovalor de T e v um autovetor de T associado à λ." Os autores também afirmam que "Dada uma transformação linear $T: V \to V$, estamos interessados em saber quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo [...] Neste caso $T(v)$ tem a mesma "direção" de v. [...]"

(BOLDRINI et al.,1980, p.180). Assim, verifica-se que a conceituação de maior frequência apresentada pelos estudantes não está correta, pois indica que são conceitos que possibilitam a existência dos vetores. Provavelmente, a confusão conceitual ocorre pelo fato de nem sempre existirem autovalores e autovetores associados a operadores lineares.

Também foi possível verificar em 0,31% das unidades de registros que os estudantes conceituaram autovetores como aqueles que preservam suas direções após sua transformação, e autovalores como múltiplos que transformam os autovetores, o que está adequado em relação à conceituação considerada correta.

> Autovetores que mesmo após terem sido transformados, preservam a direção. Autovalores são os múltiplos que transformam os autovetores (1.6.A10.1, 2016).
> Os autovalores são números que, quando um vetor passa por uma transformação linear, não irão alterar a direção dos vetores. Os autovetores são os vetores associados aos autovalores (1.6.A12.1, 2016).

Nesse caso, destaca-se que 10% dos respondentes apresentaram conceituações consideradas adequadas.

Em 0,31% das unidades de registros, os estudantes conceituaram autovalores e autovetores como operadores lineares, o que, na verdade, faz parte das condições para o cálculo desses conceitos, mas não os define. A seguir, são apresentados exemplos que ilustram essas conceituações: "*São operadores lineares de um espaço para o mesmo espaço, valores associados aos vetores. [...]*" (1.6.A2.1, 2016) ou *"[...] São transformação num espaço nele mesmo. [...]"* (1.6.A34.2, 2016).

Também constatou-se que, em 0,31% das unidades de registro, os estudantes conceituaram autovalores e autovetores como um número (s), o que também está equivocado:

> Os autovalores e autovetores também são importantes, pois podemos descobrir esse número a partir de uma matriz, sendo assim soluções das equações e podendo nos ajudar muito na engenharia civil. (1.6.A13.1, 2016)
> São números que quando um vetor passa por uma transformação, não se altera (1.6.A11.1, 2016).

Além disso, nas unidades de registro, também foi possível verificar que:

- Um estudante (0,15%) conceituou autovalor como um número e autovetor como um vetor que preserva a dimensão, conforme registro: "*Autovalores é um número e Autovetores é o vetor que preserva a dimensão [...]*" (1.6.A30.1, 2016). Nesse caso, verifica-se o problema na conceituação quando o estudante usa a palavra “dimensão” como sinônimo da palavra “direção”.

- Um estudante (0,15%) conceituou autovalores e autovetores como transformações vetoriais: *“Eles são transformações vetoriais eu acho, são importantes para saber coisas nas estruturas, pois os vetores representam grandezas importantes”* (1.6.A21.1, 2016). Nesse caso, a conceituação também está equivocada, pois, apesar de autovalores e autovetores estarem associados a transformações lineares, eles não são definidos como tal.
- Um estudante (0,15%) conceituou autovetores como novos vetores associados aos autovalores e às transformações e os autovalores como os múltiplos das equações lineares: *“[...] os autovalores são os múltiplos das equações lineares e os autovetores são os novos vetores associados as autovalores e as transformações [...]”* (1.6.A35.2, 2016). Nesse caso, o estudante remete a elementos presentes na conceituação considerada correta, porém, não caracteriza os autovetores nem os autovalores, e, desse modo, também está equivocado.
- Um estudante (0,15%) conceituou autovetores como valores que possibilitam encontrar autovalores para escrever a combinação linear: *“[...] autovetores são valores que possibilitam encontrar autovalores para escrever como combinação linear”* (1.6.A26.2, 2016). Nesse caso, a conceituação também está equivocada e verifica-se que o estudante confunde inclusive os conceitos que foram abordados na disciplina.

Conclui-se, na subcategoria intermediária “*Conceituaram autovalores e autovetores*”, que, apesar de 50% dos respondentes terem apresentado conceituações sobre suas compreensões, apenas 10% deles conseguiram se expressar em linguagem natural de modo adequado.

Na subcategoria intermediária “*Percepções sobre compreensão do conceito de autovalores e autovetores e de usos, ao final da disciplina*”, que representou 1,84% das unidades de registro, identificou-se, em 0,77% deles, que os estudantes não compreenderam ou não se lembram de alguma aplicação de autovalores e autovetores na engenharia, conforme os exemplos:

> Não consegui entender sua aplicação na engenharia (1.6.A2.2, 2016).
> Essa aula eu faltei, então não tenho muito conhecimento sobre aplicações de autovalores e autovetores (1.6.A23.1, 2016).

> [...] Não sei um exemplo de aplicação na engenharia que posso explicar se são importantes na engenharia (1.6.A30.2, 2016).
> [...] Não lembro de nenhum exemplo da utilização deles para a Engenharia Civil (1.6.A32.3, 2016).

Em 0,61% das unidades de registro, os estudantes indicaram que a disciplina não possibilitou a compreensão sobre o que são autovalores e autovetores: "*Eu não entendi o conceito de autovalores e autovetores inteiramente [...]*" (1.6.A4.1, 2016) ou "*Não compreendi muito bem o que são autovalores e autovetores*" (1.6.A25.1, 2016).

Também se verificou que em 0,46% das unidades de registro os estudantes afirmaram que a disciplina possibilitou compreender o que são autovalores e autovetores, e alguns disseram que percebem que são importantes na engenharia: "*Compreendo sim e são muito importantes também [...]"* (1.6.A28.1, 2016) e "*A disciplina ajudou compreender o que são autovalores e autovetores. [...] Eu acho que sim [...]*" (1.6.A34.1, 2016).

Conclui-se, na subcategoria intermediária "*Percepções sobre compreensão do conceito de autovalores e autovetores e de usos, ao final da disciplina",* que os registros mais frequentes se referem ao fato de os estudantes não se lembrarem ou não entenderem as aplicações de autovalores e autovetores na engenharia. Também foram constatadas diferentes percepções em relação à aprendizagem: 13% dos respondentes afirmaram que a disciplina não possibilitou a compreensão dos conceitos e 10% indicou o contrário.

Salienta-se que as aplicações que foram apresentadas em *slides* se referem à análise dinâmica de estruturas. Os autovalores representavam as frequências de vibração e os autovetores representavam os diferentes modos de deformação das estruturas associadas. Essa aplicação é mais complexa e os estudantes nesse nível da graduação ainda não tinham conhecimento específico suficiente, nem na área de matemática, nem na de engenharia, para fazer uso desse instrumento na própria disciplina. Justifica-se que a apresentação desse material se deu em razão de que foi considerado potencialmente significativo, ou seja, apresentava um conhecimento mais amplo sobre usos de autovalores e autovetores em um problema prático da engenharia. Visou estimular o interesse dos estudantes pelo estudo desses conceitos matemáticos que poderão ser utilizados por eles posteriormente para representar o fenômeno físico apresentado.

Já na subcategoria intermediária "*Associações realizadas sobre o conceito de autovalores e autovetores, ao final da disciplina*", que representou 1,23% das unidades de registro, constatou-se que:

- Em 0,93%, os estudantes indicaram que compreendem que os autovetores e autovalores são importantes, pois estão associados a transformações ou às transformações lineares:

> Autovalores e autovetores estão associados a transformações lineares, [...] (1.6.A7.1, 2016).
> São importantes, estão relacionados à transformação e que oferecem solução para a equação (1.6.A8.1, 2016).
> São importantes para nós, com base neles podemos relacionar as transformações lineares [...] (1.6.A18.1, 2016).

- Um estudante (0,15%) indicou que compreende que os autovetores e os autovalores utilizam a noção de vetores relacionado a forças em um objeto: *"[...] É importante, pois utiliza a noção de vetores, que está relacionado a forças em um objeto"* (1.6.A22.2, 2016).
- Um estudante indicou que compreende que os autovetores e os autovalores estão relacionados à noção de dependência linear: *"[...], só percebi que eles estão relacionados com dependência linear. [...]"* (1.6.A32.2, 2016).

Assim, na subcategoria intermediária "*Associações realizadas sobre o conceito de autovalores e autovetores, ao final da disciplina*", notou-se que a maioria dos estudantes, ao ser questionada sobre a importância desses conceitos na engenharia, se referiu a usos relacionados a conceitos teóricos, ou seja, às transformações lineares ou ao conceito de dependência linear. Apenas um estudante se referiu à utilização de vetores na representação de forças em um objeto. Mas, mesmo assim, não explicou de que modo isso poderia ser realizado por meio dos autovalores e autovetores.

Na subcategoria "*Apenas conceituaram autovetores*", que representou 0,31% das unidades de registro, verificou-se que os estudantes conceituaram os autovetores como vetores que preservam suas direções após sua transformação, conforme os exemplos: *"[...], onde determina-se quais vetores preservam suas a direção após sua transformação"* (1.6.A7.2, 2016) ou "*É muito importante, pois podemos saber se após o vetor se transformar sua direção vai prevalecer ou não [...]"* (1.6.A19.1, 2016).

Nessa subcategoria, verificou-se a falta de compreensão dos conceitos investigados, pois os estudantes do G1 não conseguiram formular uma explicação clara em linguagem corrente para expressar os autovetores.

Na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre autovalores e autovetores*", que representou 0,77% das unidades de registro, verificou-se que, em 0,62% das unidades, os estudantes indicaram, após nove meses, que se lembravam espontaneamente de ter estudado os conceitos de autovalores e autovalores, assim: "*Os tópicos vistos foram [...] Autovalores e autovetores [...]"* (2.1.A32.8, 2017) e que apenas um estudante (0,15%) se lembrou de uma definição de autovalores e autovetores, conforme mostrado a seguir: *"[...] Autovalores - é um número. Autovetores - é o vetor que preserva a dimensão. [...]"* (2.1.A30.9, 2017). No entanto, verifica-se que a sua lembrança não está correta, pois escreve dimensão como sinônimo de direção.

Assim, constatou-se, na subcategoria "*Lembranças sobre autovalores e autovetores*", que apesar de 19% dentre os respondentes se lembrar de ter estudado na disciplina os conceitos de autovalores e autovetores, não houve nenhum estudante do G1 que se recordou, espontânea e corretamente, desse conceito.

A última categoria intermediária identificada foi "*Compreensões sobre transformações lineares*", que representou 4,6% das unidades de registro. Nela foram identificadas duas subcategorias intermediárias: *"Compreensões de transformações lineares, ao final da disciplina"* (3,68%) e "*Lembranças sobre transformações lineares*" (0,92%).

Na subcategoria intermediária *"Compreensões de transformações lineares, ao final da disciplina",* emergiram duas subcategorias intermediárias: "*Conceituaram transformação linear"* (2,45%) e "*Percepções sobre compreensão do conceito de transformações lineares e de usos"* (1,23%).

Na subcategoria intermediária "*Conceituaram transformação linear"* verificou-se, ao final da disciplina, que:

– Em 0,46%, os estudantes a conceituaram como uma função entre dois espaços vetoriais, conforme os exemplos: "*É um tipo de função entre dois espaços vetoriais. [...]"* (1.5.A5.1, 2016) ou "*As transformações lineares formam um espaço vetorial é uma função V em W por exemplo F=V-domínio e W-contradomínio F=V->W.[...]"* (1.5.A30.1, 2016).

- Em 0,46%, os estudantes a conceituaram como transformação entre vetores, conforme mostrado a seguir:

> São transformações aplicadas em vetores [...] (1.5.A12.1, 2016).
> [...], transformação linear é tipo uma função entre dois vetores, que preserva suas operações. [...] (1.5.A31.2, 2016).
> As transformações lineares estão dentro dos espaços vetoriais, onde analisamos uma dada transformação que sofre um determinado vetor ou um conjunto de vetores que formam alguma forma geométrica [...] (1.5.A35.1, 2016).

Nesse caso, um estudante destacou que é um tipo de função que preserva as operações, mas não citou quais.

- Em 0,31% das respostas, os estudantes a conceituaram como transformação de matrizes, conforme os exemplos:

> Transformações lineares é o estudo de transformar uma matriz de vetores em um sistema, este que gera uma equação [...] (1.5.A2.1, 2016).
> Transformação de matrizes em equações. Igualdades que visam soluções únicas, infinitas ou indeterminadas [...] (1.5.A4.1, 2016).

- Em 0,31%, os estudantes a conceituaram apenas como uma aplicação linear, mas não explicaram o que isso significa: "*Transformações lineares são aplicações lineares. [...]*" (1.5.A7.1, 2016) ou *"É um aplicação linear sendo importante para Engenharia Civil"* (1.5.A27.1, 2016).
- Um estudante (0,15%) a conceituou como conceitos aplicados em vetores, mas também não explicou o que significa, conforme mostrado a seguir: "*São conceitos aplicados em vetores [...]"* (1.5.A11.1, 2016).
- Um estudante (0,15%) a conceituou como ações aplicadas em vetores, conforme o registro: "*São ações que há em vetores [...]"* (1.5.A22.1, 2016).
- Um estudante (0,15%) a conceituou como métodos para deslocar figuras, conforme o exemplo, a seguir: "*Transformações lineares são métodos que possibilitam deslocar figuras em um plano, sem precisar fazer outra, na maneira como entendi."* (1.5.A26.1, 2016).

Steinbruch e Winterle (1987, p. 152), no contexto da Álgebra Linear, apresentam a seguinte definição de transformação linear:

> Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $T: V \to W$ é *chamada transformação linear* de V em W se:
> I) $T(u+v) = T(u) + T(v)$
> II) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$
> para $\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha \in R$

Ao ser comparada essa definição com as conceituações apresentadas pelos estudantes, ao final da disciplina, verificou-se que não houve conceituação que pudesse ser considerada adequada. As conceituações de maior frequência referem-se a transformações entre espaços vetoriais, ou entre vetores, mas os estudantes não citam que devem preservar a soma de vetores e a multiplicação por escalares. Apenas um estudante cita que a transformação deve preservar operações, mas não deixa claro quais são, sendo a única que se aproxima da conceituação considerada adequada. Além disso, dois estudantes apenas afirmam que são aplicações lineares, mas não explicam seu significado. Os demais se referrem aos seus usos para representar ações ocorridas em vetores, referindo-se aos casos específicos das transformações clássicas do plano no plano, trabalhadas na disciplina. Assim, conclui-se que os estudantes do G1 que apresentaram conceituações sobre transformações lineares ao final da disciplina mostraram que não conseguiram compreender o conceito, pois não foram capazes de expressar, em linguagem corrente ou simbólica, seu significado.

Na subcategoria intermediária "*Percepções sobre compreensão do conceito de transformações lineares e de usos",* que representou 1,23% das unidades de registro, constatou-se que em 0,47% das respostas os estudantes afirmaram que a disciplina possibilitou compreender o conceito de transformações lineares, conforme o exemplo: "*Sim, compreendi o que são transformações lineares e são muito importantes na engenharia [...]"* (1.5.A28.1, 2016).

Em 0,31%, os alunos destacaram que a disciplina os possibilitou compreender esse conceito, principalmente por ter sido usado o *software* GeoGebra no desenvolvimento da última tarefa, conforme mostrado a seguir:

> Possibilitou compreender as transformações lineares, principalmente com o auxílio do GeoGebra. [...] (1.5.A29.1, 2016).
> A disciplina possibilitou que eu compreendesse o que são transformação lineares o que facilitou muito foi a última atividade no GeoGebra (1.5.A34.1, 2016).

Nesses registros, se percebe que esses estudantes valorizaram o uso dos recursos tecnológicos digitais e perceberam que suas utilizações facilitam suas aprendizagens.

Assim, no G1, verificou-se que 17% dos estudantes afirmaram que a disciplina contribuiu para que compreendessem o conceito de transformações lineares, mas que não foram capazes de apresentar a conceituação adequada.

Provavelmente estavam se referindo à compreensão dos usos das transformações lineares clássicas e de suas interpretações, as quais foram exploradas na última tarefa com uso dos computadores.

Além disso, também se verificou, nas unidades de registro, que:

- Em 0,15%, um estudante afirmou que a disciplina não possibilitou que ele compreendesse o conceito de transformações lineares: "*Não compreendi*" (1.5.A1.1).
- Em 0,15%, um estudante afirmou que não sabia se esse conceito era importante na Engenharia Civil: "*Não sei se são importantes para Engenharia Civil*" (1.5.A11.2 [...], 2016).
- Em 0,15%, um estudante afirmou que não se lembrava de ter visto exemplos de usos de transformações lineares na Engenharia Civil: *"[...] Não lembro de nenhum exemplo onde as transformações lineares podem ser usadas na engenharia"* (1.5.A32.2, 2016).

Nesses três últimos casos, verificou-se que 10% dos respondentes destacaram que sentiram dificuldades de compreensão ou de percepção quanto ao uso das transformações lineares, no decorrer da disciplina.

Conclui-se, em relação à subcategoria intermediária "*Percepções sobre compreensão do conceito de transformações lineares e de usos",* que a percepção dos estudantes sobre o fato de a disciplina ter possibilitado a compreensão do conceito de transformações lineares está equivocada, pois se verificou que nenhuma dentre as conceituações apresentadas foi considerada adequada. No reconhecimento de conhecimentos prévios sobre a expressão "função linear", realizado no G1, também não havia sido identificada conceituação matemática considerada adequada. Assim, em relação ao conceito de transformações lineares, foi possível perceber que não houve compreensão nem ampliação do conceito, conforme era esperado.

Na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre transformações lineares*", que representou 0,92% das unidades de registro, verificou-se que, em 0,77%, os estudantes, após nove meses, indicaram que se lembravam de ter estudado esse tópico: *"Os tópicos vistos foram [...] e Transformações Lineares. [...]"*. (2.1.A32.9, 2017) e que em 0,15% das unidades de registro, um estudante se lembrou espontaneamente da definição de transformações lineares: *"[...] Transformações lineares formam um espaço vetorial é uma função V em W "* (2.1.A30.11, 2017).

Nessa subcategoria verificou-se que 24% dos respondentes se lembraram de ter estudado esse assunto e apenas 5% (um estudante) apresentou uma definição para o conceito. No entanto, de acordo com a definição apresentada por Steinbruch e Winterle (1987), verificou-se que o registro desse estudante está inadequaddo, pois não se refere às características que definem uma transformação linear.

(ii) “*Percepções gerais sobre usos dos conhecimentos construídos na disciplina*” - *G1*

Nessa categoria final, que representou 39,42% das unidades de registro, foram identificadas duas categorias intermediárias: “*Percepções sobre usos dos conceitos*”, que representou 30,52% das unidades de registro, e “*Percepções sobre usos do conhecimento construído em Álgebra Linear*”, que representou 8,9% das unidades de registro, as quais são apresentadas a seguir.

Na categoria intermediária “*Percepções sobre usos dos conceitos*”, foram identificadas seis subcategorias intermediárias: “*Percepções sobre usos de matrizes*” (9,81%); “*Percepções sobre usos determinantes*” (6,6%); “*Percepções sobre usos de sistemas lineares*” (5,37%); “*Percepções sobre usos de transformações lineares*” (5,06%); “*Percepções sobre usos de vetores*” (2,15%) e “*Percepções sobre usos de Autovalores e Autovetores*” (1,53%).

Na subcategoria intermediária “*Percepções sobre usos de matrizes*”, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: “*Percepções sobre usos de matrizes, ao final da disciplina*” (6,44%) e “*Lembrou de usos de matrizes, após nove meses*” (3,37%).

Na subcategoria intermediária “*Percepções sobre usos de matrizes, ao final da disciplina*”, verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 2,91%, os estudantes indicaram que perceberam o uso de matrizes na organização e na manipulação de dados, assim:

> [...] as matrizes servem para organizar informações, vimos muito matrizes no nosso dia-a-dia, como em tabelas de campeonatos, tabelas nutricionais, ... (1.1.A8.2, 2016).
> [...] Podem ser utilizadas para ordenar e organizar dados, e assim, depois resolver problemas de uma forma mais clara. [...] (1.1.A32.3, 2016).

- Em 1,23%, os estudantes afirmaram que perceberam o uso de matrizes na resolução de problemas:

> [...], podem ser utilizadas na resolução de problemas reais como fluxo de água [...] e na engenharia pode ser utilizado matrizes até para projetos de uma ponte, levando em consideração o fluxo de pessoas e veículos (1.1.A5.2, 2016).
> [...] e podem ser utilizadas em resoluções de problemas [...] (1.1.A12.3, 2016).

- Em 0,92%, os estudantes indicaram que perceberam o uso de matrizes na resolução de sistemas:

> [...], facilitam na resolução de sistemas lineares por diferentes métodos, [...] (1.1.A26.3, 2016).
> [...] Um exemplo de utilização de matrizes é para resolver sistemas de equações lineares, fazendo um escalonamento total ou parcial da matriz na forma ampliada, e achando a solução do sistema, caso exista (1.1.A32.4, 2016).

- Em 0,77%, os estudantes afirmaram que perceberam o uso de matrizes na codificação de mensagens:

> [...] matrizes [...] servem para [...] codificar mensagens, etc. (1.1.A4.4, 2016).
> [...] elas são usadas [...] para decodificar palavras criptografadas (1.1.A17.3, 2016).
> [...] A melhor utilização que eu vi foi na criptografia (1.1.A34.4, 2016).

- Em 0,46% das unidades de registro, os estudantes afirmaram que perceberam o uso de matrizes na programação de computadores, conforme mostrado a seguir:

> [...] O mais importante foi perceber que elas são muito importantes para os computadores e seus programas (1.1.A22.3, 2016).
> [...] As matrizes são usadas na informática [...] (1.1.A34.2, 2016).

- Em 0,15% das respostas, um estudante indicou que percebeu o uso de matrizes na interpretação de gráficos: *"[...] pra simplificar a interpretação de gráficos [...]"* (1.1.A31.5, 2016).

Na subcategoria intermediária "*Percepções sobre usos de matrizes, ao final da disciplina*", verificou-se que 80% dos respondentes indicaram perceber diversos usos de matrizes, sendo os mais frequentes a a organização e a manipulação de dados, a resolução de problemas e a resolução de sistemas. Também perceberam usos na codificação de mensagens, na programação de computadores e na simplificação da interpretação de gráficos. No início da disciplina, no reconhecimento de conhecimentos prévios, verificou-se que apenas 20% dos estudantes do G1 se lembravam de possíveis usos de matrizes e que esses estavam associadas à resolução de sistemas lineares e à resolução de determinantes (apenas um estudante se referiu ao seu uso na organização de dados). Assim, concluiu-se que, no G1, houve a ampliação da compreensão sobre o uso de matizes, inclusive com percepções de enfoques mais variados e práticos.

Na subcategoria intermediária "*Lembrou de usos de matrizes, após nove meses*" que representou 3,37% das unidades de registro, constatou-se que:

- Em 1,22%, os estudantes indicaram que se lembraram de do uso de matrizes na organização de dados, durante a disciplina e após a sua conclusão:

> [...] Gosto de organizar minhas tarefas em forma de tabelas e também os gastos que possuo no mês. Em uma matéria semestre passado utilizamos os conhecimentos ensinados em sala de aula para criação de tabelas de estoque (cimento, areia, brita) para simulação de um trabalho (2.3.A8.3, 2017).
> [...] estou pesquisando sobre otimização estrutural, especificamente o método da busca harmônica, a qual utiliza de matrizes para armazenamento das variáveis [...] (2.3.A12.2, 2017).

- Em 0,77%, os estudantes indicaram que se lembraram do uso de matrizes na resolução de sistemas:

> [...] alguns métodos para resolução de sistemas (Matriz inversa, escalonamento parcial...), [...] (2.1.A8.5, 2017).
> [...], resolução de sistemas lineares por matrizes pelo método de escalonamento, entre outros. [...] (2.1.A26.4, 2017).

- Em 0,61%, os estudantes afirmaram ter se lembrado, após nove meses, do uso de matrizes na resolução de problemas:

> [...], resolver problemas de fluxo, onde tínhamos um sistema com várias incógnitas e por meio da montagem de matrizes achávamos os valores das incógnitas, assim podendo resolver dado problema composto [...] (2.1.A2.4, 2017).
> [...] destaco sistemas lineares e matrizes que foram os que mais compreendi, e uso até hoje em outras disciplinas na resolução de problemas (2.1.A26.5, 2017).

- Em 0,46% das respostas, os estudantes, após nove meses, indicaram se lembrar do uso de matrizes em métodos variados:

> Agora no quarto semestre estamos utilizando, até o momento, muito os processos que envolvem matrizes, os métodos de Gauss, Laplace, Pivotação, [...] (2.2.A2.2, 2017).
> Solução de matrizes em variados métodos, vetores etc. (2.1.A29.1, 2016).

- Em 0,31%, os estudantes, após nove meses, indicaram se lembrar do uso de matrizes na disciplina de cálculo numérico:_"*Cálculo numérico, para resolver* *matrizes*" (2.2.A14.2, 2017) ou "*Sim, em cálculo numérico com o uso de matrizes e auxilio do programa Excel"* (2.2.A16.2, 2017).

Assim, na categoria "*Lembrou de usos de matrizes, após nove meses*", foi possível concluir que 57% dos respondentes indicaram que se lembravam de usos de matrizes e que as lembranças mais frequentes estão associadas à organização de dados, seguida da resolução de sistemas ou problemas, do uso em métodos variados e também na disciplina de cálculo numérico. Os resultados indicam que, para esses estudantes, houve a ampliação desse conhecimento, bem como ocorreu a aprendizagem significativa, pois, além de se lembrarem dos exemplos de usos citados em aula, também foram capazes de perceber outros usos, fora do contexto da disciplina.

Na subcategoria intermediária "*Percepções sobre usos determinantes*", que representou 6,6% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: "*Ao final da disciplina, como perceberam usos de determinantes*" (5,53%) e "*Lembranças sobre uso de determinantes*" (1,07%).

Na subcategoria intermediária "*Ao final da disciplina, como perceberam usos de determinantes*", verificou-se que, nas unidades de registro:

- Em 2,15%, os estudantes afirmaram perceber o uso de determinante no cálculo de área:

> [...] Podem ser utilizados para calcular área de triângulos, a partir de suas coordenadas (1.2.A7.2, 2016).
> [...] um exemplo é no cálculo de áreas de polígonos, com o determinante ficou mais prático (1.2.A23.2, 2016).

- Em 1,23%, os estudantes afirmaram perceber o uso de determinante para calcular matriz inversa: *"[...] podem ser utilizados para o cálculo de matrizes inversas [...]*" (1.2.A16.3, 2016) ou *"[...] são usados para verificar se uma matriz admite inversa, por exemplo"* (1.2.A17.3, 2016).
- Em 0,92%, os estudantes afirmaram perceber o uso de determinante para resolver sistemas lineares, conforme o registro, a seguir: "*[...] aprendi que eles servem para resolver problemas lineares [...]*" (1.2.A21.2, 2016).
- Em 0,31%, os estudantes afirmaram perceber o uso de determinante para resolver problemas: *"[...] Podem ser utilizados em [...] resolução de problemas (como a regra de Cramer), entre outras*" (1.2.A12.5, 2016).

- Em 0,31%, os estudantes afirmaram perceber o uso de determinante para verificar dependência linear:

> O determinante possibilita identificar se os sistemas lineares são independentes ou independentes e se tal conjunto é base vetorial ou não (1.2.A29.1, 2016).
> [...] também para dizer se é linearmente independente ou dependente. (1.2.A31.4, 2016).

- Em 0,31%, os estudantes afirmaram perceber o uso de determinante para encontrar equações: *“[...] aprendi que eles servem para [...] encontrar equações”* (1.2.A21.3, 2016).
- Em 0,15%, um estudante afirmou perceber o uso de determinante em funções: “*[...] pode ser utilizada numa função matemática”* (1.2.A30.2, 2016).
- Em 0,15%, um estudante afirmou perceber o uso de determinante na identificação se um sistema é homogêneo ou não: “*[...] na compreensão se um sistema é homogêneo ou não homogêneo”* (1.2.A34.3, 2016).

Concluiu-se, na subcategoria intermediária “*Ao final da disciplina, como perceberam usos de determinantes*”, que as percepções mais frequentes relacionam-se ao cálculo de áreas, ao cálculo de matrizes inversas e à resolução de sistemas lineares. Os estudantes do G1 também indicaram perceber usos na resolução de problema, na verificação de dependência linear e para encontrar equações. As percepções menos frequentes são aplicações em funções e na verificação de sistemas homogêneos. Destaca-se que essa última percepção não faz sentido, tendo em vista que para um sistema ser homogêneo, basta que todos os seus termos independentes sejam nulos. Além disso, no reconhecimento de conhecimentos prévios no G1, constatou-se que, apenas 17% souberam citar exemplos de usos do determinante, relacionados à resolução de sistemas, para resolver matrizes, na resolução de matrizes inversas e em usos cotidianos (mas não disseram como). Assim, no início da disciplina, as lembranças remetiam aos usos teóricos do determinante. Ao final da disciplina, por sua vez, verificou-se que 83% dos respondentes foram capazes de exemplificar usos variados do determinante, o que indica que a disciplina possibilitou, a esses estudantes, a ressignificação e a ampliação do conceito, bem como favoreceu a aprendizagem significativa.

Na subcategoria intermediária “*Lembranças sobre uso de determinantes*”, verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 0,61%, os estudantes, após nove meses, se lembravam do uso de determinante para o cálculo de áreas: “*[...] determinante para cálculo de área”* (2.2.A9.4, 2017).
- Em 0,31%, os estudantes, após nove meses, se lembravam do uso de determinante para organizar problemas, conforme o registro: *“[...] matrizes e determinantes e sistemas lineares, ajudou a construir uma melhor atenção e organização de problemas que envolvem cálculos de forma geral [...]”* (2.3.A32.2, 2017).
- Em 0,15%, um estudante, após nove meses, se lembrou do uso de determinante para resolução de sistemas: *”[...] sistemas [...] que muitas vezes eram resolvidos com determinantes”* (2.1.A32.6, 2017).

Desse modo, na subcategoria intermediária “Lembranças sobre uso de determinantes”, foi possível constatar que 24% dos respondentes citaram usos do determinante, após nove meses, espontaneamente. A lembrança de maior frequência estava associada ao seu uso no cálculo de áreas (19%), que não havia sido identificada no reconhecimento de conhecimentos prévios, mas apareceu ao final da disciplina, indicando a ampliação do conceito, e, também, apareceu após nove meses. Isso indica que esse conhecimento estava presente em suas memórias permanentes, e, assim, pode se concluir que, para esses estudantes, houve a aprendizagem significativa. Também se verificou a lembrança, após nove meses, relacionada à resolução de sistemas, que o estudante A32 já havia indicado na investigação sobre conhecimentos prévios.

Na subcategoria intermediária “*Percepções sobre usos de sistemas lineares*”, que representou 5,37% das unidades de registro, foi possível identificar duas subcategorias intermediárias, quais sejam: “*Ao final da disciplina, como perceberam usos de sistemas lineares*” (4,3%) e “*Lembranças sobre uso de sistemas lineares*” (1,07%).

Na subcategoria “*Ao final da disciplina, como perceberam usos de sistemas lineares*”, verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 1,7%, os estudantes afirmaram perceber o uso de sistemas lineares na resolução de problemas:

> [...] Podem ser utilizados em diversas situações do dia-a-dia, onde a solução do sistema é a resposta da questão [...] (1.3.A7.2, 2016).

> [...] Podem ser obtidos através de uma modelagem matemática e são utilizados para encontrar valores para as incógnitas que satisfaçam todas as equações simultaneamente (1.3.A12.3, 2016).
> [...] são muito utilizados para resolver problemas simples e também mais complicados, podendo ser ele um sistema e mais de uma variável e está relacionado a outras ferramentas usadas para resolver problemas (1.3.A22.2, 2016).

- Em 0,61%, os estudantes afirmaram perceber o uso de sistemas lineares em problemas de fluxo em redes:

> [...] podem ser utilizados em solução de problemas de fluxo em redes (1.3.A2.3, 2016).
> [...] Exemplos: análise de fluxo em redes [...] (1.3.A7.3, 2016).
> [...] Uma das atividades que ajudou a compreender o que é um sistema foi a atividade que nós calculamos o fluxo de agua (1.3.A34.2, 2016).

- Em 0,46%, os estudantes afirmaram perceber o uso de sistemas lineares na otimização de problemas: "*[...] Usamos sistemas para otimizar problemas, otimizar tempo [...]*" (1.3.A8.2, 2016) ou *"[...] Pode ser aplicado para calcular aproveitamento máximo de produtos ou tempo (resolução de problemas)"* (1.3.A10.3, 2016).
- Em 0,46%, os estudantes afirmaram perceber o uso de sistemas lineares para resolver problemas algébricos: *"[...] servem para resolver problemas algébricos; são resolvidos utilizando matrizes"* (11.3.A14.3, 2016) ou "*[...] Eles possibilitam resolver equações com mais de uma variável. [...]"* (1.3.A18.2, 2016).
- Em 0,46%, os estudantes afirmaram perceber o uso de sistemas lineares para resolver problemas de estática: "*[...] podem ser utilizados em diversos problemas, como os de estática"* (1.3.A4.2, 2016) ou *"[...] Sendo utilizadas para calcular o equilíbrio de forças em estruturas, [...]"* (1.3.A27.2, 2016).
- Em 0,31%, os estudantes afirmaram perceber o uso de sistemas lineares em problemas de balanceamento de equações químicas: *"[...] Exemplos: [...] balanceamento de equações químicas, etc."* (1.3.A7.4, 2016).
- Em 0,15% das unidades, um estudante indicou perceber o uso de sistemas lineares na área de ciências exatas: "*[...] utilizadas nos campos da engenharia, computação, eletrônica entre outros"* (1.3.A29.2, 2016).
- Em 0,15%, um estudante indicou perceber o uso de sistemas lineares em matrizes: "*[...] o uso de sistemas lineares em matrizes, facilitando a solução destes problemas. [...]."* (1.3.A10.2, 2016).

Nesse caso, verifica-se uma incoerência na escrita em linguagem natural, pois geralmente ocorre o contrário.

Na subcategoria intermediária "*Ao final da disciplina, como perceberam usos de sistemas lineares*", foi possível constatar que 70% dos respondentes citaram exemplos de usos de sistemas lineares e que a maioria dos apontamentos está relacionada à resolução de problemas diversos. As mais frequentes foram as percepções de usos em problemas de fluxos em redes, a otimização de problemas, a resolução de problemas algébricos, problemas de equilíbrio de forças, em estática e problemas de balanceamento de equações químicas. Com menor frequência, apareceu a percepção de uso mais geral na área das Ciências Exatas. Na investigação sobre conhecimentos prévios, apenas 11% dos estudantes do G1 havia citado que se lembrava de aplicações, dentre os quais 8% indicaram lembrar de seus usos na resolução de problemas, porém, não citaram nenhum exemplo especifico. Apenas um estudante afirmou que sistemas lineares podem ser usados na construção de gráficos. Assim, ao final da disciplina, verificou-se que houve compreensão ou ampliação sobre os usos de sistemas lineares por diversos estudantes, pois a maioria, além de perceber o uso na resolução de problemas, se lembrou de contextos específicos de aplicação.

Na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre uso de sistemas lineares*", que representou 1,07% das unidades de registro, verificou-se que:

– Em 0,47%, os estudantes se lembraram, após nove meses, do uso de sistemas lineares na resolução de problemas:

> [...] Mas destaco sistemas lineares e matrizes que foram os que mais compreendi, e uso até hoje em outras disciplinas na resolução de problemas (2.1.A26.6, 2017).
> Sim, percebi a importância de sistemas lineares [...], na resolução de problemas são indispensáveis (2.2.A26.3, 2017).

– Em 0,15%, um estudante se lembrou, após nove meses, do uso de sistemas lineares em problemas de fluxo:

> [...], resolver problemas de fluxo, onde tínhamos um sistema com várias incógnitas e por meio da montagem de matrizes achávamos os valores das incógnitas, assim podendo resolver dado problema composto [...] (2.1.A2.3, 2017).

– Em 0,15%, outro estudante, após nove meses, se lembrou do uso de sistemas lineares para o cálculo de forças, na disciplina de estática:

> Usei em algumas disciplinas a resolução de sistemas lineares simples [...]. Geralmente, para a resolução de alguns problemas dessas matérias é preciso utilizar algum método para achar valores de duas ou três variáveis em algumas equações que eram geradas. [...] Utilizei na disciplina de estática, durante uma prova. Mas, eu não conseguia encontrar os ângulos e a relação deles com as reações na barra. Lembrei que eu poderia fazer um sistema de equações lineares para resolver aquele problema. Fiz isto, e deu certo (2.2.A32.2, 2017).

- Em 0,15% das unidades, um estudante se lembrou, após nove meses, do uso de sistemas lineares para resolver o método das frações parciais, na disciplina de cálculo: *"[...] na disciplina de cálculo dois para resolver Método das Frações Parciais, usa-se sistemas lineares [...]"* (2.2.A30.2, 2017).
- Em 0,15% das unidades, um estudante, após nove meses, se lembrou do uso de sistemas lineares para determinar incógnitas: "*[...] Sistemas = Resolução de equações para incógnitas equivalentes [...]"* (2.2.A23.4, 2017).

Concluiu-se, na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre uso de sistemas lineares*", que, nove meses após o término da disciplina, 24% dos respondentes se recordaram espontaneamente de usos de sistemas, sendo que as lembranças mais frequentes se referiram a usos na resolução de problemas. Além disso, se verificou que 14% se lembrou de usos em contextos específicos. Nesses registros, também foi possível observar a presença da aprendizagem significativa, pois os estudantes, além de indicarem a presença desse conhecimento em suas memórias permanentes, também foram capazes de identificá-los e utilizá-los, após o término da disciplina, em contextos diferentes, o que indica a compreensão do uso apropriado desses conceitos apreendidos ou aprimorados na disciplina.

Na subcategoria intermediária "*Percepções sobre usos de transformações lineares*", que representou 5,06% das unidades de registro; foram identificadas duas subcategorias intermediárias: "*Ao final da disciplina, como perceberam usos de transformações lineares*" (4,91%) e "*Lembranças sobre uso de transformações lineares*" (0,15%).

Na subcategoria intermediária "*Ao final da disciplina, como perceberam usos de transformações lineares*", verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 2,3%, os estudantes afirmaram que perceberam o uso de transformações lineares e citaram exemplos de uso na engenharia:

> [...] São muito importantes pois com elas pode-se calcular o movimento dos materiais submetidos a temperaturas (expansão/contração), cálculos de

> estruturas simétricas (reflexão), rotação de marquises (rotação de um ângulo) deslocamento de bases (cisalhamento) (1.5.A2.2, 2016).
> [....] Descrevem movimentos de translação, rotação, compressão ou expansão, cisalhamento, que descreve movimentos de base, que acontecem em estruturas de engenharia e etc. (1.5.A12.2, 2016).
> As transformações lineares podem ser utilizadas para o cálculo de deformações. Isso é extremamente importante na Engenharia Civil, pois todo projeto de estruturas deve prever as deformações (1.5.A23.1, 2016).

– Em 1,53%, os estudantes afirmaram que perceberam o uso de transformações lineares em vetores ou figuras e citaram exemplos:

> É muito importante, pois aí podemos ver o que acontece, se o vetor, ou a figura, comprime, rotaciona, expande, ocorre cisalhamento, ... (1.5.A8.1, 2016).
> [...] As transformações são muito importantes pois podemos verificar se uma figura, baseada em vetores pode expandir, refletir, comprimir, rotacionar [...] (1.5.A18.2, 2016).

– Em 0,77%, os estudantes afirmaram que perceberam o uso de transformações lineares e citaram exemplos de uso na codificação de mensagens:

> É muito importante, pois podemos, por meio delas decifrar mensagens [...] (1.5.A19.1, 2016).
> São importantes pois elas permitem decifrar mensagens codificadas [...] (1.5.A20.1, 2016).

– Em 0,31%, os estudantes afirmaram que perceberam o uso de transformações lineares em estrutura metálica: *"Pode-se usar transformações lineares em cálculos de estruturas metálicas, eixos de automóveis, gráficos de cisalhamento de uma peça, peças de automóveis, em circuitos, etc."* (1.5.A31.3, 2016).

Desse modo, na subcategoria intermediária "*Ao final da disciplina, como perceberam usos de transformações lineares*", verificou-se que 80% dos respondentes se lembraram se possíveis usos das transformações lineares e que as lembranças mais frequentes, ao término da disciplina, estavam associadas aos usos na engenharia, na representação de fenômenos físicos, referentes a alguns tipos de deformação em estruturas. Alguns estudantes se lembraram de suas aplicações em vetores ou figuras e alguns se lembraram da tarefa sobre codificação de mensagens que realizaram. Destaca-se que, no reconhecimento de conhecimentos prévios sobre "*Funções Lineares*", no início da disciplina, apenas 6% dos estudantes recordou de exemplos, relativos ao uso teórico para calcular valores reais de variáveis dependentes e sobre o uso em uma situação prática que não estava relacionada à área da engenharia. Assim, conclui-se que a disciplina possibilitou, para alguns estudantes, a compreensão ou a ampliação desse conhecimento sobre os possíveis usos das transformações lineares, especialmente relacionados à área da engenharia.

Na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre uso de transformações lineares*", que representou 0,15% das unidades de registro, apenas um estudante (5% dos respondentes) se referiu a lembranças de usos na Engenharia, recordando-se da transformação do cisalhamento, e também referiu o uso para codificação de mensagens: *"[...]; cisalhamento de matrizes para o cálculo do coeficiente acústico em estruturas e da leitura de mensagens codificadas através de matrizes"* (2.1.A4.3, 2017).

Destaca-se que, na disciplina, o efeito do cisalhamento foi apresentado para representar o fenômeno de deslocamento de bases, que podem ocorrer em pilares ou em vigas. Assim, é provável que o estudante tenha se confundido em relação ao cisalhamento, se lembrando do nome da transformação, mas não do modo como ela pode ser usada na engenharia. Também, foi apresentado o uso de transformações lineares no processo de codificação de mensagens, no desenvolvimento de uma tarefa, o que pode ter contribuído para que esse estudante tenha armazenado esse conhecimento em sua memória.

De modo geral, conclui-se, nessa subcategoria, que, após nove meses em relação ao término da disciplina, ao serem questionados sobre os tópicos estudados e sobre as possibilidades de uso das transformações lineares, a maioria dos estudantes não se referiu a elas, ou seja, esse tópico não apareceu nas lembranças da maioria dos estudantes, talvez por não ter ser significativo para eles.

Na subcategoria intermediária "*Percepções sobre usos de vetores*", que representou 2,15% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: "*Ao final da disciplina, como perceberam usos de vetores*" (1,54%) e "*Lembranças sobre uso de vetores*" (0,61%).

Na subcategoria "*Ao final da disciplina, como perceberam usos de vetores*" verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 0,63%, os estudantes afirmaram que perceberam o uso de vetores na representação de forças: *"[...], pois normalmente associa-se a vetores a ideia da Física, ou seja, de forças [...]*" (1.4.A12.3, 2016) ou *"[...] a noção de vetores, que está relacionado a forças em um objeto"* (1.6.A22.3, 2016).

- Em 0,31%, os estudantes afirmaram que perceberam o uso de vetores na disciplina de estática: "*[...], pois com o estudo de vetores, foi possível que compreendêssemos melhor a utilidade do mesmo em outra disciplina como estática [...]*" (1.4.A9.3, 2016).
- Em 0,15%, um estudante afirmou que percebeu o uso de vetores na codificação de mensagens, conforme o registro, a seguir: *"[...] muito útil para a decodificação de mensagens. Sim, pois os vetores, nestes casos, podem ter sua dificuldade simplificada"* (1.5.A22.4, 2016).
- Em 0,15%, um estudante indicou que percebeu o uso de vetores como representantes de matrizes: "*[...] vetores abrangem uma maior área, como matrizes por exemplo"* (1.4.A12.4, 2016).
- Em 0,15%, um estudante disse ter percebido o uso de vetores na representação de formas geométricas: "*[...] um conjunto de vetores que formam alguma forma geométrica [...]"* (1.5.A35.2, 2016).
- Em 0,15%, um estudante afirmou que percebeu o uso de vetores em problemas de engenharia: *"[…], pois o vetor pode ter inúmeras utilidades na engenharia e construções [...]."* (1.4.A29.3, 2016).

Na subcategoria "*Ao final da disciplina, como perceberam usos de vetores*", verificou-se, portanto, que a lembrança mais frequente, ao término da disciplina, permaneceu relacionada ao uso de vetores em física e à identificação sobre conhecimentos prévios. Porém, houve ampliação desse conhecimento para alguns estudantes, pois apareceram lembranças de usos diferentes das citadas inicialmente, estando relacionadas: ao uso em problemas de engenharia ou na disciplina de estática; ao processo de codificação de mensagens; à representação de um elemento do espaço vetorial das matrizes, ou, ainda, na representação de vértices que definiam figuras geométricas. Também, destaca-se que, no início da disciplina, a lembrança sobre usos de vetores estava relacionada à subcategoria que teve a maior frequência nos registros, na qual se verificou que 42% dos estudantes indicaram ter se lembrado de aplicações, e que, no término da disciplina, foi a penúltima subcategoria identificada, uma vez que 33% dos respondentes se lembraram de citar seus usos. Ou seja, ao final da disciplina, também houve ampliação no conhecimento sobre percepção de usos de vetores, assim como ocorreu com os conceitos: matrizes, determinantes, sistemas lineares e transformações lineares.

Na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre uso de vetores*", que representou 0,61% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 0,31% das unidades, os estudantes, após nove meses, se lembraram que usaram vetores na disciplina de estática: *"Na disciplina de Física e Estática vimos vetores [...]"* (2.2.A9.5, 2017).
- Em 0,15%, um estudante, após nove meses, afirmou que se lembrou do uso de vetores no armazenamento de variáveis, em programação: *"[...] Além disso, utilizei [...] vetores para armazenamento de variáveis em programação [...]"* (2.2.A12.4, 2017).
- Em 0,15%, um estudante, após nove meses, afirmou ter se lembrado de usar vetores para descobrir o valor de uma incógnita: "*Vetores: auxiliam muitas vezes para descobrir o valor de uma incógnita"* (2.1.A22.8, 2017).

Assim, nessa subcategoria, constatou-se que a lembrança mais frequente, após nove meses, ainda referia-se ao uso de vetores na representação de forças. No entanto, também apareceram lembranças referentes ao uso algébrico de para armazenamento de variáveis, envolvidos na resolução de problemas, que provavelmente se devem ao processo de aprendizagem vivenciado na disciplina. Salienta-se que apenas 19% dos respondentes se referiram espontaneamente a essas lembranças, resgatando-as de suas memórias permanentes.

Na subcategoria intermediária "*Percepções sobre usos de autovalores e autovetores*", que representou 1,53% das unidades de registro, também foram identificadas duas subcategorias intermediárias: "*Ao final da disciplina, como perceberam a aplicação de autovalores e autovetores na engenharia*" (1,38%) e "*Lembrou de aplicações de autovalores e autovetores*" (0,15%).

Na subcategoria "*Ao final da disciplina, como perceberam a aplicação de autovalores e autovetores na engenharia*" verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 0,93%, os estudantes afirmaram ter percebido que autovalores e autovetores são usados para o cálculo de vibrações em estruturas:

> São importantes na engenharia principalmente para o cálculo de vibrações em prédios, viadutos, etc. (1.6.A5.1, 2016).

> [...]. Usados em engenharia para calcular as vibrações das estruturas. $Av = \lambda v$ (1.6.A17.2, 2016).
> [...] visto que analisam as vibrações e frequências das estruturas para evitar que tenham a mesma vibração que a natural. (1.6.A28.2, 2016)
> Importante para análises de estruturas e vibrações [...] (1.6.A29.1, 2016).

- Em 0,15%, um estudante indicou ter percebido que autovalores e autovetores são aplicados na análise estrutural: *“[...] mas entendi como a parte prática é feita e suas aplicações na engenharia, que são na análise e nas propriedades físicas”* (1.6.A4.2, 2016).
- Em 0,15%, um estudante afirmou ter percebido que autovalores e autovetores são aplicados em cálculos de áreas e resistências, conforme apresentado, a seguir: *“[...] São importantes na área da Engenharia Civil, pois têm papel importante em alguns cálculos de áreas e resistências”* (1.6.A14.2, 2016).
- Em 0,15%, um estudante disse que autovalores e autovetores são usados para expandir espaços vetoriais uniformemente, conforme o exemplo: *“São usados para expandir espaços vetoriais uniformemente [...].”* (1.6.A17.1, 2016).

Na subcategoria intermediária “*Ao final da disciplina, como perceberam a aplicação de autovalores e autovetores na engenharia*”, verificou-se que as percepções de uso mais frequentes estão relacionadas ao cálculo de vibrações em estruturas (20% dos respondentes), o que era esperado, pois esse foi o exemplo apresentado em aula. Mas, verificou-se, também, que esse percentual é pequeno, o que indica que esse conceito foi pouco compreendido entre os estudantes do G1, o que também era esperado, devido à complexidade desse exemplo. Também apareceram percepções de usos em cálculos de áreas e resistências, o que não foi visto na disciplina, e uma compreensão sobre uso desses conceitos na expansão uniforme de espaços vetoriais, que pode estar vinculada à compreensão da definição apresentada.

Na subcategoria intermediária “*Lembrou de aplicações de autovalores e autovetores*”, que representou 0,15% das unidades de registro, constatou-se que apenas um estudante, após nove meses, se recordou da aplicação: *“[...]; autovalores e autovetores: Análise de vibrações.”* (2.1.A19.7, 2017). Assim, constatou-se que a maioria dos estudantes do G1 não se recordou, espontaneamente, do uso desses conceitos na área de engenharia.

Na categoria intermediária “*Percepções sobre usos do conhecimento construído em Álgebra Linear*”, que representou 8,9% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: “*Percepções de uso acadêmico dos conceitos de Álgebra Linear”* (5,68%) e “*Percepções sobre usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos*” (3,22%).

Na subcategoria intermediária “*Percepções de uso acadêmico dos conceitos de Álgebra Linear”*, foram identificadas duas subcategorias: “*Perceberam usos de conceitos de Álgebra Linear em outras disciplinas*” (5,37%) e “*Não perceberam usos de conceitos de Álgebra Linear em outras disciplinas do curso*” (0,31%).

Na subcategoria intermediária “*Perceberam usos de conceitos de Álgebra Linear em outras disciplinas*”, em relação às unidades de registro, verificou-se que:

- Em 1,39%, os estudantes perceberam usos na disciplina de Cálculo Numérico:

> Agora no quarto semestre estamos utilizando, até o momento, muito os processos que envolvem matrizes, os métodos de Gauss, Laplace, Pivotação, o que nesta disciplina de Cálculo Numérico, está sendo mais fácil a compreensão pois é um assunto que já aprendemos na disciplina de Álgebra Linear (2.2.A2.1, 2017).
> Utilizo o método de Gauss para o cálculo de equações e de erros na disciplina de Cálculo Numérico (2.2.A4.1, 2017).

- Em 0,61%, os estudantes perceberam usos na disciplina de Estática:

> Na disciplina de [...] Estática vimos vetores [...] (2.2.A19.2, 2017).
> [...] Em Estática, foi comentado que era possível resolver alguns cálculos usando o método das matrizes [...] (2.2.A22.3, 2017).
> [...] Utilizei na disciplina de Estática, durante uma prova. [...] Lembrei que eu poderia fazer um sistema de equações lineares para resolver aquele problema [...] (2.2.A32.4, 2017).

- Em 0,61%, os estudantes perceberam usos na disciplina de Geometria: “*Sim. Foi analisado em Geometria Analítica, no qual usou-se o método do determinante para achar a área de uma figura [...]*” (2.2.A22.1, 2017).
- Em 0,46%, os estudantes perceberam uso de conceitos em disciplinas, mas não especificaram em qual delas:

> Sim, resolução por Jordan, Gauss. Precisou apenas de uma revisão para lembrar das aulas de álgebra (2.2.A35.1, 2017).
> Sim, percebi a importância de sistemas lineares e matrizes só quando saí de álgebra linear, na resolução de problemas são indispensáveis (2.2.A26.1, 2017).

- Em 0,46%, os estudantes perceberam uso em programação, na disciplina de algoritmos:

> Usamos apenas em algoritmos, onde as matrizes foram empregadas para fins de processamentos de cálculos em algoritmos por meio de comandos do programa (2.2.A10.1, 2017).
> [...] Além disso, utilizei matrizes e vetores para armazenamento de variáveis em programação [...] (2.2.A12.3, 2017).
> [...] Na disciplina de algoritmos a parte de vetores (2.2.A28.3, 2017).

- Em 0,46%, os estudantes perceberam uso nas disciplinas de Cálculo I ou II:

> [...] Em Cálculo I também se utilizou dos determinantes para realizar alguns cálculos (2.2.A22.4, 2017).
> Sim, na disciplina de cálculo dois para resolver Método das Frações Parciais usa-se sistemas lineares e escalonamento. (2.2.A30.1, 2017).

- Em 0,31%, os estudantes perceberam uso na disciplina de Equações Diferenciáveis Ordinárias (EDO): *“[...] Em Equações Diferenciais, o professor usou o conceito de dependência linear em um método de resolução de equações diferencias de segunda ordem. [...]”* (2.2.A32.3, 2017).
- Em 0,31%, os estudantes perceberam uso na disciplina de Resistência dos Materiais 1: “*[...], resistência dos materiais 1. [..]”* (2.2.A32.2, 2017).
- Em 0,31%, os estudantes perceberam uso na disciplina de Física: *“Na disciplina de Física [...] vimos vetores [...]”* (2.2.A9.1, 2017).
- Em 0,15%, um estudante percebeu uso na disciplina de Estruturas: *“[...] A álgebra linear ainda é muito utilizada na área de estruturas com o cálculo de forças atuantes”* (2.2.A12.6, 2017).
- Em 0,15%, um estudante percebeu uso nas disciplinas Hidráulica 1 e 2, Análise Estrutural 1:

> Usei em algumas disciplinas a resolução de sistemas lineares simples, como em hidráulica 1 e 2, análise estrutural 1, [...]. Geralmente, para a resolução de alguns problemas dessas matérias é preciso utilizar algum método para achar valores de duas ou três variáveis em algumas equações que eram geradas [...] (2.2.A32.1, 2017).

- Em 0,15%, um estudante percebeu uso na disciplina de cinemática e dinâmica: *“Sim eu já vi os conceitos abordados nas disciplinas foi nas disciplinas [...] cinemática e dinâmica”* (2.2.A34.1, 2017).

Concluiu-se, na subcategoria intermediária “*Perceberam usos de conceitos de* Álgebra Linear em outras disciplinas”, que, após nove meses, a lembrança mais frequente é a de uso de conceitos de Álgebra Linear na disciplina de Cálculo

Numérico, que estavam cursando no semestre em que responderam ao último questionário. Também se recordaram de usos nas disciplinas de Estática, Geometria, Algoritmos, EDO, Resistência dos Materiais 1, disciplinas de Cálculo I e II, Análise Estrutural 1, Hidráulica 1 e 2, Cinemática e Dinâmica.

Esses resultados confirmam que os conteúdos de Álgebra Linear estão presentes em diversas disciplinas de cursos de graduação, conforme indicado por Celestino (2000). Além disso, confirmam também a importância da aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear, ao possibilitarem a modelagem e a resolução de diferentes problemas da área das Ciências Exatas.

Na subcategoria intermediária "*Não perceberam usos de conceitos de Álgebra Linear em outras disciplinas do curso*", que representou 0,31% das unidades de registro, verificou-se que, dentre os respondentes, apenas dois estudantes afirmaram não perceber aplicação de conceitos de Álgebra Linear em outras disciplinas, conforme o exemplo a seguir: *"Ainda não vi aplicações em meu curso."* (2.2.A17.1, 2017). Desse modo, verificou-se que poucos estudantes, dentre os respondentes, não perceberam a utilização desses conceitos em outras disciplinas do curso.

Na subcategoria intermediária "*Percepções sobre usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos*", que representou 3,22% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias: "*Modos de percepção usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos*" (1,84%) e "*Não percebeu usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos*" (1,38%).

Na subcategoria intermediária "*Modos de percepção usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos*", em relação às unidades de registro, verificou-se que:

– Em 1,23%, os estudantes indicaram ter percebido que usaram conceitos de Álgebra Linear somente em aplicações acadêmicas:

> Embora ainda não tenha utilizado na prática, estou pesquisando sobre otimização estrutural, especificamente o método da busca harmônica, a qual utiliza de matrizes para armazenamento das variáveis. Os conceitos aprendidos na disciplina são de extrema importância para o entendimento do método (2.3.A12.1, 2017).
> Como foi ensinado em aula a utilização de programas que auxiliam no cálculo e escalonamento de matrizes, como o MATLAB ou o Scilab, uso como meio de estudo em casa para aprofundar meus conhecimentos. Também há o GeoGebra, que auxilia na realização de gráficos utilizando valores e equações, que também são úteis para aprofundar meus conhecimentos (2.3.A22.1, 2017).

> Acho que pessoalmente, o estudo de Álgebra Linear, principalmente a parte de matrizes e determinantes e sistemas lineares, ajudou a construir uma melhor atenção e organização de problemas que envolvem cálculos de forma geral. Em matérias como hidráulica e resistência dos materiais, geralmente temos problemas complexos, que fazendo uma organização dos dados e usando métodos de resolução acabam diminuindo a chance de erros (2.3.A32.1, 2017).

- Em 0,46%, os estudantes indicaram ter usado conceitos de Álgebra Linear em aplicações profissionais:

> Sim, utilizo os conhecimentos aprendidos em Excel e GeoGebra em diversas situações profissionais, como trabalhos de levantamento topográfico, gráficos para cálculo de tensões e resistência e para facilitar os cálculos em diversas disciplinas (2.3.A4.1, 2017).
> [...] Excel, para fazer planilhas de contabilidade (2.3.A17.1, 2017).
> Por enquanto só estou utilizando os conhecimentos adquiridos no Excel. Atualmente estou trabalhando com orçamentos em esquadrias de alumínio, e o Excel é uma excelente ferramenta para cálculos de materiais utilizados, e também para controle de finanças com as tabelas e fórmulas (2.3.A23.1, 2017).

- Em 0,15%, um estudante afirmou fazer uso de conceitos de Álgebra Linear na vida pessoal, conforme o registro a seguir:

> Usamos os conceitos abordados na disciplina de Geometria e também alguns exercícios na área de cálculo... Escalonamento de matrizes principalmente. Na área profissional ainda não, mas utilizo bastante em aplicações pessoais. Gosto de organizar minhas tarefas em forma de tabelas e também os gastos que possuo no mês. Em uma matéria semestre passado utilizamos os conhecimentos ensinados em sala de aula para criação de tabelas de estoque (cimento, areia, brita) para simulação de um trabalho (2.3.A8.1, 2017).

Na subcategoria intermediária “*Modos de percepção, usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos*”, concluiu-se 57% dos respondentes, após nove meses, lembraram-se de fazer usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos. Dentre eles, 38% se lembraram de ter feito uso do conhecimento construído apenas em aplicações acadêmicas, 14% indicaram que fizeram uso na vida profissional e 5% disseram que fizeram uso também na vida pessoal.

Na subcategoria intermediária “*Não percebeu usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos*”, que representou 1,38% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 1,07% das unidades de registro, os estudantes afirmaram que ainda não perceberam usos do conhecimento construído, após o término da disciplina, conforme mostrado, a seguir:

> Ainda não utilizei e nem apliquei tanto conceitos bem como aplicações durante a faculdade, visto que não estou fazendo todas matérias do nível (2.3.A10.1, 2017).
> Ainda não utilizei estes conceitos, porém sei que será utilizado em algumas matérias no decorrer da faculdade (2.3.A19.1, 2017).
> Não. (2.3.A36.1, 2017).

Nesse caso, verificou-se que 33% dos respondentes indicaram não ter percebido usos após o término da disciplina. Porém, verifica-se incoerências nas respostas desses alunos, pois, com exceção do estudante A36, os demais citaram perceber usos em outras disciplinas, conforme apresentado na categoria "*Perceberam usos de conceitos de* Álgebra Linear em outras disciplinas".

– Em 0,31%, os estudantes indicaram que ainda não perceberam usos do conhecimento construído, após o término da disciplina, nas suas vidas pessoais ou profissionais: "*Pessoalmente e profissionalmente no momento não, mas acredito que com o tempo isso será inevitável*" (2.3.A26.1, 2017) ou "*Ainda não usei de forma profissional"* (2.3.A29.1, 2017).

Nessa subcategoria intermediária, verificou-se que,, apesar de 33% dos respondentes afirmarem que não viram usos dos conteúdos após o término, apenas 5% deles realmente não citaram usos em outros contextos e 10% indicaramu não perceber usos profissionais ou pessoais. Assim, concluiu-se na subcategoria intermediária "*Percepções sobre usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos*", que a maioria dos respondentes percebeu usos de conceitos abordados na disciplina em outros contextos, seja em outras disciplinas do curso (percepções mais frequentes – 90% dos respondentes) ou em suas vidas profissionais (14% dos respondentes) ou pessoais (5% dos respondentes).

(iii) "*Percepções sobre o método de ensino e de aprendizagem usados na disciplina*" *- G1*

Na categoria final "*Percepções sobre o método de ensino e de aprendizagem usados na disciplina*", que representou 7,97% das unidades de registro, foram identificadas quatro subcategorias intermediárias: "*Lembrança de aspectos positivos e negativos da proposta*" (5,83%); "*Lembranças sobre aprendizagem*" (0,93%); "*Lembranças sobre dificuldades*" (0,6%) e "*Não conseguiram se lembrar das aulas ou expressar os conceitos*" (0,61%).

Na subcategoria intermediária "*Lembrança de aspectos positivos e negativos da proposta*", foram identificadas três subcategorias intermediárias: "*Aspectos positivos*" (4,75%); "*Aspectos negativos*" (0,77%) e "*Lembram que não perceberam aspectos negativos*" (0,31%).

Na subcategoria intermediária "*Aspectos positivos*", verificou-se a existência de cinco subcategorias intermediárias "*Influência do uso de recursos tecnológicos na aprendizagem*" (1,23%), "*Lembranças positivas sobre o método de ensino"* (1,23%), "*Lembram de aulas interessantes*" (1,06%), "*Lembrou que a abordagem possibilitou perceber associações da teoria com usos práticos*" (0,77%); e "*Após nove meses, percebem que a disciplina colaborou com sua formação profissional*" (0,46%).

Na subcategoria intermediária "*Influência do uso de recursos tecnológicos na aprendizagem",* verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 0,46%, os estudantes, após transcorridos nove meses do término da disciplina, destacaram o uso das tecnologias como importante na aprendizagem:

> Absorvi principalmente o que diz respeito ao auxílio tecnológico, pois é necessário ficar atualizado sobre eles, e ficou claro que há muitas maneiras de utilizar recursos para diversos conteúdos, como Matrizes e Escalonamento [...] (2.7.A22.1, 2017).
> [...] E hoje, quase um ano depois de cursar a disciplina, posso afirmar que foi de extrema importância o uso de recursos tecnológicos. (2.7.A8.4, 2017)
> [...] Os programas, as aulas práticas, pode-se dizer assim, foram o que mais chamou a atenção (2.7.28.3, 2017).

- Em 0,31%, os estudantes, após nove meses, afirmaram que o uso do computador/tecnologia facilitou a aprendizagem: *"[...] e com o auxílio do computador facilitava bastante*" (2.7.A34.3, 2017) ou *"O uso da tecnologia facilitou muito nossa aprendizagem"* (2.7.A36.1, 2017).
- Em 0,31%, os estudantes, após nove meses, se lembraram que ter acesso aos recursos tecnológicos digitais facilitou a resolução de tarefas, conforme apresentado a seguir:

> Aspectos positivos :as aulas no laboratório de informática eram boas, e fazer a prova com o auxílio do computador foi mais fácil fazer a prova [...] (2.7.A30.1, 2017).
> [...] Mas como um todo, foi muito interessante poder visualizar que podemos e temos acesso a outras ferramentas que facilitam a realização de um problema proposto [...] (2.7.A2.3, 2017).

- Em 0,15% das unidades, um estudante se lembrou, após nove meses, que o uso de recursos tecnológicos possibilitou a visualização da aplicação prática dos métodos: “*Aspectos positivos: visualização prática dos métodos de cálculo por meio de programas no computador com gráficos e ‘programações’ [...].*” (2.7.A16.1, 2017).

Concluiu-se, na subcategoria intermediária “*Influência do uso de recursos tecnológicos na aprendizagem”,* que, nove meses após o término da disciplina, 38% dos respondentes do G1 se lembraram delas. Nesse caso, 14% deles indicaram que o uso das tecnologias digitais foram importantes, 9,5% destacaram que facilitaram o processo de aprendizagem e 9,5% afirmaram que facilitaram a realização de tarefas. Além disso, 5% destacaram essa abordagem como um aspecto positivo, pois possibilitou perceber a aplicação prática dos métodos.

Na subcategoria intermediária “*Lembranças positivas sobre o método de ensino*”, que representou 1,23% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 0,92%, os estudantes se lembraram que o método de ensino foi bom ou que favoreceu a compreensão, conforme os exemplos:

> O método foi bem didático, com boa explicação da professora seguido de exercícios com e sem auxilio tecnológico [...] (2.7.A17.1, 2017).
> O método é bom, é bem aplicado, explicado e orientado, com exemplos claros e uma grande atenção do professor com os alunos [...] (2.7.A10.1, 2017).
> O método de ensino, em geral, foi positivo, pois sempre tivemos aulas que possibilitaram gravar o conteúdo e realmente aprendê-lo, de forma que todos interessados pudessem compreender [...] (2.7.A23.1, 2017).

- Em 0,31%, os estudantes se lembraram que perceberam o ensino proposto de modo prático e dinâmico: *“[...] Foi ensinado para nós de maneira prática, dinâmica [...]*” (2.7.A8.3, 2017) ou “*Eu gostei deste novo método proposto pela professora, pois saiu daquela monótona aula na sala [...]”* (2.7.A35.1, 2017).

Conclui-se, na subcategoria “*Lembranças positivas sobre o método de ensino*”, que 38% dos respondentes indicaram ter gostado do método de ensino, pois perceberam que ele favoreceu a aprendizagem e proporcionou um modo prático e dinâmico para aprendizagem. Destaca-se que um estudante se lembrou que a professora explicava bem e que disponibilizava grande atenção aos alunos, o que também foi considerado como um aspecto positivo da abordagem.

Esses aspectos, relativos às percepções dos discentes em relação a algumas características da presente proposta, já eram esperados, pois as aulas e as tarefas foram elaboradas de modo que o uso das tecnologias digitais propiciasse a participação ativa desses estudantes na construção do próprio conhecimento, possibilitando aulas mais práticas e dinâmicas, em um contexto no qual a professora visou atuar como mediadora no processo de ensino e de aprendizagem.

Em relação ao processo de ensino aliado ao uso de recursos tecnológicos digitais e sobre o papel do professor na mediação pedagógica, verifica-se que a abordagem didática da presente tese está em consonância com os estudos de Masetto (2013, p.150), quando indica que:

> O desenvolvimento da mediação pedagógica se inicia com o trabalho com o aluno, para que esse assuma um papel de aprendiz ativo e participante (não mais passivo e repetidor), de sujeito de ações que o levem a aprender e a mudar o seu comportamento. Essas ações ele realiza sozinho (autoaprendizagem), com o professor e com os colegas (interaprendizagem).

Na subcategoria intermediária "*Lembram de aulas interessantes*", que representou 1,06% das unidades de registro, destaca-se que:

- Em 0,46%, os estudantes lembraram que as aulas eram interessantes, pois apresentavam aplicações práticas na área da engenharia, conforme mostrado a seguir:

> O método utilizado foi muito interessante, visto que a professora sempre buscava aplicações práticas ligadas à engenharia para apresentar os conteúdos, o que de certa forma prendia mais a atenção às aulas [...] (2.7.A12.1, 2017).
> [...] Achei interessante a aplicação do conteúdo relacionados ao curso de Engenharia Civil (2.7.A14.2, 2017).

- Em 0,15%, um estudante se lembrou, após nove meses, que as aulas eram interessantes por possibilitarem o uso de recursos tecnológicos digitais:

> [...] Outro ponto interessante, foi o desenvolvimento de atividades com a utilização dos computadores, o que agilizou muitos cálculos e também reforçou os métodos dos cálculos, que eram necessários para a programação da resolução [...] (2.7.A12.2, 2017).

- Em 0,15%, um estudante se lembrou, após nove meses, que as aulas eram interessantes e destacou o fato de as tarefas serem cooperativas: "*Os métodos de ensino foram bem interessantes [...] e o fato de nos resolvermos os questionamento em duplas [...]*" (2.7.A34.2, 2017).
- Em 0,15%, um estudante se lembrou, após nove meses, que as aulas eram interessantes e que as aulas eram bem ministradas, conforme o registro a

seguir: “*Lembro que as aulas eram muito interessantes [...] e bem ministradas [...]”* (2.7.A4.1, 2017).

- Em 0,15% das unidades de registro, um estudante se lembrou, após nove meses, de sentir interesse na matéria, mas não disse o motivo: “*[...] e maior interesse na matéria”* (2.7.A35.3, 2017).

Ressalta-se que, segundo a Teoria da Aprendizagem Significativa (MOREIRA; MASINI, 1982), para propiciar a aprendizagem significativa, é necessário que o material utilizado em aula seja potencialmente significativo; que existam conceitos subsunçores na estrutura cognitiva do aprendiz e que o estudante esteja predisposto a aprender.

Na subcategoria intermediária “*Lembram de aulas interessantes*”, verificou-se que a lembrança mais frequente estava associada ao interesse despertado pelo uso de aplicações práticas na engenharia. Essas percepções também já eram esperadas, pois a proposta didática visava propiciar ambientes de ensino favoráveis à aprendizagem significativa, despertando seus interesses por meio da utilização de materiais potencialmente significativos, especialmente por meio de exemplos próximos dos seus cotidianos ou da área de formação dos estudantes.

Além disso, nessa subcategoria intermediária, alguns estudantes destacaram que se lembravam de aulas interessantes pelo fato de ter sido propiciado o uso de recursos tecnológicos digitais e outros apenas indicaram que perceberam que eram interessantes, mas não explicaram o porquê. Também se constatou que um estudante destacou que as aulas eram interessantes pelo fato de as tarefas serem realizadas em duplas, por meio do trabalho cooperativo, e outro pelo fato de as aulas serem bem ministradas.

Na subcategoria intermediária “*Lembrou que a abordagem possibilitou perceber associações da teoria com usos práticos*”, que representou 0,77% das unidades de registro, verificou-se que os estudantes se lembraram que a abordagem didática favoreceu a percepção de relações entre a teoria e os usos práticos, conforme mostrado a seguir:

> [...] voltada para o dia-a-dia. No qual podíamos ter a noção de onde iriamos utilizar aqueles métodos depois [...] (2.7.A8.4, 2017).
> [...]. Este método me possibilitou perceber que é possível associar matrizes com o nosso cotidiano, posto que sempre analisamos objetos que possuem tabelas e que nelas estão organizadas informações importantes. Portanto, ele foi eficiente para nos mostrar como se aplicar a álgebra na prática, visto

> que há diversas associações feitas com cálculos de diversas áreas (2.7.A22.2, 2017).
> [...] Pois, ao apresentar recursos tecnológicos quase que de uma forma simultânea com a matéria que era passada em aulas normais, acabava facilitando a resolução de problemas [...] (2.7.A32.2, 2017).

Nessa subcategoria intermediária, verificou-se que 24% dos respondentes se lembraram como um aspecto positivo o fato do método de ensino propiciar o contato com situações problemas ou da possibilidade de uso dos recursos tecnológicos digitais, que facilitaram perceber associações da teoria com seus usos práticos.

Na subcategoria intermediária “*Após nove meses, percebem que a disciplina colaborou com sua formação profissional*”, que representou 0,46% das unidades de registro, constatou-se que os estudantes se lembraram que a proposta favoreceu suas formações iniciais:

> [...], e também acabava mostrando que como futuros engenheiros vamos conciliar os conhecimentos práticos aprendidos, com programas que facilitarão bastante a nossa vida (2.7.A32.3, 2017).
> Percebi que esta disciplina auxilia a compreensão de assuntos pertinentes a formação do engenheiro civil [...] (2.7.A14.1, 2017).
> [...] São assuntos que são de extrema importância no nosso dia-a-dia. Basicamente eles nos auxiliam a sermos mais rápidos, evitando certos serviços, também servem na organização de nossos dados (2.1.A8.7, 2017).

Assim, verificou-se, nessa subcategoria, que 14% dos respondentes perceberam que a disciplina oportunizou não somente o estudo teórico e abstrato dos métodos, mas os desafiou na resolução de problemas direcionados à área da Engenharia Civil e possibilitou a compreensão da resolução automatizada dos métodos abordados. Desse modo, indicaram que a proposta favoreceu suas formações profissionais na área de engenharia.

Concluiu-se, na subcategoria intermediária “*Aspectos positivos*”, que as percepções mais frequentes estavam relacionadas às influências do uso de recursos tecnológicos na aprendizagem e também às lembranças positivas sobre o método de ensino. Em seguida, apareceram lembranças relativas ao fato de a percepção das aulas serem interessantes e também em razão de a abordagem proporcionar que realizassem associações da teoria com usos práticos. A lembrança que apareceu com menor frequência estava relacionada à percepção de que a proposta colabora com suas formações profissionais.

Na subcategoria intermediária “*Aspectos negativos*”, que representou 0,77% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 0,31%, os estudantes se lembraram que sentiram dificuldades em relação ao tempo disponível para as tarefas:

> Percebi que se tivéssemos um pouco a mais de tempo para realizar os processos com o uso dos recursos tecnológicos teria sido mais fácil a compreensão [...] (2.7.A2.1, 2017).
> Lembro que as aulas eram muito interessantes e bem ministradas, porém, muito compactas [...] (2.7.A4.3, 2017).

- Em 0,31%, os estudantes se lembraram que a avaliação era muito extensa:

> [...] as provas eram muito extensas para o curto período que era disponível a sua realização (2.7.A4.4, 2017).
> [...] O único ponto negativo, em minha opinião, eram as provas extensas, pois tínhamos dificuldade de resolver todas questões em pouco tempo. Porém, isso se deve também pelo pouco tempo dedicado aos estudos fora da instituição (2.7.A23.2, 2017).

- Em 0,15%, um estudante se lembrou que sentiu falta da realização de mais exercícios em aula:

> [...] Já um ponto negativo, e o único na minha opinião sobre as aulas que tivemos, é que poderíamos ter tido mais exercícios pra resolver durante as aulas, mas nada que tenha afetado a aprendizagem. Essa é a forma como eu percebi o método de ensino (2.7.A26.2, 2017).

Na subcategoria intermediária "*Aspectos negativos*", foi possível constatar que as lembranças mais frequentes estavam relacionadas ao pouco tempo disponibilizado para realização das tarefas propostas. Apenas um estudante se referiu ao fato de sentir necessidade da realização de mais exercícios em sala de aula, mas destacou que isso não afetou sua aprendizagem. Concluiu-se, nessa subcategoria, que os estudantes perceberam que o limite de tempo para realização de tarefas em sala de aula presencial foi um fator limitador de suas aprendizagens, bem como para o desempenho em suas tarefas avaliativas.

Na subcategoria intermediária "*Lembram que não perceberam aspectos negativos*", que representou 0,31% das unidades de registro, e verificou-se que 10% dos estudantes indicaram que não se lembravam de terem percebido aspectos negativos da proposta: *"[...] Aspectos negativos: não percebi nenhum"* (2.7.A16.2, 2017).

Na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre aprendizagem*", que representou 0,93% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 0,47%, os estudantes se lembraram que a abordagem possibilitou um melhor aproveitamento:

> Cursei esta disciplina no segundo semestre do meu curso, e pelo o modo como foi ensinado, lembro vários assuntos, nos quais discutimos e abordamos em sala de aula! [...] (2.1.A8.1, 2017).
> [...] e fez com que tivéssemos maior aproveitamento [...] (2.7.A35.2, 2017).

- Em 0,15%, um estudante se lembrou que a aprendizagem de Álgebra Linear possibilitou melhorar a compreensão de problemas e estimulou o raciocínio lógico:

> Os conhecimentos adquiridos na disciplina de Álgebra Linear foram de suma importância, pois nos possibilitou melhor compreensão de problemas no sentido de melhor o raciocínio lógico do aluno (2.7.A19.1, 2017).

- Em 0,15%, um estudante se lembrou que a disciplina foi exigente, mas que foi valiosa conforme o registro:

> [...] Álgebra Linear é uma disciplina que exigem bastante do aluno, resolução de exercícios, busca de material além do proposto pelo professor, eu particularmente tive que me cobrar mais, porém percebo que hoje os ensinamentos foram muito valiosos (2.7.A2.4, 2017).

- Em 0,15%, um estudante se lembrou que percebeu aprovação da turma conforme o exemplo, a seguir: *“A turma em geral, aprovou muito o método. [...]”* (2.7.A8.1, 2017).

Na subcategoria intermediária “*Lembranças sobre aprendizagem*”, verificou-se que 29% dos respondentes se manifestaram sobre elas, sendo que as lembranças mais frequentes se referiram ao fato de a abordagem ter propiciado um melhor aproveitamento (14% dos respondentes). Também apareceram lembranças isoladas, nas quais destacaram: que a abordagem melhorou a compreensão e estimulou o desenvolvimento do raciocínio lógico; que a disciplina foi exigente, mas que foi valiosa; e que houve, de modo geral, a aprovação do método pelos integrantes da turma. Nessa categoria, foi possível perceber que todas as lembranças, relatadas pelos estudantes, foram positivas sobre os aspectos citados e que estavam relacionados à experiência de aprendizagem que vivenciaram.

Na subcategoria intermediária “*Lembranças sobre dificuldades*”, que representou 0,6% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 0,15%, um estudante se lembrou que sentiu dificuldades para aprender: *“[...] Senti certa dificuldade para aprender o conteúdo, mas depois consegui aprender. Nas aulas lembro que as perguntas que a professora fazia muitas vezes eu não tinha confiança das minhas respostas”* (2.7.A29.2, 2017).

- Em 0,15%, um estudante se lembrou de sentir dificuldades com exigência:

> [...] Porém a cobrança dos mínimos detalhes das operações feitas pelo aluno, muitas vezes até tendo que escrever o motivo e o porquê da escolha daquela operação foi enorme, talvez ai seja um ponto a melhorar. [...] (2.7.A10.2, 2017).

- Em 0,15%, um estudante se lembrou que sentiu dificuldades na interação com a professora:

> [...] Também acho que a interação do professor com os alunos tem que ser mais aberta e natural, pois parece meio forçada, as vezes fazendo com que os alunos tenham medo de questionar certos assuntos que geram duvidas, nos mesmos, devido ao modo das respostas (2.7.A10.3, 2017).

- Em 0,15%, um estudante se lembrou que percebeu que o uso do computador pode ter gerado dificuldades para alguns, conforme mostrado a seguir: *"[...] Entretanto, a utilização dos computadores exigia um certo conhecimento de informática, o que pode ter gerado dificuldade para alguns alunos"* (2.7.A12.3, 2017).

Assim, foi possível concluir, na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre dificuldades*", que os estudantes tiveram percepções isoladas sobre dificuldades, estando relacionadas à aprendizagem, à exigência nas justificativas de respostas, na interação com a professora, em relação às perguntas e respostas e com a falta de familiaridade com o computador.

Destaca-se que todos esses aspectos são importantes e retratam, em parte, a realidade que foi vivenciada em sala de aula. Da experiência docente, percebe-se que muitos estudantes sentem dificuldades de aprendizagem devido à complexidade dos conceitos abordados nessa disciplina. Nota-se, também, que, geralmente, os estudantes não gostam de ter que justificar suas respostas, o que aparece no registro de A10.

Além disso, esse estudante indicou que sentiu dificuldades na interação com a professora, em relação às perguntas e às respostas e que essa interação não lhe pareceu natural. Cabe destacar que, durante o semestre, também se buscou adotar a estratégia de responder às perguntas dos estudantes, não apenas com respostas diretas, mas envolvendo outras perguntas, tendo em vista estimular a reflexão sobre os conceitos abordados. Essa estratégia remete aos princípios propostos por Demo (2000, p. 53), em relação a educar pela pesquisa, buscando a construção do conhecimento, por meio de questionamentos reconstrutivos, de modo a possibilitar uma formação completa. Conforme o autor:

> Para que exista educação é preciso que haja construção e participação. Assim, o contato entre professor e aluno será pedagógico se for construtivo e participativo. Não pode ter mero ensino e mera aprendizagem. O aluno não pode reduzir-se a simples objeto de treinamento. Precisa ser sujeito. Somente educação de qualidade é capaz de promover o sujeito histórico crítico e criativo.

Pela observação realizada em sala de aula, verificou-se que essa estratégia causa desconforto para alguns estudantes, conforme reporta a percepção do estudante A10. No entanto, também foi possível observar que essa abordagem possibilita a participação ativa dos estudantes na construção de seus conhecimentos, pois os estimula à compreensão por meio de reflexões propostas sobre os assuntos abordados e contribui para o desenvolvimento de suas criticidades.

Também apareceu, na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre dificuldades*", que a falta de familiaridade com os recursos tecnológicos digitais disponibilizados pode ter dificultado a aprendizagem de alguns. Foi possível perceber que os estudantes, inseridos no chamado grupo de nativos digitais, geralmente possuem familiaridade com usos de recursos tecnológicos digitais com finalidade não acadêmica ou profissional e, desse modo, necessitam de um tempo para se ambientar com os aplicativos disponibilizados.

Por esse motivo, em algumas das tarefas propostas, não foram apresentados desafios, mas apenas se fez uso dos recursos escolhidos com o objetivo de reconhecimento do ambiente dos aplicativos utilizados. Somente após esse processo de familiarização é que foram propostas outras tarefas desafiadoras, que estimularam o uso criativo e construtivo dos recursos tecnológicos digitais.

Na subcategoria intermediária "*Não conseguiram se lembrar das aulas ou expressar os conceitos*", que representou 0,61% das unidades de registro, constatou-se que:

- Em 0,31%, os estudantes, após nove meses, indicaram que não se lembram das aulas: "*Não lembro*" (2.7.A6.1, 2017) ou "*Não lembro muito bem das aulas*" (2.7.A29.1, 2017).
- Em 0,15%, verificou-se que um estudante, após nove meses, lembra que aprendeu, mas que não se recorda do conteúdo: *"[...] tive um excelente*

aprendizado. Algumas coisas estão na memória, porém pela falta de uso mais constante não me recordo! [...]" (2.7.28.2, 2017).

- Em 0,15%, verificou-se que um estudante, após nove meses, indica que não consegue se expressar em linguagem natural: "*[...] O que são cada um não recordo, ou melhor, sei e não consigo transformar em uma resposta de fácil entendimento"* (2.1.A28.4, 2017).

Nessa subcategoria intermediária, conclui-se que, para esses estudantes, a proposta não foi relevante ou significativa, pois indicaram que não foram capazes de se lembrar das aulas ou dos conceitos tratados. Também apareceu, no registro de A28, que o estudante afirmou não conseguir se expressar seus conhecimentos construídos na disciplina de Álgebra Linear em linguagem natural, após nove meses em relação ao término da disciplina, o que, segundo Duval (1993, 1995, 2016), remete à falta de compreensão dos conceitos tratados.

6.3.2.2 Identificação de conhecimentos finais – G2

Ao serem aplicadas as técnicas da análise de conteúdo do tipo categorial na avaliação de todas as respostas escritas relativas ao "*Questionário final*" (ver Anexo 5), fornecidas por 22 participantes do grupo G2 e também pelas respostas relativas às questões 1, 2, 3 e 7 do "*Questionário Compreensão e Aprendizagem Significativa*" (ver Anexo 7), fornecidas por 13 participantes do G2, foi possível identificar três categorias finais emergentes: "*Compreensão de conceitos*" (que representou 54,04% das unidades de registro); "*Percepções gerais sobre usos dos conhecimentos construídos na disciplina*" (que representou 32,76% das unidades de registro) e "*Percepções sobre o método de ensino e de aprendizagem usado na disciplina*" (que representou 13,20% das unidades de registro), as quais são apresentadas a seguir. Um resumo da categorização pode ser encontrado no Anexo 34.

Destaca-se que, no processo de unitarização das respostas no G2, foram identificadas 409 unidades de registro, que possibilitaram identificar as três categorias finais, apresentadas a seguir.

(i) "*Compreensão de conceitos*" *– G2*

Nessa categoria final, que representou 54,04% das unidades de registro, foram identificadas cinco categorias intermediárias: “*Compreensões de matrizes*” (12,96%); “*Compreensões sobre sistemas lineares*” (12,71%); “*Compreensões sobre vetores*” (8,56%); “*Compreensões de determinantes*” (8,56%); “*Compreensões sobre transformações lineares*” (5,87%) e “*Compreensões sobre autovalores e autovetores*” (5,38%).

Assim como no G1, na categoria intermediária “*Compreensões de matrizes*”, também foram identificadas duas subcategorias intermediárias: “*Compreensões de matrizes no final da disciplina*” (7,83%) e “*Lembranças sobre matrizes, após nove meses*” (5,13%).

Na subcategoria intermediária “*Compreensões de matrizes no final da disciplina*”, verificou-se três subcategorias intermediárias: “*Percepções sobre compreensão de matrizes, no final da disciplina*” (5,62%); “*Percebeu que o uso de matrizes facilita os cálculos*” (1,73%) e “*No final da disciplina, como conceituaram matrizes*” (0,48%).

Na subcategoria intermediária “*Percepções sobre compreensão de matrizes no final da disciplina*”, que representou 5,62% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 5,38%, todos os respondentes afirmaram que perceberam que a disciplina possibilitou compreender matrizes, conforme o registro: “*Sim, possibilitou [...]”* (1.1.E6.1, 2016).
- Em 0,24%, um estudante indicou que percebeu que a disciplina possibilitou compreender matrizes, mas que complicou o conceito: *“[...], mas complicou um pouco em relação à ideia que eu já tinha, pois misturou várias fórmulas de resolver, criando um ‘nó na cabeça’.”* (1.1.E25.2, 2016).

Na subcategoria intermediária “*Percebeu que o uso de matrizes facilita os cálculos*”, que representou 1,73% das unidades de registro, 32% dos respondentes indicaram perceber que o uso de matrizes na resolução de problemas facilita os cálculos, conforme mostrado a seguir: *“[...] Resoluções práticas que te possibilitam encontrar soluções [...]*” (1.1.E6.3, 2016) ou *“[...] facilitam muitos cálculos e processos”* (1.1.E12.3, 2016) ou *“[...] de forma mais simples e compacta”* (1.1.E5.3, 2016).

Na subcategoria intermediária “*No final da disciplina, como conceituaram matrizes*”, que representou 0,48% das unidades de registro, verificou-se:

- Em 0,24%, um estudante conceituou matrizes como tabelas: "*[...] Tabelas com elementos dispostos em linhas e colunas"* (1.1.E6.4, 2016).
- Em 0,24%, um estudante conceituou matrizes como um sistema simplificado: *"[...], é um sistema simplificado [...]"* (1.1.E24.2, 2016).

Desse modo, concluiu-se, na subcategoria intermediária "*Compreensões de matrizes no final da disciplina*", que, ao término das atividades, apesar de 100% dos respondentes afirmarem que a disciplina possibilitou compreender matrizes, apenas 32% se referiram aos seus usos, de modo genérico, e que apenas 9% dos respondentes apresentaram uma conceituação para matrizes. Além disso, apenas a conceituação de E6 foi considerada adequada, de acordo com a apresentada por Boldrini et al. (1980), a qual foi apresentada na seção 6.3.1.1 (ii). Assim, verificou-se, no G2, que apenas um estudante (5% dos respondentes) foi capaz, ao final da disciplina, de apresentar um conceito adequado para matrizes.

Na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre matrizes, após nove meses*", que representou 5,13% das unidades de registro, foi possível constatar que, nove meses após o término da disciplina:

- Em 2,21%, os estudantes indicaram ter se lembrado de ter estudado matrizes, conforme o exemplo: *"Lembro de [...] matrizes, [...]"* (2.1.E2.2, 2017).
- Em 0,98%, os estudantes afirmaram ter se lembrado de ter estudado escalonamento, conforme os registros: *"[...] Escalonamento [...]"* (2.1.E12.7, 2017) ou *"[...] e vamos zerando alguns valores até obter o valor das incógnitas"* (2.1.E23.5, 2017).
- Em 0,73%, os estudantes se recordaram de ter estudado operações matriciais, conforme mostrado a seguir: *"[...] Resolução de matrizes e operação com matrizes tais como soma e subtração e multiplicação e divisão, essa última através de matriz inversa [...]."* (2.1.E9.5, 2017).
- Em 0,73%, os estudantes se lembraram do conceito de matrizes, conforme ilustrado a seguir: *"Matrizes, que são tabelas [...]"* (2.1.E17.2, 2017) ou *"[...] MATRIZES (consiste na organização de dados em linhas e colunas, [...]"* (2.1.E21.4, 2017) e *"[...] matrizes é uma forma prática de fazer tabelas, planilhas"* (2.3.E2.2, 2017).
- Em 0,24%, um estudante se lembrou de alguns tipos de matrizes abordados, conforme o registro a seguir: *"[...] e suas diversas classificações, como a*

matriz identidade, ou a matriz triangular superior/inferior [...]" (2.1.E15.6, 2017).

- Em 0,24%, um estudante se recordou de métodos de resolução de matrizes inversas: "*[...] Também estudamos algumas formas de cálculo de matrizes inversas, através do processo prático e matriz adjunta, [...]"* (2.1.E15.7, 2017).

Concluiu-se, na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre matrizes, após nove meses*", que, apesar de 69% dos respondentes indicar se lembrar de ter visto o conteúdo de matrizes, apenas 23% dos respondentes apresentaram conceituações consideradas adequadas, conforme a definição de Boldrini et al. (1980), apresentada na seção 6.3.1.1 (ii). Também se verificou que alguns estudantes se lembraram de ter estudado o escalonamento de matrizes, e outros, de operações matriciais, bem como foram constatadas lembranças isoladas sobre tipos de matrizes e de métodos de resolução de matrizes inversas.

Na categoria intermediária "*Compreensões sobre sistemas lineares*", que representou 12,71% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: "*Compreensão sobre sistemas lineares, no final da disciplina*" (6,85) e "*Lembranças sobre sistemas lineares, após nove meses*" (5,86%).

Na subcategoria intermediária "*Compreensão sobre sistemas lineares no final da disciplina*", foram identificadas duas subcategorias intermediárias "*Percepções sobre compreensão de sistemas lineares e aplicações, no final da disciplina*" (5,89%) e "*Ao final da disciplina, como conceituaram sistemas lineares*", (0,96%).

Na subcategoria intermediária "*Percepções sobre compreensão de sistemas lineares e aplicações, no final da disciplina*", que representou 5,89% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 4,43%, os estudantes afirmaram que perceberam que a disciplina possibilitou compreender sistemas lineares e usos, conforme o exemplo: "*Sim, possibilitou. [...]*" (1.3.E6.1, 2016).
- Em 1,22%, os estudantes destacaram a existência de vários métodos de resolução de sistemas lineares, conforme mostrado a seguir:

> [...] e que podem ser resolvidos de diversas formas, algumas mais apropriadas para determinadas situações, como por exemplo o uso de

> matriz inversa quando os termos forem os mesmos para diversos sistemas (1.3.E1.3, 2016).
> [...] de diferentes métodos, como Gauss-Jordan, eliminação Gausiana e o método da matriz inversa. Cada método pode ser usado dependendo das equações e nos problemas, com aquele que simplificar mais (1.3.E23.3, 2016).

– Em 0,24%, um estudante indicou que percebeu que foi importante estudar sistemas lineares e métodos: “*[...], fora de suma importância aprender sistemas lineares e os métodos para os resolver, [...]”* (1.3.E10.2, 2016).

Nessa subcategoria intermediária, verificou-se que 82% dos respondentes do G2 verbalizaram que a disciplina possibilitou compreender sistemas lineares e usos. Os demais, ou responderam indiretamente que sim, ou não responderam à pergunta, e não houve afirmação contrária.

Na subcategoria intermediária “*No final da disciplina, como conceituaram sistemas lineares*”, que representou 0,96% das unidades de registro, verificou-se que apenas quatro estudantes apresentaram conceituações diferentes, conforme apresentado a seguir:

> [...] São comparações de equações que possuem variáveis em comum [...] (1.3.E1.2, 2016).
> [...] Os SL são problemas reais [...] (1.3.E6.2, 2016).
> Sistema linear é um conjunto de variáveis que dependem uma das outras (1.3.E24.1, 2016).
> [...], como podemos transformar equações e pontos em sistemas de equações lineares (1.3.E13.2, 2016).

Na subcategoria intermediária “*Ao final da disciplina, como conceituaram sistemas lineares*”, considerando as definições de sistemas lineares apresentada na seção 6.3.1.1 (ii), por Callioli, Domingues e Costa (1990) e por Steinbruch e Winterle (1987), foi possível concluir que, ao final da disciplina, nenhum estudante do G2 conseguiu fornecer uma conceituação que pudesse ser considerada adequada, ou até mesmo próxima da correta. No início da disciplina, na identificação de conhecimentos prévios, no G2, apenas 14% apresentou conceituações próximas das consideradas corretas, ou seja, não tinham compreensão completa desse conceito. Assim, constatou-se, ao final do semestre, em relação ao conceito de sistemas lineares, que não foi possível identificar que houve compreensão ou ampliação desse conceito nos registros do G2.

Esse indicativo remete à dificuldade de compreensão e de expressão dos conceitos matemáticos que se percebe nas respostas desses estudantes, que corrobora com o que Bicudo e Chamie (1994, p. 67) indicam:

> Interpretamos que a compreensão da matemática, enquanto ciência formal, se torna complexa em virtude da dupla necessidade: construção simultânea de idealidades matemáticas e da linguagem matemática que vai expressá-las. [...]

As autoras destacam que as dificuldades relatadas por estudantes remetem a dificuldades com: (i) a linguagem artificial, utilizada para representar o que chamam de idealidades matemáticas; (ii) a compreensão e a interpretação do que está representado; e (iii) a ligação entre a linguagem artificial utilizada e a idealidade representada.

De acordo com os resultados obtidos, nesse grupo, foi possível constatar que superar tais dificuldades não é uma tarefa simples e continua sendo um desafio a ser superado.

Em relação à categoria intermediária "*Lembranças sobre sistemas lineares, após nove meses*", que representa 5,86% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 2,69%, os estudantes se lembraram espontaneamente de métodos de resolução de sistemas lineares:

> [...] e resolução de sistemas lineares através dos métodos de Gauss-Jordan e Eliminação Gaussiana (2.1.E12.8, 2017).
> [...] (métodos mais avançados para a resolução de matrizes que possuem n variáveis; ex: Gauss, Gauss-Jordan, matriz inversa...), [...] (2.1.E21.7, 2017).

- Em 2,19%, os estudantes se lembraram espontaneamente de ter estudado o tópico sistemas lineares, conforme o registro a seguir: "*Lembro de sistemas lineares, [...]*" (*2.1.E2.1*, 2017).
- Em 0,98%, os estudantes apresentaram suas lembranças sobre o conceito de sistemas lineares, conforme mostrado a seguir:

> [...] Equações lineares, que em conjunto formam um sistema linear [...] (2.1.E17.4, 2017).
> [...] Esses sistemas são conjunto de equações com várias incógnitas, [...] (2.1.E23.2, 2017).
> SISTEMAS LINEARES (consiste na resolução de problemas algébricos envolvendo mais de 1 incógnita), [...] (2.1.E21.2, 2017).
> Sistemas lineares, que são conjuntos de equações do 1º grau, em que se buscam resultados para as variáveis que satisfaçam todas as equações [...] (2.1.E12.2, 2017).

Na categoria intermediária "*Lembranças sobre sistemas lineares, após nove meses*", concluiu-se que, no G2, assim como no G1, a maior frequência das lembranças está associada aos métodos de resolução de sistemas, os quais foram trabalhados em grande parte do semestre. Também constatou-se que 31% dos respondentes apresentou conceituação, sendo que apenas uma delas foi considerada adequada, considerando as definições de sistemas lineares apresentada na seção 6.3.1.1 (ii), por Callioli, Domingues e Costa (1990) e Steinbruch e Winterle (1987). As demais eram incompletas. Assim, verificou-se que, ao final da disciplina, não foi possível identificar nas respostas dos participantes de G2 a compreensão desse conceito, mas isso foi percebido nos registros de alguns estudantes, nove meses após o término a disciplina.

Na categoria intermediária "*Compreensões sobre vetores*", que representou 8,56% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias "*Compreensão de vetores, no final da disciplina*" (6,85%) e "*Lembranças sobre vetores, após nove meses*" (1,71%).

Na subcategoria intermediária "*Compreensão de vetores, no final da disciplina*", foram constatadas duas subcategorias intermediárias: "*Percepções sobre compreensão ou ampliação do conceito de vetores, ao final da disciplina*" (4,66 %) e "*Modos como compreenderam que ampliou o conceito de vetores indicados no final da disciplina*" (2,19%).

Destaca-se que, diferentemente do G1, no G2 não foi identificada a subcategoria intermediária "*Conceituações sobre o conceito de vetores, no final da disciplina*".

Na subcategoria intermediária "*Percepções sobre compreensão ou ampliação do conceito de vetores, ao final da disciplina*", verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 3,69%, os estudantes afirmaram, ao final do semestre, que a disciplina lhes possibilitou compreender ou ampliar o conceito de vetores, conforme os exemplos: "*Ampliou-se, pois meu conceito era mais básico*" (1.4.E3.1, 2016) ou "*Possibilitou a compreensão e ampliou o conceito sobre os espaços vetoriais [...]"* (1.4.E5.1, 2016).
- Em 0,49%, os estudantes afirmaram que a disciplina não possibilitou a compreensão ou a ampliação do conceito de vetores, conforme mostrado a seguir: "*Não, pois não consegui assimilar o conteúdo por desleixo"* (1.4.E11.1, 2016) ou "*Não consegui compreender"* (1.4.E16.1, 2016).
- Em 0,24%, um estudante afirmou que não soube dizer se a disciplina não possibilitou compreender ou ampliar o conceito de vetores: "*Mais ou menos.*

Pois já tinha uma boa noção de vetores e de espaço vetorial, porém nunca se sabe tudo e sempre se adquire algum aprendizado novo” (1.4.E4.1, 2016).

- Em 0,24%, outro estudante afirmou que não se lembra se a disciplina possibilitou compreender ou ampliar o conceito de vetores, conforme o exemplo a seguir: “*Não lembro*” (1.4.E19.1, 2016).

Assim, na subcategoria intermediária “*Percepções sobre compreensão ou ampliação do conceito de vetores, ao final da disciplina*”, foi possível verificar que 68% dos respondentes do questionário final do G2 afirmaram que a disciplina possibilitou compreender ou ampliar o conceito de vetores, que 14% não responderam; 9% afirmaram que a disciplina não possibilitou que eles compreendessem esse conceito; 4,5% não souberam dizer se possibilitou e 4,5% disseram que não se lembra. Desse modo, concluiu-se que a maioria dos estudantes do G2 percebeu que a disciplina possibilitou compreender ou ampliar o conceito de vetores.

Na subcategoria intermediária “*Modos como compreenderam que ampliou o conceito de vetores, no final da disciplina*”, que representou 2,19% das unidades de registro, constatou-se que:

- Em 0,49%, os estudantes indicaram que compreenderam que existem outras representações de vetores além dos representados nos espaços bi ou tridimensionais, conforme os exemplos:

> [...], porque, até antes, eu apenas conhecia o método de resolver em duas e três dimensões. (1.4.E5.2, 2016).
> [...], pois eu só tinha conhecimento de vetores no espaço bidimensional (1.4.E21.2, 201).

- Em 0,49%, os estudantes indicaram que perceberam que a disciplina possibilitou compreender os espaços vetoriais, conforme os exemplos:

> [...], além dos vetores, a questão do espaço vetorial, que são de suma importância, pois podem indicar os movimentos das coordenadas, e o que compreende (1.4.E9.2, 2016).
> [...], consegui entender melhor os espaços, que antes pareciam muito mais complexos. Entendi como os vetores se comportam no espaço (1.4.E23.2, 2016).

- Em 0,49%, os estudantes disseram que perceberam que a disciplina possibilitou refletir sobre o conceito de vetores, conforme mostrado a seguir:

> [...] Embora muitas vezes trabalhasse com vetores, nunca havia estudado espaços vetoriais nem conceituado o vetor [...] (1.4.E12.2, 2016).

> [...], pois havia apenas estudado vetores, de uma forma mais simples, mas após o estudo amplia o conceito de vetores e entendi melhor o mesmo (1.4.E20.2, 2016).

- Em 0,24%, um estudante afirmou que compreende que aprendeu outros meios de realizar operações com vetores: "*[...], aprendi outros meios de operações com vetores*" (1.4.E24.2, 2016).
- Em 0,24%, um estudante afirmou que compreendeu que os vetores podem ser representados na forma algébrica: "*[...], descobri que a álgebra pode auxiliar até no cálculo de vetores no espaço*" (1.4.E13.2, 2016).
- Em 0,24%, um estudante afirmou que compreendeu vetores no plano ou no espaço, conforme mostrado a seguir: *"[...] A disciplina ajudou a compreender os vetores como um todo, seja no plano ou no espaço"* (1.4.E18.2, 2016).

Na subcategoria intermediária "*Modos como compreenderam que ampliou o conceito de vetores, ao final da disciplina*", constatou-se que as percepções mais frequentes, no G2, sobre a ampliação do conceito, foram: compreender que existem outras representações de vetores além dos representados nos espaços bi ou tridimensionais; a compreensão de espaços vetoriais e a possibilidade de reflexão sobre o conceito de vetores. Também foram identificadas percepções isoladas sobre a aprendizagem de outros meios de realizar operações com vetores; que os vetores podem ser representados na forma algébrica e que um estudante percebeu que compreendeu vetores no plano ou no espaço. Desse modo, foi possível concluir que 41% dos estudantes destacaram os modos como compreendem que a disciplina possibilitou ampliá-los, o que confirma que de fato houve, para esses estudantes, a ampliação desse conhecimento, segundo os aspectos que eles indicaram.

Na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre vetores, após nove meses*", que representou 1,71% das unidades de registro, verificou-se em 0,98%, os estudantes se lembravam de ter estudado vetores, em 0,49% indicaram que se lembraram de ter estudado espaços vetoriais e em 0,24% se verificou que um estudante se referiu ao conceito de Espaços Vetoriais, conforme mostrado a seguir: "*[...] espaços vetoriais (estudo de problemas que abrangem o 3º eixo, ou seja, 3 dimensões)"* (2.1.E21.9, 2017).

Assim, concluiu-se que, após nove meses, com exceção do estudante E21, foi possível identificar, dentre os respondentes, que eles se recordaram apenas dos nomes dos tópicos estudados, mas não citaram lembranças específicas sobre elas, como usos ou conceitos. Além disso, no caso do estudante E21, embora se refira à definição de Espaços Vetoriais, o faz de modo superficial e impreciso, indicando que não foi capaz de compreender o conceito, pois não conseguiu apresentar seu registro em linguagem natural de modo adequado.

Na categoria intermediária "*Compreensões de determinantes*", que representou 8,56% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias "*Compreensão de determinantes, ao final da disciplina*" (6,6%) e "*Lembranças sobre determinantes, após nove meses*" (1,96%).

Na subcategoria intermediária "*Compreensão de determinantes ao final da disciplina*", foram constatadas três subcategorias intermediárias: "*Percepções sobre compreensão de determinantes e aplicações, ao final da disciplina*" (5,88%); "*Ao final da disciplina, como conceituaram determinantes*" (0,48%) e "*Não conceituou determinantes, mas se referiu a conceitos associados*" (0,24%).

Na subcategoria intermediária "*Percepções sobre compreensão de determinantes e aplicações, ao final da disciplina*", que representou 5,88% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 3,69%, os estudantes afirmaram que a disciplina possibilitou compreender determinantes e aplicações, conforme o exemplo: "*Sim, possibilitou que compreendesse o que são determinantes e sua utilidade em nossos dias em diversas formas [...]*" (1.2.E8.1, 2016).
- Em 1,71%, os estudantes indicaram que a disciplina possibilitou compreender determinantes, mas não aplicações, conforme mostrado a seguir: *"Sim, porém não entendi muito onde podem ser utilizados*" (1.2.E3.2, 2016) ou "*Aprendi a utilizar determinantes, bem como suas regras, entretanto, não compreendi onde podem ser utilizados [...]"* (1.2.E10.1, 2016).
- Em 0,24%, um estudante afirmou que não se lembra do conceito de determinantes, nem de seus usos: "*Não lembro"* (1.2.E2.1, 2016).
- Em 0,24%, um estudante afirmou que não percebe uso de determinante fora da Álgebra Linear: "*[...] Não observei onde utilizar determinantes fora da álgebra, [...]"* (1.2.E1.2, 2016).

Na subcategoria intermediária *"Percepções sobre compreensão de determinantes e aplicações, ao final da disciplina"* verificou-se que 68% dos respondentes afirmaram que a disciplina possibilitou compreender determinantes e aplicações e 18% informaram que não conseguiram compreender apenas as aplicações. Desse modo, verificou-se que 86% deles indicaram que perceberam que a disciplina possibilitou a compreensão do conceito. Além disso, 5% indicaram não se lembrar e 5% afirmaram não perceber usos fora da Álgebra Linear. Assim, concluiu-se que a maioria dos participantes do G2 percebeu que a disciplina propiciou a compreensão tanto do conceito de determinantes quanto de seus usos.

Na subcategoria intermediária "*Ao final da disciplina, como conceituaram determinantes*", que representou 0,48% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 0,24%, um estudante conceituou determinantes como um número associado a uma matriz quadrada: *"[...] Um único número associado a uma matriz quadrada que permite várias aplicações [...]."* (1.2.E6.5, 2016).
- Em 0,24%, um estudante conceituou determinantes como identidades de matrizes quadradas: "*[...] São como identidades de matrizes quadradas [...]*" (1.2.E11.2, 2016).

Nessa subcategoria intermediária, verificou-se que apenas um estudante (E6) apresentou uma conceituação adequada para determinante, conforme definida por Boldrini et al. (1980), apresentada na seção 6.3.1.1 (ii). Salienta-se que, no início da disciplina, no reconhecimento de conhecimentos prévios do G2, verificou-se que a maioria se referia à lembrança de modos de resolução e que os estudantes não foram capazes de apresentar conceitos adequados, ou mesmo próximos dele. Assim, no G2, apesar de 86% dos estudantes afirmarem ter percebido que a disciplina possibilitou a compreensão desse conceito, apenas 5% dos respondentes foram capazes de apresentar uma conceituação adequada.

Na subcategoria intermediária "*Não conceituou determinantes, mas se referiu a conceitos associados*", identificada em 0,24% das unidades de registro, verificou-se que um estudante, em vez de conceituar determinantes, apenas se referiu ao fato de estarem associados a matrizes quadradas e indicou se lembrar de um dos métodos de resolução abordados, conforme o exemplo a seguir: *"[...] através do cálculo de apenas matrizes de ordem quadrada. Podendo chegar a n colunas e n linhas, utilizando Teorema de Laplace, fixar linhas ou colunas, etc. [...]"* (1.2.E15.2, 2016). Nesse caso, verificou-se que também não está claro o conceito de determinantes para esse estudante.

Na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre determinantes*", que representou 1,96% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 1,72%, os estudantes indicaram que, após nove meses, se lembravam que haviam estudado na disciplina o conceito determinantes, conforme o registro: *“Lembro de [...] determinantes [...]”* (2.1.E2.3, 2017).
- Em 0,24%, um estudante se lembrou de um método de cálculo de determinantes, conforme mostrado a seguir: “[...] e cálculo de determinantes, por triangulação, [...]” (2.1.E15.9, 2017).

Desse modo, concluiu-se, na subcategoria intermediária “*Lembranças sobre determinantes*”, que, após nove meses, 54% dos respondentes se lembrou da aprendizagem de determinantes e apenas um estudante se lembrou de citar o estudo de métodos de resolução. Salienta-se que não foram identificadas lembranças espontâneas sobre o conceito de determinantes ou de seus usos.

Na categoria intermediária “*Compreensões sobre transformações lineares*”, que representou 5,87% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: *“Compreensões de transformações lineares, ao final da disciplina”* (5,63%) e “*Lembranças sobre transformações lineares*” (0,24%).

Na subcategoria intermediária *“Compreensões de transformações lineares, ao final da disciplina”,* emergiram duas subcategorias intermediárias: “*Percepções sobre compreensão do conceito de transformações lineares e de usos, ao final da disciplina”* (4,41%) das unidades de registros e “*Conceituações sobre transformações lineares ao final da disciplina”* (1,22%).

Na subcategoria intermediária “*Percepções sobre compreensão do conceito de transformações lineares e de usos”,* que representou 4,41% das unidades de registro*,* constatou-se que:

- Em 1,96%, os estudantes afirmaram que compreendem o conceito e percebem que as transformações lineares são importantes na Engenharia Civil, conforme o exemplo: “*São importantes nos cursos das Engenharias [...]”* (1.5.E8.1, 2016).
- Em 1,47% dos registros, verificou-se que eles afirmaram que a disciplina não possibilitou compreender o conceito de transformações lineares, conforme mostrado a seguir:

> Não compreendi, pois não estive presente na aula. (1.5.E2.1, 2016)
> Não possuo entendimento suficiente para poder explicar sobre transformações lineares (1.5.E18.1, 2016).
> Não está muito clara esta parte do conteúdo, preciso estudá-la mais (1.5.E23.1, 2016).

> Não compreendi direito a ideia do conteúdo (1.5.E25.1, 2016).

- Em 0,98%, verificou-se que, ao final da disciplina, os estudantes afirmaram que não se lembraram sobre conceito ou usos das transformações lineares na Engenharia Civil: *“Não me recordo”* (1.5.E4.1, 2016) ou “*Não lembro*” (1.5.E20.1, 2016).

Em relação à subcategoria intermediária “*Percepções sobre compreensão do conceito de transformações lineares e de usos”,* verificou-se que a lembrança mais frequente, no G2, ocorrida ao final da disciplina, é que os respondentes perceberam que compreenderam o conceito e que o consideram importante na engenharia (36% dos respondentes). Também constatou-se que 27% indicaram que não compreenderam o conceito de transformações lineares; 18% afirmaram não se lembrar de usos das transformações lineares na engenharia e 18% dos respondentes não responderam a essas perguntas.

Na subcategoria intermediária “*Conceituaram transformação linear”,* que representou 1,22% das unidades de registro, verificou-se, ao final da disciplina, que:

- Em 0,49%, os estudantes a conceituaram como uma função, conforme os exemplos: “*Função que preserva as operações de adição e de multiplicação por escalar”* (1.5.E7.1, 2016) ou “*[...], no ponto de vista matemático são transformações de vetores [...]”* (1.5.E21.2, 2016).
- Em 0,49%, os estudantes a conceituaram como um método diferenciado para facilitar cálculos, assim:

> [...] São de certa forma um método diferenciado e rápido para cálculos matemáticos (1.5.E11.3, 2016).
> [...], pois através deles é possível fazer diversas operações que facilitam o cálculo em diversas situações [...] (1.5.E11.2, 2016).

- Em 0,24%, um estudante conceituou como indicadores de transformações em objetos: *“[...] indicam as propriedades e características que um objeto pode sofrer”* (1.5.E9.2, 2016).

Na subcategoria intermediária “*Conceituaram transformação linear”,* verificou-se que apenas 23% dos respondentes forneceram conceituações. As mais frequentes são as compreensões de que transformações lineares são funções linear ou que são métodos diferenciados para realizar cálculos. Um estudante definiu como um indicador de transformações em objetos. De acordo com a definição de Steinbruch e Winterle (1987) apresentada na seção 6.3.2.1 (i), apenas a conceituação do estudante E7 pode ser considerada parcialmente correta, pois não define que se trata de uma transformação entre espaços vetoriais. As demais explicações provavelmente se referem às transformações lineares clássicas, do plano no plano, que foram abordadas durante as aulas. Assim, conclui-se, nessa subcategoria intermediária, que apenas um estudante do G2 (5% dos respondentes), ao final da disciplina, conseguiu compreender o conceito de transformações lineares e foi capaz de se expressá-lo parcialmente em linguagem corrente.

Na subcategoria intermediária “*Lembrança sobre transformações lineares*”, que representou 0,24% das unidades de registro, verificou-se que apenas um estudante do G2, após nove meses, se lembrou de ter estudado esse tópico, conforme mostrado a seguir: *“Lembro de [...] transformações lineares [...]”* (2.1.E2.5, 2017). Destaca-se que nenhum estudante do G2 se lembrou espontaneamente, após nove meses, da definição desse conceito.

Na categoria intermediária “*Compreensões sobre autovalores e autovetores*”, que representou 5,38% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: “*Compreensão de autovalores ou autovetores, ao final da disciplina*” (5,14%) e “*Lembranças sobre autovalores e autovetores*” (0,24%).

Na subcategoria intermediária “*Compreensão de autovalores ou autovetores ao final da disciplina*”, verificou-se duas subcategorias intermediárias: “*Percepções sobre compreensão do conceito de autovalores e autovetores e de usos, ao final da disciplina*” (4,42%) e “*Conceituaram autovalores e autovetores*” (0,72%).

Na subcategoria intermediária “*Percepções sobre compreensão do conceito de autovalores e autovetores e de usos, ao final da disciplina*”, verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 1,98%, os estudantes afirmaram que a disciplina não possibilitou compreender o que são autovalores e autovetores, conforme os exemplos: *“Não entendi muito bem, não ficou claro no meu entendimento”* (1.6.E2.1, 2016) ou *“Não compreendi muito bem essa parte do conteúdo”* (1.6.E23.1, 2016).
- Em 0,98%, os estudantes indicaram que não se lembram o que são autovalores e autovetores, conforme mostrado a seguir: “*Não lembro*” (1.6.E7.1, 2016).

- Em 0,73%, verificou-se que, ao final da disciplina, os estudantes perceberam que autovalores e autovetores são importantes na engenharia, conforme o exemplo a seguir: *“[...], na engenharia civil é importante [...]”* (1.6.E21.2, 2016).
- Em 0,49%, verificou-se que, ao final da disciplina, os estudantes perceberam que a abordagem lhes possibilitou compreender o que são autovalores e autovetores, assim: “*Acredito que sim [...]”* (1.6.E4.2, 2016).
- Em 0,24%, um estudante <u>afirmou que não conseguiu compreender autovalores e autovetores por desleixo</u>, conforme mostrado, a seguir: *“Não consegui assimilar o conteúdo por desleixo”* (1.6.E11.1, 2016).

Conclui-se, na subcategoria intermediária “*Percepções sobre compreensão do conceito de autovalores e autovetores e de usos, ao final da disciplina*”, que os registros mais frequentes se referem ao fato de os participantes afirmarem que a disciplina não lhes possibilitou compreender os conceitos de autovalores e autovetores (36% dos respondentes). Além disso, 18% dos respondentes afirmaram não se lembrar desse conteúdo. Também foi constatado que apenas 14% dos respondentes afirmaram que a disciplina possibilitou a compreensão do que são autovalores e autovetores e que 5% dos respondentes (um estudante) indicaram que o motivo por não terem compreendido esses conceitos foi “desleixo”.

Na subcategoria intermediária “*Conceituaram autovalores e autovetores*”, que representou 0,72% das unidades de registro, constatou-se que:

- Em 0,24%, um estudante conceituou autovalores e autovetores como espaços 2D e 3D: *“[...] trata-se de espaços 2D e 3D […]”* (1.6.E4.3, 2016).
- Em 0,24%, um estudante conceituou autovalores e autovetores como aqueles que não alteram o espaço vetorial ou as propriedades do vetor: “*Os autovalores são valores que não alteram o espaço vetorial dos vetores. E os autovetores não alteram seu espaço vetorial quando associados aos autovalores. [...] pois não alteram as propriedades do vetor”* (1.6.E9.1, 2016).
- Em 0,24%, um estudante conceituou autovalores e autovetores como valores possíveis em aplicações: “*Os autovalores e autovetores configuram valores que sejam possíveis na aplicação nos planos tridimensionais”* (1.6.E15.1, 2016).

De acordo com a definição de Boldrini et al. (1980) sobre autovalor e de autovetor apresentada na seção 6.3.2.1 - (i), foi possível constatar que, no G2, não houve estudante que conseguiu conceituá-los adequadamente. Conclui-se, na subcategoria intermediária "*Conceituaram autovalores e autovetores*", que, apesar de 14% dos estudantes afirmarem que a disciplina possibilitou que compreendessem esses conceitos, os estudantes indicam, em suas explicações, que esse conceito ainda não foi completamente construído em suas estruturas cognitivas, pois não foram capazes de convertê-los, expressando-os em linguagem natural.

Na subcategoria intermediária "*Lembrança sobre autovalores e autovetores*", que representou 0,24% das unidades de registro, verificou-se que apenas um estudante indicou, após nove meses, que <u>se lembrava de ter estudado os conceitos de autovalores e autovalores</u>: "*[...] e autovetores e autovalores"* (*2.1.E15.13*, 2017). Também foi constatado que não houve lembranças espontâneas relacionadas aos conceitos de autovalores e autovetores no G2.

(ii) "*Percepções gerais sobre usos dos conhecimentos construídos na disciplina*" – *G2*

Nessa categoria final, que representou 32,76% das unidades de registro, foram identificadas duas categorias intermediárias: "*Percepções sobre usos dos conceitos*" (23,22%) e "*Percepções sobre usos do conhecimento construído em Álgebra Linear*" (9,54%).

Na categoria intermediária "*Percepções sobre usos dos conceitos*", foram identificadas seis subcategorias intermediárias: "*Percepções sobre usos de matrizes*" (8,8%); "*Percepções sobre usos de sistemas lineares*" (6,36%); "*Percepções sobre usos determinantes*" (4,41%); "*Ao final da disciplina, perceberam a aplicação de autovalores e autovetores na engenharia*" (1,71%); "*Ao final da disciplina, como perceberam usos de transformações lineares*" (1,7%) e "*Ao final da disciplina, como perceberam usos de vetores*" (0,24%).

Destaca-se que, no G2, diferentemente do que ocorre no G1, não foram identificadas, nas respostas do questionário aplicado após nove meses, lembranças sobre usos de "*transformações lineares", de "autovalores e autovetores" e de "vetores".*

Na subcategoria intermediária "*Percepções sobre usos de matrizes*", que representou 8,8% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias, quais sejam “*Percepções sobre usos de matrizes, ao final da disciplina*” (6,6%) e “*Lembrou de usos de matrizes, após nove meses*” (2,2%).

Na subcategoria intermediária “*Percepções sobre usos de matrizes, ao final da disciplina*”, verificou-se, nas unidades de registros, que:

- Em 2,95%, os estudantes indicaram que perceberam uso de matrizes na organização e na manipulação de dados, conforme apresentado a seguir:

> [...] Matrizes são usadas para ordenar e simplificar problemas, em grande parte do nosso cotidiano (1.1.E4.2, 2016).
> [...], pois posso armazenar dados e manipular os mesmos como queira [...] (1.1.E11.2, 2016).
> [...] E além de usarmos matrizes constantemente no dia-a-dia, possibilitando a organização de informações (1.1.E21.4, 2016).

- Em 1,71%, os estudantes afirmaram que perceberam o uso de matrizes na resolução de sistemas lineares, conforme os exemplos a seguir:

> [...], as matrizes podem ser usadas para resolver sistema de equações lineares, [...] (1.1.E2.2, 2016).
> [...], como e onde utilizadas na engenharia, em forma de sistemas de equações lineares e modo de transformar alguns cálculos em forma de matrizes (1.1.E13.2, 2016).

- Em 0,98%, os estudantes afirmaram que perceberam o uso de matrizes na resolução de problemas, conforme os exemplos a seguir:

> [...], pois o uso de matrizes possibilita organizar e resolver problemas dos mais variados tipos [...] (1.1.E5.2, 2016).
> [...], pois vemos matrizes em quase todas as coisas que vemos, como em planilhas do Excel em cálculos de variáveis, forças, sistema de redes. Enfim, ela é muito aplicável em diversos ramos da engenharia e outras áreas também (1.1.E8.2, 2016).
> [...] utilizado na resolução de problemas (1.1.E24.3, 2016).

- Em 0,24%, um estudante afirmou que percebeu o uso de matrizes em computadores: “*[...], pode ser utilizada em tudo, principalmente em computadores”* (1.1.E3.2, 2016).
- Em 0,24%, um estudante afirmou que percebeu o uso de matrizes no planejamento de empresas, conforme mostrado a seguir: *“[...], acredito que matrizes são extremamente importante para facilitar planejamentos, e que, grandes empresas necessitam muito delas”* (1.1.E10.2, 2016).
- Em 0,24%, um estudante afirmou que percebeu o uso de matrizes no cálculo do determinante: *“[...], possibilitou um amplo desenvolvimento da questão de*

como são aplicadas as várias matrizes, como a inversa, o cálculo da determinante, [...]” (1.1.E15.2, 2016).

- Em 0,24%, um estudante afirmou que percebeu o uso de matrizes na codificação de mensagens: *“[...] A disciplina me possibilitou a visão dos vários segmentos da Engenharia Civil onde são utilizadas as matrizes. Posso citar como exemplo a utilização delas em codificações e decodificações”* (1.1.E18.2, 2016).

Conclui-se, na subcategoria intermediária “*Percepções sobre usos de matrizes, ao final da disciplina*”, que 95% dos respondentes indicaram perceber diversos usos de matrizes, sendo as mais frequentes a organização e a manipulação de dados, a resolução de sistemas e a resolução de problemas. Também apareceram percepções isoladas de usos em computadores, no planejamento de empresas, no cálculo de determinante e na codificação de mensagens. Destaca-se que no reconhecimento de conhecimentos prévios do G2, realizado no início da disciplina, verificou-se que não foi identificada a categoria “*Usos de matrizes*”, pois os estudantes não apresentaram registos relacionados à lembrança sobre esses conteúdos. Assim, conclui-se que, no G2, houve a compreensão e ampliação do conceito relacionado aos usos de matrizes, inclusive com percepções de usos teóricos e práticos.

Além disso, na subcategoria intermediária “*Lembrou de usos de matrizes, após nove meses*”, que representou 2,2% das unidades de registro, constatou-se que:

- Em 0,74%, os estudantes indicaram que se lembraram do uso de matrizes na resolução de sistemas lineares, conforme apresentado a seguir: *“Matrizes (com as quais também se pode representar um sistema linear) [...]”* (2.1.E12.4, 2017) ou *“[...] um sistema linear em que era necessário ser resolvido por matrizes”* (2.2.E6.2, 2017).
- Em 0,49%, os estudantes indicaram que se lembraram do uso de matrizes para organizar dados, conforme os exemplos: *“Matrizes, [...] usadas para organizar dados. [...]*” (2.1.E17.3, 2017) ou “*Matrizes sim, porque é comum a utilização de tabelas em algumas disciplinas”* (2.2.E2.2, 2017).
- Em 0,49%, os estudantes afirmaram ter se lembrado, após nove meses, do uso de matrizes na resolução de problemas, conforme mostrado a seguir*: “[...] e uso dessas operações e métodos para resolução de problemas cotidianos”*

(2.1.E5.3, 2017) ou *“[...] MATRIZES [...] para facilitar a visualização e a resolução de problemas) [...]”* (2.1.E21.5, 2017).

- Em 0,24%, um estudante, após nove meses, indicou se lembrar do uso de matrizes na resolução de equações: *“O uso de matrizes para resolver equações [...]”* (2.1.E15.2, 2017).
- Em 0,24%, um estudante, após nove meses, afirmou se lembrar de ver usos de matrizes, mas não disse como, conforme mostrado a seguir: “*[...] Dos diferentes temas abordados na matéria de Álgebra Linear, os mais notáveis em minha opinião foram a utilização de matrizes [...]*” (2.1.E15.5, 2017).

Na categoria “*Lembrou de usos de matrizes, após nove meses*”, verificou-se que 69% dos respondentes indicaram se lembrar do uso de matrizes e que a lembrança mais frequente está associada à resolução de sistemas, seguida das lembranças referentes à organização de dados e à resolução de problemas. Também foram identificadas lembranças isoladas do uso na resolução de equações e de modo geral, sem ser citado exemplo específico. Assim, os resultados indicam que, para esses estudantes do G2, verificou-se a compreensão desse conceito, bem como foi possível constatar a presença da aprendizagem significativa, pois os conceitos não foram esquecidos, por ocasião da assimilação obliteradora, mas permaneceram em suas memórias permanentes, o que indica que houve interação com conceitos subsunçores já existentes, fazendo com que o conceito prévio de matrizes fosse ampliado.

Na subcategoria intermediária “*Percepções sobre usos de sistemas lineares*”, que representou 6,36% das unidades de registro; foi possível identificar duas subcategorias intermediárias: “*Ao final da disciplina, como perceberam usos de sistemas lineares*” (4,9%) e “*Lembranças sobre uso de sistemas lineares*” (1,46%).

Na subcategoria intermediária “*Ao final da disciplina, como perceberam usos de sistemas lineares*”, verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 2,46%, os estudantes afirmaram que perceberam o uso de sistemas lineares na resolução de problemas, conforme os exemplos:

> [...], sistemas lineares podem ser utilizados para resolver problemas do dia-a-dia, [...] (1.3.E2.2, 2016).
> [...] Assim como com matrizes, o estudo de sistemas lineares possibilitou a resolução de muitos problemas [...] (1.3.E12.2, 2016).
> Sistemas lineares são utilizados para resolução de problemas matemáticos em todas as áreas da Engenharia. A matéria me possibilitou compreender essa utilização de forma mais clara (1.3.E18.1, 2016).

> [...] mostrou que podemos resolver diversos problemas por esse método, as vezes mais simples e as vezes mais complicados (1.3.E25.2, 2016).

- Em 0,74%, os estudantes afirmaram que perceberam o uso de sistemas lineares em cálculos de esforços em estruturas (Estática), conforme mostrado a seguir:

> [...] podem ser utilizados, por exemplo, em cálculo de esforços, como foi feito no trabalho anterior (1.3.E5.2, 2016).
> [...] Através dos sistemas lineares conseguimos determinar determinadas forças em cabos de sustentação (1.3.E19.2, 2016).

- Em 0,49%, os estudantes afirmaram que perceberam o uso de sistemas lineares para cálculos algébricos com mais de uma variável, conforme o registro a seguir: *“Na resolução de problemas que, envolvem principalmente mais de uma variável [...]”* (1.3.E9.1, 2016).
- Em 0,49%, os estudantes afirmaram que perceberam o uso de sistemas lineares para resolver diversas equações, assim:

> [...] Possibilita a resolução de diversas equações, encontrando assim solução ou não. (1.3.E11.2, 2016).
> [...] capacitou a interpretação de variáveis em função do número de equações obtendo sistemas lineares compatíveis, incompatíveis, com soluções triviais e não-triviais (1.3.E15.2, 2016).

- Em 0,24%, um estudante indicou que percebeu o uso de sistemas lineares para organização, conforme o registro a seguir: *“[...] para organizar os trabalhos fazendo matrizes lineares”* (1.3.E3.2, 2016).
- Em 0,24%, um estudante indicou que percebeu o uso de sistemas lineares para previsões, conforme mostrado seguir: “*[...] e através deles, de suas resoluções, ajudam a prever fatos futuros”* (1.3.E6.3, 2016).
- Em 0,24%, um estudante indicou que percebeu o uso de sistemas lineares para facilitar a resolução de problemas: *“[...] de uma forma mais fácil”* (1.3.E12.3, 2016).

Conclui-se, na subcategoria intermediária “*Ao final da disciplina, como perceberam usos de sistemas lineares*”, que 82% dos respondentes citaram exemplos de usos de sistemas lineares. A maioria está relacionada à resolução de problemas, de modo geral, seguida de lembranças de usos em cálculos de esforços em estruturas. Com menor frequência, apareceu a percepção de usos em cálculos algébricos ou em para se resolver equações, além de lembranças isoladas sobre usos na organização, para previsões ou para facilitar a resolução de problemas. Salienta-se que, no G2, na identificação de conhecimentos prévios, constatou-se, no início da disciplina, que apenas um estudante (4% dos respondentes) citou que se lembrava do uso de sistemas lineares na resolução de problemas com características lineares, mas não citou exemplo específico. Desse modo, verifica-se que diversos estudantes do G2, ao final da disciplina, compreenderam ou ampliaram seus conhecimentos sobre usos de sistemas lineares, pois a maioria percebeu seu uso na resolução de problemas, e, ainda, alguns se lembraram de contextos específicos de aplicação.

Na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre uso de sistemas lineares*", que representou 1,46% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 0,49%, os estudantes se lembraram, após nove meses, do uso de sistemas lineares no cálculo de esforços, conforme mostrado a seguir:

> [...] na determinação dos esforços em treliças, algumas vezes, caía-se em um sistema linear [...] (2.2.E12.4, 2017).
> [...] para calcular os esforços de treliças, em alguns casos, era preciso resolver alguns sistemas de equações lineares (2.2.E23.5, 2017).

- Em 0,49%, os estudantes se lembraram, após nove meses, do uso de sistemas lineares na resolução de integrais, conforme os exemplos:

> [...] para resolver algumas integrais, também usávamos sistemas lineares [...] (2.2.E12.5, 2017).
> [...] em certos tipos de integrais, acaba sendo necessária a resolução de sistemas de equações lineares [...] (2.2.E23.4, 2017).

- Em 0,24%, um estudante, após nove meses, se lembrou do uso de sistemas lineares na resolução problemas: *"[...] problemas envolvendo resolução de sistemas lineares [...]"* (2.2.E9.2, 2017).
- Em 0,24%, um estudante se lembrou, após nove meses, do uso de sistemas lineares no cálculo da área de um polígono: "*[...] cálculos de área de uma poligonal qualquer [...] através do sistema que utilizávamos em Álgebra Linear. [...]"* (2.2.E15.3, 2017).

Na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre uso de sistemas lineares*", foi possível constatar que, nove meses após o término da disciplina, 46% dos respondentes se lembraram espontaneamente de usos de sistemas, sendo que as lembranças mais frequentes referem-se aos usos no cálculo de esforços e na resolução de integrais. Também apareceram lembranças isoladas sobre uso na resolução problemas e no cálculo da área de um polígono. Nesses registros, também foi possível observar a presença da aprendizagem significativa, pois os estudantes, além de indicarem a presença desse conhecimento em suas memórias permanentes, também foram capazes de identificá-los e utilizá-los, após o término da disciplina, em contextos diferentes, o que indica a compreensão do uso apropriado desses conceitos apreendidos ou aprimorados na disciplina.

Na subcategoria intermediária "*Percepções sobre usos determinantes*", que representou 4,41% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias "*No final da disciplina, como perceberam usos de determinantes*" (3,92%) e "*Lembranças sobre uso de determinantes*" (0,49%).

Na subcategoria intermediária "*Ao final da disciplina, como perceberam usos de determinantes*" verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 1,98%, os estudantes afirmaram perceber o uso de determinante no cálculo de área, conforme os exemplos:

> [...] como calcular áreas de triângulo por meio de coordenadas (1.2.E1.3, 2016).
> [...], como forma rápida para cálculos de área, é de extrema importância na aplicação de outras contas (1.2.E9.2, 2016).
> [...] Através dos determinantes conseguimos ter por exemplo o valor da área de uma superfície (1.2.E19.2, 2016).

- Em 0,73%, os estudantes afirmaram perceber o uso de determinante para calcular matriz inversa, conforme mostrado a seguir:

> [...] Com eles podemos verificar a existência de uma matriz inversa, [...] (1.2.E6.2, 2016).
> [...] O cálculo do determinante possibilita que se perca tempo no cálculo, por exemplo da matriz inversa, se a mesma tiver determinante igual a zero não terá inversa. Então com o determinante eu ganho tempo (1.2.E20.2, 2016).

- Em 0,49%, os estudantes afirmaram perceber o uso de determinante para resolver sistemas lineares, conforme mostrado a seguir: *"[...], como na resolução de sistemas lineares"* (1.2.E8.2, 2016) ou *"[...] para determinar se tem ou não solução algum tipo de sistema em forma de matriz"* (1.2.E13.2, 2016).
- Em 0,24%, um estudante afirmou perceber o uso de determinante para calcular autovalores e autovetores: "*[...] calcular autovalores e autovetores, [...]"* (1.2.E6.3, 2016).

- Em 0,24%, um estudante afirmou perceber o uso de determinante para verificar outras operações: *“[...] e possibilitam descobrir se é possível efetuar alguma operação”* (1.2.E11.3, 2016).
- Em 0,24%, um estudante afirmou perceber o uso de determinante em vetores: “*[...] O cálculo de determinantes aplica-se aos vetores utilizados”* (1.4.E15.3, 2016).

Assim, concluiu-se, na subcategoria intermediária “*Ao final da disciplina, como perceberam usos de determinantes*”, que as percepções mais frequentes, ao final da disciplina, relacionam-se ao cálculo de áreas, seguido do cálculo de matrizes inversas e do uso na resolução de sistemas lineares. As percepções menos frequentes referem-se às aplicações no cálculo de autovalores e autovetores; para verificar operações e no uso em vetores. Destaca-se que, nessas últimas percepções, os estudantes falam do uso, mas não explicam de que modo isso poderia ser realizado No início da disciplina, no reconhecimento de conhecimentos prévios do G2, constatou-se que nenhum dos participantes soube citar exemplos de usos do determinante. No entanto, ao final da disciplina, 73% dos respondentes foram capazes de exemplificar usos variados do determinante, o que indica que a disciplina possibilitou, a esses alunos, a ressignificação e a ampliação do conceito, bem como, provavelmente, favoreceu a aprendizagem significativa.

Na subcategoria intermediária “*Lembrança sobre o uso de determinantes*”, verificou-se, em 0,49% das unidades de registro, que dois estudantes, após nove meses, se lembraram espontaneamente do uso de determinante para verificar se uma função, ou equação diferencial, é homogênea ou não: “*[...] para sabermos se uma função é homogênea ou não, utilizando determinantes* (2.2.E8.5, 2017) e *“[...] usamos determinantes para determinar se uma equação diferencial era homogênea”* (2.2.E12.3, 2017).

Segundo Steinbruch e Winterle (1987, p. 510): “Quando num sistema de equações lineares os termos independentes são todos nulos, o sistema é chamado *homogêneo*”. Assim, para se verificar se um sistema é homogêneo, não há necessidade do uso de determinantes, e, desse modo, as lembranças apresentadas indicam que esses dois estudantes compreenderam de modo equivocado o uso de determinantes. Os demais participantes não se manifestaram sobre o assunto.

Assim, concluiu-se, na subcategoria intermediária “*Lembrança sobre o uso de determinantes*”, que, pelas respostas fornecidas (nove meses após o término da disciplina), não foi possível identificar a compreensão adequada na memória permanente dos estudantes de G2 sobre o uso de determinantes.

Na subcategoria intermediária "*Ao final da disciplina, como perceberam a aplicação de autovalores e autovetores na engenharia*", que representou 1,71% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 0,98%, os estudantes indicaram que perceberam o uso de autovalores e em engenharia, assim:

> [...] para engenharia no processo de construção de edifícios" (1.6.E13.2, 2016).
> [...], por exemplo, onde os autovalores podem ser as frequências naturais e os autovetores os modos de vibração de uma estrutura" (1.6.E21.3, 2016).
> […] o que é muito usado nas engenharias" (1.6.E4.4, 2016).

- Em 0,73%, os estudantes afirmaram ter percebido que autovalores e autovetores são usados para calcular coordenadas, conforme os exemplos:

> [...] para achar determinado ponto com 1 ou mais valores e calcular coordenadas no R^2 ou R^3 (1.6.E3.2, 2016).
> É utilizado para calcular coordenadas no R^2 ou R^3 [...] (1.6.E8.1, 2016).
> São usados para cálculo de coordenadas, [...] (1.6.E13.1, 2016).

Na subcategoria intermediária "*Ao final da disciplina, como perceberam a aplicação de autovalores e autovetores na engenharia*", verificou-se que as percepções mais frequentes do uso de autovalores e autovetores dos respondentes do G2 estão relacionadas aos usos de autovalores e autovetores na engenharia. No entanto, a maioria dos estudantes não especificou com que finalidade. Apenas um estudante se lembrou do uso apresentado em sala de aula. O demais respondentes afirmaram que perceberam que seus usos estão relacionados ao cálculo de coordenadas, mas também não disseram com que finalidade. Concluiu-se que, no G2, o percentual de lembranças foi muito pequeno, ou seja, a maioria não compreendeu o uso de autovalores e autovetores em uma situação prática. Como já foi destacado, no G1, era esperado que esse percentual de compreensão não fosse alto, devido à complexidade desse exemplo, porém, não se esperava que fosse tão pequeno.

Na subcategoria intermediária "*Ao final da disciplina, como perceberam usos de transformações lineares*", que representou 1,7% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 0,98%, os estudantes afirmaram que perceberam o uso de transformações lineares e citaram exemplos de uso na engenharia, conforme os exemplos: *“[...] pois através delas pode-se identificar as mudanças de forma estruturais, como por exemplo, o cisalhamento”* (1.5.E5.2, 2016) ou *“[...] pois podem representar as transformações em um edifício [...]”* (1.5.E9.2, 2016).
- Em 0,24%, um estudante afirmou que percebeu aplicações de transformações lineares, mas não citou exemplos específicos de uso na engenharia: *“[...] por conta das transformações que são causadas na vida dos engenheiros”* (1.5.E8.2, 2016).
- Em 0,24%, um estudante afirmou que percebeu aplicações de transformações lineares em vetores ou figuras e citou exemplos:

> As transformações lineares se aplicam em um plano cartesiano, as coordenadas de um polígono. Através disso, podemos calcular cisalhamentos, transformações uniformes e contrações uniformes, assim, como reflexão em torno do eixo ou origem (1.5.E15.1, 2016).

- Em 0,24%, um estudante afirmou que percebeu aplicações de transformações lineares em programas gráficos associado à expansão uniforme: *“[...] para programas gráficos nos métodos de expansão linear”* (1.5.E3.2, 2016).

Na subcategoria intermediária “*Ao final da disciplina, como perceberam usos de transformações lineares*”, verificou-se que as lembranças mais frequentes nas memórias de estudantes do G2, ao término da disciplina, estavam associadas aos seus usos na engenharia, na representação de fenômenos físicos, referentes a alguns tipos de deformações em estruturas. Também se constatou que apareceram lembranças variadas sobre aplicações em vetores ou figuras, conforme apresentado na disciplina. Além disso, constatou-se que 32% dos respondentes se lembraram de possíveis usos das transformações lineares, sendo que 23% dos apontamentos estavam associados ao emprego em análises de fenômenos na engenharia. Destaca-se que, no início da disciplina, apenas um estudante (4% dos respondentes) havia explicado como compreendia o uso teórico de funções lineares e não foram identificadas percepções de usos cotidianos ou no tratamento quantitativo de fenômenos físicos. Assim, ao final da disciplina, foi possível identificar que havia compreensão ou ampliação desse conhecimento para esses estudantes do G2.

Na subcategoria intermediária “*Ao final da disciplina, como percebeu uso de vetores*”, verificou-se, em 0,24% das unidades de registro, que um estudante disse ter percebido o uso de vetores no dimensionamento compatível: “*[...] a obtenção de vetores que funcionem como base para um dimensionamento compatível”* (1.4.E15.2, 2016).

Na identificação sobre conhecimentos prévios do G2, ao serem questionados especificamente sobre essa questão, verificou-se que 52% dos estudantes apresentaram explicações sobre usos, sendo que as lembranças mais frequentes estavam associadas à representação de forças. Apesar de ter sido identificada apenas uma lembranças de uso (5% dos respondentes), verificou-se, nessa subcategoria intermediária, que ela está associada ao uso na engenharia, o que indica que, para esse estudante, houve ampliação do conceito. Também cabe destacar que não foi perguntado especificamente sobre os usos no questionário final, o que pode justificar esse percentual pequeno de lembranças.

Na categoria intermediária “*Percepções sobre usos do conhecimento construído em Álgebra Linear*”, que representou 9,54% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: “*Percepções de uso acadêmico dos conceitos de Álgebra Linear”* (6,12%) e “*Percepções sobre usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos*” (3,42%).

Na subcategoria intermediária “*Percepções de uso acadêmico dos conceitos de Álgebra Linear”*, foram identificadas duas subcategorias: “*Perceberam usos de conceitos de Álgebra Linear em outras disciplinas*” (5,88%) e “*Não percebeu usos de conceitos de Álgebra Linear em outras disciplinas do curso*” (0,24%).

Na subcategoria intermediária “*Perceberam usos de conceitos de Álgebra Linear em outras disciplinas*”, que representa 5,88% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 1,98%, os estudantes perceberam usos na disciplina de Cálculo Numérico, conforme os exemplos:

> Foram revistos os Métodos de Resolução de Sistemas Lineares na disciplina de Cálculo numérico neste semestre. Uma ou outra vez lembro de algum exercício ter caído em um sistema linear [...] (2.2.E6.1, 2017).
> Sim, em Cálculo Numérico, problemas envolvendo resolução de sistemas lineares, resolvidos por meio do método de Gauss-Jordan (2.2.E9.1, 2017).
> Sim. Na disciplina de Cálculo Numérico usamos vários métodos diferentes de resolução de sistemas lineares, e a disciplina de Álgebra linear foi muito importante como base para isto [...] (2.2.E23.1, 2017).

- Em 1,47%, os estudantes perceberam uso de conceitos em disciplinas, mas não especificaram em qual delas, conforme o exemplo a seguir:

> Na faculdade é muito utilizada os sistemas lineares, pois precisamos para resolver problemas com mais de uma incógnita [...] (2.2.E8.1, 2017).
> [...] Mas, em outras disciplinas métodos como sistemas lineares são os mais utilizados (2.2.E5.2, 2017).
> Sim, é possível fazer uso dos conceitos abordados em diversas disciplinas do curso [...] (2.2.E10.1, 2017).

- Em 1,22%, os estudantes perceberam uso na disciplina de Cálculo II, conforme mostrado a seguir:

> [...] Na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, para resolver algumas integrais, também usávamos sistemas lineares [...] (2.2.E12.2, 2017).
> Também, na disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial II, em certos tipos de integrais, acaba sendo necessária a resolução de sistemas de equações lineares [...] (2.2.E23.2, 2017).

- Em 0,73%, os estudantes perceberam usos na disciplina de Análise Estrutural I:

> [...] em Análise Estrutural I para calcular os esforços em treliças [...] (2.2.E8.3, 2017).
> Sim. Na disciplina de Análise Estrutural I, na determinação dos esforços em treliças, algumas vezes, caía-se em um sistema linear [...] (2.2.E12.1, 2017).

- Em 0,24%, um estudante percebeu uso na disciplina de Equações Diferenciáveis Ordinárias (EDO: *“[...] E na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias e Séries, usamos determinantes para determinar se uma equação diferencial era homogênea”* (2.2.E12.3, 2017).
- Em 0,24%, um estudante percebeu uso na disciplina de Topografia:

> Já utilizamos os assuntos de Álgebra Linear em outras matérias em algumas oportunidades. Já fizemos inúmeros cálculos de área de uma poligonal qualquer na matéria de Topografia, [...], através do sistema que utilizávamos em Álgebra Linear [...] (2.2.E15.1, 2017).

Na subcategoria intermediária “*Perceberam usos de conceitos de* Álgebra Linear em outras disciplinas”, verificou-se que as lembranças mais frequentes, após nove meses, refere-sem ao uso de conceitos de Álgebra Linear na disciplina de Cálculo Numérico, disciplina que estavam cursando no semestre em que responderam ao último questionário. Alguns se lembraram de usos em outras disciplinas, mas não especificaram em quais. Também se recordaram de usos nas disciplinas de Cálculo II, Análise Estrutural I, EDO e Topografia. Assim como verificou-se no G1, esses resultados também confirmam que os conteúdos de Álgebra Linear estão presentes em diversas disciplinas de cursos de graduação, conforme indicado por Celestino (2000) e também confirmam a importância da aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear, ao possibilitarem a modelagem e a resolução de diferentes problemas da área das Ciências Exatas.

Na subcategoria intermediária "*Não percebeu usos de conceitos de Álgebra Linear em outras disciplinas do curso*" que representou 0,24% das unidades de registro, verificou-se que apenas um estudante, dentre os respondentes, afirmou não perceber aplicação de conceitos de Álgebra Linear em outras disciplinas, conforme mostrado a seguir: *"Ainda não, acredito que seja por causa da mudança de curso"* (2.2.E17.1, 2017). Destaca-se que esse estudante, após a disciplina, por motivos pessoais, optou por mudar para o curso "Ciências da Computação", dentro da própria instituição, ou seja, ao responder o questionário, ainda estava cursando as disciplinas básicas do novo curso. Assim, nessa subcategoria intermediária, constatou-se que apenas um estudante, dentre os respondentes no G2, não percebeu a utilização desses conceitos em outras disciplinas do curso.

Na subcategoria intermediária "*Percepções sobre usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos*", que representou 3,42% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias: "*Modos de percepção usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos*" (3,18%) e "*Não percebeu usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos*" (0,24%).

Na subcategoria intermediária "*Modos de percepção usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos*", que representa 3,18% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 2,45%, os estudantes indicaram que usaram conceitos de Álgebra Linear somente em aplicações acadêmicas, conforme ilustram os exemplos a seguir:

> Profissionalmente ou pessoalmente não. No entanto, muitos conceitos vêm sendo usados em outras disciplinas da faculdade (2.3.E12.1, 2017).
> [...] só tenho usado os conhecimentos adquiridos na disciplina em aplicações de outras disciplinas da faculdade (2.3.E23.2, 2017).

- Em 0,49%, os estudantes indicaram ter usado conceitos de Álgebra Linear em aplicações profissionais, conforme mostrado a seguir:

> [...] Assim como também já utilizei em cálculos feitos dentro da Associação dos Universitários de Ibiraiaras (2.3.E10.2, 2017).

> Sim, utilizo matrizes e cruzamento de dados em meu serviço em uma transportadora. Utilizamos dados de abastecidas dos caminhões para saber quanto os mesmos gastam de óleo diesel no mês, quanto esse valor corresponde ao faturamento semanal/quinzenal/mensal. Assim como o faturamento de cada motorista irá interferir em sua comissão ao final de cada mês (2.3.E15.1, 2017).

– Em 0,24%, um estudante afirmou fazer uso de conceitos de Álgebra Linear na vida pessoal, conforme o registro a seguir:

> Sim, em diversas situações que ocorrem no dia a dia podemos utilizar os conhecimentos que obtivemos na disciplina de Álgebra Linear. Já utilizei ao me deparar com um desafio no facebook e para então verificar se o sistema existia [...] (2.3.E10.1, 2017).

Concluiu-se, na subcategoria intermediária "*Modos de percepção usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos*", que 92% dos respondentes, após nove meses, se lembraram de fazer usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos. Dentre eles, 77% se lembrou de ter feito uso do conhecimento construído apenas em aplicações acadêmicas, 10% indicaram que fizeram uso na vida profissional e 5% disseram que fizeram uso também na vida profissional e pessoal.

Na subcategoria intermediária "*Não percebeu usos de conceitos de Álgebra Linear em outros contextos*", que representou 0,24% das unidades de registro, verificou-se que, após o término da disciplina, apenas um estudante afirmou que ainda não havia percebido usos do conhecimento construído na disciplina em outros contextos: *"Também não utilizei até agora, acho que por incompatibilidade de rotina mesmo ou por não ter enxergado a oportunidade"* (2.3.E17.1, 2017). Assim, nessa subcategoria intermediária, foi possível concluir que apenas 5% dentre os respondentes ainda não tinha percebido usos dos conteúdos em outros contextos, após o término da disciplina.

(iii) "*Percepções sobre o método de ensino e de aprendizagem usado na disciplina*" *– G2*

Na categoria final "*Percepções sobre o método de ensino e de aprendizagem usado na disciplina*", que representou 13,2% das unidades de registro, foram identificadas três subcategorias intermediárias: "*Lembrança de aspectos positivos e* *negativos da proposta*” (10,02%); “*Lembranças sobre aprendizagem*” (2,2%) e “*Lembranças sobre dificuldades*” (0,98%), as quais são apresentadas a seguir.

Na subcategoria intermediária “*Lembrança de aspectos positivos e negativos da proposta*”, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: “*Aspectos positivos*” (7,82%) e “*Aspectos negativos*” (2,2%).

Na subcategoria “*Aspectos positivos*”, verificou-se a existência de seis subcategorias intermediárias: “*Lembranças positivas sobre o método de ensino*” (3,43%); “*Influência do uso de recursos tecnológicos na aprendizagem*” (2,94%); “*Lembrou que a abordagem possibilitou perceber associações da teoria com usos práticos*” (0,73%); “*Após nove meses, percebeu que a disciplina foi importante em sua formação profissional*” (0,24%); “*Após nove meses, percebem que a disciplina colaborou com sua formação pessoal*” (0,24%) e “*Lembrou de professora com amplos conhecimentos em relação ao conteúdo e aplicações*” (0,24%).

Na subcategoria intermediária “*Lembranças positivas sobre o método de ensino*”, que representou 3,43% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 1,23%, os estudantes se lembraram que o método era bom ou que aprovaram o método de ensino, conforme os exemplos: “*Foi um método muito bom de ensino [...]”* (2.7.E2.1, 2017) ou *“Os métodos de ensino eram bons [...]”* (2.7.E23.1, 2017) ou *“Não vi nenhum problema com o método [...]”* (2.7.E17.1, 2017).
- Em 0,98%, os estudantes se lembraram de aulas com boas explicações ou boa didática, assim: “*[...] e a explicação do conteúdo, que era muito boa [...]*” (2.7.E12.3, 2017) ou “*Acredito que a didática abordada nas aulas foram ótimas [...]”* (2.7.E10.1, 2017).
- Em 0,73%, os estudantes se lembraram do método explicativo, claro, reflexivo ou incisivo, conforme os exemplos:

> O método expositivo e explicativo funciona bastante, as questões levantadas em aula embasam hoje nosso conhecimento para as disciplinas seguintes [...] (2.7.E5.1, 2017).
> Método bem compreensível [...] e claro (2.7.E6.1, 2017).
> O método de ensino foi incisivo [...] (2.7.E15.1, 2017).

- Em 0,49%, os estudantes indicaram que o ensino foi proposto de modo prático, conforme os exemplos: *“[...] de forma prática [...]”* (2.7.E2.3, 2017) ou “*Método [...] prático [...]”* (2.7.E6.2, 2017).

Concluiu-se na subcategoria “*Lembranças positivas sobre o método de ensino*”, que representou lembranças de 50% dos respondentes, que as mais frequentes no G2 se referem à aprovação do método, seguidas de lembranças sobre aulas com boas explicações, ou boa didática e também sobre o fato de o método ser explicativo, claro, reflexivo ou incisivo. As lembranças menos frequentes se referiram ao fato de perceberem que o ensino foi proposto de modo prático.

Na subcategoria intermediária “*Influência do uso de recursos tecnológicos na aprendizagem”,* que representou 2,94% das unidades de registro, verificou-se, nas unidades de registro, que:

– Em 0,98%, os estudantes, após nove meses, se lembraram do uso de *slides*:

> São aspectos positivos o uso dos slides [...] (2.7.E12.1, 2017).
> [...] Lembro que [...] usava bastante slides também, que é um bom recurso, mas no sábado de manhã que é um dia que todo mundo está bem cansado, para mim, pelo menos, acaba desfocando minha atenção (2.7.E17.3, 2017).
> [...] e dos slides, que eram bem organizados, podíamos ver as explicações [...] (2.7.E23.3, 2017).

– Em 0,98%, os estudantes, após nove meses, se lembraram de ter acesso à um bom material impresso:

> [...] e material impresso eram bons [...] (2.7.E8.2, 2017).
> [...] apostila com bastante exercícios para aplicar o conhecimento passado [...] (2.7.E6.5, 2017).
> [...] tínhamos a apostila de Álgebra Linear com muitos exercícios e exemplos resolvidos para um melhor entendimento do conteúdo [...] (2.7.E15.4, 2017).

– Em 0,98%, os estudantes, após nove meses, lembraram do uso de recursos tecnológicos e afirmaram que isso facilitou a aprendizagem, conforme mostrado a seguir:

> [...] o ponto positivo foi o emprego e ensino de recursos tecnológicos, como o GeoGebra, o qual foi de grande valia para o aprendizado e uso posterior [...] (2.7.E9.2, 2017).
> [...] recursos tecnológicos auxiliares ao material escrito [...] (2.7.E6.4, 2017).
> [...] bem como os recursos tecnológicos [...]. (2.7.E10.2, 2017).
> [...] usos de softwares para melhor entendimento [...] (2.7.E21.3, 2017).

Na subcategoria intermediária “*Influência do uso de recursos tecnológicos na aprendizagem”,* verificou-se que 69% dos respondentes de G2 se manifestaram sobre elas, nove meses após o término da disciplina, destacando o uso de *slides*, o material impresso e, também, o uso de recursos tecnológicos como facilitadores da aprendizagem. Apenas um estudante se referiu ao uso do aplicativo GeoGebra, o qual foi usado para gerar os gráficos apresentados em *slides*. Essa lembrança talvez se deva ao fato de terem feito uso desse aplicativo em outras disciplinas que estavam ocorrendo paralelamente à disciplina de Álgebra Linear. Os demais estudantes não especificaram a quais recursos tecnológicos se referiram. Também foi possível perceber que, pelo fato de os estudantes do G2 de terem usado os recursos tecnológicos interativos em computadores em apenas uma tarefa, muitas percepções remetem apenas aos usos de recursos tecnológicos digitais não interativos (*slides*) e também ao uso dos recursos tecnológicos não digitais (material impresso disponibilizado).

Na subcategoria intermediária "*Lembrou que a abordagem possibilitou perceber associações da teoria com usos práticos*", que representou 0,73% das unidades de registro, verificou-se que os estudantes do G2 também se lembraram que a abordagem didática favoreceu a percepção de relações entre a teoria e os usos práticos, conforme mostrado a seguir:

> [...] me chamou muito a atenção o fato de poder perceber que a álgebra pode ser muito utilizada no dia a dia (2.7.E2.4, 2017).
> [...] a apresentação das aplicações do que aprendíamos [...] (2.7.E12.2, 2017).
> [...] O método utilizado pela professora foi o melhor para a ocasião, além de termos conceitos e matéria teórica aplicada [...] (2.7.E15.3, 2017).

Nessa subcategoria intermediária, verificou-se que 23% dos respondentes se lembraram (após nove meses) que o método de ensino propiciou contato com situações problema, o que facilitou perceber associações da teoria com seus usos práticos, o que foi considerado por eles um aspecto positivo da proposta.

Na subcategoria intermediária "*Após nove meses, percebeu que a disciplina foi importante em sua formação profissional*", que representou 0,24% das unidades de registro, um estudante afirmou: *"[...] Ademais, a disciplina foi de grande importância para nossa vida pessoal e profissional"* (2.7.E10.4, 2017). Nesse caso, verificou-se que apenas um estudante percebeu esse aspecto da proposta.

Na subcategoria intermediária "*Após nove meses, percebeu que a disciplina colaborou com sua formação pessoal*", que representou 0,24% das unidades de registro, um estudante afirmou: "*[...] Ao compreender estes, podem nos auxiliar em atividades do dia a dia, e os vemos presentes em tabelas, calendários, cálculo de finanças, entre outros"* (2.1.E10.6, 2017). Nessa subcategoria, também percebeu-se que apenas um estudante destacou esse fato.

Na subcategoria intermediária "*Lembrou de professora com amplos conhecimentos em relação ao conteúdo e aplicações*", que representou 0,24% das unidades de registro, um estudante afirmou: *"Aspectos positivos: professora com amplo conhecimento sobre o conteúdo e suas aplicações [...]"* (2.7.E6.3, 2017). Verificou-se, nessa subcategoria, que apenas um estudante destacou esse aspecto positivo, indicando que esse fato pode ter favorecido sua aprendizagem.

De modo geral, foi possível concluir, na subcategoria intermediária "*Aspectos positivos*", que as percepções mais frequentes dos estudantes do G2 estão relacionadas às lembranças positivas sobre o método de ensino, seguidas das lembranças relativas às influências do uso de recursos tecnológicos na aprendizagem e depois ao fato da abordagem propiciar associações da teoria com usos práticos. As lembranças menos frequentes se referiram ao fato de a disciplina ser importante na formação profissional; de colaborar com a formação pessoal e de contar com a participação de uma professora com amplos conhecimentos teóricos e práticos, referentes aos assuntos tratados.

Na subcategoria intermediária "*Aspectos negativos*", que representou 2,2% das unidades de registro, verificou-se que:

– Em 1,96%, os estudantes se lembraram que as provas eram muito extensas:

> [...] e consequentemente provas muito extensas, as vezes nem dando tempo de fazer toda ela (2.7.E8.4, 2017).
> [...] As provas, também, eram bastante extensas e precisaríamos de um pouco mais de tempo para resolvê-las (2.7.E12.5, 2017).
> [...] pontos negativos provas muito extensas (2.7.E13.2, 2017).

– Em 0,24%, um estudante se lembrou que a organização do conteúdo na apostila dificultou acompanhar as aulas, conforme mostrado a seguir: *"[...] Aspectos negativos: eu sugeriria organizar a apostila conforme o conteúdo passado durante o semestre, pois eu me perdia um pouco"* (2.7.E6.6, 2017).

Concluiu-se, na subcategoria intermediária "*Aspectos negativos*", que as lembranças mais frequentes sobre aspectos negativos, que representaram 62% dos respondentes, estavam relacionadas à percepção de provas muito extensas. Desse modo, constatou-se que os estudantes perceberam que o limite de tempo para a realização da avaliação foi um fator limitador de seus desempenhos. Ainda, nessa subcategoria intermediária, ressalta-se que um estudante se referiu ao fato de sentir dificuldades com organização da apostila. Isso ocorreu em razão de que o sequenciamento da apostila estava de acordo com a ordem estabelecida na ementa e pode ter dificultado o acompanhamento da disciplina por esse estudante.

Sobre a percepção de avaliações extensas, destaca-se que, durante o semestre, as aulas ocorreram em dois períodos, que correspondem a 100 minutos no diurmo e a 90 minutos no noturno, e foram realizadas três avaliações escritas, individuais. Da experiência docente, essas percepções são observadas em todos os semestres e, assim, já eram esperadas. Salienta-se que os estudantes de Álgebra Linear dessa IES são do segundo semestre do curso, ou seja, são praticamente ingressantes no curso superior, e ainda não estão acostumados com provas longas e com raciocínios mais exigentes. No entanto, cabe destacar que, pela percepção docente, as avaliações foram planejadas de acordo com o tempo disponível, para que os estudantes que estivessem preparados pudessem realizá-las no tempo disponibilizado.

Na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre aprendizagem*", que representou 2,2% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 0,99%, os estudantes se lembraram que a abordagem possibilitou ver aplicações, conforme os registros, a seguir:

> O uso de matrizes para resolver equações e os diversos métodos para achar resultado para o mesmo sistema linear e onde é possível aplicar eles (sistemas lineares) me chamou atenção [...] (2.7.E13.1, 2017).
> [...] Recordo que mais ao final do semestre vimos aplicações [...] (2.1.E15.11, 2017).
> [...] Interpolação Geométrica (2.1.E6.4, 2017).
> [...] criptografia (2.1.E17.4, 2017).

- Em 0,49%, um estudantes se lembrou de ter visto resolução de problemas, por meio de métodos diversos:

> [...] Resolução de problemas que envolviam equações algébricas, através de diversos métodos [...] Problemas que envolviam espaço bidimensional, tridimensional e n-dimensional (2.1.E9.2, 2017).

- Em 0,24%, um estudante percebeu que, de modo geral, houve um bom aprendizado:

> [...] acredito que não só eu mas a maioria dos alunos conseguiu aprender bem, [...] Tiveram conteúdos mais complicados, que acredito que deveriam ter sido mais explicados, que deveriam ter uma atenção especial, mas no geral foi um bom aprendizado, algo muito proveitoso [...] (2.7.E2.2, 2017).

- Em 0,24%, um estudante percebeu que a aprendizagem de Álgebra Linear possibilitou melhorar a compreensão de problemas e estimulou o raciocínio:

> [...] e necessário, tal matéria é essencial em nossa grade curricular, assim como cálculo e outras matérias, para aperfeiçoamento de resolução de exercícios e melhorar o raciocínio lógico diante à inúmeros problemas do cotidiano [...] (2.7.E15.2, 2017).

- Em 0,24%, um estudante afirmou que gostou da abordagem, mas sugeriu um maior uso de recursos tecnológicos, pois percebeu que eles ajudaram na compreensão: "*Eu gostei, mas poderia haver mais aulas com o uso de recursos tecnológicos pois eles ajudam na compreensão do conteúdo abordado"* (2.7.E20.1, 2017).

Concluiu-se, na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre aprendizagem*", que as lembranças mais frequentes se referiram ao fato de a abordagem ter propiciado ver aplicações, correspondendo a 31% dos respondentes. Também apareceram lembranças isoladas, nas quais os estudantes destacaram: a resolução de problemas; a percepção de que, de modo geral, houve um bom aprendizado na turma; a percepção de que a aprendizagem possibilitou melhorar a compreensão de problemas e estimulou o raciocínio; e, ainda, a percepção de um estudante que afirmou ter gostado da abordagem, mas sugeria que se fizesse maior uso de recursos tecnológicos em semestres posteriores. De modo geral, nota-se que são lembranças positivas sobre aspectos relacionados à experiência de aprendizagem vivenciada e que apenas um estudante sugeriu um maior uso de recursos tecnológicos digitais. Esperava-se que um número maior de participantes tivesse essa percepção após nove meses, mas isso não se verificou.

Na subcategoria intermediária "*Lembranças sobre dificuldades*", que representou 0,98% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 0,74%, os estudantes se lembraram que havia uma grande quantidade de conteúdos previstos para uma única matéria, conforme os registros a seguir:

> [...] considero apenas um semestre muito pouco tempo para aprender todos os conteúdos previstos para a disciplina [...] (2.7.E12.4, 2017).
> [...] acho que o que pode dificultar é a quantidade de conteúdo em pouco tempo, mas eu sei que é por causa da limitação do tempo [...] (2.7.E17.2, 2017).

- Em 0,24%, um estudante se lembrou de ter estudado e ter tido um desempenho médio, por causa de erros cometidos:

> [...] acredito que não só eu mas a maioria dos alunos conseguiu aprender bem, [...] Tiveram conteúdos mais complicados, que acredito que deveriam ter sido mais explicados, que deveriam ter uma atenção especial, mas no geral foi um bom aprendizado, algo muito proveitoso [...] (2.7.E2.2, 2017).

Nessa subcategoria intermediária, concluiu-se que as lembranças mais frequentes dos estudantes do G2 sobre percepções de dificuldades estão relacionadas à grande quantidade de conteúdos previstos e que também foi identificada uma lembrança isolada sobre o fato de o estudante se lembrar de ter se empenhado em seus estudos, mas que percebeu ter obtido um desempenho médio, por causa de erros cometidos.

Essas duas percepções sobre dificuldades identificadas são comuns entre os estudantes da disciplina de Álgebra Linear e corroboram com a percepção docente, da própria experiência vivenciada. De fato, verifica-se que há uma grande quantidade de conceitos abordados em pouco tempo e, apesar de muitos estudantes se dedicarem aos estudos, muitas vezes, os desempenhos obtidos por eles não condizem com suas expectativas, devido às dificuldades encontradas de compreensão ou de habilidade em cálculos algébricos, necessários na resolução dos problemas tratados.

6.3.2.3 Conclusões sobre identificação de conhecimentos finais

A análise possibilitou concluir que apesar de a maioria dos estudantes do G1 indicar que percebe que a disciplina permitiu compreender os conceitos investigados – matrizes, determinantes, sistemas lineares, vetores –, verificou-se que os percentuais de estudantes que conseguiram apresentar conceituações consideradas adequadas, ao final da disciplina, foram pequenos e que esses percentuais foram menores ainda após nove meses (ver Tabela 6). Destaca-se que existiram alguns estudantes que apresentaram conceitos próximos dos considerados corretos, mas poucos conseguiram se expressar em linguagem natural de modo satisfatório.

Em relação aos conceitos “transformações lineares” e “autovalores e autovetores”, verificou-se que poucos estudantes do G1 afirmaram que a disciplina possibilitou suas compreensões. Além disso, poucos foram capazes de conceituar “autovalores e autovetores” e nenhum estudante apresentou uma conceituação adequada para “transformações lineares”.

Notou-se que, no G1, houve um avanço em relação aos conhecimentos iniciais identificados, quando foram comparado aos conhecimentos finais, mas contatou-se um retrocesso após nove meses. Cabe ressaltar que, no questionário final, não foram feitas perguntas específicas sobre os conceitos citados, e, assim, não foi possível afirmar se realmente não se lembravam ou se optaram por não se referir a eles.

Tabela 6 – Comparativo sobre conhecimentos iniciais e construídos para G1

Conceitos	**Percebe que compreendeu (%)**	**Conceituou (%)**			**Exemplificou usos (%)**		
		Início	**Final**	**Após 9 meses**	**Início**	**Final**	**Após 9 meses**
Matrizes	97	11	40	14	20	80	57
Determinantes	100	6	37	7	17	83	24
Sistemas lineares	97	0	23	0	11	70	24
Vetores	77	0	13	0	42	33	19
Transformações lineares	17	0	0	0	6	80	5
Autovalores e autovetores	10	-	10	0	-	20	5

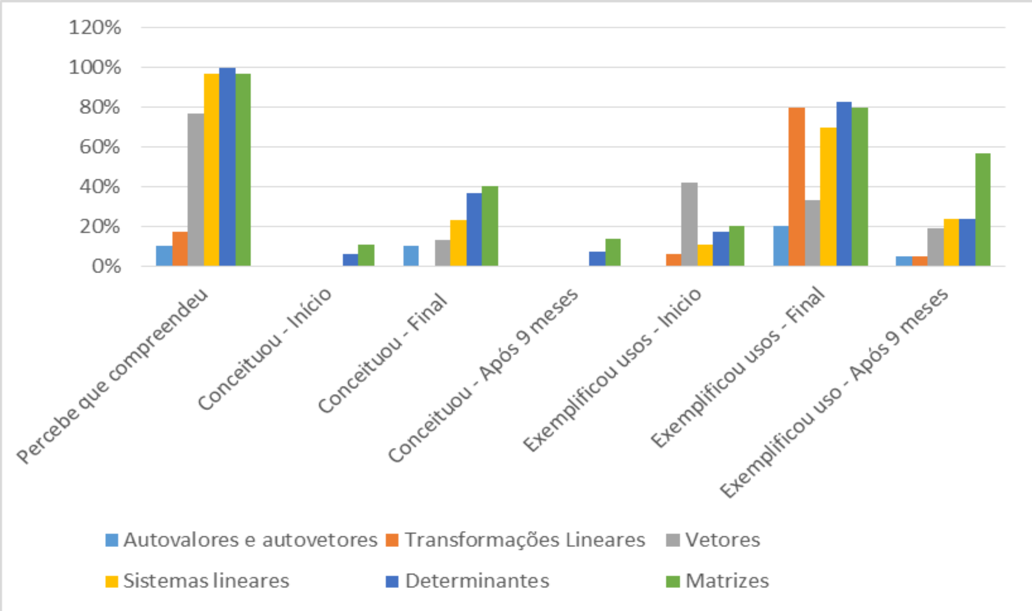
Fonte: Autora

No G1, também foi possível constatar que houve maior compreensão ou ampliação sobre usos dos conceitos investigados – matrizes, determinantes, sistemas lineares, vetores, transformações lineares e autovalores e autovetores –, tanto ao final da disciplina quanto após nove meses em relação ao seu término (ver Figura 43). Além disso, a análise indicou que os percentuais de percepção sobre os usos dos conceitos abordados identificados ao final da disciplina foram maiores do que aqueles identificados após nove meses.

Como os participantes eram estudantes do curso de Engenharia Civil, esses resultados não surpreendem, pois, pela experiência docente, verifica-se que eles sentem mais facilidade em compreender e expressar conceitos relacionados às aplicações do que aqueles relacionados aos aspectos teóricos envolvidos. Além disso, salienta-se que esse era um dos objetivos da presente proposta: despertar o interesse dos estudantes pela aprendizagem, fazendo com que percebessem diferentes usos das teorias abordadas na disciplina.

No G2, também foi possível constatar que, assim como no G1, apesar de a maioria dos estudantes indicar que perceberam que a disciplina possibilitou compreender os conceitos investigados – matrizes, determinantes, sistemas lineares, vetores –, identificou-se que os percentuais de estudantes que conseguiram apresentar conceituações consideradas adequadas ao final da disciplina foram pequenos para “matrizes” ou “determinantes” e nulos para “sistemas lineares” e “vetores”. E, após nove meses, os percentuais de conceituações apresentadas para “matrizes” e “sistemas lineares” aumentaram e diminuíram para “determinantes” e para “transformações lineares” (ver Tabela 7).

Figura 43 - Comparativo sobre conhecimentos iniciais e construídos para G1



Fonte: Autora

Também verificou-se que poucos estudantes do G2 indicaram que a disciplina possibilitou compreender “transformações lineares” e “autovalores e autovetores” e, ainda, ao final da disciplina, poucos foram capazes de conceituar “transformações lineares” e nenhum estudante conseguiu apresentar uma conceituação adequada para “autovalores e autovetores”. Além disso, após nove meses, nenhum estudante se referiu espontaneamente às conceituações sobre “transformações lineares” e “autovalores e autovetores”.

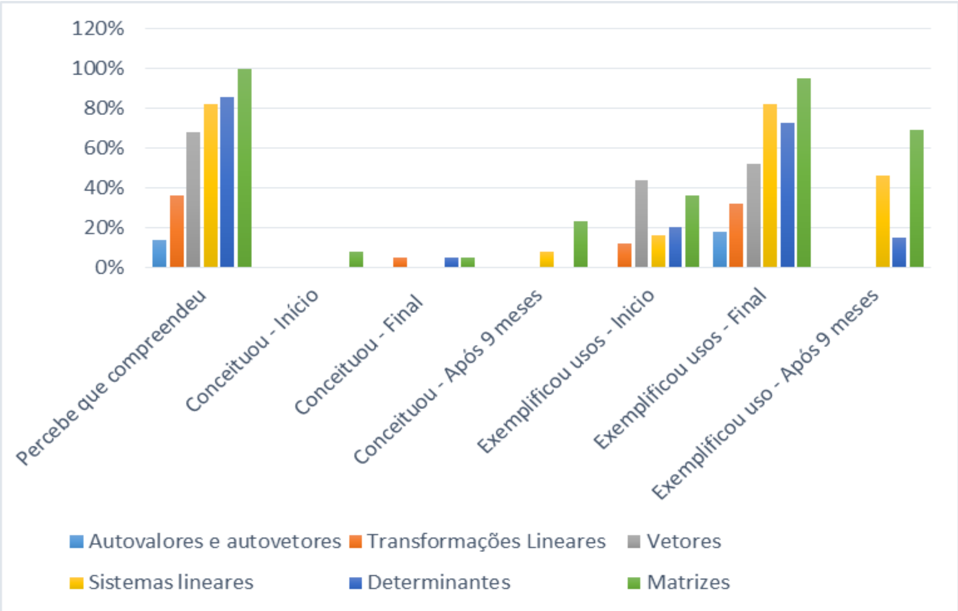
No G2, também foi possível constatar que houve compreensão ou ampliação sobre usos dos conceitos “matrizes”, “determinantes”, “sistemas lineares”, “vetores”, “transformações lineares” e “autovalores e autovetores”, tanto ao final da disciplina quanto após nove meses em relação ao seu término (ver Figura 44), e que os percentuais de percepção sobre os usos dos conceitos abordados identificados ao final da disciplina também foram maiores do que aqueles que foram identificados após nove meses.

Tabela 7 – Comparativo sobre conhecimentos iniciais e construídos para G2

Conceitos	Percebe que compreendeu (%)	Conceituou (%)			Exemplificou usos (%)		
		Início	Final	Após 9 meses	Início	Final	Após 9 meses
Matrizes	100	8	5	23	36	95	69
Determinantes	86	0	5	0	20	73	15
Sistemas lineares	82	0	0	8	16	82	46
Vetores	68	0	0	0	44	52	0
Transformações lineares	36	0	5	0	12	32	0
Autovalores e autovetores	14	-	0	0	-	18	0

Fonte: Autora

Figura 44 - Comparativo sobre conhecimentos iniciais e construídos para G2



Fonte: Autora

De modo geral, notou-se que, no G1, houve um percentual maior de identificação sobre conceituações adequadas em relação aos conceitos investigados, ocorridos ao final da disciplina, o que pode ser um indicativo de que houve maior compreensão no G1 do que no G2. Além disso, no G1, foram verificadas conceituações adequadas para a maioria dos conceitos tratados ao final da disciplina (apesar dos percentuais serem pequenos), o que não ocorreu no G2. Também se observou que, nos dois grupos, os estudantes indicam se lembrar mais dos usos dos conceitos, tanto ao final da disciplina quanto após transcorridos nove meses de sua conclusão.

6.4 Análise de percepções discentes sobre o uso de tecnologias digitais

Nesta seção, são apesentados resultados sobre percepções discentes relativas às experiências vivenciadas sobre o uso de tecnologias, em ambos os grupos. Esses resultados foram identificados por meio da aplicação de técnicas da análise de conteúdo, do tipo categorial, em dados coletados por meio de questionários, os quais foram respondidos pelos participantes da pesquisa em diferentes momentos da disciplina.

6.4.1 Percepções do Grupo G1

Inicialmente, são apresentados os resultados obtidos no G1, no qual foram considerados dados coletados por meio de:

- "*Questionário sobre uso de tecnologias digitais na II Avaliação (G1)*" (Anexo 4), com 16 respondentes, sendo, nesta seção, identificado por 1. Esse instrumento foi aplicado após realização da segunda avaliação, na qual os estudantes desse grupo puderam usar os *softwares* disponíveis, nos computadores, para resolver as questões propostas.
- "*Questionário - Uso de tecnologias*" (Anexo 6), com 29 respondentes; nesta seção identificado por 2, o qual foi aplicado no final da disciplina.
- Questões 4, 5 e 6 do "*Questionário Compreensão e Aprendizagem Significativa*" (Anexo 7), com 21 respondentes, nesta seção identificado por 3. Esse questionário foi aplicado nove meses após o término da disciplina.

No processo de unitarização, para identificar as unidades de registro, foi usada a seguinte codificação: número do questionário; número da questão, identificação do participante e número da unidade de sentido. No G1, foram identificadas 354 unidades de registro (ver Anexo 35).

A análise de conteúdo, do tipo categorial, possibilitou identificar, no G1, três categorias finais emergentes: "*Percepções sobre o uso de recursos tecnológicos*", que representou 52,26% das unidades de registros; "*Modos como o uso de recursos tecnológicos influenciou a aprendizagem ou a compreensão*", que representou 28,53% das unidades de registros e *"Lembranças sobre uso de recursos tecnológicos digitais",* que representou 19,21% das unidades de registros, as quais são apresentadas a seguir.

(i) “Percepções sobre o uso de recursos tecnológicos” – G1

Nesta categoria final (52,26% das unidades de registros), foram identificadas seis categorias intermediárias: “*Facilitou a aprendizagem*” (18,4%); “*Sentimentos e expectativas*” (17,22%); “*Dificuldades percebidas no processo*” (5,64%); “*Sobre sugestões*” (5,08%); “*Percepções sobre mudanças no ambiente de aprendizagem*” (4,8%) e “*Percepções sobre possibilidade de usos futuros ou em outras aplicações*” (1,12%).

Na categoria intermediária “*Facilitou a aprendizagem*” (18,4%), foram identificadas três subcategorias intermediárias: “*Facilitou a aprendizagem ou a compreensão na disciplina*” (8,52%); “*Facilitou a realização das tarefas*” (6,21%) e “*Possibilitou ampliar o conhecimento*” (3,67%).

Na subcategoria intermediária “*Facilitou a aprendizagem ou a compreensão na disciplina*”, verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 2,59%, os estudantes afirmaram que o uso de recursos tecnológicos ajudou na compreensão ou na aprendizagem dos conteúdos da disciplina, conforme mostrado a seguir:

> Sim, foi bastante útil e de grande ajuda para que pudesse compreender mais algumas coisas que víamos em sala de aula, por exemplo, transformações lineares e vetores, com a ajuda do GeoGebra em uma das atividades propostas pode deixar bem claro (2.1. A31.1, 2016).
> [...], pois elas ajudam a compreender um conteúdo que as vezes não ficou claro com apenas a teoria (2.2.A9.6, 2016).
> O uso do Excel, *MATLAB* e GeoGebra são programas que ajudam na aprendizagem [...] (2.1. A30.2, 2016).
> No início das aulas de álgebra eu não via muito sentido em usar ferramentas como *MATLAB*, GeoGebra e Excel para se resolver os problemas propostos, mas ao longo do semestre vi que eles podem ter uma grande contribuição para a fixação da aprendizagem. [...] Por isso, para mim a utilização de recursos tecnológicos, durante as aulas de álgebra, contribuiu com meu aprendizado (2.1. A32.1, 2016).

- Em 1,98% das unidades de registro, o estudantes afirmaram que o uso das tecnologias digitais facilitou o aprendizado na disciplina, conforme os exemplos:

> O uso de tecnologias sem dúvida facilita muito a aprendizagem da Álgebra Linear [...] (2.1.A4.1, 2016).
> O uso de tecnologias ajudou no aprendizado, principalmente o *MATLAB*. [...] O recurso deve ser usado, pois facilita, e muito, a compreensão das matérias (2.1. A11.1, 2016).
> [...], facilitando o aprendizado e a associação [...] extraindo o máximo de tudo que aprendemos durante as aulas (2.2.A10.3, 2016).

– Em 1,98%, os estudantes (após transcorridos nove meses do término da disciplina) afirmaram se lembrar que o uso dos recursos facilitou a compreensão na disciplina:

> Hoje em dia, os recursos tecnológicos estão presentes o tempo todo no nosso dia-a-dia, com isso, facilitam e nos auxiliam em questão de organização e facilidade! Com certeza podemos compreender conceitos da Álgebra Linear por meio dos mesmos [...] (3.6.A8.2, 2017).
> Facilitaram o entendimento [...] (3.6. A14.1, 2017).
> Facilitaram na compreensão dos métodos de cálculo [...] (3.6.A16.1, 2017).
> [...], assim a aprendizagem também, mas acredito que tenha influenciado mais para compreender como se resolve um problema, ou até uma simples matriz [...] (3.6.A26.2, 2017).

– Em 0,85%, os estudantes indicaram que lembraram (após nove meses) que os ajudou a compreender ou fixar o conteúdo:

> Sim auxilia, pois os conceitos em aula ficam mais fixados com os recursos tecnológicos [...] (3.6.A30.1, 2017).
> Na minha opinião ajudou para a fixação do conteúdo, pois até hoje lembro como faz pelas resoluções digitais. Por exemplo, como o exemplo acima, quando precisei na resolução de gráficos utilizei o GeoGebra (3.6.A35.1, 2017).

– Em 0,56%, indicaram que melhorou a aprendizagem ou desempenho na disciplina, conforme os exemplos:

> O uso de tecnologias melhorou a aprendizagem de Álgebra Linear [...] (2.1.A23.1, 2016).
> Sim, pois melhorou o desempenho das atividades propostas em aula após aprender os comandos certos a utilizar [...] (2.1.A1.1, 2016).

– Em 0,56%, afirmaram que se lembraram (após nove meses) que melhorou a compreensão:

> [...] bem como a compreensão da matéria e dos cálculos, proporcionando um melhor aprendizado e entendimento [...] (3.6.A10.2, 2017).
> [...] e, com isso, foi possível entender melhor o que os cálculos buscavam, [...] (3.6. A12.3, 2017).

Desse modo, na subcategoria intermediária "*Facilitou a aprendizagem ou a compreensão na disciplina*", verificou-se que os participantes do G1 indicaram que perceberam que o uso das tecnologias digitais facilitou a aprendizagem, pois ajudou na compreensão dos conceitos, o que, em alguns casos, contribuiu para melhorar seus entendimentos, ou seja, contribuiu com a construção do conhecimento na disciplina.

Essas percepções corroboram os resultados encontrados por Bettega (2004, p. 87) sobre os depoimentos de professores cursistas, que realizaram uma formação em Informática Educacional:

> Nesses depoimentos, percebemos que os professores cursistas se envolvem com o processos de ensino e aprendizagem e, [...], reconhecemos a Informática como ferramenta para novas estratégias de aprendizagem capaz de contribuir de forma significativa para o processo de construção do conhecimento nas diversas áreas.

Na subcategoria intermediária "*Facilitou a realização de tarefas*", que representou 6,71% das unidades de registro, verificou-se que em 3,67% das unidades de registro os estudantes indicaram que o uso de recursos tecnológicos <u>facilitou os processos desenvolvidos na disciplina</u>, conforme mostrado a seguir:

> No meu ponto de vista, o uso de tecnologia facilita, somos pessoas que estamos rodeados da tecnologia [...] (2.1. A8.1, 2016).
> O uso de tecnologias facilitou bastante o processo [...] (2.1. A28.1, 2016).
> [...], onde o uso das tecnologias pode nos ajudar nos processos e, hoje em dia, a tecnologia está presente em tudo praticamente. Acredito que nos ajudou muito [...] (2.2.A13.2, 2016).

Nesse caso, os estudantes perceberam que o uso de tecnologias digitais ajudou no processo e, em alguns casos, também justificaram, afirmando estar acostumados a elas, sugerindo que seus usos são familiares. Essas percepções estão em consonância com Porto (2006, 49), quando se refere à importância da inserção das tecnologias digitais no ambiente escolar, destacando a possibilidade de estímulo da participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem, o que favorece a construção e a apropriação do conhecimento cientifico. Segundo o autor:

> [...] se a escola quiser acompanhar a velocidade das transformações que as novas gerações estão vivendo, tem que se voltar para a leitura das linguagens tecnológicas, aproveitando a participação do aprendiz na (re)construção crítica da imagem-mensagem, sem perder de vista o envolvimento emocional proporcionado, a sensibilidade, intuição e desejos dos alunos [...]

Além disso, na subcategoria intermediária "*Facilitou a realização das tarefas*", também se verificou, em 2,54% das unidades de registro, que os estudantes se referiram ao fato do uso da tecnologia ter ajudado (facilitado) a realização da avaliação. Como exemplos:

> O uso dos computadores para realizar a prova foi de grande ajuda, [...] (1.1.A12.1, 2016).
> [...] servindo como uma ferramenta muito útil para auxiliar no desenvolvimento da prova (1.1.A12.5, 2016).

> Na minha opinião o uso do *MATLAB* e outros recursos durante a avaliação facilitou muito a realização da prova pelo fato de a prova ser grande e as matrizes também, com o *MATLAB* consegui terminar a prova, diferente da primeira que demorei mais para escalonar, etc. (1.1.A26.1, 2016).

Essa vantagem, percebida pelos estudantes, corrobora com os indicativos apresentados por Oliveira (2009, p.38):

> Em um meio colaborativo de aprendizagem e de interação com o computador [...] Dispõe-se de modo imediato e correto dos resultados das operações efetuadas e sem o “sacrifício” entediante da aplicação dos algoritmos apresentados na forma tradicional, mas com nova roupagem, mais suave, proveniente da rapidez dos cálculos e da facilidade em (re)fazer e investigar.

Conclui-se, na subcategoria intermediária “*Facilitou a realização das tarefas*”, que alguns estudantes do G1 perceberam que estratégia de possibilitar o uso de recursos em sala de aula favoreceu a aprendizagem de Álgebra Linear, pois permitiu tornar o ambiente de ensino mais familiar e também possibilitou suas participações ativas nas tarefas, o que facilitou suas realizações. Também foram identificadas vantagens percebidas em relação ao uso de recursos tecnológicos digitais na avaliação, pela praticidade e rapidez que possibilitam.

Já na subcategoria intermediária “*Possibilitou ampliar o conhecimento na disciplina*”, que representou 3,67% das unidades de registro, os estudantes afirmaram que o uso das tecnologias digitais possibilitou novos conhecimentos que foram além da teoria, conforme mostrado a seguir:

> Pode ampliar o conhecimento, pois foi mais uma forma de aprender [...] (2.1.A2.1, 2016).
> [...] possibilitando a descoberta do uso de programas que abrangem os conhecimentos (2.1.A7.1, 2016).
> [...] e trouxeram conhecimentos além da teoria [...] (2.1. A19.3, 2016).
> [...] Nunca havia estudado os softwares que usamos na disciplina, então tive um conhecimento a mais. Foi bom porque tivemos tempo de aprender a usá-los em sala de aula e em casa praticá-los (2.2.A18.2, 2016).
> [...], por ter um conhecimento além do que tínhamos em aula. Conheci o Excel em suas aulas e tenho certeza que será um programa muito utilizado até o final do curso [...] (2.2.A19.3, 2016).
> Sim, influenciou muito, pois descobrimos novas ferramentas que ajudam a solucionar problemas como o escalonamento [...] (2.1.A9.1, 2016).
> [...], pois englobou mais conteúdo e programas muito importantes, como o Excel e *MATLAB* [...] (2.1. A23.2, 2016).

De acordo com os registros, os estudantes indicam que o uso das tecnologias digitais também possibilitou descobrir novos recursos para solucionar problemas de Álgebra Linear, o que possibilitou ampliar seus conhecimentos. Desse modo, conclui-se, como indicativos na categoria intermediária “*O uso de recursos* *tecnológicos facilitou a aprendizagem*”, que os estudantes percebem que a abordagem facilitou a aprendizagem em Álgebra Linear, pois favoreceu a compreensão dos conteúdos, facilitou a realização das tarefas e possibilitou ampliar seus conhecimentos.

Na categoria intermediária “*Sentimentos e expectativas*”, que representou 17,22% das unidades de registro, foram identificadas cinco subcategorias intermediárias: “*Gostaram ou não do uso de recursos tecnológicos*” (10,73%); “*Expectativas do uso do computador na avaliação*” (2,82%); “*Sentiram interesse ou motivação para aprender*” (1,98%); “*Sentiram confiança/segurança*” (1,41%) e “*Sentiu dificuldades com a linguagem natural*” (0,28%).

Na subcategoria “*Gostaram ou não do uso de recursos tecnológicos*”, verificou-se que:

– Em 6,23%, os estudantes indicaram que gostaram das tarefas nas quais foram utilizadas tecnologias, conforme mostrado a seguir:

> Sim gostei das atividades utilizadas em todos os conteúdos [...] (2.2.A30.1, 2016).
> Gostei da atividade no GeoGebra na qual fizemos as transformações lineares, foi uma boa complementação ao conteúdo tradicional. [...] Também gostei da prova que fizemos no laboratório de informática, o uso de programas para fazer escalonamento de matrizes, a multiplicação de matrizes e outras operações [...] (2.2.A32.1, 2016).
> Eu gostei muito das atividades que foram desenvolvidas com o auxílio do computador, a da criptografia foi muito bom pena que foi no último dia de aula, a atividade de calcular o fluxo de agua também foi bem legal (2.2.A34.1, 2016).

– Em 1,69%, afirmaram que acharam muito bom ter usado computador na avaliação, conforme os seguintes exemplos: “*O uso de recursos tecnológicos durante a prova foi muito bom, [...]*” (1.1.A23.1, 2016) ou “*Foi bem positivo, pois o MATLAB ajuda muito fazendo operações básicas como escalonamento e multiplicação de matrizes [...]*” (1.1.A32.1, 2016).

– Em 1,41%, indicaram que as tarefas da disciplina foram boas; 0,56% indicou que as tarefa (aulas) da disciplina foram excelentes e 0,56% indicou que se sentiu feliz ou bem fazendo as tarefas na disciplina, conforme mostrado a seguir: “*Foram boas as aulas com tecnologia [...]*” (2.2.A11.1, 2016) ou *“[...] As aulas foram excelentes e bem desenvolvidas [...]*” (2.2.A19.4, 2016) ou “[...] me senti bem fazendo aquelas atividades [...]” (2.2. A25.2, 2016).

- Em 0,28%, apenas um estudante do G1 indicou não ter gostado das tarefas, nas quais foram utilizadas as tecnologias na disciplina, conforme o registro: "*Não, pois senti muita dificuldade e não consegui fazer alguns exercícios propostos*" (2.2.A1.1, 2016). Talvez essa percepção esteja associada ao fato de esse estudante ter faltado 19,44% do total de aulas (14 faltas de 72 períodos), o que pode ter prejudicado seu entendimento em relação aos usos dos recursos tecnológicos digitais propostos. Também se percebeu que, durante as aulas, ele praticamente não fazia perguntas para tentar esclarecer suas dúvidas. Assim, provavelmente, a descontinuidade da presença em aulas e o não esclarecimento de suas dúvidas pode ter gerado as dificuldades que ele encontrou no semestre.

Em relação à subcategoria intermediária "*Gostaram ou não do uso de recursos tecnológicos*", foi possível constatar que 90% dentre os respondentes do questionário 2 verbalizaram ter aprovado a proposta, o que é um indicativo de que a abordagem agradou a maioria dos estudantes. Também verificou-se que apenas 3% afirmou o contrário e que os demais não se manifestaram sobre isso.

Em relação à subcategoria "*Expectativas do uso do computador na avaliação*", que representou 2,82% das unidades de registros, verificou-se que:

- Em 2,54%, os estudantes afirmaram que o uso do computador na avaliação foi como o esperado. Como exemplos:

> [...] A facilidade de manuseio era como eu esperava, pois consegui me adequar melhor do que às questões que não usavam os programas de computador [...] (1.1.A22.6, 2016).
> [...] O resultado foi como esperei, foi muito mais simples fazer, por exemplo, escalonamentos completos ou parciais, matriz inversa, etc. (1.1.A23.4, 2016).

- Em 0,28%, apenas um estudante indicou que <u>esperava mais questões com uso de computadores</u>, conforme o registro: *"Esperava uma maior possibilidade de utilização na prova, por ser uma avaliação com a utilização dessas ferramentas, visto que de todas as questões apenas 3 ou 4 faziam-se necessárias e possíveis o uso dos programas [...]*" (1.1.A10.4, 2016).

Assim, na subcategoria intermediária "*Expectativas do uso do computador na avaliação*", verificou-se que os registros mais frequentes referem-se à aprovação de 56% dos respondentes quanto às expectativas relativas ao uso do computador na avaliação e que apenas um estudante (6% dos respondentes) indicou que esperava mais questões envolvendo uso de computadores. Os demais não se manifestaram especificamente sobre esse aspecto.

Na subcategoria intermediária "*Sentiram interesse ou motivação para aprender*", que representou 1,98% das unidades de registros, verificou-se que:

– Em 1,42%, os estudantes afirmaram que as tarefas da disciplina foram interessantes ou motivadoras, conforme os registros a seguir:

> Acredito que foi interessante ir além da sala de aula e da parte técnica, pois necessitamos aprender, acima de tudo, como aplicar. Além de aumentar o interesse na matéria, que já é cansativa por si (2.1.A21.1, 2016).
> [...] Creio ser muito interessante os métodos propostos e a maneira como fora m conduzidas as atividades e as aulas [...] (2.2.A31.4, 2016).
> [...] o local é bem atrativo, ainda mais quando foram no laboratório. Me sentia empolgado e bem motivado a aprender e em desafiei bastante para chegar ao ponto mínimo da aprendizagem e querendo sempre chegar ao máximo [...] (2.2.A28.2, 2016).

Nesse caso, em um dos registros, destaca-se que um estudante indicou que achou interessante, pois a proposta possibilitou ir além dos conceitos teóricos, se referindo à importância do conhecimento prático propiciado pelo uso dos recursos utilizados.

– Em 0,28%, os estudantes afirmaram que acharam interessante o fato da avaliação ser realizada com computador e 0,28% indicou que se lembrou (após nove meses) que achou interessante o uso de recursos tecnológicos, especialmente nas tarefas finais. Como exemplos: "[...] *achei bem interessante a prova poder ser feita com a ajuda do computador* [...]" (2.2.A35.3, 2016) e "*Os usos dos recursos tecnológicos foram bem interessantes principalmente na última parte de matéria [...]*" (3.6.A34.1, 2016).

O indicativo verificado nessa subcategoria, de que o uso de recursos tecnológicos possibilita despertar o interesse dos estudantes pela aprendizagem, corrobora resultados de várias pesquisas disponíveis na literatura, tais como Karrer (2006), Stormowski; Gravina e Lima (2013) e Kripka; Viali e Lahm (2014).

Nesse sentido, Sancho (2006, p. 19) destaca:

> [...] O computador, assim como o cinema, a televisão e os videogames, atrai de forma especial a atenção dos mais jovens que desenvolvem uma grande habilidade para capturar suas mensagens. De fato, estão descobrindo o mundo e lhes custa tanto aprender e realizar trabalhos manuais como a programar um vídeo ou um computador. Estão descobrindo as linguagens utilizadas em seus ambientes e lhes custa tanto ou mais decifrar e dominar a linguagem textual como a audiovisual. A grande diferença é que os

> resultados dessa última ação abrem um amplo mundo de possibilidades cada vez mais *interativas*, em que *constantemente acontece* algo e tudo vai mais depressa do que a estrutura atual que a escola pode assimilar.

A referida autora indica que o computador, por possibilitar inúmeras possibilidades de aprendizagem, por meios interativos, permite despertar a atenção dos estudantes, estimulando-os à aprendizagem.

Assim, na subcategoria intermediária "*Sentiram interesse ou motivação para aprender*", verificou-se que esses indicativos foram constatados nas percepções dos estudantes do G1, pois eles perceberam que as tarefas propostas, além de ir além do conhecimento teórico, também propiciaram suas participações ativas no uso interativo de recursos tecnológicos digitais na resolução dos problemas propostos, o que despertou seus interesses e os motivou à aprendizagem.

Na categoria intermediária "*Sentiram confiança/segurança*", verificou-se, em 1,41% das unidades de registro, que:

- Em 0,85% das unidades de registro, os estudantes indicaram que sentiram segurança na avaliação, pois o recurso possibilitava evitar erros de cálculos, conforme mostrado a seguir:

> [...] e, ainda, passando uma certa segurança de que não haverá erros na execução do mesmo [...] (1.1.A12.2, 2016).
> [...] Eu acho que mudou sim realizar a prova com o recurso tecnológico na questão de dar mais segurança na parte de resolver os métodos aprendidos na sala de aula que ali foram aplicados a um programa seguro [...] (1.1.A 18. 3, 2016).

- Em 0,28%, um estudante disse se sentir mais confiante na realização das tarefas da disciplina: "*Senti-me mais confiante na resolução dos cálculos após entender melhor como era feito [...]"* (2.2.A35.2, 2016).
- Em 0,28%, outro estudante afirmou que se sentiu melhor ao usar o computador na avaliação: "*[...] eu me senti melhor com a realização da prova com auxílio do computador [...]* (1.1.A18.1, 2016).

Assim, na subcategoria intermediária "*Sentiram confiança/segurança*", concluiu-se que os estudantes se referirem ao sentimento de segurança e associaram-no ao fato de que o uso adequado dos recursos pode evitar erros de cálculo, que são comuns no processo manual. Também apareceu a ideia de que o uso do recurso possibilitou confiança, pois perceberam a necessidade de compreensão de como o processo deveria ser feito.

Na subcategoria intermediária "*Sentiu dificuldades com a linguagem natural*", foi possível identificar, em 0,28% das unidades de registro, que um estudante expressou literalmente suas dificuldades com o uso da linguagem natural, conforme o fragmento do seu registro, apresentado a seguir: *"[...] Mas espero ter esclarecido da melhor forma, até porque, não é tão fácil colocar nossos pensamentos no papel"* (1.1.A19.6, 2016).

As dificuldades de expressão em linguagem natural que apareceram nessa pesquisa, tanto no reconhecimento de conhecimentos prévios quanto em conhecimentos construídos ou ampliados e que aparece de modo explícito nesse fragmento de registro, corrobora com resultados de diversas pesquisas que envolveram aprendizagem em matemática.

Como exemplos, destacam-se os indicativos apresentados pelas autoras Bicudo e Chamie (1994), as quais afirmam que as dificuldades da aprendizagem em matemática estão relacionadas à necessidade de construção de idealidades matemáticas e das suas expressões, que envolvem o uso de uma linguagem artificial própria.

Já no contexto do ensino e aprendizagem específicos de Álgebra Linear, aparecem, no mapeamento de Dorier (1998), as pesquisas de Joel Hillel e Anna Sierpinska, que relacionam as dificuldades no ensino e aprendizagem de Álgebra Linear ao uso de diferentes linguagens, denominadas por eles como linguagem da teoria geral (conceitual), abstrata, a linguagem algébrica e a linguagem geométrica. Além disso, aparecem os resultados das investigações de Dias (1993), que concluiu que os estudantes dominam bem a técnica, mas que não têm clareza quanto aos conceitos trabalhados, ao constatar que os estudantes tinham dificuldades em interpretações de enunciados. Também aparecem os resultados de Coimbra (2008), que indica os "o*bstáculos verbais*" como um dos aspectos problemáticos do processo de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear.

A identificação da subcategoria intermediária "*Sentiu dificuldades com a linguagem natural*" possibilitou constatar que essa dificuldade está presente nos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra Linear e que pôde ser percebida, na presente pesquisa, tanto indiretamente, estando relacionada às dificuldades de expressões de conceitos ou de seus usos, quanto identificada explicitamente no registro do estudante A19.

Na categoria intermediária chamada *“Dificuldades percebidas no processo”*, que representou 5,64% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: “*Dificuldades no uso de tecnologias digitais”* (2,82%) e *“Dificuldades na avaliação”* (2,82%).

Na subcategoria intermediária “*Dificuldades no uso de tecnologias digitais”,* verificou-se, nas unidades de registro, que em 2,54% das respostas, os estudantes se referiram às dificuldades encontradas no uso de tecnologias na disciplina, conforme apresentado nos exemplos a seguir:

> [...] Porém, para mim dificulta um pouco por causa das muitas informações dadas ao mesmo tempo, já que tenho problema de atenção [...] (2.1.A4.2, 2016).
> [...] Me atrapalhei um pouco durante as atividades, pois algumas achei confusas [...] (2.2.A21.3).
> [...], porém percebei que algumas atividades eram um pouco extensas para o tempo, onde se fizesse com mais calma se poderia aprender mais [...] (2.2.A2.2, 2016).
> [...], porém muito exaustivas e trabalhosas, com o tempo dado a elas sendo muito pouco. [...] sendo o único problema o limite de tempo dado à elas (2.2.A4.2, 2016).

Nesses fragmentos de registros, nota-se que alguns estudantes se referem a dificuldades de compreensão das tarefas e outros se referiram às dificuldades atribuídas ao limite de tempo para realização das tarefas.

Em relação ao tempo, salienta-se que essa dificuldade também foi percebida pela professora, durante as atividades desenvolvidas nos laboratórios computacionais.

Em geral, as tarefas eram propostas para serem realizadas em dois períodos da aula, que contabilizavam 90 ou 100 minutos, ou seja, ao alunos dispunham de aproximadamente uma hora e meia para realização de cada tarefa. No G1, como os estudantes trabalhavam, geralmente, em computadores individuais, as vezes não era possível atender a todas as dúvidas que surgiam simultaneamente.

Além disso, a professora também percebeu que os diferentes ritmos de aprendizagem que havia entre os estudantes também contribuiu para que houvesse dificuldades na conclusão das tarefas. Nesse sentido, concorda-se com Zabala (2008, 104) quando indica que é preciso incluir,

> [...] em primeiro lugar, atividades suficientes que permitam realizar as ações que comportam estes conteúdos tantas vezes for necessário e, em segundo lugar, formas organizativas que facilitem as ajudas adequadas às necessidades específicas de cada um dos alunos”, tendo em vista que, cada aluno tem seu ritmo de aprendizagem.

Considerando especialmente a dificuldade relativa ao tempo disponível para a realização das tarefas, apresentada pelos estudantes e que também foi percebida pela professora da disciplina, foi possível concluir que, de fato, algumas tarefas foram extensas para o tempo disponível em sala de aula e que precisariam ser revistas.

Ainda na subcategoria intermediária "*Dificuldades no uso de tecnologias digitais",* verificou-se que, transcorridos nove meses do término da disciplina, em 0,28% das unidades de registro, um estudante se referiu à sua lembrança sobre dificuldades que sentiu no início da disciplina, assim: "*No início, foi um pouco mais difícil a compreensão [...]"* (3.6.A2.1, 2017).

Essa dificuldade inicial no uso de tecnologias digitais no ensino é comum e se deve, basicamente, a dois aspectos. O primeiro está relacionado ao fato de muitos estarem acostumados com uso de tecnologias digitais, mas não com a finalidade de aprendizagem. O outro aspecto está relacionado a não familiaridade da maioria com as tecnologias digitais utilizadas. Assim, verificou-se que, inicialmente, há necessidade de um tempo destinado somente para a familiarização dos estudantes com o recurso, para que possam fazer uso adequado deles.

Assim, na subcategoria intermediária "*Dificuldades no uso de tecnologias digitais",* foi possível concluir que alguns estudantes, ao final da disciplina, identificaram que as suas dificuldades estavam relacionadas à compreensão das tarefas ou ao tempo disponibilizado para suas realizações. Também verificou-se que, após nove meses, um estudante afirmou se lembrar que sentiu dificuldades no início da proposta, por falta de familiaridade com os recursos.

Na subcategoria intermediária *"Dificuldades na avaliação"*, que representou 2,82% das unidades de registro, verificou-se que os estudantes: em 1,14%, sentiram dificuldades na avaliação, pois precisaram escrever o raciocínio utilizado no papel; em 0,56%, disseram ter problema de tempo para resolução das questões; em 0,56%, disseram ter problema de lembrança em relação aos comandos específicos do software utilizado; em 0,28%, um estudante indicou que seu desempenho não foi bom na avaliação, realizada com os computadores, por falta de estudos; e, em 0,28%, um estudante sentiu dificuldades pois não teve revisão de comandos antes da avaliação. O exemplos apresentados a seguir ilustram essas percepções:

> [...] porém foi perdido um pouco do tempo, pois tínhamos que fazer o cálculo no computador e também escrever no papel. Mas fora isso achei muito produtiva a utilização da tecnologia (1.1.A9.3, 2016).
> [...], porém a mesma se apresentou muito extensa, tal como a primeira. Mesmo com o auxílio dos recursos tecnológicos, a relação entre tempo e solução dos problemas não possibilitou o término da prova com tranquilidade (1.1.A7.2, 2016).
> [...] Eu não esperava uma questão que pedisse um escalonamento parcial. Por isso não lembrei como fazia o escalonamento por etapas usando o *MATLAB* [...] (1.1.A32.4, 2016).
> [...] e por mais que eu não tenho ido bem na prova, foi falta de estudar mais mesmo [...] (1.1.A31.2 2016).
> [...] Acho que se tivesse uma revisão de todas as operações usando o *MATLAB* antes da prova, ele teria sido um pouco mais útil (1.1.A32.5, 2016).

Assim, na subcategoria intermediária *"Dificuldades na avaliação"*, verificou-se, com exceção da situação em que o aluno afirmou sentir dificuldades por não ter estudado o suficiente, que as dificuldades remetem às mesmas que foram percebidas em relação ao uso de tecnologias, ou seja: a falta de tempo para o término da tarefa e a dificuldade de familiarização com a ferramenta.

Na categoria intermediária chamada *"Sobre sugestões"*, que representou 5,08% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: "*Sugestões dos estudantes sobre uso de tecnologias digitais"* (3,67%) e *"Não propuseram sugestões"* (1,41%).

Na subcategoria intermediária "*Sugestões dos estudantes sobre uso de tecnologias digitais",* verificou-se, nas unidades de registro, que: em 1,43%, os estudantes se referiram ao aumento de tempo para realização das tarefas na disciplina; em 0,56%, indicaram que deveria ter mais questões com uso de computadores em avaliações; e, em 0,56%, afirmaram que as avaliações deveriam ser menores:

> Minha sugestão de melhoria é a oportunidade de um período de tempo maior para as mesmas e, principalmente, para as avaliações, Como o tempo de aula, infelizmente é curto, isso é possível diminuindo o número de questões, mesclando melhor com o tempo hábil (2.2.A7.3, 2016).
> [...] Sugestão: as provas com uso de computadores deveriam ter mais questões que possa ser utilizado o computador (2.2.A8.3, 2016).
> [...] Minha sugestão é que as provas sejam menores para poder ser conferida (2.2.A19.5, 2016).
> [...] Menos extensas poderiam ser, pois depois de muito tempo fazendo a mesma atividade o interesse diminui [...] (2.2.A21.4, 2016).

Nessa subcategoria intermediária, verificou-se que também apareceu a questão do tempo disponibilizado para realização das tarefas e, além disso, observou-se a sugestão de realização de tarefas menos extensas, no caso, a avaliação.

Quanto à sugestão de aumento de questões com uso de computadores, é importante esclarecer que, das oito questões apresentadas, apenas duas não poderiam ser realizadas com o auxílio do computador. Nesse caso, verificou-se que talvez o estudante não tenha percebido que ele poderia ter usado os recursos tecnológicos digitais disponíveis na resolução da maioria das questões apresentadas.

Ainda, na subcategoria intermediária "*Sugestões dos estudantes sobre uso de tecnologias digitais",* foi possível perceber que apareceram outras sugestões isoladas*,* sendo que, das unidades de registro: em 0,28%, um estudante indicou que a disciplina deveria continuar com uso de tecnologias; em 0,28%, outro estudante sugeriu que, durante a disciplina, fossem realizados seminários para maior integração da turma; em 0,28%, outro estudante afirmou que, na disciplina, deveriam ser utilizados outros programas mais específicos da área nas tarefas; e, em 0,3%, um estudante sugeriu abordar o último conteúdo visto de modo mais prático (no caso o conceito de autovalores e autovetores), conforme apresentado nos exemplos a seguir:

> [...] e acho que a disciplina deve continuar com o uso dessas tecnologias (2.2.A13.3, 2016).
> [...] Sugiro integrar mais a turma durante essas atividades, interagindo e realizando seminários entre os alunos (2.2.A17.3, 2016).
> [...] Seria interessante achar outros programas de computador que aprofundem o conhecimento na área do curso, posto que trabalhos já feitos ajudam bastante no conhecimento tecnológico (2.2.A22.3, 2016).
> [...] Acredito que o ultimo conteúdo poderia ser abordado mais coisas práticas, pois foi difícil de entender (2.2.A35.4, 2016).

Na subcategoria intermediária *"Não propuseram sugestões"*, verificou-se que, em 1,41% das unidades de registro, os estudantes afirmaram não ter sugestões, sendo que alguns embasaram suas justificativas na afirmação de que gostaram da proposta e que achavam as aulas boas:

> [...] não teria nenhuma sugestão para melhorá-las (2.2.A30.2, 2016).
> [...] Não, pois elas são boas (2.2. A25.3, 2016).
> [...] Creio que as aulas devem continuar dessa forma, não tenho sugestões para melhorar, pois gostei dessa forma (2.2.A26.4, 2016).

Desse modo, no G1, na categoria intermediária chamada *"Sobre sugestões"*, foi possível verificar que as sugestões mais frequentes estão relacionadas ao aumento do uso das tecnologias ou sobre aperfeiçoamentos em relação à proposta.

Também foi possível notar que alguns estudantes afirmaram que não tinham sugestões por compreenderem que gostaram da abordagem proposta.

Na categoria intermediária chamada *“Percepções sobre mudanças no ambiente de aprendizagem”*, que representou 4,8 % das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: “*Perceberam que o uso de tecnologias favoreceu o ambiente de aprendizagem”* (4,24%) e *“Perceberam que o uso dos recursos tecnológicos aproxima a realidade da sala de aula”* (0,56%), conforme apresentado a seguir.

Na subcategoria “*Perceberam que o uso de tecnologias favoreceu o ambiente de aprendizagem”,* verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 1,16%, os estudantes indicaram que foi uma experiência diferente/nova: *“[...] foram diferentes [...]”* (2.2.A14.2, 2016) ou *“[...] foi uma experiência nova”* (1.1.A2.5, 2016).
- Em 0,56%, destacaram que o uso possibilitou aulas mais descontraídas e dinâmicas: *“[...] Tornaram as aulas mais descontraídas, por ser uma matéria bastante aplicada e com muito conteúdo”* (2.1. A10.4, 2016) e *“[...] as aulas dinâmicas”* (2.1. A28.3, 2016).
- Em 0,56%, se lembraram (após nove meses) que o uso possibilitou aulas mais práticas, como mostrado a seguir: *“[...] e proporcionaram aulas mais práticas para os alunos”* (3.6.A16.2, 2017) ou *“[..] de maneira mais prática os conceitos da Álgebra [...]”* (3.6. A17.2, 2017).
- Em 0,56%, se lembraram (após nove meses) que as aulas não ocorriam apenas em sala de aula tradicional, conforme o exemplo: *“Tivemos algumas aula nos laboratórios de informática [...]”* (3.4.A10.1, 2017).
- Em 0,28%, um estudante afirmou que possibilitou um clima novo para aula, sem torná-la cansativa; em 0,28%, um estudante se lembrou que o uso melhorou o ambiente das aulas; em 0,28%, um estudante afirmou que a proposta da disciplina foi didática; em 0,28%, um estudante se lembrou que o uso foi positivo; e em 0,28% um estudante se lembrou que achou o uso foi importante no estudo de vetores, conforme mostrado a seguir:

> [...] como deu um clima novo para aula, sem tornar a aula cansativa de só teoria, essa é minha opinião [...] (2.2.A26.3, 2016).
> Influenciaram de modo que o ambiente das aulas se tornou melhor [...] (3.6.A26.1, 2017).
> Gostei, foi uma atividade bem didática [...] (2.2.A35.1, 2016).

> O uso da tecnologia foi muito positivo [...] (3.6. A12.1, 2017).
> [...] principalmente na parte de vetores foi bem importante (3.6.A34.2, 2017).

Na subcategoria intermediária "*Perceberam que o uso de tecnologias favoreceu o ambiente de aprendizagem", evidenciou-se* que os estudantes indicam que perceberam mudanças positivas, que valorizaram o ambiente e criaram condições favoráveis à aprendizagem, tais como tornaram o ambiente mais descontraído, com aulas mais dinâmicas e mais práticas. E ainda, alguns perceberam que melhorou o ambiente das aulas e que o uso foi positivo e importante apenas em algumas tarefas.

Na subcategoria intermediária *"Perceberam que o uso dos recursos tecnológicos aproxima a realidade da sala de aula"*, que representou 0,56% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 0,28%, um estudante <u>indicou que percebeu o uso do computador na avaliação como um recurso mais apropriado à época</u>, conforme o exemplo: *"[...] posto que são recursos mais apropriados à época [...]"* (1.1.A22.2, 2016).
- Em 0,28%, um estudante indicou que, na disciplina, <u>o uso dos recursos tecnológicos possibilitou unir as realidades: mundo tecnológico e sala de aula</u>, conforme mostrado a seguir: *"[...], pois uniu a realidade dos alunos (mundo tecnológico) às aulas [...]"* (2.1. A20.2, 2016).

Esses indicativos corroboram com Kenski (2012, p.46), quando indica:

> Não há dúvidas que as novas tecnologias de comunicação e informação trouxeram mudanças consideráveis e positivas para a educação. Vídeos, programas educativos na televisão e no computador, *sites* educacionais, *softwares* diferenciados transformam a realidade da aula tradicional, dinamizam o espaço de ensino-aprendizagem, onde, anteriormente, predominava a lousa, o giz, o livro e a voz do professor. Para que as TICs possam trazer alterações no processo educativo, no entanto, elas precisam ser compreendidas e incorporadas pedagogicamente. Isso significa que é preciso respeitar as especificidades do ensino e da própria tecnologia para poder garantir que o seu uso, realmente, faça diferença [...]

Assim, de acordo com a autora, o uso adequado dos diversos recursos tecnológicos disponíveis traz mudanças positivas, que favorecem o processo educativo.

Concluiu-se, em relação à categoria intermediária *"Percepções sobre mudanças no ambiente de aprendizagem"*, que os estudantes do G1 perceberam que houve melhorias no ambiente de aprendizagem propiciados pelos usos de recursos tecnológicos digitais e, ainda, que essa abordagem possibilitou aproximar as realidades dos estudantes e da sala de aula.

Na categoria intermediária *“Percepções sobre possibilidade de usos futuros ou em outras aplicações”*, que representou 1,12% das unidades de registro consideradas, verificou-se, que:

- Em 0,56%, os estudantes se lembraram (após nove meses) que os *softwares* podem ser usados em outras aplicações matemáticas, como o exemplo: *“[...] Lembrando que os mesmos podem ser utilizados em outras aplicações matemáticas*” (3.4.A9.4, 2017).
- Em 0,28%, um estudante percebeu que o uso de computadores durante a disciplina capacitou os estudantes para usos futuros, conforme mostrado a seguir: *“[...] e tornam os alunos mais capacitados para o uso em oportunidades seguintes, [...]”* (1.1.A22.3, 2016).
- Em 0,28%, um estudante se lembrou (após nove meses) que foi possível conhecer programas que poderão auxiliá-lo em sua vida profissional: *“[...] e com esses recursos você aprende a mexer em programas que vão auxiliar na vida profissional*” (3.6.A30.2, 2017).

Assim, conclui-se que a proposta não somente facilitou a aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear, mas também propiciou uma compreensão do uso dos recursos tecnológicos digitais mais abrangente. Se verificou, nos registros de alguns estudantes, que eles perceberam que o uso desses aplicativos, ou de outros similares, além de poderem ser utilizados em outras situações praticas semelhantes, também serão imprescindíveis em suas vidas profissionais, em suas atuações como futuros engenheiros civis. Desse modo, percebe-se que a proposta colaborou com o processo de formação integral dos estudantes.

(ii) “Modos como o uso de recursos tecnológicos influenciou a aprendizagem ou a compreensão” - G1

Nessa categoria final, foram identificadas duas categorias intermediárias no G1: “*Percepções sobre vantagens no uso de recursos tecnológicos*”, que representou 26,27% das unidades de registro, e “*Uso dos recursos na disciplina mudou o modo de pensar*”, que representou 2,26% das unidades de registro.

Na categoria intermediária "*Percepções sobre vantagens no uso de recursos tecnológicos*", foram identificadas cinco subcategorias intermediárias: "*O uso das tecnologias digitais facilitou os cálculos*" (8,19%); "*Uso das tecnologias digitais otimizou o tempo"* (7,63%), "*Possibilitaram aproximar conhecimentos teóricos e práticos*" (4,24%); "*Uso de tecnologias digitais favoreceu a visualização dos conceitos*" (3,95%) e "*Uso de tecnologias digitais evitou erros de cálculos*" (2,26%).

Na presente tese, foi considerada a palavra *visualização dos conceitos* como a possibilidade de percepção visual das registros matemáticos construídos pelos estudantes, nas tarefas realizadas,

Na subcategoria intermediária "*O uso das tecnologias digitais facilitou os cálculos*", que representou 8,19% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 3,39%, os estudantes afirmaram que o uso de recursos tecnológicos facilitaram os cálculos nas tarefas da disciplina, conforme mostrado a seguir:

> [...] facilitando algum "problema" na Álgebra Linear, como calcular matriz inversa, determinantes, etc [...] (2.1. A13.2, 2016).
> Sim, facilitou pois com o uso de programas computacionais o cálculo de certas questões por meio de determinados métodos usando o computador torna-se mais eficaz (2.1. A14.1, 2016).
> [...] O *MATLAB* fácilita demasiadamente o processo de escalonamento e pode-se o método Gaussiano e o método de Gauss-Jordan (2.1. A22.3, 2016).
> [...] pois facilitaram a resolução de problemas [...] (2.2.A7.2, 2016).

- Em 2,26%, indicaram que o uso do computador facilitou os cálculos na avaliação:

> O uso dos computadores facilitou a resolução de alguns exercícios da avaliação [...] (1.1.A7.1, 2016).
> [...] Utilizamos nosso conhecimento para resolver o problema com o auxílio do computador, do mesmo modo que resolveríamos sem ele, o computador apenas simplificou a parte dos cálculos [...] (1.1. A23.3, 2016).
> O uso tecnológico facilita bastante na parte relacionada aos cálculos da prova, ainda mais quando não dão resultados inteiros, gerando inúmeras frações [...] (1.1.A28.1, 2016).

- Em 1,98%, os estudantes se lembraram (após nove meses) que os recursos tecnológicos facilitavam as resoluções de problemas ou os cálculos, conforme os exemplos a seguir:

> Foram de suma importância, pois facilitavam o cálculo do determinante de matrizes de ordens superiores, entre outros (3.6.A4.1, 2016).
> [...] Em matrizes de grande porte, 100 x 100 por exemplo, levaríamos dias para resolver, mas com os recursos que possuímos, não! (3.6.A8.3, 2016).
> Os recursos digitais permitiam que pudéssemos resolver problemas [...] Por exemplo, quando resolvíamos problemas de sistemas lineares, era preciso

> fazer escalonamento das matrizes que eram geradas, quando usávamos programas auxiliares, a resolução fica mais simples [...] (3.6.A32.1, 2016).

- Em 0,56%, os estudantes se lembraram (após nove meses) que o uso de tecnologias digitais facilitou a resolução de problemas práticos: *“[...] e resolver melhor os problemas práticos do dia a dia como cálculo de áreas, vibrações, entre outros*” (3.6.A19.2, 2017).

A percepção desse indicativo sobre a facilidade dos cálculos, propiciadas pelo usos de *softwares*, corrobora os indicativos apresentados por Fioreze (2010); Morgado (2003) e Oliveira (2009), conforme foram destacados na seção 6.2.7.2.

Conclui-se, na subcategoria intermediária “*O uso das tecnologias digitais facilitou os cálculos*”, que os estudantes perceberam que as tecnologias digitais utilizadas, por possibilitarem a execução dos cálculos automaticamente, facilitaram as resoluções de problemas propostos e também destacaram essa vantagem na realização da avaliação com uso de computadores.

Na subcategoria intermediária “*Uso das tecnologias digitais otimizou o tempo*”, que representou 7,63% das unidades de registro, constatou-se que:

- Em 3,11%, os estudantes indicaram que o uso dos recursos tecnológicos digitais reduziram o tempo dos cálculos e tornaram mais práticas as tarefas da disciplina; conforme mostrado a seguir:

> [...] deixando esse processo mais rápido e prático para os alunos (2.1.A13.3, 2016).
> [...] sem falar na otimização do tempo que essas tecnologias nos ajudam (2.1. A8.1, 2016).
> [...] mas também se mostrou eficaz e eficiente, calculando de forma mais rápida (2.1.A16.2, 2016).
> [...] A compreensão por meio de recursos tecnológicos fazem com que ganhamos tempo, pois é um meio mais rápido de se resolver questões (2.1.A18.3, 2016).
> [...] o *MATLAB* que ajudou a resolver mais rapidamente o escalonamento ou uma matriz inversa [...] (2.2.A9.3, 2016).

- Em 3,11%, os estudantes indicaram que o uso das tecnologias digitais otimizou o tempo na avaliação, conforme os exemplos a seguir:

> Na minha opinião, o uso do computador nos trouxe vantagens. [...] consegui realizar as atividades propostas na avaliação otimizando tempo para poder responder outras questões. Conseguimos resolver problemas de uma forma mais rápida pelo uso da tecnologia [...] (1.1.A8.1, 2016).
> [...], pois resolver certas questões a mão me levava a perder muito tempo, não por eu não saber, mas por que se deveria ter um cuidado a mais. [...] O conteúdo em si deveríamos saber da mesma forma, o computador não resolveria para nós, então ele apenas serviu como um auxilio, somando para se ganhar tempo na avaliação que realizamos. [...] (1.1.A 18. 2, 2016).

> Sim, facilitou pois economizamos tempo [...] Ex: na prova eu consegui realizar todas as questões de forma eficaz, ao contrário da primeira que demorei mais para escalonar, etc. (2.1. A26.1, 2016).
> [..] Principalmente na prova II, onde pode ajudar muito a poupar tempo para a resolução de toda a prova, podendo fazer o escalonamento no computador [...] (2.2.A31.2, 2016).

– Em 1,41%, os estudantes indicaram que se lembraram (após nove meses) que o uso de recursos tecnológicos reduzia o tempo dos cálculos e tornava mais práticas as tarefas da disciplina:

> [...] Como por exemplo, na sala de aula, levávamos a aula toda para aplicar um escalonamento, em um recurso tecnológico, simplesmente digitávamos os valores e a matriz já estava pronta, em questão de segundos [...] (3.6.A8.2, 2017).
> [...], e na agilidade de resolução delas também, visto que se podem ter cálculos gigantescos que os programas nos facilitam e muito (3.6.A28.3, 2017).
> [...] de uma forma mais rápida [...], pois não perdíamos tempo fazendo um escalonamento, que é um processo longo [...] (3.6.A32.2, 2016).

Destaca-se que os cálculos algébricos, nessa disciplina, geralmente são trabalhosos e repetitivos e, segundo esses estudantes, o uso de aplicativos facilitou o processo, tornando os processos mais rápidos e práticos.

A percepção desses estudantes corrobora com a dos autores Mariani e Martim (2003, p. 2), que, trabalhando com o uso do *MATLAB* no ensino de disciplinas básicas de engenharia, afirmam: "Com o uso deste aplicativo, pode-se evitar o desperdício de tempo com tarefas manuais exaustivas, fazendo com que o aluno se prenda mais ao entendimento físico dos problemas".

Na subcategoria intermediária "*Uso das tecnologias digitais otimizou o tempo*", verificou-se que os estudantes perceberam essa vantagem tanto no final da disciplina quanto após transcorridos nove meses de sua conclusão. Além disso, também destacaram que, por otimizar o tempo na resolução dos problemas, tal uso tornou as atividades mais rápidas e práticas.

Na subcategoria intermediária "*Possibilitaram aproximar conhecimentos teóricos e práticos*", que representou 4,24 % das unidades de registro, verificou-se que, em 2,83%, os estudantes indicaram que o uso dos recursos digitais possibilitaram perceber a aplicação do conteúdo ou conhecimento prático na disciplina, conforme os exemplos a seguir:

> O uso ajuda muito para o conhecimento prático. O uso do GeoGebra por exemplo nos fez compreender melhor a aplicação de álgebra em vetores (2.1. A29.1, 2016).

> O uso do Excel, *MATLAB* e GeoGebra são programas que ajudam na aprendizagem de maneira prática (2.1. A30.2, 2016).
> Eu acho que as tecnologias servem como um bom complemento para a aprendizagem, pois depois de uma aula tradicional no quadro, é bacana ver que existem aplicações práticas reais para o que se está estudando em sala de aula. Os conteúdos não ficam sem ter um sentido de porque estamos os estudando [...] (2.1. A32.2, 2016).
> [...] pois me senti como se estivesse tratando de problemas reais e a tecnologia torna a manipulação dos problemas mais palpável. (2.2.A12.2, 2016).
> [...] o uso de computador exemplifica o conhecimento que tivemos em aula. [...] (2.2.A14.3, 2016).

Notou-se que os estudantes percebem que o uso dos recursos aliados à resolução de problemas propiciou a aplicação da teoria em situações práticas, exemplificando-a. Segundo eles, a estratégia facilitou a aprendizagem, pois possibilitou dar sentido à teoria apresentada em aula. Também constatou-se que eles perceberam de que modo poderão fazer uso desses recursos em suas vidas profissionais, o que é algo essencial para um futuro engenheiro.

No ensino superior, especialmente em relação ao conhecimento básico da área de matemática, geralmente nota-se que há um distanciamento entre aspectos teóricos e práticos do conhecimento, que dificulta a aprendizagem. Os estudantes não conseguem perceber sentidos e usos práticos nos conceitos fundamentais estudados. Sobre isso, Cunha (1998, p.83) discorre que:

> [...] uma das principais queixas dos estudantes refere-se ao fato de que os cursos, não preparam para a realidade dos problemas que irão enfrentar depois de formados. [...] O conhecimento que é produzido na universidade nem sempre acompanha esses dinamismo. Ao contrário, não raras vezes é tratado como dogma e de forma descontextualizada. O resultado é o distanciamento da teoria, que é produzida na academia, da realidade em que é aplicada.

Nesse sentido, destaca-se a importância da proposição de tarefas como as apresentadas na presente tese, tendo em vista propiciarem ambientes de aprendizagem que favoreçam e que facilitem as aprendizagens significativas dos estudantes.

Também se verificou que, após nove meses, em 0,85% das unidades de registro, alguns estudantes se lembraram que o uso das tecnologias digitais possibilitou exemplificar a teoria na prática, conforme mostrado a seguir: *“[...], pois com eles foi possível exemplificar a teoria”* (3.6.A14.2, 2017) ou, ainda, *“Foi possível ver os cálculos realizados em aula sendo aplicadas na prática”* (3.6.A29.1, 2017).

Em 0,28%, um estudante afirmou que a utilização de tecnologias digitais permitiu, durante a disciplina, comprovar conhecimentos teóricos na prática, conforme o exemplo: *“[...] Ter amparo de uma tecnologia significa comprovar conceitos teóricos na prática [...]”* (2.1. A18.2, 2016).

E, também, em 0,28%, outro estudante afirmou que as tarefas favoreceram o esclarecimento de dúvidas, conforme mostrado a seguir: *“[...] E as atividades propostas com o uso do computador, foram de grande esclarecimento de algumas dúvidas e facilitação para resolução das mesmas [...]”* (2.2.A31.3, 2016).

Os indicativos da subcategoria intermediária “*Possibilitaram aproximar conhecimentos teóricos e práticos*” corroboram com a lição de Richit et al. (2013, p. 515), que indicam que o uso das tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de Álgebra Linear favorece a ampliação de conceitos e a aproximação entre aspectos teóricos e práticos. Conforme os autores:

> [...] a introdução das tecnologias digitais aos processos de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear traz contribuições no sentido de ampliar compreensões mais abstratas partindo de situações mais concretas, pautadas no aspecto visual e experimental possibilitado por softwares.

Os resultados dessa categoria também corroboram com os achados de Oliveira, Moura e Souza (2015, p. 82), que, em relação ao uso de TIC na aprendizagem dos estudantes, destacam:

> Sabemos que, a aprendizagem intermediada pelo o computador gera profundas transformações no processo de produção do conhecimento, se antes as únicas vias eram de sala de aula, o professor e os livros didáticos, hoje é concedido ao aluno navegar por diferentes espaços de informação, que também nos viabiliza enviar, receber e armazenar informações virtualmente.
> Portanto, o computador e os demais aparatos tecnológicos são vistos como bens necessários e saber operá-los constitui-se em condição de empregabilidade, conhecimento e domínio da cultura.

Conclui-se, pelos indicativos da subcategoria intermediária “*Possibilitaram aproximar conhecimentos teóricos e práticos*”, que, para esses estudantes, a abordagem propiciou a aprendizagem significativa. Nas tarefas realizadas no laboratório computacional, foi necessário que os estudantes resgatassem seus conceitos subsunçores teóricos para ampliá-los por meio dos conhecimentos práticos, propiciados pelo uso dos recursos tecnológicos. Ao buscarem compreender as relações entre teoria e resolução por meio de comandos, foi necessário ampliar a rede de conhecimento para que pudessem aprender de que modo deveriam inserir códigos, em linguagem computacional, de modo a conseguirem realizar os cálculos corretamente.

Na subcategoria intermediária "*Uso de tecnologias digitais favoreceu a visualização dos conceitos*", que representou 3,95% das unidades de registro, se constatou que, em 2,54%, os estudantes indicaram que o uso dos recursos tecnológicos favoreceu a percepção visual de conceitos teóricos na disciplina, conforme os exemplos a seguir:

> [...] que demostram visualmente os cálculos [...] (2.1. A10.3, 2016).
> Acredito que sim, saindo da sala de aula e vendo que a matemática pode ser resolvida de outra forma a não ser a habitual acredito que influenciou para a compreensão do conteúdo. Como por exemplo, a resolução de transformações lineares utilizando o GeoGebra onde deu para entender bem como as transformações aconteciam (2.1. A. 35.1, 2016).
> [...], pois nos permitiu entender visualmente as situações encontradas nos cálculos [...] (2.2.A10.2, 2016).

Também percebeu-se que, em 1,41% das unidades de registro, os estudantes, após nove meses, afirmaram se lembrar que o uso dos recursos digitais ajudavam na visualização, conforme mostrado a seguir: *"Influenciaram no sentido de visualizar [...]"* (3.6.A9.1, 2017), ou, ainda, *"[...] Permite que os alunos vejam gráficos e operações de outro mod. [...]"* (3.6.A10.3, 2017).

Essa percepção dos estudantes do G1 corrobora com diversas pesquisas que remetem à vantagem da visualização gráfica para compreensão matemática, possibilitada pela exploração de recursos tecnológicos digitais.

Borba e Villarreal (2005), ao proporem que a produção do conhecimento ocorre no coletivo pensante seres-humanos-com-mídia, também destacam a vantagem da visualização propiciada pelo uso dos computadores, em um contexto no qual a exploração dos recursos tecnológicos digitais permite novas dimensões, como por exemplo a animação que possibilita a visualização de problemas de modo dinâmico, com as quais o estudante pode, muitas vezes, interagir, facilitando a interpretação do fenômeno investigado. Os autores também indicam que a abordagem gráfica de problemas se constitui numa alternativa interessante à abordagem estritamente algébrica.

Allevato (2010, p.113), ao propor o estudo de funções explorando animações computacionais, também destaca a visualização como um facilitador da aprendizagem:

> A possibilidade de manipular expressões algébricas e, deste modo, gerar uma grande variedade de gráficos dinâmicos, pode ser explorada em prol da aprendizagem de conteúdos e conceitos matemáticos. Gráficos produzidos por animações ficam muito presentes nas mentes dos estudantes, mesmo quando os computadores são desligados.

No contexto do ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, Richit et al. (2013, p. 519), ao investigarem sobre possibilidades de uso do GeoGebra para abordagem de conceitos, também destacam a vantagem da visualização de usos dos conceitos em situações práticas:

> [...] ao utilizarmos recursos das tecnologias digitais no âmbito educacional, o foco dos processos de ensino e aprendizagem não está somente nos procedimentos utilizados para solucionar determinado problema, mas, também, na aprendizagem visto que a utilização dos recursos das tecnologias digitais pode conduzir os estudantes a modos diferentes de pensar e produzir conhecimentos. Esses conhecimentos podem ser favoráveis à compreensão destes e envolvem aspectos como a visualização, a simulação, o aprofundamento do pensamento matemático, conjecturas e validações por parte dos alunos, entre outros.

Andrade (2010, p. 32), ao investigar sobre processos de ensino e de aprendizagem da Álgebra Linear, sugere a exploração da visualização gráfica de conceitos, por meio da exploração de registros geométricos, como uma das contribuições do uso de softwares em processos de ensino e de aprendizagem:

> O uso de abordagens com registros geométricos para a aprendizagem de objetos matemáticos como os de Álgebra Linear são sugeridos por permitir a visualização diferentes características dos objetos não perceptíveis em outros tipos de registros como os de natureza algébrica.

Na subcategoria intermediária "*Uso de tecnologias digitais favoreceu a visualização dos conceitos*", concluiu-se que, ao serem explorados diferentes recursos tecnológicos digitais no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear, entre eles o GeoGebra, a planilha e o *MATLAB*, foi possível aos estudantes perceberem que essa abordagem propiciou ambientes de aprendizagem que favoreceram a visualização de conceitos e a compreensão matemática. Além disso, destaca-se que os usos dos diferentes recursos tecnológicos digitais interativos possibilitou e favoreceu o trânsito entre diferentes registros de representação, o que permitiu tanto a visualização dos objetos matemáticos tratados quanto a observação e a exploração de diferentes características, o que favoreceu e estimulou a compreensão dos conceitos trabalhados. Esse indicativo corrobora com a percepção de Allevato (2010, p. 124), quando indica:

> A exploração das possibilidades de representação algébrica, numérica e gráfica (representações múltiplas) que o computador oferece, a coordenação dessas representações e a compreensão das relações que as vinculam permitem ao aluno conectar conhecimentos que, de outra forma, permaneceriam separados; porém, se conectados, geram compreensões matemáticas mais amplas e completas.

Na subcategoria intermediária "*Uso de tecnologias digitais evitou erros de cálculos*", que representou 2,26% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 0,85%, os estudantes indicaram que o uso do computador possibilitou evitar erros de cálculos na avaliação, como no exemplo: *"[...] pois permitiu com que, pudéssemos conferir se estava correto por exemplo, o escalonamento no MATLAB"* (1.1.A9.2, 2016).
- Em 0,85%, os estudantes afirmaram, após transcorridos nove meses, que se lembraram que o uso de tecnologias digitais possibilitava perceber erros durante a disciplina, como nos exemplos: *"[...] nos mostrando onde estávamos errando antes"* (3.6.A26.3, 2017), ou, ainda, *"[...] e com uma probabilidade 0 de erro, caso os programas fossem utilizados de forma correta [...], e que tem grande possibilidade de se cometer algum erro de matemática básica por desatenção"* (3.6.A32.3, 2017).
- Em 0,28%, um estudante afirmou que possibilitava evitar erros de cálculos nas tarefas desenvolvidas na disciplina. Como exemplo: *"[...] e evita que possamos cometer erros básicos de multiplicação ou sinais [...]"* (2.2.A32.4, 2016).
- Em 0,28%, após nove meses, outro estudante também indicou que se lembrava que possibilitava evitar erros de cálculos: *"[...] e ainda diminuindo a chance de ocorrência de erros nos mesmos"* (3.6. A12.5, 2017).

As percepções dos estudantes confirmam o que Valente (1993b) já indicava como uma vantagem, ao tratar dos diferentes usos do computador na educação. Segundo o autor, a utilização do computador, por necessitar do uso de procedimentos precisos, que combinam linguagens de programação e conhecimentos matemáticos, possibilita evitar erros ou, ainda, identificá-los, por meio de processos de depuração:

> [...] O computador adiciona uma nova dimensão — o fato do aprendiz ter que expressar a resolução do problema segundo uma linguagem de programação. Isto possibilita uma série de vantagens. Primeiro, as linguagens de computação são precisas e não ambíguas. Neste sentido, podem ser vistas como uma linguagem matemática. Portanto, quando o

> aluno representa a resolução do problema segundo um programa de computador ele tem uma descrição formal, precisa, desta resolução. Segundo, este programa pode ser verificado através da sua execução. Com isto o aluno pode verificar suas idéias e conceitos. Se existe algo errado o aluno pode analisar o programa e identificar a origem do erro. Tanto a representação da solução do problema como a sua depuração são muito difíceis de serem conseguidas através dos meios tradicionais de ensino (VALENTE, 1993b, p. 9).

Desse modo, foi possível constatar, na subcategoria intermediária "*Uso de tecnologias digitais evitou erros de cálculos*", que os estudantes também perceberam como uma vantagem a precisão dos cálculos no uso de tecnologias digitais, pois foi possível evitar erros de matemática básica. Além disso, tal prática possibilitou a identificação de erros teóricos cometidos, pela observação de resultados. Nesse caso, também perceberam a necessidade de repensar os conceitos e modos empregados de resolução, tendo em vista a compreensão e a correção dos equívocos cometidos.

Na categoria intermediária "*Uso dos recursos na disciplina mudou o modo de pensar*", que representou 2,26% das unidades de registro dos estudantes do G1, foram identificadas três subcategorias intermediárias: "*Favoreceu a compreensão*" (1,14%); "*Possibilitou mais tempo para interpretação e desenvolvimento de raciocínios lógicos"* (0,84%) e "*Propiciou liberdade para pensar"* (0,28%).

Na subcategoria intermediária "*Favoreceu a compreensão*", verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 0,58%, os estudantes indicaram que o uso dos recursos tecnológicos digitais na avaliação exigiu conhecimentos teóricos e práticos, conforme os exemplos:

> [...] Mudou a forma com que se faz as questões. Utilizando códigos, por exemplo, em um programa do computador, o que se diferencia do cálculo feito à mão, que necessita escrever o seu desenvolvimento inteiro para continuar [...] (1.1.A22.5, 2016).
> [...] pois possibilitou que resolvêssemos um exercício, a partir do entendimento de como resolvê-lo, sem a necessidade de fazer a parte mecânica dos cálculos. [...] Ainda que o uso dos meios tecnológicos para fazer a prova, só seriam eficientes se tivéssemos um bom entendimento da matéria [...] (1.1.A23.2, 2016).

- Em 0,28%, um estudante afirmou (após nove meses) que se lembrava que era preciso conhecer os métodos para resolver os problemas com uso de recursos tecnológicos, conforme o registro:

> [...] Foi visto que há sempre um padrão de cálculo para resolvermos as questões, e podem ser até mesmo programados por um software, que realiza aquilo que foi desejado, simplesmente utilizando o método que possui uma determinada sequência (3.6. A22.4, 2017).

- Em 0,28%, um estudante indicou que o uso dos recursos tecnológicos digitais melhorou a aprendizagem, conforme mostrado, a seguir:

> [...] já na multiplicação de matriz eu também achei que melhorou o a aprendizado, eu tinha que fazer uma conta e eu não sabia como fazer, mas depois da aula de multiplicação de matriz usando o *Excel* eu consegui fazer o cálculo que eu precisava fazer (2.1. A34.2, 2016).

Nesses registros, verifica-se que os estudantes perceberam que, para fazer uso dos recursos tecnológicos digitais de modo adequado, foi necessário o entendimento dos métodos para que pudessem resolver os problemas com eficiência, ou seja, foi necessário transitar entre diferentes registros semióticos com competência. Desse modo, concluiu-se na subcategoria intermediária "*Favoreceu a compreensão"* que o uso dos recursos tecnológicos influencia a aprendizagem, pois exige que os estudantes tenham competência para transitar entre diferentes registros semióticos, tendo em vista a resolução de problemas propostos nas tarefas, o que certamente favoreceu a compreensão matemática dos conceitos abordados.

Já na subcategoria intermediária "*Possibilitou mais tempo para interpretação e desenvolvimento de raciocínios lógicos",* que representou 0,84% das unidades de registro, foi possível constatar que:

- Em 0,28%, um estudante indicou que o que o uso dos recursos tecnológicos digitais possibilitou mais tempo para desenvolver o conhecimento prático e raciocínio lógico, conforme mostrado a seguir:

> [...] A parte tecnológica utilizada elimina a necessidade de cálculo básico e concentra o tempo e o desenvolvimento para a parte prática e lógica. Concentramos mais o raciocínio no desenvolvimento do problema e não em seus cálculos (2.1. A23.3, 2016).

- Em 0,28%, um estudante indicou que o uso do computador possibilitou mais tempo para interpretação na avaliação: *"[...] Por isso, tornou-se possível utilizar mais tempo na interpretação dos problemas [...]"* (1.1.A12.3, 2016).
- Em 0,28%, um estudante indicou que se lembrou (após nove meses) que eles tinham mais tempo para raciocinar e se aprofundar nos conceitos, conforme o

exemplo a seguir: *"[...] e possamos nos aprofundar mais rápido naquilo que envolve a área [...]"* (3.6. A22.3, 2017).

Os estudantes percebem que o uso dos recursos tecnológicos digitais possibilita o cálculos básicos de modo automático e, desse modo, eles conseguem mais tempo para se concentrar nas interpretações dos problemas e no desenvolvimento dos raciocínios lógicos necessários para as resoluções.

Os indicativos da subcategoria intermediária "*Possibilitou mais tempo para interpretação e desenvolvimento de raciocínios lógicos*" corroboram com os apontamentos de Oliveira et al. (2009, p. 883):

> Os computadores podem auxiliar os processos de ensino e aprendizagem da Matemática, pois são importantes ferramentas para disseminar barreiras de aprendizagem. Permite que os objetos abstratos, após construções mentais, sejam manipulados, analisados, simulados, experimentados, confrontados, tornando-os concretos através do monitor de vídeo no computador e exteriorizados pelo aluno, expressando suas ideias e desenvolvendo o raciocínio lógico e formal enriquecendo assim, o desenvolvimento cognitivo da experiência e assimilação.

Concluiu-se, na subcategoria intermediária "*Possibilitou mais tempo para interpretação e desenvolvimento de raciocínios lógicos*", que os estudantes perceberam que os usos dos recursos tecnológicos influenciaram a aprendizagem, pois o rápido processamento de dados possibilitou que tivessem mais tempo disponível para reflexões, o que favoreceu a interpretação, o aprofundamento dos conceitos e a compreensão dos problemas tratados.

Na subcategoria intermediária "*Propiciou liberdade para pensar,*" que representou 0,28% das unidades de registro, um estudante afirmou que, durante a disciplina, percebeu que sentiu maior liberdade para pensar com o uso dos recursos tecnológicos digitais: *"[...], me senti mais livre para pensar [...]"* (2.2.A17.1, 2016).

Nesse caso, notou-se que esse indicativo está em consonância com o constructo teórico "seres-humanos-com-mídias", proposto por Borba e Villarreal (2005), verificando-se que o estudante se sente mais livre e confiante para pensar o problema junto com as mídias utilizadas, entendendo essa abordagem como natural e favorável à sua aprendizagem.

Também corrobora com indicativos apresentados por Galvão Filho (2002, p. 10, **grifo do autor**) quando aborda sobre o uso as novas tecnologias na escola e no mundo atual: "[...] Verificamos que as **novas tecnologias de informação e**

comunicação, as **TIC**, podem ser aliadas poderosas na construção de ambientes de aprendizagem ricos, que favoreçam o pensamento livre e autônomo do aluno”.

Conclui-se, na subcategoria intermediária “*Propiciou liberdade para pensar*”, que os estudantes, ao trabalharem com recursos tecnológicos, se sentem mais livres para raciocinar, pois essa percepção evoca as diversas possibilidades de abordagem de problemas, pois eles podem testar, fazer simulações e pensar diferentes modos de resolução, daqueles inicialmente propostos pelo professor.

(iii) “Lembranças sobre uso de recursos tecnológicos digitais” – G1

Nessa categoria final, foram identificadas cinco categorias intermediárias no G1: “*Lembranças sobre usos do GeoGebra*”, que representou 7,06% das unidades de registro; “*Lembrança sobre usos da planilha*”, que representou 6,78% das unidades de registro; “*Lembranças sobre usos do MATLAB (ou SciLab)*”, que representou 4,24% das unidades de registro; “*Não se lembram de usos posteriores dos recursos tecnológicos digitais vistos na disciplina*”, que representou 0,85% das unidades de registro; e “*Lembrou da finalidade mas não do nome do recurso*”, que representou 0,28% das unidades de registro.

Na categoria intermediária “*Lembranças sobre usos do GeoGebra*”, foram identificadas três subcategorias intermediárias: “*Lembrou do GeoGebra e finalidades na disciplina*” (3,96%); “*Lembrou do GeoGebra”* (1,69%) e “*Lembrança do uso do GeoGebra após o término da disciplina, na vida pessoal ou profissional*” (1,41%).

Na subcategoria *“Lembrou do GeoGebra e finalidades na disciplina”,* verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 3,39%, os estudantes, após nove meses, se lembraram que o *GeoGebra* possibilitava a resolução gráfica de problemas construção de gráficos durante a disciplina, conforme apresentado nos exemplos a seguir:

> GeoGebra, utilizado para a resolução gráfica de gráficos, curvas, pontos (3.4.A2.1, 2017).
> [...] O GeoGebra foi utilizado para a visualização das equações de forma gráfica [...] (3.4. A12.1, 2017).
> Usamos [...] GeoGebra. Eles permitiam a resolução de problemas de uma forma rápida e que não permitia a possibilidade de erros de matemática básica, além de possibilitarem a resolução de problemas reais, que muitas vezes, serão extensos, e sua resolução sem o auxílio de ferramentas seria inviável (3.4. A32.1, 2017).
> [...] Programa GeoGebra: Criação de gráficos utilizando valores e equações, [...] (3.4.A22.2, 2017).

- Em 0,28%, um estudante, após nove meses, se lembrou da possibilidade de visualização de transformações lineares com uso do GeoGebra, ocorrido na disciplina, conforme o registro:

> [...] O GeoGebra foi utilizado para a visualização das equações de forma gráfica e, mais para frente, para a visualização das transformações lineares com o uso de vetores, como a rotação, cisalhamento e expansão/contração (3.4. A12.1, 2017).

- Em 0,28%, outro estudante se lembrou do uso do GeoGebra na representação de vetores: *"[...] Programa GeoGebra: Criação de gráficos utilizando valores e equações, além de haver a possibilidade de colocar vetores"* (3.4.A22.2, 2017).

Na subcategoria intermediária "*Lembrou do GeoGebra*", que representou 1,69% das unidades de registro, os estudantes indicaram que se lembraram, após nove meses, de ter usado o GeoGebra, mas não se referiram às suas finalidades, conforme o exemplo: "*Foi usado o GeoGebra*" (3.4.A29.1, 2017).

Na subcategoria intermediária "*Lembraram do uso do GeoGebra após o término da disciplina, na vida pessoal, acadêmica ou profissional"*, que representou 1,41% das unidades de registro, se constatou que:

- Em 0,86%, os estudantes afirmaram ter usado esse aplicativo em outras matérias na construção ou visualização de gráficos: "*Utilizei, muitas vezes, o GeoGebra para a visualização do gráfico formado por funções*" (3.5.A12.1, 2017) ou "*Utilizei o GeoGebra para matérias que precisavam da resolução de gráficos*" (3.5.A35, 2017).
- Em 0,28%, um estudante indicou usar esse aplicativo na resolução de equações, além da construção de gráficos: "*[...] e GeoGebra, para resolução de várias expressões matemáticas e para fazer gráficos*" (3.5.A4.2, 2017).
- Em 0,28%, um estudante afirmou usar esse aplicativo na resolução de equações, além da construção de gráficos: "*[...] e GeoGebra, para resolução de várias expressões matemáticas e para fazer gráficos*" (3.5.A4.2, 2017).
- Em 0,28%, um estudante afirmou ter usado o GeoGebra para esclarecer suas dúvidas em outra disciplina: "*O GeoGebra o qual aprendi a usar nesta disciplina eu uso para tirar dúvidas e também foi útil para mim na matéria de Geometria Analítica*" (3.5.A29.1, 2017).

Em relação à categoria intermediária “*Lembranças sobre usos da planilha*”, que representou 6,78% das unidades de registro, foram identificadas três subcategorias intermediárias: “*Lembram de usos da planilha após o término da disciplina, na vida pessoal, acadêmica ou profissional*” (3,39%); “*Lembraram do uso da planilha na disciplina e finalidades”* (2,54%) e “*Lembrou da planilha”* (0,85%).

Na subcategoria intermediária “*Lembram de usos da planilha após o término da disciplina, na vida pessoal, acadêmica ou profissional*”, verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 1,69%, os estudantes afirmaram que, após o término da disciplina, usaram a planilha para organização e tratamento de dados em outras disciplinas ou em usos pessoais, conforme mostrado a seguir:

> Utilizamos bastante o Excel, uma ferramenta que facilita em muito cálculos, tabelas, e organização de dados. Utilizamos na disciplina de topografia para a obtenção de uma tabela de coordenadas, a fim de locar uma poligonal demarcada dentro da universidade. Também está presenta na pesquisa cientifica em que sou voluntario onde calculamos a quantidade de matéria para a produção dos corpos de provas através do Excel (3.5.A10.1, 2017).
> Excel, para fazer planilhas de contabilidade (3.5.A17.1, 2017).
> Atualmente estou trabalhando com orçamentos em esquadrias de alumínio, e o Excel é uma excelente ferramenta para cálculos de materiais utilizados, e também para controle de finanças com as tabelas e fórmulas (3.5.A23.1, 2017).
> Excel foi utilizado para o trabalho de topografia, na pratica pessoal ajudou a construir tabelas (3.5.A30.1, 2017).

- Em 0,85%, os estudantes indicaram que, após o término da disciplina, usaram a planilha em outras disciplinas com finalidades diversas, conforme mostrado a seguir:

> Até o momento somente na faculdade, resolução de matrizes pelos métodos de Gauss, Pivotação pelo Excel (3.5.A2.1, 2017).
> Excel [...], para resolução de várias expressões matemáticas e para fazer gráficos (3.5.A4.1, 2017).
> Uso o Excel, em algumas matérias, para construção de gráficos de funções (3.5.A32.1, 2017).

- Em 0,85% das unidades de registro, os estudantes apenas citaram que se lembram de ter usado a planilha em outros contextos, mas não citaram com que finalidade, conforme os exemplos a seguir: “*Excel, em algumas disciplinas como cálculo numérico e topografia*” (3.5.A16.1, 2017) ou “*Excel*” (3.5.A19.1, 2017).

Na subcategoria intermediária “*Lembraram do uso da planilha na disciplina e finalidades”*, que representou 2,54% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 1,13%, os estudantes se referem ao uso da planilha na resolução ou construção de matrizes, conforme os exemplos: "*[...]; Excel: Construção de matrizes; [...]*" (3.4.A19.3, 2017) ou "*Excel – fazia as operações com as matrizes. [...]*" (3.4.A30.1, 2017).
- Em 0,85% dos registros, os estudantes se lembram de ter usado a planilha na disciplina para cálculos de expressões matemáticas ou apenas para cálculos, conforme os exemplos: "*Excel [...], para resolução de várias expressões matemáticas [...]*" (3.4. A4.1, 2017) ou "*[...] e o Excel (para fins de cálculos), porém não me recordo as finalidades da aplicação destes*" (3.4.A10.3, 2017).
- Em 0,56%, os estudantes afirmaram se lembrar do seu <u>uso na resolução de problemas ou exercícios</u>, conforme mostrado a seguir:

> A finalidade específica não lembro, mas me recordo que usamos ferramentas digitais para desdobramentos de exercícios, tais como: o próprio Excel, e mais programa que não recordo (3.4.A36.1)
> Usamos Excel, [...] Eles permitiam a resolução de problemas de uma forma rápida e que não permitia a possibilidade de erros de matemática básica, além de possibilitarem a resolução de problemas reais, que muitas vezes, serão extensos, e sua resolução sem o auxílio de ferramentas seria inviável (3.4. A32.2).

Na subcategoria intermediária "*Lembrou da planilha"*, que representou 0,85% das unidades de registro, verificou-se que esses estudantes apenas se lembram do uso da planilha, mas não de finalidades, conforme o exemplo "[...] *Excel, [...]*" (3.4.A16.2, 2017).

Na categoria intermediária "*Lembranças sobre usos do MATLAB (ou SciLab)*", que representou 4,24% das unidades de registro, também foram identificadas três subcategorias intermediárias: "*Lembraram do uso MATLAB (ou SciLab) na disciplina e finalidades*" (2,83%); "*Lembrou do MATLAB"* (1,13%) e "*Lembrou de possibilidade de uso do MATLAB, após o término da disciplina"* (0,28%).

Na subcategoria intermediária "*Lembraram do uso MATLAB (ou SciLab) na disciplina e finalidades*" verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 1,15%, os estudantes se lembraram do uso do *MATLAB* na disciplina para resolução ou construção de matrizes, conforme os exemplos:

> [...] *MATLAB*: Resolução de matrizes [...] (3.4.A19.2, 2017).
> Lembro de ter usado muito o *MATLAB*, que é um recurso importantíssimo na resolução de matrizes pelos mais variados métodos (3.4.A26.1, 2017).
> [...] *MATLAB* - construção de matrizes (3.4.A30.3, 2017).

- Em 0,56%, os estudantes se lembraram do uso do *MATLAB* na disciplina, com a finalidade de realização automática de escalonamentos de matrizes, conforme os exemplos: "*Lembro que utilizamos o MATLAB para escalonar matrizes e por fim classificar o sistema*" (3.4. A8.1, 2017) ou "*Programas Scilab e MATLAB: Cálculo e Escalonamento de Matrizes [...]*" (3.4.A22.1, 2017).
- Em 0,56%, os estudantes se lembraram do uso do *MATLAB*, na disciplina, usado na resolução de equações ou de sistemas lineares, conforme os exemplos: "*[...] e o MATLAB para a resolução das equações*" (3.4.A35.2, 2017) ou "*Lembro-me de utilizarmos o MATLAB e Scilab, muito bons para solucionar matrizes, estas, que eram as soluções para sistemas lineares [...]*" (3.4.A23.1, 2017).
- Em 0,28%, um estudante se lembrou do uso do *MATLAB* na disciplina para facilitar cálculos de determinantes e escalonamentos, conforme o registro: "*[...] O MATLAB, por sua vez, foi utilizado para facilitar alguns cálculos (como determinantes, escalonamentos) que levariam muito tempo para serem feitos à mão*" (3.4. A12.3, 2017).
- Em 0,28%, um estudante se lembrou do uso do *MATLAB* na disciplina na resolução prática de problemas: "*[...], MATLAB, [...] os quais nos possibilitaram visualizar maneiras mas práticas de resolver os mesmos problemas"* (3.1.A2.7, 2017).

Na subcategoria intermediária "*Lembrou do MATLAB",* constatou-se, em 1,13% das unidades de registro, que esses estudantes apenas se lembraram do uso do aplicativo, mas não citaram finalidades, conforme mostrado a seguir: "*MATLAB"* (3.4. A2.3, 2017).

Na subcategoria intermediária "*Lembrou de possibilidade de uso do MATLAB, após o término da disciplina"*, que representou 0,28% das unidades de registro, verificou-se que um estudante se recordou da possibilidade de utilização na resolução de problemas reais, conforme o exemplo: "*Contas grandes quando se vai calcular multiplicação de matrizes para saber o quanto cada item possui de algum nutriente, por exemplo, seria facilmente feito pelo MATLAB [...]*" (3.5.A22.1, 2017).

Na categoria intermediária "*Não se lembram de usos posteriores dos recursos tecnológicos digitais vistos na disciplina*", que representou 0,85% das unidades de registro, verificou-se que apenas três estudantes do G1 indicaram não se lembrar de terem usado os recursos tecnológicos digitais utilizados na disciplina, conforme os exemplos: “*Por enquanto em nenhum*” (3.5.A6.1, 2017) ou “*Ainda não fiz uso de nenhum uso tecnológico na minha prática pessoal ou profissional, mas como respondi na questão 3, creio que com o tempo e a minha formação isso será usado*” (3.5.A26.1, 2017).

Na categoria intermediária “*Lembrou da finalidade mas não do nome do recurso*”, que representou 0,28% das unidades de registro, verificou-se que um estudante se recordou de ter manipulado matrizes, mas não conseguiu se lembrar do nome do programa: *“[...] Outro programa de matrizes que não recordo o nome, trabalhar com as matrizes, escalonar etc.”* (3.4.A28.2, 2017).

Conclui-se, pela análise da categoria final *“Lembranças sobre uso de recursos tecnológicos digitais”,* que o *software* que os estudantes do G1 mais se lembraram foi o GeoGebra, seguido da planilha, e, depois, do *MATLAB.*

Destaca-se que, nesse grupo, durante o desenvolvimento da disciplina, o software *GeoGbra* foi utilizado em três tarefas, a planilha em quatro e o *MATLAB* em quatro. Também foram utilizados exemplos obtidos com uso do *GeoGebra*, em apresentações elaboradas em *Power Point,* durante as aulas, ocorridas em sala de aula tradicional, de modo a auxiliar a visualização gráfica na resolução de problemas. Além disso, pelos relatos dos estudantes, ao longo do semestre, eles também faziam uso do *GeoGebra* em outras disciplinas.

Cabe ressaltar que, no segundo semestre de 2016, quando foi aplicado o último questionário (após transcorridos nove meses do término da disciplina), verificou-se que os estudantes estavam cursando a disciplina de Cálculo Numérico, na qual estavam fazendo uso dos recursos do *GeoGebra*, das planilhas Excel e do *FreeMat*, que assemelha-se ao *MATLAB*.

Desse modo, percebe-se que apenas o software *MATLAB* não é utilizado com muita frequência em outras disciplinas, o que pode ter influenciado em suas lembranças.

Salienta-se também, que, no G1, foram usados: *slides* apresentados em *Data Show*, vídeos educacionais e a geotecnologia *Google Maps*™, acessada por aparelhos celulares, mas os estudantes desse grupo não se lembraram dessas tarefas, ou seja, não foram significativas para eles no processo de aprendizagem de Álgebra Linear.

6.4.2 Percepções do Grupo G2

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos para o grupo G2, a partir de dados coletados por meio de:

- "*Questionário uso de tecnologias*" (ver Anexo 6), que foi aplicado no final da disciplina, com 22 respondentes, identificado, nesta seção, por questionário 1;
- Questões 4, 5 e 6 do *"Questionário Compreensão e Aprendizagem Significativa*" (ver Anexo 7), que foi aplicado nove meses após o término da disciplina, com 13 respondentes, identificado, nesta seção, por questionário 2.

No processo de unitarização, para identificar as unidades de registro, foi usada a seguinte codificação: número do questionário; número da questão, identificação do participante e número da unidade de sentido. No G2, foram identificadas 187 unidades de registro (ver Anexo 36).

Assim como ocorreu no G1, a análise de conteúdo do tipo categorial também possibilitou identificar três categorias finais emergentes no G2: "*Percepções sobre o uso de recursos tecnológicos*", que representou 52,41% das unidades de registros; "*Modos como o uso de recursos tecnológicos influenciou a aprendizagem ou a compreensão*", que representou 24,60% das unidades de registros; e "*Lembranças sobre uso de recursos tecnológicos digitais*", que representou 22,99% das unidades de registros, as quais são apresentadas a seguir.

(i) "Percepções sobre o uso de recursos tecnológicos" – G2

Nessa categoria final, assim como no G1, também foram identificadas seis categorias intermediárias: "*Facilitou a aprendizagem*", que representou 17,65% das unidades de registro; "*Sentimentos sobre uso de recursos tecnológicos na disciplina*", que representou 14,44% das unidades de registro; "*Percepções sobre mudanças no ambiente de ensino e aprendizagem*", que representou 9,63% das unidades de registro; "*Sobre sugestões*", que representou 9,1% das unidades de registro; "*Dificuldades percebidas no processo*", que representou 1,06% das unidades de registro; e "*Percepções sobre possibilidade de usos futuros ou em outras aplicações*", que representou 0,53% das unidades de registro.

Na categoria intermediária "*Facilitou a aprendizagem*", foram identificadas duas subcategorias intermediárias: "*Facilitou a aprendizagem ou a compreensão na disciplina*" (16,59%) e "*Possibilitou ampliar o conhecimento*" (1,06%). Nesse caso, diferentemente do G1, não foi identificada a subcategoria "*Facilitou a realização das tarefas*". Cabe esclarecer que isso provavelmente ocorreu pelo fato de esse grupo ter realizado apenas uma tarefa no laboratório computacional, na qual foi possibilitado o uso dos recursos tecnológicos digitais.

Na subcategoria intermediária "*Facilitou a aprendizagem ou a compreensão na disciplina*", que representou 16,59% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 7,5%, os estudantes afirmaram que o uso de recursos tecnológicos facilitou o processo de aprendizagem dos conteúdos da disciplina, conforme mostrado a seguir: *"Influenciou facilitando o processo de aprendizagem [...]"* (1.1.E2.1, 2016), ou, ainda, *"[...] facilitam [...] até mesmo na hora da explicação"* (1.1.E20.3, 2016).
- Em 3,74% das unidades de registro, os estudantes indicaram que se lembravam, após nove meses, que tal uso facilitou a compreensão, conforme apresenta-se nos exemplos a seguir: *"Os recursos facilitaram a compreensão do conteúdo estudado [...]"* (2.6.E12.1, 2017); *"Facilitam muito o entendimento da matéria [...]"* (2.6.E2.1, 2017) ou *"[...] na compreensão dos assuntos abordados pela matéria"* (2.6. E20.2, 2017).
- Em 3,74%, os estudantes indicaram que o uso de recursos tecnológicos os auxiliou no processo da aprendizagem, como por exemplo: *"O uso da tecnologia ajudou muito no processo [...]"* (1.1.E18.1, 2016), ou, ainda, *"Creio que o uso de tecnologias auxiliou na aprendizagem [...]"* (1.1.E12.1, 2016).
- Em 1,61%, os estudantes afirmaram que, durante a disciplina, o uso de recursos tecnológicos facilitou a compreensão, conforme os exemplos:

> [...] pois se torna mais fácil de compreender os assuntos trabalhados. [...] (1.1.E10.2, 2016).
> [...] o uso do GeoGebra e do *MATLAB* me fizeram compreender melhor o conteúdo [...] (1.2.E6.2, 2016).
> [...] pois como disse anteriormente, a mesma nos ajuda a compreender e entender melhor as coisas [...] (1.2.E20.2, 2016).

Concluiu-se que, nessa subcategoria intermediária, "*Facilitou a aprendizagem ou a compreensão na disciplina*", os estudantes perceberam que o uso dos recursos tecnológicos facilitou a aprendizagem, pois favoreceu a compreensão e auxiliou no processo de aprendizagem. Essa percepção confirma o que Oliveira, Moura e Souza (2015, p. 78) indicam:

> Em se tratando de informação e comunicação, as possibilidades tecnológicas apareceram como uma alternativa da era moderna, facilitando a educação com a inserção de computadores nas escolas, possibilitando e aprimorando o uso da tecnologia pelos alunos, o acesso a informações e a realização de múltiplas tarefas em todas as dimensões da vida humana, além de qualificar os professores por meio da criação de redes e comunidades virtuais.

Verificou-se que, nos registros anteriormente apresentados, o estudante E6 refere-se ao uso do Geogebra, além do uso do *MATLAB*. No entanto, apenas o *MATLAB* foi de fato utilizado por eles na atividade em que participaram.

Destaca-se que durante as aulas foram usadas imagens geradas com o uso do *software* GeoGebra, apresentadas em *slides*, para explicações diversas. Os estudantes, ao verem essas imagens, afirmaram que também estavam usando esse aplicativo em outras disciplinas concomitantes à disciplina de Álgebra Linear. Além disso, quando ocorreu a disciplina, esse recurso já se encontrava disponível para uso em aparelhos celulares e pelos registros apresentados por alguns estudantes do G2. Verificou-se que, provavelmente, esses estudantes usaram esse recurso espontaneamente na disciplina de Álgebra Linear ou em tarefas desenvolvidas em outras disciplinas, pois a lembrança do uso aparece em diversos registros apresentados por eles.

Na subcategoria intermediária "*Possibilitou ampliar o conhecimento*", que representou 1,06% das unidades de registro, verificou-se que em 0,53%, um estudante afirmou que a abordagem possibilitou usar programas na resolução de problemas, assim: *"[...] foi possível verificar e utilizar programas para resolver problemas com matrizes"* (1.2.E1.2, 2016). E, em 0,53%, outro estudante indicou que o uso de recursos tecnológicos possibilitou aprender a utilizar programas, conforme mostrado a seguir: *"[...] e tendo o benefício de aprender utilizar programas [...]"* (1.2.E10.6, 2016).

Nessa subcategoria, verificou-se que os estudantes do G2, apesar de terem pouco contato com o uso das tecnologias digitais, também perceberam a importância de se ter propiciado a aprendizagem prática de programas computacionais. Como tais recursos podem os auxiliar na resolução de problemas variados, especialmente na área da Engenharia Civil, concorda-se com eles no sentido de quando são explorados os recursos tecnológicos do *MATLAB,* os conhecimentos são ampliados.

Além disso, destaca-se que, nessa tarefa, também foi possível perceber que se propiciou um ambiente de aprendizagem significativa, pois, além dos aspectos teóricos de Álgebra Linear envolvidos, os estudantes foram desafiados a relacioná-los aos novos conhecimentos apresentados, referentes ao uso adequado dos recursos computacionais disponíveis, tendo em vista a resolução do problema de criptografia apresentado. Assim, precisaram fazer uso de conceitos subsunçores teóricos específicos (sobre transformações lineares e sobre resoluções de sistemas) para raciocinarem como deveriam proceder, por meio dos comandos disponíveis, para processarem os dados corretamente e obterem resultados confiáveis, os quais também precisaram ser reinterpretados, tendo em vista a obtenção da resposta final.

Nesse sentido, concorda-se com Valente (1999c, p.11) quando afirma que "O computador pode ser também utilizado para enriquecer ambientes de aprendizagem e auxiliar o aprendiz no processo de construção do seu conhecimento". Além disso, afirma:

> Quando o aluno usa o computador para construir o seu conhecimento, o computador passa a ser uma máquina para ser ensinada, propiciando condições para o aluno descrever a resolução de problemas, usando linguagens de programação, refletir sobre os resultados obtidos e depurar suas idéias por intermédio da busca de novos conteúdos e novas estratégias. Nesse caso, os softwares utilizados podem ser os softwares abertos de uso geral, como as linguagens de programação, sistemas de autoria de multimídia, ou aplicativos como processadores de texto, *software* para criação e manutenção de banco de dados. Em todos esses casos, o aluno usa o computador para resolver problemas ou realizar tarefas como desenhar, escrever, calcular etc. A construção do conhecimento advém do fato de o aluno ter de buscar novos conteúdos e estratégias para incrementar o nível de conhecimento que já dispõe sobre o assunto que está sendo tratado via computador (VALENTE, 1999c, p.12).

Na categoria intermediária "*Sentimentos sobre uso de recursos tecnológicos na disciplina*", que representou 14,44% das unidades de registro, foram identificadas três subcategorias intermediárias: "*Gostaram das tarefas nas quais foram utilizadas tecnologias*" (12,32%); "*Sentiram segurança/confiança*" (1,06%) e "*Sentiu que despertou interesse*" (1,06%).

Na subcategoria intermediária "*Gostaram das tarefas nas quais foram utilizadas tecnologias*", verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 10,18%, os estudantes afirmaram que gostaram das tarefas, conforme o exemplo a seguir: "*Sim, gostei bastante dessas aulas [...]*" (1.2.E23.1, 2016) ou *"[...] Me senti muito bem [...]*" (1.2.E10.3, 2016).

- Em 2,14%, os estudantes indicaram que gostaram da aula realizada no laboratório, conforme mostrado a seguir: "*Gostei da aula que usamos MATLAB no laboratório [...]*" (1.2.E1.1, 2016) ou *"[...] aula sobre criptografia, que foi a aula que eu mais gostei."* (2.4. E17. 2, 2017) ou, ainda: *"[...] foi bom ver as aplicações no computador [...]"* (1.2. E13.2, 2016).

Na subcategoria intermediária "*Sentiram segurança/confiança*", que representou 1,06% das unidades de registro, contatou-se que:

- Em 0,53%, um estudante afirmou que sentiu confiança: *"[...] me senti mais seguro na resolução [...]"* (1.2.E3.2, 2016).
- Em 0,53%, um estudante se lembrou, após nove meses, que sentiu segurança: *"[...] confiança nos resultados"* (2.6.E13.2, 2017).

Nesse sentido, conclui-se que alguns estudantes do G2 também se sentiram mais seguros ao usarem recursos tecnológicos digitais, pois o *MATLAB* executa os cálculos automaticamente e evita erros de matemática básica, o que desperta confiança nos resultados obtidos.

Já na subcategoria intermediária "*Sentiu que despertou interesse*", que representou 1,06% das unidades de registro, foi possível verificar que:

- Em 0,53%, um estudante afirmou que sentiu interesse: "*Diferenciada, pois instigou o interesse [...]"* (1.2. E11.1, 2016).
- Em 0,53%, outro estudante afirmou que se sentiu empolgado: *"[...] me senti empolgado [...]"* (1.2.E16.2, 2016).

O indicativo de que o uso de recursos tecnológicos possibilitou despertar o interesse dos estudantes, verificado nessa subcategoria, corrobora com indicativos de várias pesquisas disponíveis na literatura. Dentre eles, podem ser citados os resultados de Barcelos (2011); Karrer (2006), Kripka; Viali e Lahm (2014); Rosa e Viali (2009) e Stormowski; Gravina e Lima (2013).

Também cabe destacar que, de acordo com a observação realizada e por meio do diário de bordo, os estudantes do G2, em geral, não se mostravam muito interessados nas tarefas propostas sem uso de tecnologias digitais interativas. Mas quando foi proposta a realização da tarefa no laboratório computacional, suas posturas modificaram e eles se mostraram mais interessados e motivados.

Desse modo, foi possível constatar que a possibilidade de uso de recursos tecnológicos digitais interativos, mesmo sendo pontual, motivou a maioria dos estudantes do G2, na tarefa proposta. Verificou-se que, além de possibilitar a atuação ativa na resolução dos problemas, também possibilitou aproximar o ambiente da sala de aula dos ambientes virtuais, aos quais eles estão familiarizados. Concorda-se com Prensky (2001) no sentido de que, por serem “nativos digitais”, os estudantes estão acostumados com o uso das tecnologias nas resoluções de seus problemas cotidianos. Aproximar esses ambientes certamente contribuiu com a aprendizagem em sala de aula.

Na categoria intermediária “*Percepções sobre mudanças no ambiente de ensino e aprendizagem*”, que representou 9,63% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: “*Percebem que o uso de tecnologias digitais favoreceu o ambiente de aprendizagem*” (8,56%) e “*Lembra de ter usado o laboratório de informática*” (1,07%).

Na subcategoria intermediária “*Percebem que o uso de tecnologias digitais favoreceu o ambiente de aprendizagem*”, que representou 8,56%, constatou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 3,22%, os estudantes indicaram que o uso de recursos tecnológicos possibilitou tornar a aula mais dinâmica, conforme os exemplos a seguir:

> [...] sendo assim, ao utilizar slides, se torna uma aula dinâmica e produtiva (1.1.E10.4, 2016).
> [...] e acho que tudo que torna a aula mais dinâmica [...] (1.2.E18.2, 2016).
> [...] e faz com que a aula seja mais ágil (1.1.E5.3, 2016).
> [...] agiliza [...] (1.2.E18.4, 2016).

- Em 2,67%, os estudantes, após nove meses, indicaram que se lembravam que o uso do recursos tecnológicos influenciou ou influenciou positivamente a aprendizagem, conforme os exemplos: “Sim, influenciaram [...]” (2.6.E6.1, 2017) ou “Influenciam de maneira positiva [...]” (2.6.E5.1, 2017).
- Em 1,07%, os estudantes, ao final da disciplina, indicaram que influenciou de forma positiva, conforme o exemplo: *“Sim Influenciou positivamente [...]”* (1.1.E19.1, 2016).
- Em 1,07%, os estudantes afirmaram se lembrar, após nove meses, que tornou a aula mais ágil ou prática*: “[...] porque é uma forma mais prática, a gente consegue ir colocando em prática e assim entendendo mais facilmente”* (2.6.E2.2, 2017) ou “*Mais agilidade [...]”* (2.6.E13.1, 2017).
- Em 0,53%, um estudante destacou que as tarefas estimulavam a autonomia: “*As atividades foram [...] autoexplicativas [...]”* (1.2.E15.3, 2016).

Na subcategoria intermediária "*Lembra de ter usado o laboratório de informática*", que representou 1,07% das unidades de registro, dois estudantes se lembraram, após nove meses, que usaram o laboratório de informática: *"[...] Utilizamos em duas oportunidades no laboratório de informática [...]"* (2.4.E15.2, 2017) e *"[...] lembro de utilizar o laboratório de informática na aula sobre criptografia [...]"* (2.4. E17. 1, 2017).

Na unidade de sentido do estudante E15, nota-se uma inconsistência, pois foi realizada apenas uma aula no laboratório de informática. Isso confirma que provavelmente os estudantes fizeram uso do laboratório computacional em outras disciplinas, no mesmo período.

Concluiu-se, na categoria intermediária "*Percepções sobre mudanças no ambiente de ensino e aprendizagem",* que os estudantes de G2 perceberam que o uso de recursos tecnológicos digitais dinamiza as aulas, agiliza as tarefas, torna as aulas mais práticas, estimula a autonomia e influencia a aprendizagem, sendo que alguns indicam que percebem essa influência como positiva. Destaca-se que as percepções são todas positivas, ou seja, melhoraram o ambiente de ensino e aprendizagem e não foram apontados aspectos negativos pelos estudantes.

Na categoria intermediária "Sobre sugestões", que representou 9,1% das unidades de registro, foram identificadas duas subcategorias intermediárias: "Sugestões dos *estudantes sobre usos de tecnologias digitais*" (5,35%) e "*Não propuseram sugestões*" (3,75%).

Na subcategoria intermediária: "*Sugestões dos estudantes sobre usos de tecnologias digitais*", constatou-se, nas unidades de registro, que:

– Em 4,82%, apareceram sugestões sobre mais aulas com uso de tecnologias interativas, conforme exemplos a seguir:

> [...] e acredito que poderiam ser feitas mais aulas dinâmicas como essa [...] (1.2.E10.4, 2016).
> [...] poderia ser utilizado mais vezes durante o período letivo (1.2.E19.2, 2016).
> [...] mas deveria ser mais utilizado. A tecnologia traz diversas vantagens sobre os métodos manuais (1.2.E24.2, 2016).
> [...] deveria ser explorado mais a tecnologia para ajudar nos cálculos algébricos (1.1.E13.3, 2016).
> [...] porém deveria ser mais utilizado na matéria (1.1.E24.1, 2016).

- Em 0,53%, um estudante sugeriu que as provas deveriam ser com uso de computadores: *“[...] acho que as provas deveriam ser no computador para dar mais tempo de resolver”* (1.2.E3.3, 2016).

Na subcategoria intermediária “*Não propuseram sugestões*”, constatou-se que, em 3,75% das unidades de registro, os estudantes afirmaram que não tinham sugestões para melhoria das aulas: *“[...] não tenho sugestão para melhoria”* (1.2.E5.2, 2016) ou *“[...] não tenho sugestões para melhoria. As aulas são muito boas do jeito que estão”* (1.2.E23.2, 2016).

Assim, na categoria intermediária “*Sugestões*”, verificou-se que as opiniões variam, pois alguns sugerem que deveriam ser propostas mais aulas com o uso de tecnologias digitais interativas e outros indicam que não sentem necessidade de mudanças. No entanto, verifica-se que a frequência da sugestão por aulas com um maior uso de tecnologias digitais interativas ainda é maior. Além disso, verificou-se também que apenas um estudante se referiu à possibilidade de fazer uso de computadores na avaliação, de modo a otimizar os cálculos realizados, ou seja, não é um item importante para eles, talvez por não terem experimentado essa possibilidade.

Na categoria intermediária “*Dificuldades percebidas*”, que representou 1,06% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 0,53%, um estudante indicou que percebeu que a não familiaridade com o software *MATLAB* em apenas uma atividade pode ter sido um elemnto dificultador para alguns colegas: *“[...] acredito que quem não tinha contato com ele possa ter tido bastante dificuldade, talvez se tivesse mais tempo com mais aplicação seria mais viável para manusear o MATLAB até porque ele não é tão simples”* (1.2.E4.2, 2016).
- Em 0,53%, outro estudante indicou que percebeu que foram utilizados poucos recursos tecnológicos na disciplina e que entende que os cálculos manuais estão ultrapassados: *“[...] Porém, fizemos pouca utilização das tecnologias. Acredito que a mão seja um tanto ultrapassado, mas é claro que ajuda para cada pessoa de modos diferentes no pensar sobre tal assunto”* (1.1.E4.2, 2016).

Desse modo, foi possível concluir, na categoria intermediária “*Dificuldades percebidas*”, que os estudantes indicaram que o uso do *software MATLAB* precisaria de um tempo maior para ambientação. Inclusive, destaca-se que essa dificuldade de familiarização já havia sido identificada na análise dos dados do G2, relativos aos resultados obtidos na Tarefa 15. Assim, os resultados da análise indicam que alguns estudantes perceberam que foi contraproducente fazer uso isolado de tais recursos tecnológicos digitais, pois se teve pouco tempo disponível para ambientação com o aplicativo, o que pode ter dificultado a aprendizagem matemática, ao invés de facilitá-la.

Nessa categoria, também foi possível verificar que um estudante indicou sua percepção sobre a necessidade da inserção do uso das tecnologias digitais nas salas de aula, tendo em vista facilitar o processo de aprendizagem, quando existem cálculos repetitivos. Esse indicativo corrobora com indicativos apresentados na presente tese, na qual se verifica essa necessidade de inserção de usos de recursos tecnológicos digitais no ensino superior presencial, de modo a não somente potencializar as práticas de ensino, mas de favorecer e facilitar a aprendizagem dos conceitos abordados na disciplina de Álgebra Linear.

Na categoria intermediária "*Percepções sobre possibilidade de usos futuros ou em outras aplicações*", que representou 0,53% das unidades de registro, verificou-se que um estudante percebeu, após nove meses, que pode usar o *MATLAB* na resolução de sistemas lineares sempre que necessário: "*[...] MATLAB [...] sendo atualmente um auxiliar para se precisarmos resolver algum SL em nossa vida acadêmica, pessoal ou profissional"* (2.6.E6.6, 2016).

Assim, concluiu-se que apesar de ter feito uso do *MATLAB* em apenas em uma tarefa, esse estudante foi capaz de perceber a potencialidade do recurso tecnológico apresentado. Nota-se que, além de compreender seu uso na Tarefa 15, ele também foi capaz de relacionar o conhecimento específico, construído na disciplina de Álgebra Linear, com outros tipos de conhecimento construídos em sua vida (pessoal, acadêmica ou profissional). Desse modo, é provável que, para esse estudante, a aprendizagem tenha sido significativa, pois foi assimilada por meio de interações com conceitos subsunçores existentes, o que provocou mudanças na estrutura cognitiva, tornando os conceitos mais amplos e complexos. Outro indicativo é que, mesmo após nove meses, ele foi capaz de se lembrar espontaneamente do recursos utilizado, a finalidade e as possibilidades de usos em sua vida, de modo geral.

(ii) *“Modos como o uso de recursos tecnológicos influenciou a aprendizagem ou a compreensão” – G2*

Nessa categoria final, foram identificadas duas categorias intermediárias no G2: “*Percepções sobre vantagens no uso de recursos tecnológicos*”, que representou 18,18% das unidades de registro, e “*Uso dos recursos na disciplina mudou o modo de pensar*”, que representou 6,42%.

Na categoria intermediária “*Percepções sobre vantagens no uso de recursos tecnológicos*”, foram identificadas cinco subcategorias intermediárias: “*Uso de recursos tecnológicos facilitou os cálculos*” (8,02%); “*Possibilitou aproximar conhecimentos teóricos e práticos”* (4,28%), “*Uso de recursos tecnológicos favoreceu a visualização*” (2,69%); “*Uso de tecnologias digitais favoreceu otimizou o tempo*” (2,13%) e “*Uso de recursos tecnológicos possibilitou evitar erros de cálculos*” (1,06%).

Na subcategoria intermediária “*O uso das tecnologias digitais facilitou os cálculos*”, que representou 8,02% das unidades de registro, verificou-se que:

- Em 3,74%, os estudantes afirmaram que o uso de recursos tecnológicos possibilitou praticidade/facilidade e rapidez nos cálculos, conforme mostrado a seguir:

> [...] devido a praticidade dos cálculos tornando o desenvolvimento mais fácil (1.1.E3.2, 2016).
> [...] Com o uso do *MATLAB* facilitou muito no cálculo de matrizes, uma vez que possuíamos o conhecimento fundamental dado em aula e só necessitávamos aplicá-lo no software (1.1.E6.3, 2016).
> [...] como, o uso dos computadores na criptografia, utilizando cálculos como o da matriz inversa de forma prática e rápida (1.1.E9.3, 2016).
> [...] pois por computador o processo é muito mais rápido e prático [...] (1.1.E13.2, 2016).
> [...]. Melhora a eficiência e agilidade no cálculo de variáveis. Um exemplo foi a utilização do computador na resolução da codificação de frases e descodificação, utilizando-se de matrizes de ordem quadrada com Det $\neq 0$ (1.1.E15.2, 2016).

- Em 3,21%, os estudantes indicaram que facilitaram os cálculos, conforme os exemplos:

> [...] O uso da tecnologia nos ajuda muito, facilitam no momento do cálculo [...] (1.1.E20.2, 2016).
> [...] com o uso do computador para resolver matrizes. O computador calcula todos os passos juntos, diminuindo o trabalho (1.1.E25.2, 2016).
> [...] ajudou a diminuir os números de cálculos que tinha que fazer [...] (1.2.E25.2, 2016).
> [...] As fórmulas agilizaram o cálculo e os modos de resolução [...] (1.2.E15.4, 2016).

- Em 1,07%, os estudantes indicam que se lembraram, após nove meses, que o uso dos recursos tecnológicos digitais possibilitaram praticidade e rapidez nos cálculos:

> A utilização das tecnologias beneficia no tratamento dos dados, assim como na obtenção exata de resultados e métodos de aplicação [...] (2.6.E15.1, 2017).
> Os recursos tecnológicos auxiliam para resolver de forma mais rápida os sistemas do que se fossem resolvidos a mão. Isso é muito importante em casos onde existem muitas equações [...] (2.6. E23.1, 2017).

Essa percepção dos estudantes, que também apareceu na seção *6.2.7.2*. "*Percepções dos estudantes sobre o uso da planilha na Tarefa 9*" e na seção 6.4.1 "*Identificação de percepções do Grupo G1*", confirmam os indicativos apresentados por Fioreze (2010); Morgado (2003) e Oliveira (2009), apresentados anteriormente.

Concluiu-se que, na subcategoria intermediária "*O uso das tecnologias digitais facilitou os cálculos*", os estudantes do G2 também afirmaram, não somente ao término da disciplina, mas também após transcorridos nove meses, que o uso dos recursos tecnológicos possibilitou praticidade/facilidade e rapidez nos cálculos, nas tarefas realizadas, o que consideraram como uma vantagem, tendo em vista que possibilitaram agilizar o processo, diminuindo o trabalho manual, e tornando mais rápida a resolução dos problemas propostos.

Na subcategoria intermediária "*Possibilitou aproximar conhecimentos teóricos e práticos*", que representou 4,28% das unidades de registro, foi possível constatar que:

- Em 1,61%, os estudantes afirmaram que o uso de recursos tecnológicos possibilitou ver uso da teoria em aplicações:

> [...] pois não conhecia ainda mensagens criptografadas, bem como não sabia que é possível utilizar a álgebra linear para as decifrar [...] (1.2.E10.2, 2016).
> [...] uma vez que consegui "tirar" a ideia do papel e vê-la em aplicações reais (1.2.E6.3, 2016).

- Em 1,61%, os estudantes perceberam que a utilização dos recursos de modo prático favoreceu a compreensão, conforme os exemplos:

> [...] A atividade de criação de um código e decodificação pelo colega, como exemplo, é uma atividade fantástica, poder utilizar dados passados em aula, para a utilização prática torna a compreensão do conteúdo mais simplificada (1.1.E18.2, 2016).
> [...] pois nos possibilitou a compreender o uso do aprendizado na prática (1.1.E19.2, 2016).

- Em 0,53%, um estudante se lembrou, após nove meses, que o uso dos recursos possibilitou percepções da prática, conforme o fragmento do registro: *“[...] obviamente, pois acrescenta ao acadêmico percepções da prática [...]”* (2.6.E5.2, 2017).
- Em 0,53%, outro estudante se lembrou que a aula prática o ajudou a fixar o conteúdo, conforme o exemplo: *“[...] a teoria é importante para aprender mas para fixar o conhecimento, só com a prática [...]”* (2.6.E17.2, 2017).

Na subcategoria intermediária “*Possibilitou aproximar conhecimentos teóricos e práticos*”, verifica-se, portanto, que os estudantes percebem que o uso de recursos tecnológicos, associados à resolução dos problemas propostos, possibilitou ver aplicações da teoria (no caso, na área da criptografia), o que favoreceu suas aprendizagens e compreensões teóricas sobre os conceitos algébricos tratados.

Ao se depararem com os desafios propostos, mediados pela tecnologia digital disponibilizada, além de os estudantes serem desafiados a pensar em maneiras de usar a teoria para possibilitar a obtenção da solução correta, também foram instigados a buscar modos otimizados de execução, por meio de fórmulas e comandos disponíveis, que fossem apropriados para a resolução. Nesse sentido, a proposta propiciou aproximar conhecimentos teóricos de conhecimentos práticos, pois a combinação de ambos possibilitou a resolução otimizada por meio dos recursos tecnológicos digitais disponíveis.

Concorda-se com Monteiro e Barros (2016, p. 57) quando abordam aspectos relevantes envolvidos em práticas elaboradas para o ensino superior, que envolvem resolução de problemas propiciados pelas TIC:

> [...] as práticas pedagógicas assentes em estratégias de resolução de problemas com o recurso às TIC parecem constituir uma mais valia no processo de ensino-aprendizagem, pois, ao sublinharem o papel ativo dos estudantes, proporcionam o desenvolvimento de competências transversais que passam pela interação social, pela comunicação e pela aposta no trabalho colaborativo, patente nos momentos de partilha, discussão e tomada de decisão. Essas práticas pedagógicas contribuem para a construção de métodos de trabalho e de tratamento de informação, assim como para articulação entre os processos de síntese e de análise, aspectos fundamentais quando se reportam a aprendizagens de nível superior. [...] A formação superior visa promover e atualizar competências efetivas em termos do uso de estratégias cognitivas, habilidades interpessoais, atitudes e valores que permitam a solução de problemas em contextos sociais específicos de intervenção. Daí que a aprendizagem sustentada em estratégias de resolução de problemas seja frequentemente fomentada ao nível do Ensino Superior, supondo-se que, se forem devidamente trabalhadas, dotarão os estudantes de competências importantes para o exercício da sua futura atividade profissional.

Na subcategoria intermediária “*Uso de tecnologias digitais possibilitou a visualização gráfica*”, verificou-se, em 2,69% das unidades de registro, que a maioria dos estudantes se referiu especificamente à visualização de gráficos no GeoGebra, conforme mostrado a seguir:

> [...] Com o uso do GeoGebra é possível ver no gráfico o que calculamos no papel através dos diversos métodos apresentados em aula [...] (1.1.E6.2, 2016).
> [...] e com o GeoGebra em gráficos e etc. (1.1.E8.2, 2016).
> [...] O próprio aplicativo do GeoGebra, auxiliando com o estudo das retas, [...] (1.1.E9.2, 2016).
> [...] O ser humano, que por sua própria natureza, aprende melhor vendo, do que apenas escutando [...] (1.1.E10.3, 2016).

Destaca-se que, no grupo G2, foram utilizadas apenas imagens de gráficos gerados no GeoGebra. Assim, essas percepções se referem à observação das imagens, apresentadas em *slides* e, mesmo assim, verificou-se que o uso dessas imagens chamou a atenção dos estudantes. Além disso, segundo eles relatavam em aula, fizeram uso desse aplicativo na disciplina Geometria Analítica, que ocorreu em paralelo à disciplina de Álgebra Linear. Isso também explica o motivo de destacarem esse aplicativo como uma vantagem que perceberam em relação ao uso de recursos tecnológicos nas tarefas.

Essa percepção, sobre a vantagem da visualização gráfica também apareceu no G1, porém, de modo mais abrangente, tendo em vista que os estudantes do G1 fizeram uso interativo de diversos recursos em diversas oportunidades e naturalmente perceberam mais vantagens do que os estudantes do G2.

Conforme foi apresentado na subcategoria intermediária “*Uso de tecnologias digitais favoreceu a visualização dos conceitos*”, do G1, esse indicativo, que apareceu nos dois grupos, corrobora as percepções de Allevato (2010), Andrade (2010), Borba e Villarreal (2005) e Richit et al. (2013).

Na subcategoria intermediária “*Uso de tecnologias digitais otimizou o tempo*”, que representou 2,13% das unidades de registro, foi possível constatar que:

– Em 1,6%, os estudantes afirmaram que o uso de recursos tecnológicos possibilitou evitar perder tempo nas resoluções, conforme mostrado a seguir:

> [...] pois creio que soma tempo [...] (1.1.E5.2, 2016).
> [...] evitando perder um grande tempo para se resolver os problemas, assim conseguindo resolver mais questões em aula (1.1.E16.2, 2016).
> [...] poupando “tempo” para fazer tabelas a mão [...] (1.2.E10.5, 2016).

- Em 0,53%, um estudante se lembrou, após nove meses, que a utilização dos recursos tornou as resoluções mais rápidas, conforme o exemplo: *“[...] pois nos mostra que a resolução feita manualmente pode ser obtida de maneira mais rápida e ágil com os recursos tecnológicos [...]”* (2.6.E10.2, 2017).

No G2, assim como no G1, também apareceu o indicativo sobre a vantagem de otimização do tempo, em relação ao uso das tecnologias digitais na resolução das tarefas, pois os estudantes do G2 perceberam que ele propiciou rapidez e agilidade nas resoluções dos problemas propostos.

Na subcategoria intermediária “*Uso de recursos tecnológicos possibilitou evitar erros de cálculos*”, que representou 1,06% das unidades de registro, foi possível constatar que:

- Em 0,53%, um estudante afirmou que o uso de recursos tecnológicos possibilitou conferir os resultados: “*[...] Poderíamos nos atrelar cada vez mais, como um modo de “prova real”, para conferirmos os cálculos feitos a mão [...]”* (1.2.E15.5, 2016).
- Em 0,53%, outro estudante afirmou, após nove meses, que se lembrou que possibilitava conferir seus cálculos, o que facilitou seus estudos, conforme o exemplo: *“[...] facilitou também para estudarmos, pois conseguimos saber o resultado do exercício dado e depois vermos se nossos cálculos a punho estão corretos”* (2.6.E8.3, 2016).

Essas percepções dos estudantes do G2, assim como ocorrido no G1, confirmam a vantagem de evitar erros de cálculos, a qual também foi indicada por Valente (1993b) como um facilitador da aprendizagem. No G2, destaca-se que os estudantes perceberam que essa vantagem estava mais associada à conferência de resultados, o que os ajudava em seus estudos.

Na categoria intermediária “*Uso dos recursos na disciplina mudou o modo de pensar*”, que representou 6,42% das unidades de registro dos estudantes do G2, verificou-se que:

- Em 4,83%, os estudantes perceberam que o uso de recursos tecnológicos favoreceu a compreensão, sendo que:
    (i) Em 2,7%, os estudantes indicaram que o uso dos recursos tecnológicos digitais favoreceu a observação, a interpretação e a compreensão, conforme os exemplos:

> [...] pois o entendimento da matéria se tornou nítido, a partir de observações feitas com uso de aplicativos, como *MATLAB*, entre outros (1.1.E11.2, 2016).
> [...] A atividade sobre criptografia, por exemplo, ajudou a compreender o conteúdo. Ao mesmo tempo que exercitávamos o processo de cálculo com o *MATLAB*, tínhamos a percepção da utilização de matrizes, transformações, etc. (1.1.E12.2, 2016).
> [...] e propicia ao aluno a compreensão pela sua forma de pensar [...] (1.2.E18.3, 2016).
> [...] senti que deixa o conteúdo mais fácil de interpretar, [...] (1.2.E2.2, 2016)
> [...] fazendo nos focar na concepção de conta ao invés de nos preocupar apenas sua resolução (1.2.E9.5, 2016).

(ii) Em 1,07%, os estudantes do G2 indicaram que o uso dos recursos tecnológicos digitais possibilitou esclarecer os conteúdos:

> [...] pois por meio das tecnologias era mais fácil entender; o conteúdo ficava mais claro; eu enxergava o porquê de certas coisas. (1.1.E21.2, 2016)
> Influenciou na aprendizagem, pois algumas coisas ficam mais claras utilizando alguns dispositivos tecnológicos. Exemplos disso, foram as aulas com a utilização do projetor e a aula no laboratório sobre criptografia, no *MATLAB* (1.1.E23.1, 2016)

(iii) Em 0,53%, um estudante, após nove meses, se lembrou que o uso dos recursos tecnológicos digitais melhorou a compreensão dos cálculos: *"[...] No caso do utilizado na disciplina de Álgebra Linear, melhorou a compreensão dos cálculos feitos a punho [...]"* (2.6.E8.2, 2017).

(iv) Em 0,53%, outro estudante se lembrou, após nove meses, que o uso dos recursos tecnológicos digitais facilitou a compreensão por possibilitar perceber erros: *"[...] tornando a resolução dos sistemas de mais fácil compreensão por demonstrar, por exemplo, onde estava errando"* (2.6.E9.2, 2017).

- Em 0,53%, um estudante afirmou o uso dos recursos tecnológicos digitais possibilitou maior raciocínio, e, por isso, ele gostou da tarefa, conforme mostrado a seguir: "*[...] Me fez pensar um pouco mais e gostei*" (1.2.E7.3, 2016).
- Em 0,53%, um estudante, indicou que, após nove meses, lembrava ser preciso compreender os conceitos para fazer uso adequado do aplicativo: "*[...] Porém, é necessário saber os fundamentos que estão por trás desses softwares"* (2.6. E23.2, 2017).

- Em 0,53%, um estudante afirmou ter percebido o uso da tecnologia como uma ferramenta: *“[...] Também como ferramenta na construção de gráficos e soluções”* (1.2.E15.6, 2017).

Conclui-se, na categoria intermediária “*Uso dos recursos na disciplina mudou o modo de pensar*”, que alguns estudantes do G2 perceberam que o uso de recursos tecnológicos digitais possibilitou mudar seus modos de pensar pois favoreceu a observação, a interpretação e a compreensão, permitindo esclarecer os conteúdos e melhorar a compreensão dos cálculos, além de possibilitar a percepção de erros. Também apareceram indicativos sobre o fato de possibilitar o estímulo do raciocínio e a percepção de que os recursos são ferramentas que podem facilitar a resolução dos problemas.

Nota-se que os estudantes percebem que a interação com os recursos tecnológicos digitais favorece o esclarecimento e a construção ou ressignificação dos conceitos abordados, pois, caso não estivessem claros, eles não saberiam como usá-los de modo adequado. Assim como foi verificado no G1, no G2 também aparece o indicativo de que o uso de recursos tecnológicos digitais, ao propiciar o trânsito entre diferentes registros de representação semiótica, favorece a compreensão matemática dos conceitos envolvidos.

(iii) “Lembranças sobre uso de recursos tecnológicos digitais” – G2

Nessa categoria final, foram identificadas sete categorias intermediárias no G2: “*Lembranças sobre usos do MATLAB*”, que representou 6,95% das unidades de registro; “*Lembranças sobre usos do GeoGebra*”, que representou 6,42% das unidades de registro; “*Lembranças sobre usos do data show ou slides em aulas e finalidades na disciplina*”, que representou 2,67% das unidades de registro; “*Não têm usado os recursos tecnológicos digitais vistos na disciplina, na vida pessoal ou profissional*”, que representou 2,16% das unidades de registro; “*Se lembraram das finalidades, mas não do nome dos recursos tecnológicos utilizados na disciplina*”, que representou 2,14% das unidades de registro; “*Lembranças sobre usos da planilha após o término da disciplina, na vida pessoal ou profissional*”, que representou 1,59% das unidades de registro e “*Lembranças sobre uso da planilha, MATLAB, GeoGebra*”, que representou 1,06% das unidades de registro.

Na categoria intermediária "*Lembranças sobre usos do MATLAB*", foram identificadas duas subcategorias intermediárias: "*Lembraram do MATLAB e finalidades na disciplina*" (5,35%) e "*Lembraram de usos do MATLAB, após o término da disciplina, na vida acadêmica"* (1,6%).

Na subcategoria intermediária "*Lembraram do MATLAB e finalidades na disciplina*", verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 2,68%, os estudantes indicaram que se lembravam (após nove meses) do uso desse aplicativo na resolução de matrizes, conforme mostrado a seguir:

> [...] *MATLAB* para a resolução de matrizes e determinantes (2.4.E6.2).
> [...] e também foi utilizado o software *MATLAB* para determinação de matriz inversa em um trabalho realizado (2.4.E12.2).
> [...] Com o *MATLAB* vimos como calcular computacionalmente as incógnitas das matrizes, por exemplo [...] (2.6.E6.4).

- Em 2,14%, os estudantes indicaram que também se lembraram que usaram o *MATLAB* na resolução de sistemas lineares, conforme os registros a seguir:

> Foi utilizado o software *MATLAB*, utilizado para a resolução de sistemas lineares (2.4.E8.1, 2017).
> [...] *MATLAB* [...] sendo atualmente um auxiliar para se precisarmos resolver algum SL [...] (2.6.E6.5, 2017).
> [...] Outro exemplo seria a resolução de uma matriz ou sistema com o auxílio do *MATLAB* (2.6.E10.3, 2017).

- Em 0,53%, um estudante afirmou se lembrar que usou o *MATLAB* para codificação de matrizes: "*O MATLAB, para codificação de matrizes [...]"* (2.4.E9.1, 2017).

Nesses registros, os estudantes indicaram que se lembram que o *MATLAB* foi utilizado na disciplina para resolução de problemas envolvendo matrizes, determinantes, matrizes inversas e sistemas lineares. Cabe destacar que a única atividade desenvolvida em laboratório computacional, com o grupo G2, envolveu o uso do *MATLAB* para resolver problemas de criptografia, na qual puderam trabalhar com a manipulação de matrizes, o que justifica essas lembranças.

Esses estudantes se lembraram do nome do aplicativo e das suas finalidades, o que é um indicativo de ocorrência da aprendizagem significativa para eles. Inclusive um estudante se lembrou que o aplicativo foi usado na codificação de matrizes, ou seja, se lembrou inclusive de um dos objetivos da tarefa, que envolveu o uso interativo dos recursos tecnológicos do *MATLAB*.

Na subcategoria intermediária "*Lembrança de usos do MATLAB após o término da disciplina, na vida acadêmica"*, que representou 1,6% das unidades de registro, constatou-se que:

- Em 1,07%, os estudantes indicaram que se lembravam de usar, após o término da disciplina, o *MATLAB,* ou similar *FreeMat,* para cálculos matriciais, conforme os exemplos:

> Uso tanto o *MATLAB* quanto outros softwares, como o Freemat, para cálculos matriciais (2.5.E12.1).
> Utilizo atualmente, na matéria de Cálculo Numérico, o software FreeMat para a Resolução de Sistemas Lineares, que tem os mesmos recursos do *MATLAB* (2.5.E6.1).

- Em 0,53%, um estudante, após nove meses, indicou que faz uso do *MATLAB* na disciplina de Cálculo Numérico, mas não disse com que finalidade: "*Na matéria de cálculo numérico utilizo MATLAB*" (2.5.E20.1, 2017).

Já na categoria intermediária "*Lembranças sobre usos do GeoGebra*", foram identificadas três subcategorias intermediárias: "*Lembraram do uso do GeoGebra na disciplina e finalidades*" (3,75%); "*Lembraram de usos do GeoGebra após o término da disciplina, na vida acadêmica*" (1,6%) e "*Lembraram do GeoGebra*" (1,07%).

Na subcategoria intermediária "*Lembraram do uso do GeoGebra na disciplina e finalidades*", verificou-se, nas unidades de registro, que:

- Em 2,15%, os estudantes lembravam do uso do *GeoGebra* na visualização de gráficos, conforme os exemplos a seguir:

> [...] *GeoGebra* para visualizar a diferença entre retas paralelas, concorrentes e perpendiculares e para a construção de gráficos de interpolação geométrica [...] (2.4. E6.1).
> *GeoGebra*, que é um programa que possui múltiplas finalidades, onde o principal é a construção de gráficos [...] (2.4. E21.1).
> [...] Com o *GeoGebra*, também presente em forma de prints nos slides, visualizávamos os gráficos [...] (2.6.E6.3).

Verifica-se que esses estudantes se referem à lembrança da visualização dos gráficos construídos com uso do aplicativo, o que de fato ocorreu durante a disciplina, em *slides*, conforme refere o estudante E6.

- Em 1,6%, os estudantes se lembraram do uso do GeoGebra para compreensão de funções, conforme os exemplos:

> [...] e GeoGebra para facilitar o modo de ver o comportamento de algumas funções (2.4.E5.2, 2017).

> [...] e o Geogebra em diversas oportunidades, como para determinar o comportamento de algumas retas e para conferir resultados (2.4.E9.2, 2017).
> Me recordo que utilizamos – alguns alunos através do celular – o aplicativo GeoGebra para nos referenciar curvaturas de funções, pontos máximos e mínimos, além do ponto de origem (2.4.E15.1, 2017).

Apenas nas duas últimas unidades de registro se verificam lembranças sobre uso efetivo do aplicativo. Um deles ainda indica que alguns estudantes fizeram uso por meio do celular, para cálculos de máximos e mínimos. No entanto, esses conceitos não foram abordados em sala de aula. Desse modo, provavelmente esses estudantes tenham usado o aplicativo em outras disciplinas, como Geometria Analítica ou Cálculo Numérico, e tenham se confundido em suas lembranças.

Na subcategoria intermediária "*Lembraram de usos do GeoGebra após o término da disciplina, na vida acadêmica",* que representou 1,6% das unidades de registro, verificou-se:

- Em 1,07%, os estudantes se lembraram do uso do GeoGebra para compreensão de funções em outras disciplinas, conforme os exemplos a seguir:

> O GeoGebra teve uso frequente nas disciplinas de cálculo (1 e 2) para a melhor compreensão do comportamento de funções ao derivá-las ou integrá-las (2.5.E5.1)
> Para a determinação do comportamento de retas e funções, no Geogebra (2.5.E9.1)

- Em 0,53%, um estudante se lembrou do uso do GeoGebra para estudos na disciplina de Cálculo, mas não disse com que finalidade, conforme o exemplo a seguir: "*GeoGebra para estudos pessoais nas matérias de cálculo*" (2.5.E21.1, 2017).

Na subcategoria intermediária "*Lembraram do GeoGebra",* que representou 1,07% das unidades de registro, verificou-se que alguns estudantes se lembraram do uso do Geogebra na disciplina, mas nem citaram de que modo, nem a finalidade: *"[...] Com a utilização tanto do GeoGebra quanto do programa utilizado no ICEG [...]*" (1.2.E15.2, 2016).

Como já foi comentado, o GeoGebra estava sendo utilizado em outras disciplinas do curso da Engenharia Civil, que ocorreram paralelamente à disciplina de Álgebra Linear, o que pode explicar essas lembranças de uso no G2.

Na categoria intermediária "*Lembranças sobre usos do Data Show ou slides em aulas e finalidades na disciplina*", que representou 2,67% das unidades de registro, constatou-se que, após nove meses, alguns estudantes do G2 se lembraram do uso desse recurso tecnológico como um meio facilitador do ensino e da aprendizagem, conforme os exemplos a seguir:

> Eram utilizados a apresentação de slides nas aulas teóricas [...] (2.4.E12.1, 2017).
> [...] Através do uso do PowerPoint para visualizarmos os conteúdos, seus cálculos e aplicações, foi possível uma melhor compreensão do conteúdo tratado (2.6.E6.2, 2017).
> [...] Ressaltando, apresentação dos cálculos nos slides é uma ótima forma de ensino, pois economiza tempo e é de prática compreensão (2.6.E6.7, 2017).
> [...] Os slides usados na aula, por exemplo, ajudavam a visualizar todas as etapas dos métodos estudados para resolução dos sistemas lineares (2.6.E12.2, 2017).

A análise possibilitou perceber que somente no G2 apareceram percepções relativas ao uso de recursos tecnológicos do *data show* ou *slides* apresentados em aulas, como um meio visual que facilitou a socialização das informações teóricas. Esses recursos também foram usados no G1, mas, como nesse grupo foram realizadas várias tarefas com uso de recursos tecnológicos que propiciaram a interação dos estudantes com os aplicativos, essa utilização passou despercebida pelos estudantes do G1.

Na categoria intermediária "*Não têm usado os recursos tecnológicos digitais vistos na disciplina, na vida pessoal ou profissional*", que representou 2,16% das unidades de registro, verificou-se que alguns estudantes do G2 indicaram não fazer uso dos recursos abordados na vida pessoal ou profissional. Apenas um estudante afirmou perceber uso na vida acadêmica, conforme apresentado nos exemplos a seguir:

> Não tenho utilizado recursos tecnológicos para a prática pessoal e profissional (2.5.E8.1, 2017).
> Por enquanto não utilizei, meu emprego atual não tem nada em comum com a área, mas acredito que futuramente o uso venha a se tornar bem comum (2.5.E17.1, 2017).
> Não tenho utilizado esses recursos em prática pessoal ou profissional, apenas para resolução de sistemas lineares em outras disciplinas da graduação (2.5.E23.1, 2017).

Já na categoria intermediária "*Se lembraram das finalidades, mas não do nome dos recursos tecnológicos utilizados na disciplina*", que representou 2,14% das unidades de registro, verificou-se que:

– Em 1,07%, os estudantes afirmaram ter se lembrado que usaram um programa para manipular matrizes, conforme os exemplos:

> Me recordo de uma aula que fomos em laboratório utilizar um programa que resolvia matrizes (2.4.E2.1, 2017).
> [...] um software que não me recordo o nome, para calcular matrizes de ordem não quadrática e realizar um trabalho que auxiliaria na nota da terceira prova (2.4.E15.3, 2017).

– Em 1,07%, os estudantes afirmaram ter se lembrado que usaram um *software* para resolução de sistemas lineares, conforme os exemplos:

> Foram usados softwares para resolver equações lineares (2.4.E13.1, 2017).
> [...] O software utilizado para a realização do último mostrou de forma muito bem exemplificada o método de Gauss-Jordan, igualando as equações e suas variáveis dentro de uma matriz e zerando todos os elementos acima ou abaixo do que denominamos de Pivô, o elemento da linha que deveria ser igualado a 1 (2.6.E15.2, 2017).

Na categoria intermediária "*Percepções e lembranças sobre usos da planilha após o término da disciplina, na vida pessoal ou profissional*", que representou 1,59% das unidades de registro, verificou-se que:

– Em 0,53%, um estudante afirmou perceber a potencialidade do uso da planilha, mas não especificou como, conforme o exemplo: "*Acredito que o hoje o Excel seja uma ferramenta muito utilizada*" (2.5.E2.1, 2017).

– Em 0,53%, um estudante afirmou lembrou do uso da planilha na disciplina de topografia: "*O Excel, foi usado para o tratamento dos dados levantados em campo na disciplina de Topografia, onde através dele, calculamos áreas, perímetros, erros lineares, e o traçado da poligonal*" (*2.5.E5.2*, 2017).

– Em 0,53%, um estudante afirmou se lembrar do uso da planilha na manipulação de matrizes, na resolução de problemas reais, conforme o exemplo: "*Microsoft Excel 2010 para organização de dados, como tabelas de preços de fretes, cada caminhão com sua capacidade de peso máximo e média de km/l [...]*" (2.5.E15.1, 2017).

Na categoria intermediária "*Lembraram do uso da planilha, MATLAB, GeoGebra*", que representou 1,06% das unidades de registro, verificou-se que:

– Em 0,53 %, um estudante afirmou se lembrar do uso da planilha*, MATLAB* e *GeoGebra* na disciplina, para facilitar a aprendizagem, mas não citou de que modo, conforme mostrado a seguir: "*Foram utilizados Excel, MATLAB* e

GeoGebra, para facilitar todos os conhecimentos que seriam feitos manualmente em sala de aula" (2.4.E10.1, 2017).

- Em 0,53 %, um estudante afirmou se lembrar do uso da planilha*, MATLAB* e *GeoGebra* tanto na vida pessoal quanto na profissional, mas não especificou de que modo:

> Os 3 recursos tecnológicos citados anteriormente (*Excel, MATLAB e GeoGebra*) são de grande utilidade para nossa prática pessoal e profissional, seja para nos organizarmos em tarefas diárias ou finanças, ou seja para utilizarmos em nossa vida profissional, pois na Engenharia Civil estes auxílios são indispensáveis (2.5.E10.1, 2017).

Nessas duas últimas categorias intermediárias, aparecem inconsistências nas lembranças, especialmente quando é citado o uso da planilha. No caso das aulas desenvolvidas com o G2, esse *software* não foi usado ou citado em sala de aula, durante a disciplina de Álgebra Linear. Uma explicação possível é que os estudantes estavam utilizando esse aplicativo em disciplinas ocorridas no segundo semestre de 2017 (quando foi aplicado o último questionário), como é o caso de Cálculo Numérico, e isso pode ter confundido suas lembranças.

Pelos resultados obtidos, conclui-se, na categoria final a "*Lembrança dos recursos tecnológicos utilizados na disciplina*", que o *software* mais lembrado pelos estudantes do G2 foi o *MATLAB*, seguido do *GeoGebra,* e, depois pelo *data show*. Destaca-se que o *MATLAB* foi utilizado em apenas uma tarefa. No entanto, por propiciar a interatividade com os recursos tecnológicos disponíveis, visando à resolução de um problema proposto, foi o que mais permaneceu na lembrança dos estudantes do G2.

Além disso, a lembrança do uso do software *GeoGebra* surpreendeu, pois ele apenas foi citado durante as aulas, como o aplicativo gerador das imagens, projetadas em *slides,* e provavelmente isso ocorreu pelo fato de terem usado esse aplicativo em outras disciplinas do curso.

Já o *data show* que foi utilizado em ambos os grupos, na maioria das aulas, como um facilitador na apresentação das informações, somente foi percebido e lembrado pelos estudantes do G2, pois eles quase não tiveram contato com outros aplicativos em sala de aula. Desse modo, somente eles perceberam o uso dos *slides* em sala de aula, como um meio facilitador para o ensino.

6.5 Análise quantitativa de dados

Inicialmente, na Tabela 8, são apresentados percentuais sobre evasão e reprovação referentes a dados retrospectivos, referentes aos desempenhos de estudantes relativos a dez turmas de Álgebra Linear, ministradas pela autora da presente tese. Esses dados foram coletados em banco de dados da Instituição na qual a proposta foi aplicada. Verifica-se que os resultados confirmam os altos índices de evasão e de reprovação na disciplina, que já haviam sido indicados por Celestino (2000).

Tabela 8 - Resumo de desempenho de dez turmas de Álgebra Linear

Turmas	Alunos	Aprovados (%)	Reprovados (%)	Desistentes (%)
2012 1	33	72,73	12,12	15,15
2012 2	48	68,75	16,67	14,58
2013 2 a	44	65,91	27,27	6,82
2013 2 b	43	72,09	25,58	2,33
2014 1	29	48,28	41,38	10,34
2014 2 a	35	68,57	25,71	5,71
2014 2 b	40	47,50	32,50	20,00
2015 1	30	40,00	36,67	23,33
2015 2 a	41	63,41	26,83	9,76
2015 2 b	34	61,76	26,47	11,76
Média	**38**	**60,90**	**27,12**	**11,98**

Fonte: Autora

Além disso, nos quadros 22 e 23, são apresentadas algumas características quantitativas dos dois grupos investigados. As notas médias finais dos grupos, nas situações antes e depois do exame, foram comparadas por um teste *t* de variâncias equivalentes. Para verificar se as variâncias eram homogêneas, foi realizado o teste F (Fisher/Snedecor), que resultou em um valor da estatística F igual a 0,89 com valor-p (unilateral) de 39% para a situação antes do exame e um valor F igual a 0,89 com valor-p de 39% para a situação depois do exame. Nos dois casos, não foi possível rejeitar a hipótese da igualdade de variâncias e, assim, o teste *t* para variâncias homogêneas foi utilizado para a comparação das médias antes e após o exame.

Quadro 22 - Características dos participantes do G1 (com uso de tecnologias)

CARACTERÍSTICA	NÚMERO
Número de participantes da pesquisa	36
Nota média, antes do exame	**4,85**
Nota mediana, antes do exame	5,30
Desvio padrão das notas médias, antes do exame	2,39
Nota média, após o exame	**5,02**
Nota mediana, após o exame	5,50
Desvio padrão das notas médias, após o exame	2,53
Percentual de aprovados (notas >= 5,0)	69,44
Percentual de reprovados (com exame)	30,56
Percentual de aprovados com média >= 7,0 (após exame)	33,33
Percentual de Estudantes aprovados sem exame	22,22
Percentual de reprovados sem exame (média <= 3,0)	19,44

Fonte: Autora

A estatística *t* para a situação antes do exame forneceu um valor de -0,65 com um valor-p (bilateral) de 52% e para a situação após exame a estatística *t* forneceu um valor de -0,98 com um valor-p, também bilateral, de 33%. Nos dois casos, a diferença observada não foi significativa e, assim, não é possível rejeitar a hipótese de médias equivalentes nas duas situações, isso é, não é possível, com base nesses resultados, afirmar que o grupo que utilizou tecnologia foi significativamente melhor do que o grupo que não o fez.

Quadro 23 - Características dos participantes do G2 (sem uso de tecnologias)

CARACTERÍSTICA	NÚMERO
Número de participantes da pesquisa	25
Nota média, antes do exame	**4,45**
Nota mediana, antes do exame	4,20
Desvio padrão das notas médias, antes do exame	2,25
Nota média, após o exame	**4,38**
Nota mediana, após o exame	4,00
Desvio padrão das notas médias, após o exame	2,38
Percentual de aprovados (notas>=5,0)	44,00
Percentual de reprovados (com exame)	56,00
Percentual de aprovados com média >= 7,0 (após exame)	20,00
Percentual de Estudantes aprovados sem exame	20,00
Percentual de reprovados sem exame (média <=3,0)	16,00

Fonte: Autora

Ressalta-se que a média do G1 foi de 4,85 antes do exame e de 5,02 após o exame, enquanto que a média do G2 foi de 4,45 antes do exame e de 4,38 após o exame. Apesar de existir uma pequena diferença entre o G1 (4,85) e o grupo 2

(4,45), antes do exame, essa diferença não foi estatisticamente significativa e o mesmo ocorreu após o exame, tendo, as médias observadas para o G1 sido de 5,02 e, para o G2, de 4,38. Apesar de a diferença entre os grupos ter crescido, o mesmo ocorreu com as variâncias, e, assim, a diferença observada não se mostrou significativa.

Convém esclarecer que a estatística *t*, nos dois casos, foi negativa, pois a diferença foi feita entre o G2, com média menor, e o G1, com média maior, e que o sentido da diferença não afeta a significância do resultado. Para que os resultados fossem significativamente diferentes, o valor-p das estatísticas obtidas deveria ser menor do que 5%, pelo menos. Contudo, os valores obtidos ficaram acima dos 30%. Os testes tanto para comparar as médias quanto as variâncias foram realizados com a planilha *Excel*, versão 2015.

A observação dos resultados relativos aos desempenhos de notas médias ou medianas indica que, nos dois grupos de estudantes participantes da pesquisa, mesmo com a intervenção de uma proposta diferenciada de ensino e aprendizagem, elaborada especificamente para os estudantes de Álgebra Linear do curso de Engenharia Civil, as notas médias e medianas, antes e após o exame, ficaram próximas de 5,0.

Destaca-se que, apesar de existir uma diferença percentual de aprovação entre os grupos (sendo que, no G1, foram aprovados 69%, enquanto que, no G2, houve uma aprovação de 56%, ou seja, no G1, houve uma aprovação de 13% maior do que a percebida em G2), a análise quantitativa, que foi realizada por meio do teste *t*, o qual possibilitou a comparação de notas médias dos grupos, não possibilitou confirmar que o uso de tecnologias digitais influenciou a aprendizagem de Álgebra Linear.

De qualquer modo, mesmo que fosse identificada uma diferença estatística significativa, entre os desempenhos médios dos dois grupos, essa diferença não poderia ser atribuída apenas ao uso das tecnologias. A pesquisa também possibilitou perceber, por meio do reconhecimento de conhecimentos prévios, em ambos os grupos, que os estudantes do G1 (grupo em que foi utilizada a proposta com uso de tecnologias), que traziam mais conhecimentos prévios do que os estudantes do G2 (grupo em que foi utilizada a proposta, porém, sem uso de tecnologias). Ou seja, provavelmente esse fato também influenciou a compreensão matemática dos conceitos abordados, bem como a possibilidade da ocorrência da aprendizagem significativa.

Tendo em vista possibilitar um panorama geral da disciplina, são apresentados, nos quadros 24 e 25, alguns dados considerados relevantes, relativos a todos os estudantes da turma, incluindo também os não participantes da pesquisa. Em relação ao número total de estudantes em cada turma, verificou-se que os percentuais de reprovação (40,48 na turma de G1 e 69,44 da turma de G2) e de evasão (16,67 no G1 e 22,22 no G2) aumentaram em ambos os grupos.

Quadro 24 - Características da turma do G1 – com uso de tecnologias

CARACTERÍSTICA	**Valores**
Número total de estudantes da turma	42
Percentual total de aprovados da turma	59,52
Percentual total de reprovados	40,48
Percentual de desistentes (reprovados por falta)	16,67

Fonte: Autora

Conclui-se que os resultados obtidos – em relação ao desempenho médio das duas turmas (incluindo os não participantes da pesquisa) ou dos grupos G1 e G2 (constituídos de participantes da pesquisa) –confirmam os achados de Celestino (2000), que indicam ser comuns os altos índices de reprovação e evasão verificados em disciplinas de Álgebra Linear.

Quadro 25 - Características da turma do G2 – sem uso de tecnologias

CARACTERÍSTICA	**Valores**
Número total de estudantes da turma	36
Percentual total de aprovados da turma	30,56
Percentual total de reprovados	69,44
Percentual de desistentes da turma	22,22

Fonte: Autora

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa foi desenvolvida com a finalidade de identificar e analisar potencialidades e fragilidades percebidas pelos participantes envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra Linear, relativas ao uso didático de recursos tecnológicos digitais, propostos nas tarefas elaboradas e desenvolvidas a partir de pressupostos das Teorias da Aprendizagem Significativa e dos Registros de Representação Semiótica.

A pergunta diretriz que orientou a pesquisa foi: *"Considerando as perspectivas da Aprendizagem Significativa e dos Registros de Representação Semiótica, de que modo a docente e os discentes percebem a utilização de recursos tecnológicos digitais, em sala de aula, relativos aos processos de ensino e de aprendizagem, ocorridos na disciplina de Álgebra Linear?"*.

Conforme as percepções identificadas, a tese defendida é a de que a proposta didática apresentada, que foi elaborada segundo as Teorias da Aprendizagem Significativa e dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida por meio do uso adequado de recursos tecnológicos em sala de aula, favorece tanto a compreensão matemática de conceitos como a aprendizagem significativa de Álgebra Linear para os estudantes do curso de engenharia Civil, participantes da presente pesquisa.

A partir dos resultados obtidos com a metodologia proposta, destacam-se as seguintes conclusões.

De modo geral, a análise qualitativa dos dados relativos aos conhecimentos prévios dos dois grupos revelou que as lembranças dos estudantes são poucas acerca dos conceitos e usos já abordados no ensino médio (matrizes, determinantes, sistemas lineares, vetores e funções lineares) ou apreendidos no primeiro semestre da graduação e, ainda, que foram menos frequentes no G2. Indicou, também, que a maioria das aprendizagens dos estudantes foram mecânicas e não significativas, pois os conceitos não estavam presentes na memória permanente da maioria dos participantes, uma vez que foram armazenados na memória temporária e depois esquecidos.

Os resultados confirmaram a existência de muitas lacunas e dificuldades de compreensão sobre conhecimentos matemáticos construídos pelos estudantes de

Álgebra Linear nos dois grupos, o que provavelmente dificultou a ampliação desses conceitos, propiciados pelo conhecimento construído na disciplina.

Assim, em relação à identificação de conhecimentos prévios, a constatação de que os conceitos subsunçores, considerados relevantes, não estavam presentes nas estruturas cognitivas da maioria dos estudantes - não permitindo que novas informações fossem assimiladas por meio de interações - pode ser um indicativo que ajuda a explicar a dificuldade em se propiciar ambientes de ensino que favoreçam a compreensão e a aprendizagem significativa de conceitos da Álgebra Linear.

Em relação às tarefas realizadas, foi possível verificar que aquelas que envolveram resolução de problemas - tais como a Tarefa 1 (resolução de problemas por meio de sistemas lineares), a Tarefa 6 (Resolução de situações problemas com matrizes e operações), a Tarefa 12 (Resolução de Problemas – modelagem matemática como sistemas lineares) e a Tarefa 13 (Resolução de Problemas - cálculo de esforços em estruturas) –independentemente do uso de recursos tecnológicos digitais, favoreceram a aprendizagem de alguns estudantes por estarem vinculadas à construção de conhecimento práticos, pois estimularam a reflexão e a compreensão dos conceitos matemáticos abordados.

Como exemplo, foi possível perceber que, para a maioria dos estudantes de ambos os grupos, a Tarefa 12 propiciou um ambiente de aprendizagem significativo, pois ao realizarem o processo de modelagem matemática, os estudantes precisaram resgatar seus conhecimentos prévios sobre matemática básica para relacioná-los às novas informações sobre os conceitos envolvidos na resolução de sistemas lineares, para que, por meio de registros simbólicos, de suas transformações e interpretações, pudessem obter uma solução para os problemas propostos. Assim, verificou-se que essa tarefa possibilitou ampliar conceitos preexistentes, os quais foram relacionados aos novos conhecimentos práticos e, desse modo, os estudantes puderam perceber o uso de diversas técnicas abstratas na resolução de problemas mais próximos de suas realidades.

No entanto, verificou-se também, em tarefas que envolveram resolução de problemas, que nos dois grupos houve dificuldades de interpretação, falta de rigor na escrita algébrica (descuido com a organização de dados iniciais ou com a descrição em linguagem natural de variáveis utilizadas no processo de modelagem matemática) e dificuldades de tratamento no registro simbólico (devidas à ausência de conceitos prévios dos estudantes sobre conceitos de álgebra básica).

Assim, verificou-se, nesse tipo de tarefa, a importância da intermediação da professora na construção do conhecimento produzido em sala de aula para que alguns estudantes conseguissem esclarecer suas dúvidas, finalizar suas tarefas e também para que compreendessem os objetivos das tarefas propostas. Destaca-se que na tarefa 12, nos dois grupos, foram identificadas dificuldades, por parte de diversos estudantes, na obtenção dos modelos matemáticos que representavam os problemas propostos. Também foram percebidas dificuldades de interpretação dos tipos de solução encontrados nas resoluções dos sistemas lineares obtidos, em ambos os grupos. Assim, verificou-se que a mediação da professora, especialmente no esclarecimento de dúvidas e no estímulo da compreensão por meio dos questionamentos realizados, foi fundamental nos dois grupos

Também destacaram-se as dificuldades de tratamento encontradas pelos estudantes no desenvolvimento da Tarefa 13. Na resolução do problema proposto, devido à complexidade algébrica, essas dificuldades ficaram ainda mais evidentes, especialmente em relação aos estudantes do G2. Muitos deles, mesmo com auxílio da professora, não conseguiram finalizar suas resoluções algébricas. No entanto, também cabe salientar que, para aqueles que conseguiram finalizá-la, a tarefa propiciou um ambiente favorável à aprendizagem significativa, pois possibilitou a resolução de um problema comum na Engenharia (equilíbrio de forças em uma estrutura), por meio da interação entre conhecimentos prévios dos estudantes (sobre trigonometria e sobre equilíbrio de forças) com conhecimentos algébricos trabalhados (sobre aplicação da resolução de sistemas lineares em problemas reais), o que permitiu o aprimoramento do conhecimento abstrato abordado na disciplina de Álgebra Linear.

Em relação aos recursos tecnológicos digitais interativos, foram utilizados apenas quatro deles ao longo do semestre: GeoGebra; *Google Maps*TM; Planilhas *Excel* e *MATLAB*.

Nas Tarefas 2 (Resolução de sistemas lineares com duas variáveis – algébrica e gráfica), 13 (Resolução de Problemas - cálculo de esforços em estruturas) e 14 (Construções algébricas e geométricas de Transformações Lineares), propôs-se o uso do aplicativo GeoGebra. Nessas tarefas, constatou-se que, pelo fato do GeoGebra ser interativo, por facilitar a visualização algébrica e gráfica do problema e a manipulação dinâmica de dados, houve, na maioria das tarefas, maior compreensão dos conceitos abordados entre os estudantes do G1 do que em relação aos estudantes do G2, que não fizeram uso desse recurso. No entanto, como os grupos possuíam características relativas aos conhecimentos prévios diferentes, não é possível afirmar que os resultados obtidos pelo G1 tenham sido melhores devido exclusivamente ao uso de recursos tecnológicos. Contudo, destaca-se que, caso os recursos tecnológicos também houvessem sido utilizados no G2, a abordagem poderia ter facilitado e favorecido a compreensão da resolução gráfica de sistemas lineares e os resultados obtidos poderiam ter sido melhores no G2.

Também se ressalta que o uso do GeoGebra pelos estudantes do G1 na Tarefa 13 favoreceu suas aprendizagens, pois eles puderam construir, por meio dos recursos computacionais, o equilíbrio automático para o esquema de forças dado. Desse modo, puderam visualizar os cálculos realizados de modo prático e dinâmico, que foram obtidos por meio de seus conhecimentos algébricos e do uso de recursos do aplicativo. Apesar de muitos estudantes do G2 terem conseguido obter as expressões genéricas (algébricas) dos esforços para o esquema considerado no final da Tarefa 13, eles apenas executaram o cálculo numérico direto dos esforços para dois casos específicos, com uso de calculadoras, mas não puderam visualizar o equilíbrio graficamente. No G1, pelo fato do GeoGebra possibilitar a construção algébrica e gráfica do esquema, de modo dinâmico, envolvendo o uso de diferentes registros semióticos e, ainda, por possibilitar a mudança dinâmica de parâmetros, os estudantes do G1 puderam fazer diversas simulações e observar os resultados obtidos automaticamente. Nesse sentido, foi possível verificar que o uso do aplicativo favoreceu e contribuiu para a compreensão e para a significação dos conceitos matemáticos envolvidos.

Destaca-se, também, que, na Tarefa 11 (Resolução de Problemas – interpolação polinomial – na qual o uso do GeoGebra não era obrigatório), foi sugerido aos estudantes, de ambos os grupos, que fizessem uso da representação gráfica para compreensão do problema. Verificou-se que 50% dos estudantes do G1 optaram por apresentá-la, sendo que apenas dois estudantes optaram, espontaneamente, pelo uso do GeoGebra para esse fim. Já no G2, 86% dos estudantes recorreram à representação gráfica, tendo apenas um estudante indicado, espontaneamente, que fez uso do GeoGebra na construção do gráfico da função obtida por meio da modelagem matemática.

Na Tarefa 3, os estudantes do G1 também tiveram a oportunidade de usar os recursos do *Google Maps*^{TM} na resolução de um problema de localização, enquanto que os estudantes do G2 receberam um mapa impresso com as distâncias mínimas entre as cidades consideradas no problema. Conforme consta no diário de bordo da professora, houve envolvimento dos dois grupos e a colaboração de praticamente todas as duplas na realização da tarefa. Porém, contatou-se que, devido ao tempo disponível para sua realização, os estudantes do G1 acabaram tendo um desempenho inferior ao dos estudantes do G2, pois precisavam buscar as distâncias por meio do aplicativo. Assim, foi possível concluir que a proposta do uso desse recurso tecnológico digital não foi adequada, pois, essa tarefa exigia um tempo maior para o seu adequado desenvolvimento.

Nas Tarefas 6 (Resolução de situações problemas) e 9 (Método de triangulação para cálculo de determinantes), nas quais propôs-se o uso da planilha para os estudantes do G1, verificou-se que alguns estudantes demonstraram que compreenderam os conceitos envolvidos, fazendo uso adequado dos recursos disponíveis. No entanto, também foram verificadas dificuldades de compreensão em ambas.

Em relação à percepção de que esse recurso foi utilizado de modo adequado, foi possível constatar que o uso da planilha exigiu que os estudantes compreendessem não somente os conceitos matemáticos envolvidos mas também que se expressassem em linguagem simbólica, por meio dos comandos da planilha, para efetivação dos cálculos. Nesse sentido, foi possível verificar, para esses estudantes, que o uso dos recursos tecnológicos digitais nessas tarefas favoreceu a compreensão dos conceitos envolvidos, pois exigiu que transitassem entre diferentes registros de representação semiótica nas resoluções dos problemas propostos.

No entanto, na Tarefa 6, foram identificados equívocos referentes à erros de interpretação do problema ou à compreensão sobre o uso de operações entre matrizes. Além disso, foi possível perceber que alguns estudantes tiveram dificuldades em trabalhar com o armazenamento de matrizes de modo adequado, ou de perceberam que diversos cálculos semelhantes poderiam ser agrupados por meio do produto entre matrizes, especialmente quando o problema envolvia uma quantidade maior de dados a serem manipulados. Esse indicativo revelou a falta de reflexão crítica dos estudantes no desenvolvimento da tarefa em relação ao uso adequado dos recursos tecnológicos digitais e também a falta de compreensão do modo como as operações entre matrizes podem ser utilizadas de modo adequado na resolução de problemas práticos. Verificou-se que, na Tarefa 9, alguns estudantes não compreenderam o método pois não foram capazes de explicitá-lo por meio dos recursos da planilha, conforme havia sido solicitado. Apenas fizeram uso de uma função para o cálculo de determinante.

Também foi proposto aos estudantes do G1 a utilização dos recursos tecnológicos do *MATLAB* em três momentos: na Tarefa 10 (Método de Gauss-Jordan para resolução de SL), na Tarefa 11 (Método de Eliminação Gaussiana para resolução de SL/Resolução de Problemas – interpolação polinomial) e na Tarefa 12 (Resolução de Problemas – modelagem matemática como sistemas lineares).

Nas Tarefas 10 e 11, foram trabalhados os comandos e diferentes modos de resolução de sistemas por meio dos recursos do aplicativo, tendo em vista a necessidade de familiarização dos estudantes com os recursos do *MATLAB*.

Destaca-se que, na segunda parte da Tarefa 11, ao ser proposta a resolução extra sala de aula de uma situação problema na qual o uso de recursos do *MATLAB* era optativo, verificou-se que a maioria dos estudantes do G1 optou por não usá-lo. Optaram por apresentar os cálculos manuais. Talvez isso tenha ocorrido por entenderem que seria mais fácil apresentar a justificativa escrita de seus cálculos, realizados por meio do escalonamento parcial manual (com os quais estavam acostumados), do que por meio dos comandos necessários, que deveriam ser inseridos no ambiente do *MATLAB*, de modo a permitir que o processo fosse realizado automaticamente.

Já na Tarefa 12, que foi realizada em sala de aula, constatou-se que, no G1, o *MATLAB* favoreceu um ambiente propício a uma maior exploração dos diferentes métodos, por facilitar a resolução dos cálculos algébricos. Contudo, ainda nessa tarefa, alguns estudantes do G1 indicaram que também sentiram dificuldades no uso dos recursos tecnológicos como um meio de resolução, devido à falta de familiaridade com o aplicativo, o que pode ter prejudicado o desempenho desses estudantes na resolução dos problemas propostos.

No G2, apenas na Tarefa 15 (uso de transformações lineares em problemas de criptografia) foi proposta aos estudantes a experiência do uso do *MATLAB* na resolução de problemas envolvendo criptografia. Aos estudantes do G1 foi proposta uma tarefa semelhante, porém sem uso de recursos tecnológicos.

Nessa tarefa, verificou-se que a falta de familiaridade do G2, com o *MATLAB,* acabou atrapalhando alguns estudantes na resolução das questões. Também foi possível constatar que a maioria dos estudantes não foi capaz de perceber modos diferentes de armazenamento, com o objetivo de otimizar os processos de codificação e decodificação. Desse modo, no G2, concluiu-se que o objetivo pretendido de estimular a criatividade e análise crítica de resultados não foi plenamente alcançado.

Esses indicativos possibilitaram concluir que o uso isolado de tecnologias digitais não potencializou a aprendizagem dos estudantes do G2, pois o fato de não estarem familiarizados com os recursos disponíveis, tendo em vista explorá-los de modo adequado nas tarefas propostas, acabou dificultando o processo. Provavelmente a tarefa teria sido mais efetiva caso os estudantes já tivessem tido contato com o aplicativo anteriormente, evitando que sentissem dificuldades no armazenamento e processamento de dados de modo adequado. Além disso, também se percebeu que as dificuldades encontradas por estudantes do G1 na determinação manual da matriz inversa provavelmente seriam superadas, caso tivessem tido a oportunidade de usar o *MATLAB*, com o qual já estavam mais familiarizados.

De modo geral, concluiu-se que o uso de *softwares* educativos, como *MATLAB*, *GeoGebra* ou a planilha~~,~~ por sua sofisticação, necessitam um tempo inicial para que seus usuários possam se familiarizar com seus recursos, de modo a utilizá-los com mais competência, segurança e facilidade. Assim, verificou-se que foi contraproducente fazer uso isolado de tais recursos tecnológicos digitais quando se tem pouco tempo disponível, pois isso acaba dificultando a aprendizagem matemática, ao invés de facilitá-la. Além disso, também cabe salientar que para o estudante fazer uso adequado de recursos tecnológicos digitais é necessário que ele, além do conhecimento teórico sobre o assunto, tenha ou desenvolva a habilidade para transitar entre diferentes registros semióticos, de modo que possa usufruir dos benefícios que eles oferecem.

Destaca-se, também, que em todas as tarefas que envolveram o uso de recursos tecnológicos digitais, percebeu-se que a mediação do professor no esclarecimento de dúvidas, sobre conceitos matemáticos envolvidos ou sobre as possibilidades dos recursos tecnológicos disponibilizados, foi fundamental para compreensão e desenvolvimento das tarefas.

Em relação às tarefas propostas e desenvolvidas, também foi possível perceber que o limite de tempo para realizações das tarefas, em sala de aula, acabou se tornando uma dificuldade, o que pode ter prejudicado a aprendizagem de alguns estudantes, que sentiram maiores dificuldades de compreensão.

Talvez uma possibilidade para minimizar essas dificuldades encontradas em relação ao tempo para realização das tarefas no ensino presencial de Álgebra Linear seria escolher algumas tarefas propostas e trabalhá-las de modo mais aprofundado em sala de aula, a fim de explorar melhor o uso dos recursos tecnológicos digitais, disponibilizando mais tempo para suas realizações.

Também existe a possibilidade de realização de trabalhos extra sala de aula, que pode ser explorada de acordo com as características das turmas envolvidas. Salienta-se que, no caso dos participantes da presente pesquisa, essa possiblidade não foi muito explorada pelo fato de muitos estudantes precisarem trabalhar em turno inverso para poderem realizar suas graduações.

Em relação à identificação de conhecimentos finais, construídos ou ampliados, de modo geral, foi possível concluir que a disciplina possibilitou a compreensão de conceitos para alguns estudantes de ambos os grupos, pois eles foram capazes não somente de fazer uso adequado dos conceitos na resolução dos problemas propostos mas também de expressá-los adequadamente em linguagem natural, ou ao final da disciplina ou nove meses após o término da disciplina. De modo geral, constatou-se que a frequência de conceituações adequadas foi maior no G1 que no G2.

Também se constatou que as lembranças mais frequentes, nos dois grupos, relacionam-se aos usos dos conceitos. Provavelmente isso se deve ao interesse dos estudantes de Engenharia na aprendizagem de aplicações dos conceitos teóricos, o que pode ter estimulado a aprendizagem significativa.

Na análise dos registros escritos, foram identificadas diversas dificuldades relacionadas aos diferentes registros de representação, especialmente relacionados aos registros em linguagem natural, sobre os conceitos abordados. Esse fato remete à existência de dificuldades de compreensão dos conceitos tratados nos dois grupos, apesar de ter sido estimulado o trânsito entre diferentes registros de representação em muitas tarefas desenvolvidas (com ou sem o uso de recursos tecnológicos), que visavam justamente propiciar a compreensão dos conceitos envolvidos. Nesse sentido, verificou-se que promover ambientes de ensino e de aprendizagem que, de fato, promovam a compreensão em matemática para a maioria dos estudantes não é uma tarefa fácil e que continua sendo um desafio a ser superado.

Foi possível perceber que, tanto na identificação de conhecimentos prévios quanto nos registros escritos apresentados pelos estudantes ao longo da disciplina, muitos estudantes já trazem, em suas estruturas cognitivas, conhecimentos matemáticos básicos que foram construídos equivocadamente. Desse modo, em muitos casos, os estudantes, ao se depararem com novos saberes que devem ser construídos no ensino superior, não conseguem superar suas dificuldades de aprendizagem e acabam não tendo êxito nesse processo.

No caso da aprendizagem matemática, para que se constitua a rede semântica de significados próprios da área na construção de conceitos mais complexos, sabe-se que é necessária a existência de conhecimentos prévios para sua ancoragem e (re)significação. Nesse processo, a exploração e uso adequado de recursos tecnológicos digitais por meio da abordagem cognitivista/construtivista facilita o estabelecimento de novas conexões, propicia a ampliação da rede de saberes matemáticos e potencializa a aprendizagem significativa em matemática.

Também foram percebidos outros aspectos relevantes na análise sobre conhecimentos construídos ou ampliados no G1 e no G2, apresentados a seguir.

Nos dois grupos, houve a percepção de que os estudantes lembravam-se de usos dos conceitos de Álgebra Linear em outros contextos, sendo que o mais frequente referia-se a usos acadêmicos, em diversas disciplinas do curso. Alguns estudantes citaram aplicações profissionais e um estudante citou uma aplicação pessoal, na resolução de problemas pessoais. Nesses casos, destaca-se que os registros dos estudantes permitem perceber a presença de aprendizagens significativas, pois indicam que eles foram capazes de realizar interações entre conceitos preexistentes com novas informações, para promoção de novas aprendizagens.

Os estudantes também destacaram os aspectos positivos e negativos, citados em ordem de frequência identificados nos registros. Um resumo dos aspectos positivos está apresentado no Quadro 26.

Em relação aos aspectos positivos, destaca-se que, no G1, o mais citado pelos estudantes estava relacionado à Influência do uso de recursos tecnológicos digitais em aspectos cognitivos da aprendizagem, envolvidos nas tarefas realizadas.

Os estudantes desse grupo também indicaram que perceberam que as aulas foram interessantes, devido à apresentação de aplicações práticas e também pelo uso de recursos tecnológicos digitais. Verificou-se, também, que no G2 os estudantes citaram o uso de recursos tecnológicos como um aspecto positivo, mas destacaram aspectos relacionados à facilidade que perceberam na apresentação das informações repassadas por meio de *slides* ou em material impresso.

Quadro 26 – Aspectos positivos da proposta destacados pelos grupos

Grupo 1	Grupo 2
Influência do uso de recursos tecnológicos na aprendizagem (mais frequente), indicando que o uso foi importante e facilitou a aprendizagem; facilitou a resolução de tarefas e possibilitou a visualização da aplicação prática dos métodos.	***Lembranças positivas sobre o método de ensino*** (mais frequente), tais como o fato de terem considerado que o método foi bom, boas explicações ou boa didática, método explicativo, claro, reflexivo ou incisivo e que o ensino foi proposto de modo prático.
Lembranças positivas sobre o método de ensino*,* tais como o fato de terem considerado que o método foi bom, que favoreceu a compreensão, que foi prático ou dinâmico e, ainda, um estudante destacou a atenção disponibilizada pela professora.	***Influência do uso de recursos tecnológicos na aprendizagem*****:** uso de *slides*; acesso à um bom material impresso que facilitou a aprendizagem.
Lembram de aulas interessantes*:*, pelo fato de apresentarem aplicações práticas na engenharia e por possibilitarem o uso de recursos tecnológicos digitais; por propiciar tarefas cooperativas.	***A abordagem possibilitou perceber associações da teoria com usos práticos****:* método de ensino propiciou o contato com situações problemas e facilitou a percepção de associações da teoria com seus usos práticos
A abordagem possibilitou perceber associações da teoria com usos práticos*,* afirmando que o contato com situações-problema, ou com uso dos recursos tecnológicos digitais, facilitaram perceber associações da teoria com seus usos práticos	***Após nove meses, percebem que a disciplina colaborou com sua formação profissional****:* um estudante percebeu que a proposta favoreceu sua formação inicial.
Após nove meses, lembraram que a disciplina colaborou com sua formação profissional*,* pois perceberam que a proposta favoreceu suas formações iniciais.	***Lembrou-se de professora com amplos conhecimentos em relação ao conteúdo e aplicações****:* favoreceu a aprendizagem na disciplina.

Fonte: Autora

Quanto aos aspectos negativos, no G1, os estudantes indicaram que perceberam dificuldades em relação ao tempo disponível para as tarefas, avaliações muito extensas e falta da realização de mais exercícios em aula (sendo essa a percepção de apenas um estudante). No G2, os estudantes também indicaram poucos aspectos negativos, tais como avaliações muito extensas e o fato de que a organização do conteúdo na apostila dificultou o acompanhamento das aulas (que, também, foi a percepção de apenas um estudante).

Em relação aos aspectos negativos da proposta destacados pelos grupos, verificou-se que somente no G1 apareceu a questão do tempo relativa à realização das tarefas que, em geral, foram desenvolvidas com o uso de recursos tecnológicos digitais. Nos dois grupos, os estudantes citam a percepção de que as avaliações foram extensas, que é uma constatação de uma característica das avaliações dessa disciplina que, de maneira geral, desagrada aos estudantes. No G2, também apareceu a questão da organização da apostila, que ainda estava conforme a proposta anterior, o que foi um ponto negativo apontado.

Quanto às "*percepções sobre a aprendizagem"*, os estudantes do G1 salientaram que a nova abordagem possibilitou um melhor aproveitamento, que a disciplina possibilitou melhorar a compreensão de problemas e estimulou o raciocínio lógico, que a disciplina foi exigente mas valiosa e que perceberam a aprovação da turma. No G2, os estudantes destacaram que a abordagem possibilitou ver aplicações, que se lembraram de terem visto resolução de problemas por meio de métodos diversos, que houve um bom aprendizado, que a abordagem possibilitou melhorar a compreensão de problemas e estimulou o raciocínio e, ainda, que gostaram da abordagem mas sugerem um maior uso de recursos tecnológicos, pois perceberam que estes ajudaram na compreensão.

Na análise sobre conhecimentos construídos ou ampliados, os estudantes também se referiram a algumas dificuldades. No G1, os estudantes citaram dificuldades para aprender, dificuldades relacionadas à exigência e que o uso do computador podem ter gerado impasses para alguns. No G2, salientaram que havia uma grande quantidade de conteúdos previstos para uma única matéria e um estudante lembrou-se de ter estudado e ter tido um desempenho médio, por causa de erros cometidos, ou seja, sentiu dificuldade na aprendizagem.

Um fato que surpreendeu no G1 foi a percepção de um estudante que afirmou sentir dificuldades na interação com a professora. Provavelmente isso ocorreu pelo fato de o estudante não ter compreendido a postura didática, proposta por meio de questionamentos reflexivos, pois, em outros momentos, outros estudantes elogiaram justamente essa interação, destacando isso como um ponto positivo.

Também verificou-se que, nos dois grupos, os estudantes indicaram sentir dificuldades na aprendizagem ou na compreensão dos conceitos, devidos, em parte, à uma grande quantidade de conceitos complexos abordados numa única disciplina.

Em relação às análises discentes sobre as percepções do uso dos recursos tecnológicos, em ambos os grupos foi possível perceber que existem proximidades e distanciamentos nas categorias identificadas (ver resumo no Quadro 27).

Quadro 27 – Percepções sobre o uso de recursos tecnológicos (G1/G2)

G1	G2
Facilitou a aprendizagem*:* facilitou/melhorou a compreensão ou a aprendizagem ou o desempenho; ajudou a fixar o conteúdo; facilitou a realização das tarefas e possibilitou ampliar os conhecimentos (além da teoria, possibilitou descobrir novos recursos para solucionar problemas de Álgebra Linear)	***Facilitou a aprendizagem****:* facilitou a aprendizagem ou a compreensão na disciplina (ajudou ou auxiliou no processo da aprendizagem) e possibilitou ampliar o conhecimento (a abordagem possibilitou usar programas na resolução de problemas – última tarefa)
Sentimentos e expectativas*:* gostaram da proposta de uso (apenas um estudante indicou o contrário); as expectativas do uso do computador na avaliação foram atendidas para alguns e outros esperavam mais questões com uso de computadores; sentiram interesse ou motivação para aprender (alguns destacaram que acharam interessante a avaliação ser realizada com computador e alguns salientaram o uso de recursos tecnológicos, especialmente nas tarefas finais); sentiram confiança/segurança nas resoluções (alguns destacaram o uso do computador na avaliação). Um estudante indicou sentir dificuldades com o uso da linguagem natural.	***Sentimentos sobre uso de recursos tecnológicos na disciplina****:* gostaram das tarefas em que as tecnologias foram utilizadas (citaram a aula realizada no laboratório); sentiram segurança/confiança (sentiram mais segurança na resolução e nos resultados) e sentiram que a aula despertou interesse (por ser diferenciada).
Dificuldades percebidas no processo*:* compreensão das tarefas (especialmente no início); limite de tempo para realização das	***Percepções sobre mudanças no ambiente de aprendizagem****:* perceberam que o uso de tecnologias digitais favoreceu o ambiente de

tarefas e dificuldades na avaliação.	aprendizagem (tornou a aula mais dinâmica ou a agilizou; que influenciou a aula positivamente; que estimulou a autonomia e alguns se lembraram de ter uma aula no laboratório de informática).
Sobre Sugestões*:* aumento de tempo para realização das tarefas na disciplina; mais questões com uso de computadores em avaliações; avaliações menores; a disciplina deve continuar com uso de tecnologias; realização de seminários para maior integração da turma; utilização de outros programas mais específicos da área da engenharia e que o ultimo conteúdo seja visto de modo mais prático. Alguns não propuseram sugestões.	***Sobre Sugestões:*** sugeriram mais aulas com uso de tecnologias interativas e que as provas deveriam ser com uso de computadores. Alguns não apresentaram sugestões.
Percepções sobre mudanças no ambiente de aprendizagem: favoreceu o ambiente de aprendizagem (foi uma experiência diferente/ nova, possibilitaram aulas mais descontraídas e dinâmicas, possibilitaram aulas mais práticas, lembraram que algumas aulas ocorreram no laboratório de informática; possibilitaram um clima novo para a aula; melhorou o ambiente das aulas; foi didático e positivo e alguns perceberam que foram importantes em alguns momentos); perceberam que o uso dos recursos tecnológicos aproximou a realidade da sala de aula (os estudantes indicaram que o uso do computador na avaliação é um recurso mais apropriado à época e que possibilitou unir as realidades: mundo tecnológico e sala de aula).	***Dificuldades percebidas no processo:*** a não familiaridade com o software *MATLAB* dificultou o processo para alguns alunos; uso de poucos recursos tecnológicos na disciplina (entenderam que os cálculos manuais estão ultrapassados); indicaram que o uso do *software MATLAB* precisaria de um tempo maior para ambientação.
Percepções sobre possibilidade de usos futuros ou em outras aplicações*: lembraram* que os *softwares* podem ser usados em outras aplicações matemáticas e que podem ser úteis em seus futuros profissionais.	***Percepções sobre possibilidade de usos futuros ou em outras aplicações****:* um estudante percebeu, após nove meses, que pode usar o *MATLAB* na resolução de sistemas lineares sempre que necessário.

Fonte: Autora

Destaca-se que, em ambos os grupos, a percepção mais frequente foi a de que o uso dos recursos tecnológicos facilitou a aprendizagem. Além disso, também foi possível constatar, no G1, que o uso dos recursos tecnológicos influenciam a aprendizagem, pois exigiu que os estudantes tivessem competência para transitar entre diferentes registros semióticos, tendo em vista a resolução de problemas propostos nas tarefas, o que certamente favoreceu a compreensão matemática dos conceitos abordados.

Em relação aos sentimentos, também foi possível verificar que os estudantes de ambos os grupos gostaram de ter feito uso dos recursos tecnológicos digitais e destacaram que sentiram mais segurança nas resoluções dos problemas além de perceberem que as tarefas despertaram seus interesses. Somente no G1, alguns estudantes também destacaram terem gostado da experiência da realização de uma avaliação com uso do computador e apenas um discente salientou sentir dificuldades em se expressar por meio da linguagem natural em justificativas solicitadas.

Em relação às dificuldades percebidas, foram verificados distanciamentos naturais devidos às diferenças pedagógicas aplicadas aos grupos sobre o uso continuado ou não dos recursos tecnológicos digitais. No G1, os estudantes se referiram às dificuldades de alguns sobre a compreensão das tarefas (especialmente no início), bem como destacaram como uma dificuldade o limite de tempo para realização tanto das tarefas e da avaliação, que foi realizada com uso dos computadores. No G2, alguns estudantes perceberam como um problema a falta de familiaridade com o *MATLAB* e também citaram que sentiram como uma dificuldade o pouco uso dos recursos tecnológicos digitais na disciplina. Também perceberam que o uso do *MATLAB* precisaria de um tempo maior para ambientação, ou seja, assim como no G1, os estudantes do G2 também perceberam que a limitação do tempo foi uma dificuldade na tarefa proposta.

Quanto às sugestões, também se nota que apareceram divergências de opiniões devido às diferentes experiências vivenciadas. No G1, as sugestões mais frequentes foram referentes ao aumento do tempo para realização das tarefas, inclusive da avaliação. Os estudantes também recomendaram que seja continuada a proposta de uso de tecnologias digitais, em outros semestres, e que sejam realizados seminários para maior integração da turma. Também sugeriram o uso de programas mais específicos da área da Engenharia e que o último conteúdo seja abordado de modo mais prático. No G2, apareceram sugestões sobre o uso mais frequente de tecnologias interativas em aulas, bem como indicaram que as provas deveriam ser realizadas com o uso de computadores. Nos dois grupos verificou-se que muitos estudantes não apresentaram sugestões.

Quanto às percepções sobre mudanças no ambiente de aprendizagem, em ambos os grupos foi possível constatar que alguns estudantes perceberam que o uso de tecnologias digitais favoreceu positivamente o ambiente de aprendizagem, pois possibilitou que a aula fosse mais dinâmica. Nos dois grupos, apareceram lembranças sobre as aulas desenvolvidas no laboratório de informática. No G1, os estudantes destacaram que foi uma experiência diferente/nova; que as aulas eram mais descontraídas e práticas. Também salientaram que as tarefas realizadas no laboratório computacional possibilitaram um clima novo para as aulas, melhorando o ambiente de ensino. Também indicaram a percepção de que o uso dos recursos tecnológicos possibilitaram aproximar/unir as realidades: mundo tecnológico e ensino presencial. No G2, os estudantes destacaram que o uso dos recursos tecnológicos digitais interativos agilizou a aula e também estimulou a autonomia na resolução de problemas.

Nos dois grupos também foram identificadas percepções sobre possibilidade de usos futuros ou em outras aplicações. No G1, de modo geral, os estudantes indicaram que os *softwares* propostos podem ser usados em outras aplicações matemáticas e que podem ser úteis em seus futuros profissionais. E no G2, apenas um estudante indicou que o *MATLAB* pode ser utilizado na resolução de sistemas lineares, sempre que for necessário.

Quanto às percepções dos estudantes do G1 e do G2 sobre os "*Modos como o uso de recursos tecnológicos influenciou a aprendizagem ou a compreensão***",** também foi possível verificar diversas proximidades, conforme pode ser observado no resumo dos resultados da análise, disponibilizado no Quadro 28.

Nos dois grupos, as categorias intermediárias identificadas com mais frequência estão relacionadas às percepções sobre as vantagens do uso dos recursos tecnológicos na aprendizagem.

Também verificou-se, nos dois grupos, que os estudantes indicaram como vantagens o fato de os recursos tecnológicos facilitarem os cálculos e otimizarem o tempo de resolução, pois evitam erros e possibilitam praticidade e rapidez. Também indicaram que possibilitaram a aproximação de conhecimentos teóricos e práticos e que favoreceram a visualização de registros gráficos e a compreensão dos conceitos envolvidos. Somente no G1, os estudantes destacam como vantagem o fato destes recursos possibilitarem o esclarecimento de dúvidas sobre os conceitos abordados, possivelmente pelo fato de terem feito uso contínuo desses recursos ao longo do semestre.

Quadro 28 – Modos como o uso de recursos tecnológicos influenciou a aprendizagem (G1/G2)

G1	G2
Percepções sobre vantagens no uso de recursos tecnológicos: facilitou os cálculos (nas tarefas, na avaliação e na resolução de problemas, teóricos ou práticos); otimizou o tempo (reduzem o tempo dos cálculos e tornam mais práticas as tarefas; otimizou o tempo na avaliação); possibilitaram aproximar conhecimentos teóricos e práticos (possibilitaram perceber a aplicação do conteúdo ou conhecimento prático na disciplina; comprovar conhecimentos teóricos na prática; favoreceram o esclarecimento de dúvidas sobre os conteúdos teóricos); favoreceu a visualização dos conceitos (favoreceu a percepção visual de conceitos teóricos) e evitou erros de cálculos (na avaliação e nas tarefas).	***Percepções sobre vantagens no uso de recursos tecnológicos:*** facilitou os cálculos (possibilitou praticidade/facilidade e rapidez); possibilitou aproximar conhecimentos teóricos e práticos (possibilitou ver uso da teoria em aplicações e, ainda, a utilização dos recursos de modo prático favoreceu a compreensão); favoreceu a visualização (possibilitou a visualização de gráficos no GeoGebra); otimizou o tempo (evitou perder tempo com resoluções, tornando-as mais rápidas), possibilitou evitar erros de cálculos (possibilitou conferir os resultados).
Uso dos recursos na disciplina mudou o modo de pensar: favoreceu a compreensão (o uso dos recursos tecnológicos digitais na avaliação exigiu conhecimentos teóricos e práticos); era preciso conhecer os métodos para resolver os problemas com uso de recursos tecnológicos; permitiu que houvesse mais tempo para interpretação e desenvolvimento de raciocínios lógicos (possibilitou mais tempo para desenvolver o conhecimento prático e raciocínio lógico nas tarefas e possibilitou mais tempo para interpretação na avaliação) e propiciou liberdade para pensar (um estudante afirmou que sentiu maior liberdade para pensar com o uso dos recursos tecnológicos digitais).	***Uso dos recursos na disciplina mudou o modo de pensar:*** favoreceu a compreensão (favoreceu a observação, interpretação e a compreensão; possibilitou esclarecer conceitos e perceber erros); fez pensar mais; lembraram que para usar os recursos precisavam conhecer os conceitos envolvidos. Também possibilitou perceber que as tecnologias podem ser utilizadas como ferramentas (especialmente na construção de gráficos).

Fonte: Autora

Também foi possível identificar, nos dois grupos, que os estudantes perceberam que o uso dos recursos tecnológicos digitais possibilitou mudar o modo de pensar, pois favoreceu a compreensão.

No G1, os estudantes destacaram que seu uso adequado exigiu o conhecimento teórico e prático dos métodos, o que de fato ajuda a desenvolver o conhecimento abstrato e concreto, referente aos conceitos tratados. Além disso, salientaram que a rapidez, na resolução dos problemas propostos, propiciou mais tempo para reflexões e interpretações necessárias.

Já os estudantes do G2 destacaram que a utilização dos recursos tecnológicos digitais favoreceu a observação, a interpretação e a compreensão do problema apresentado. Salientaram que possibilitou o esclarecimento de dúvidas e facilitou a percepção de erros. Também indicaram que os fez pensar mais, pois para usar adequadamente os recursos disponíveis era preciso conhecer os conceitos envolvidos. E, ainda, afirmaram que perceberam que as tecnologias podem ser utilizadas como ferramentas, especialmente na construção de gráficos.

Além disso, verificou-se que, em relação às lembranças sobre uso de recursos tecnológicos digitais (ver Quadro 29), os estudantes do G1 lembraram-se com mais frequência do GeoGebra e que os estudantes do G2 se lembraram com mais frequência do *MATLAB (*único aplicativo utilizado interativamente pelos estudantes do G2, em sala de aula)*.* Nos dois grupos verificou-se que alguns estudantes citaram finalidades e alguns indicaram que perceberam usos posteriores ao término da disciplina.

No G1, o segundo aplicativo usado e mais lembrado foi a planilha, seguido do *MATLAB.* Em todos eles, foram identificadas lembranças sobre finalidades e usos posteriores. Destaca-se que poucos estudantes do G1 indicaram não se lembrar de usos posteriores dos aplicativos utilizados e que apenas um estudante lembrava-se de ter usado um *software* para manipular matrizes, mas que não se recordava do seu nome.

Destaca-se, também, que, no G1, foram usados slides, vídeos educacionais e a geotecnologia disponibilizada pelo *Google Maps*™, mas os estudantes não se lembraram dessas tarefas, ou seja, não foram significativas, para eles, no processo de aprendizagem de Álgebra Linear.

Quadro 29 – Lembranças sobre uso de recursos tecnológicos digitais (G1/G2)

G1	G2
***Lembranças sobre usos do GeoGebra**:* lembraram-se de finalidades (resolução gráfica de problemas; possibilidade visualização de transformações lineares e representação de vetores) e lembraram-se do uso posterior, na vida pessoal, acadêmica ou profissional (construção de gráficos, resolução de equações, esclarecimento de dúvidas).	***Lembranças sobre usos do MATLAB:*** lembraram-se de finalidades (se lembravam do uso desse aplicativo na resolução de matrizes; na resolução de sistemas lineares; na codificação de matrizes) e lembraram-se de usos, após o término da disciplina, na vida acadêmica (lembraram de usá-lo em cálculos matriciais)
Lembrança sobre usos da planilha: lembraram-se do uso posterior, na vida pessoal, acadêmica ou profissional (usaram o Excel em manipulação de tabelas para organização e tratamento de dados, em outras disciplinas ou em usos pessoais) e lembraram-se de finalidades (resolução ou construção de matrizes, cálculos de expressões matemáticas, na resolução de problemas).	***Lembranças sobre usos do GeoGebra:*** lembraram-se de finalidades (na visualização de gráficos, para compreensão de funções) e lembraram-se de usos, após o término da disciplina, na vida acadêmica (para compreensão de funções em outras disciplinas).
Lembranças sobre usos do MATLAB (ou SciLab): lembraram-se de finalidades (resolução ou construção de matrizes, da realização automática de escalonamentos; da resolução de equações ou de sistemas lineares, para facilitar cálculos de determinantes e escalonamentos, na resolução prática de problemas) e um estudante lembrou-se do uso posterior, da possibilidade de utilização na resolução de problemas reais.	***Lembranças sobre usos do* data show *ou slides em aulas e finalidades na disciplina:*** lembraram-se como um meio facilitador do ensino e da aprendizagem.
Não se lembram de usos posteriores dos recursos tecnológicos digitais vistos na disciplina.	***Não têm usado os recursos tecnológicos digitais, vistos na disciplina, na vida pessoal ou profissional**.*
***Lembrou-se da finalidade mas não do nome do recurso**:* um estudante se recorda deter manipulado matrizes, mas não conseguiu se lembrar do nome do programa.	***Lembraram-se das finalidades, mas não do nome dos recursos tecnológicos utilizados na disciplina:*** alguns estudantes afirmaram ter lembrado do fato de terem usado um programa para manipular matrizes, outros que que usaram um *software* para resolução de sistemas lineares

	Lembranças sobre usos da planilha após o término da disciplina, na vida pessoal ou profissional: um estudante afirmou perceber a potencialidade do uso ***da planilha***, mas não especifica como; um estudante afirmou lembrar do uso ***da planilha*** na disciplina de topografia, um estudante afirmou lembrar do uso ***da planilha*** na manipulação de matrizes, na resolução de problemas reais.
	Lembranças sobre uso *da planilha*, MATLAB, GeoGebra: um estudante afirmou lembrar-se do uso desses aplicativos para facilitar a aprendizagem, mas não citou de que modo, enquanto outro estudante afirmou lembrar do uso desses aplicativos, tanto na vida pessoal quanto na profissional, mas também não disse como.

Fonte: Autora

No G2, o segundo software mais lembrado foi o GeoGebra, seguido da planilha. No entanto, cabe destacar que não se fez uso desses aplicativos em sala de aula, mas como os estudantes devem tê-los usados em disciplinas concomitantes ou posteriores, possivelmente estão referindo-se a esses usos.

No G2, apareceu a lembrança de *slides*, elaborados em *Power Point*, que foram usados como um meio facilitador do ensino e da aprendizagem, possibilitando a apresentação de informações potencialmente significativas de modo dinâmico e prático.

Como no G1 foram exploradas várias tecnologias digitais interativas, que foram mais significativas do que os *slides*, apesar de terem sido amplamente utilizados na maioria das aulas, seu uso passou despercebido pelos estudantes desse grupo.

Assim como no G1, poucos estudantes do G2 indicaram não se lembrar de usos posteriores dos aplicativos utilizados. Alguns estudantes do G2 também indicaram lembrar-se das finalidades do aplicativo utilizado, mas não recordaram-se do seu nome e houve um estudante que afirmou tê-los usado.

Além disso, no G2, um estudante afirmou lembrar-se do uso da planilha, *MATLAB*, GeoGebra para facilitar a aprendizagem na disciplina, mas não citou de que modo. Outro estudante afirmou lembrar-se do uso desses aplicativos tanto na vida pessoal quanto na profissional, mas também não disse como. Ressalta-se que, no G2, apenas fez-se uso interativo do software *MATLAB* na última tarefa. Assim, essas percepções, que aparecem nas lembranças dos estudantes, sobre usos do GeoGebra e da planilha, podem se referir às lembranças de imagens utilizadas em *slides*. Ao longo do semestre, foram apresentados gráficos gerados pelo GeoGebra, bem como foram apresentadas imagens de tabelas geradas pela planilha, na descrição de problemas que envolviam uma grande quantidade de dados.

Assim, destacam-se como *potencialidades*, identificadas no uso de recursos tecnológicos digitais GeoGebra, planilhas e *MATLAB*:

- propiciam vivenciar experiências diferentes, por meio de tarefas mais descontraídas e práticas;
- possibilitam a participação ativa dos estudantes na construção do conhecimento;
- facilitam o armazenamento e manipulação de dados;
- estimulam e favorecem a compreensão e significação de conceitos matemáticos, quando se faz uso adequado dos recursos disponíveis;
- propiciam o desenvolvimento do raciocínio lógico na resolução concreta e abstrata de problemas;
- facilitam a visualização da representação simbólica ou gráfica de problemas;
- possibilitam praticidade, dinamismo e rapidez na resolução de problemas;
- possibilitam exatidão na resolução de problemas, evitando erros de cálculos;
- propiciam confiança/segurança na resolução de problemas;
- facilitam a representação simbólica e o trânsito entre diferentes registros de representação semiótica;
- possibilitam a reflexão crítica sobre diferentes resultados obtidos em simulações realizadas, que podem ser obtidas por meio de variações em parâmetros iniciais do problema;
- estimulam a autonomia na resolução de problemas;
- possibilitam aproximar conhecimentos teóricos e conhecimentos práticos.

Nesse contexto, também foram percebidas as seguintes fragilidades no uso de recursos tecnológicos digitais:

- exigem um tempo maior de preparação, para familiarização dos estudantes com seus usos; o desenvolvimento de tarefas exige um tempo maior para sua realização, pois geralmente o trabalho em grupos exige maior tempo, tanto para orientação como para o esclarecimento de dúvidas que surgem no processo.

Em relação aos grupos considerados na pesquisa, além dos aspectos qualitativos apresentados, também foi realizada uma análise quantitativa de dados relativa aos desempenhos médios finais obtidos pelos estudantes dos grupos analisados, por meio do teste *t.* Comparou-se a situação antes do exame com a situação após exame e constatou-se que a diferença observada não foi significativa, não sendo possível rejeitar a hipótese de médias equivalentes nas duas situações. Assim, apenas pela análise quantitativa realizada, não seria possível afirmar que o grupo que utilizou tecnologia teve um desempenho significativamente melhor do que o grupo que não a usou.

Contudo, ainda cabe destacar que, mesmo que houvesse uma diferença estatística significativa, ainda assim não seria possível afirmar que desempenho médio do grupo G1, que usou tecnologias digitais continuamente, seria melhor unicamente devido ao uso de tecnologias. Cabe lembrar que a identificação de conhecimentos prévios indicou maiores ausências de conceitos prévios relevantes entre os estudantes do G2 do que em relação aos estudantes do G1, o que também pode ter influenciado a aprendizagem.

Também foram calculados percentuais sobre a evasão e a reprovação referentes a dados retrospectivos, sobre desempenho de estudantes, relativos a dez turmas de Álgebra Linear, ministradas pela autora da presente tese, anteriormente à pesquisa realizada. Os resultados indicaram que essa disciplina apresenta, historicamente, altos índices de evasão e de reprovação, sendo que, para o grupo de disciplinas analisado, os percentuais médios aproximados foram de 60,90% de aprovação; 27,12% de reprovação e de 11,98% de evasão.

Como os grupos possuíam características iniciais diferentes e foram submetidos a procedimentos diferenciados, considerar uma comparação direta entre eles, nas tarefas realizadas, não seria apropriado para afirmar se houve maior ou menor compreensão ou aprendizagem significativa entre esses grupos. Por esse motivo, durante toda a análise buscou-se relatar o ocorrido em cada grupo, evitando as comparações diretas.

Buscou-se observar se ocorreram possíveis compreensões ou evoluções e, ainda, se foi possível identificar a presença de ocorrências de aprendizagens significativas em cada grupo. E, ainda, conforme consta no relato das análises apresentadas, foi possível verificar que elas ocorreram, conforme apresentado ao longo da tese.

Durante todo o processo, pela observação realizada em sala de aula, foi possível observar que, apesar de as tarefas serem praticamente iguais (com os mesmos objetivos), os estudantes do G1, ao serem desafiados a resolver os problemas tendo como possibilidade de uso das tecnologias digitais interativas, mostraram-se muito mais ativos e participativos, dispostos a compreender e a realizar as tarefas propostas. No G2, geralmente, não se percebeu o mesmo interesse ou motivação. Notou-se, também, uma interação maior da professora com os estudantes do G1 do que em relação aos estudantes do G2, provocada justamente pelo interesse dos estudantes, que era mostrado pelos estudantes por meio de suas perguntas, relacionadas às tarefas realizadas. Notou-se, inclusive, que o uso das tecnologias propiciou maior proximidade, não somente entre a professora e os estudantes, mas também entre os próprios discentes, que geralmente trabalharam em duplas.

A realização das tarefas no ambiente do laboratório foi bastante exigente, tanto para a professora, quanto para os estudantes. Mas cabe destacar que, ao final de cada aula, notava-se a satisfação da maioria ao finalizar as tarefas. Além disso, demonstravam o sentimento de realização por compreender o que estava sendo proposto.

As expectativas quanto aos resultados dessa pesquisa eram altas em relação à proposta didática investigada. Houve desapontamento ao serem verificados, inicialmente, apenas os resultados obtidos pela análise quantitativa. Porém, ao observar os resultados da análise qualitativa, é possível afirmar que os estudantes que fizeram uso contínuo de tecnologias nas tarefas propostas conseguiram perceber os conceitos matemáticos tratados de modo mais amplo e significativo, justamente pelo fato de serem obrigados a compreender os conceitos abordados, para que pudessem fazer usos adequados dos recursos tecnológicos disponíveis. Essa interação obrigatória de conceitos teóricos prévios, com novas informações que recebiam sobre diferentes possibilidades de usos práticos dos aplicativos, propiciou mais momentos de reflexão sobre os conceitos algébricos tratados do que os ocorridos com os estudantes do G2, que não precisavam fazer esse tipo de exercício de compreensão ou de significação.

Além disso, notou-se que pelo fato das tarefas estimularem muitas transformações entre registros, especialmente as conversões entre eles, acabavam provocando reflexões e compreensões sobre os conceitos tratados. Nesse sentido, o uso da estratégia de resolução de problemas foi uma opção que certamente favoreceu aprendizagens nos dois grupos. Nesses casos, também se destacou o uso dos recursos tecnológicos, pelo fato de terem facilitado o trânsito entre diferentes registros, otimizando o tempo de resolução numérica, possibilitando aos estudantes do G1 um tempo maior para reflexões e interpretações, o que, claramente, favoreceu a aprendizagem.

Ao término da pesquisa, conclui-se que os objetivos propostos foram alcançados, pois com a execução das propostas didáticas elaboradas, foi possível perceber, pela observação e análise dos registros dos dois grupos, as diferentes influências na aprendizagem devido ao uso continuado, ou pontual, de tecnologias digitais no ensino presencial de Álgebra Linear, aplicadas a estudantes do curso de Engenharia Civil.

Também foi possível concluir que as propostas didáticas, alicerçadas na combinação entre pressupostos das teorias da Aprendizagem Significativa e dos Registros de Representação Semiótica, propiciaram ambientes de ensino que favoreceram a compreensão de conceitos bem como possibilitaram a aprendizagem significativa, fundamentais no processo de formação inicial dos futuros engenheiros civis.

Nas análises qualitativas realizadas foram verificados avanços em termos de compreensão dos conceitos investigados em ambos os grupos, embora eles tenham ocorrido com maior frequência no G1, no qual fez-se uso contínuo de tecnologias digitais nas tarefas propostas. No entanto, também se verificou, em ambos os grupos, que algumas dificuldades não foram superadas por alguns estudantes. Ou seja, esse é um indicativo que destaca a necessidade de se continuar com a busca por estratégias adequadas que possibilitem aperfeiçoar os processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra Linear, tendo em vista a melhoria dos resultados obtidos.

Verificou-se, também, que o uso continuado das tecnologias é mais favorável que o uso pontual, tendo em vista que a familiarização com uso de recursos tecnológicos, com a finalidade de construção do conhecimento, é necessária e que precisa de um tempo maior para sua adequação.

A pesquisa não se encerra, pois existem muitos outros caminhos que poderiam ter sido percorridos, tendo em vista a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra Linear.

Atualmente esse é um tema polêmico, que gera muitas dúvidas, incertezas e discussões entre pesquisadores e que necessita de muitas outras investigações semelhantes que ajudem os professores a encontrar melhores caminhos para que possam atuar como mediadores eficazes na aprendizagem dessa disciplina.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. Utilizando animação computacional no estudo de funções. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, v. 1, n. 2, p. 111-125, jul/dez, 2010.

ANDRADE, J.P.G. **Vetores:** interações à distância para aprendizagem de Álgebra Linear. 2010. 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnologia) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

ARAGÃO, R. M. R. **Teoria da aprendizagem significativa de David P. Ausubel: sistematização dos aspectos teóricos fundamentais**. 1976. 109 f. Tese (Doutorado) Universidade Estadual de Educação de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 1976.

ARAYA, E.; VIDOTTI, S. **Criação, proteção e uso legal de informação em ambientes da World Wide Web [online].** São Paulo: Cultura Acadêmica, 2010.

ARTIGUE, M.; DIAS, M. A**.** Articulação de pontos de vista em Álgebra Linear: Caso da representação de subespaços Vetoriais. In: VI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (VI ENEM), 6, 1998, São Leopoldo. **Anais....** São Leopoldo: SBEM. 1998. p. 718- 720.

AUSUBEL, D. P. **The Psychology of meaningful verbal learning**. New York: Grune and Stratton, 1963.

____________. **Educational psychology: a cognitive view**. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BARCELOS, G. T. **Tecnologias na prática docente de professores de matemática: formação continuada com apoio de uma rede social na internet.** 2011. 332f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, Porto Alegre, 2011.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo.** Tradução de Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro – São Paulo: Edições 70, 2011.

BARROS, P. M.; FERNANDES, J. A.; ARAÚJO, C. M. Prontidão de alunos do ensino superior para a aprendizagem de álgebra linear. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo: PUCSP, v.18, n.1, p. 43-59, jan./abril, 2016.

BATTAGLIOLI, C.S.M. **Sistemas Lineares na segunda série do Ensino Médio:** Um olhar sobre os livros didáticos. 2008. 113 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

BECKER, A. J.; SILVA, D. M. I.; DIAS, F. H. S.; PINHEIRO, L. K., **Noções Básicas de Programação em *MATLAB*.** Santa Maria, UFSM, 2010, 68 p. Disponível em: < http://www.inf.ufsc.br/~bosco.sobral/ensino/ine5201/Apostila_MATLAB.pdf>. Acesso em: 24 de nov. de 2016.

BENNEMANN, M.; ALLEVATO, N. S. G. TIC nos artigos do Bolema nos últimos 10 anos. In: XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (XIII CIAEM), 13, 2011, Recife. **Anais....** Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2011, p. 1-12.

BETTEGA, M. H. S. **A Educação Continuada na Era Digital**. São Paulo: Cortez, 2004. (Questões da nossa época, v. 116)

BICUDO, M. A. V.; CHAMIE, L. M. S. Compreendendo e interpretando as dificuldades sentidas pelos alunos ao estarem com a Matemática. **Revista Zetetiké,** Campinas: UNICAMP, ano 2, n. 2, p. 61–69. 1994.

BITTENCOURT, J. Análise de Conteúdo. **Educação.** Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, n. 10, p. 67-72, 1986.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

BONA, A. S.; RIBEIRO, D. As planilhas eletrônicas e a matemática financeira: um espaço para aprender a aprender. **ScientiaTec,** IFRS-Campus Porto Alegre: Porto Alegre, v.3, n.1, p. 16-28, jan/jun, 2016.

BORBA, M. C., CHIARI, A. (Orgs.) **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**. São Paulo: Editora da Física, 2013.

BORBA, M. C., PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 4. ed.. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005.

BRAGA, E. R.; VIALI, L. A planilha como suporte à compreensão dos conceitos das funções afim e quadrática. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNIÓN)**. Madri: Federación Iberoamericana de Educación Matemática (FISEM). n. 26, p. 57-71, abr./jun., 2011.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica.** Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

________. Ministério da Educação (MEC). **LDB – Lei de Diretrizes e bases da educação Nacional** nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Ministério de Educação. Brasília: MEC, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso: 25 out. 2016

________. Ministério da Educação (MEC). **Parâmetros curriculares nacionais:** ensino médio. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

________. Ministério da Educação (MEC). **PARECER CNE/CES 1.362/2001. Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia**. Conselho Nacional de Educação / Câmara de Educação Superior. Brasília: MEC, 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES1362.pdf>. Acesso: 25 out. 2016

________. Ministério da Educação (MEC). **Resolução CNE/CES 11/2002. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia.** Diário Oficial da União, Brasília, 9 de abril de 2002. Seção 1, p. 32. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES112002.pdf>. Acesso em: 31 de agosto de 2016.

CALLEGARI-JACQUES, S. M. **Bioestatística: princípios e aplicações.** Porto Alegre: Artmed, 2003.

CBT, J. **Biografía de David Paul Ausubel.** Publicado em 14 de jan de 2013. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=SenaNKo10WI>. Acesso em: 20 de set. 2016.

CELESTINO, M.R. **Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear:** as pesquisas brasileiras na década de 90, 2000. 114f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

CHAIA, A. V., DAIBERT, M. R. **Minicurso Introdução ao *MATLAB***. Disponível em: <http://professor.pucgoias.edu.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/5679/material/Apostila-MATLAB-ufjf.pdf>. Acesso: 03 de dez 2017.

CHEREGUINI, A. L. C. **Exploração do conceito de multiplicação de matrizes através de tecnologias digitais**: sites e softwares educativos. 2013. 54 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

CHIARI, A. S. S. **O papel das tecnologias digitais em disciplinas de álgebra linear a distância:** possibilidades, limites e desafios. 2015. 206 f. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2015.

CMAP TOOLS. **Cmap Tools Download**. Disponível em: < http://cmap.ihmc.us/cmaptools/cmaptools-download/>. Acesso em: 15 de dez de 2016.

COIMBRA, J.L. **Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da Álgebra Linear**. 2008. 77 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa***:* métodos qualitativo, quantitativo e misto. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CRESWELL, J. W.; PLANO CLARK, V. L. (2007). **Designing and conducting mixed methods research.** Thousand Oaks, CA: Sage, 2007.

CRUZ, C. H. B. Vannevar Bush: uma apresentação. **Revista Latinoamericana de Psicopatologia Fundamental**. São Paulo: Associação Universitária de Pesquisa em Psicopatologia Fundamental**,** v. 14, n. 1, p. 11-13, 2011.

_____________. **O professor universitário na transição de paradigmas**. Araraquara: JM Editora, 1998.

DAL-FARRA, R. A., LOPES, P. T. C. Métodos mistos de pesquisa em educação: pressupostos teóricos. **Nuances: estudos sobre Educação**, Presidente Prudente: Unesp, v. 24, n. 3, p. 67-80, set./dez. 2013.

DEMO, P. **Educar pela pesquisa**. 4. ed. Campinas: Autores Associados, 2000. (Coleção educação contemporânea).

DEVOLDER, R. G. **Uma tecnologia para redação matemática e seu uso na elaboração de um curso de Álgebra Linear**. 2012. 53 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2012.

DEWEY, J. **Democracia e Educação**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959.

DIAS, M. A.Contribution à analyse d'un enseignement expérimental d'álgèbre linéaire en DEUG A première année. **Mémoire de DEA**. Paris: Université de Paris 7, 1993.

_________. Articulation Problems between different systems of symbolic representations in linear algebra. In: 19TH ANNUAL MEETING OF THE INTERNATIONAL FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 19, 1995, Recife. **Anais…** Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 1995, vol. 2, pp. 34-41.

_________.**Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire.**1998a. 504 f. Tese (Doutorado) - Université de Paris 7, Paris, 1998a.

DOMINGUES, J. L. Interesses humanos e paradigmas curriculares. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos.** Brasília: INEP, v. 67, n. 156, p. 351 -366, maio/ago. 1986.

DORIER, J. L. **Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire** – Approches historique et didactique. 1990. 571 f., Tese (Doutorado), Université Joseph Fourier, Grenoble, 1990.

___________**.** État de l'art de la recherche en didactique - À propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques, v. 18, n. 2, p. 191 - 230, 1998.

___________. L'emergence du concept de rang dans l'étude des systèmes d'équations linéaires. In:SEMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES, 1993, Paris. **Anais....**Paris: Université Pierre et Marie Curie, 1993, vol. 3, pp. 159-190.

DORIER, J. L. ET AL. L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année, essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions. In Artigue M. et al. (eds.) **Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France,** pp. 328-342, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1994.

DOWNING, D; CLARK, J. **Estatística aplicada.** Tradução de Alfredo Alves Farias. São Paulo: Saraiva, 1999.

DUVAL, R. Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. In: DIDACTIQUES ET DE SCIENCES COGNITIVES. 1988, Strasbourg. **Anais....** Strasbourg: ULP – IREM, 1988, p. 235-253.

_______Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução do artigo: Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. In: DIDACTIQUES ET DE SCIENCES COGNITIVES. 1988, Strasbourg. **Anais....** Strasbourg: ULP – IREM, 1988, p. 235-253. Tradução: Méricles Thadeu Moretti**. REVEMAT**. Florianópolis: UFSC, v. 6, n. 2, p. 96-112, jul./dez., 2011.

_________ Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da matemática? **Práxis Educativa**, Ponta Grossa: UEPG, v. 7, n. 2, p. 305-330, jul./dez. 2012a

_________ Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la penseé. In: DIDACTIQUE ET DE SCIENCES COGNITIVES, Stransbourg. **Anais...,** Stransbourg: Irem, 1993. vol. 5,. p. 37-65.

_________. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (Org). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.** Campinas, SP: Papirus, p. 11-33. 2003.

__________Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento: tradução do artigo: Duval, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. p. 37- 64. Strasbourg: IREM - ULP, 1993. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**. Florianópolis: UFSC, v. 07, n. 2, p.266-297, jan./jun.,2012b.

_________. **Semiosis et penseé humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals**. Berna: Peter Lang. 1995.

FARIA, E. T. O professor e as tecnologias educacionais. In: ENRICONE, D. (Org.) et al. **Ser professor**. 4 ed. Atual. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 57-72.

FARO, S. D. **Os conhecimentos supostos disponíveis na transição entre o ensino médio e o ensino superior: o caso da noção de sistemas de equações lineares**. 2011 224 f. (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo. 2011.

FIGUEIREDO, E. B.; SIPLE, I. Z.; AZEVEDO, E. B.; MORO, G. Uma experiência de trabalho colaborativo nas disciplinas básicas da Matemática Nos cursos de engenharia. **Revista de Ensino de Engenharia**. Brasília: Associação Brasileira de Ensino de Engenharia, v. 33, n. 1, p. 13-23, 2014.

FIOREZE, L. A. **Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade:** uma análise a partir da teoria dos campos conceituais. 2010, 240 p. Tese (Doutorado em Informática na Educação) –Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, 2010.

FLEMMING, D. M.; LUZ, E. F.; MELLO A. C. C.. **Tendências em educação matemática.** 2. ed. - Palhoça: Unisul Virtual, 2005.

FORBES R.J.; DIJKSTERHUIS E.J. **História da Ciência e da Técnica**: obedecendo a natureza, conquistá-la: Da antiguidade ao século XVII. Lisboa: Ulisseia, 1963.

FRANCO, M. L. P. B. **Análise de Conteúdo**. 3. ed. Brasília: Liber Livro Editora, 2008.

FRANÇA, M.V.D. **Conceitos fundamentais de Álgebra Linear: uma abordagem integrando geometria dinâmica**. 2007. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FURTADO, A.L.C. **Dificuldades na Aprendizagem de Conceitos Abstratos de Álgebra Linear**. 2010. 162 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

GALVÃO FILHO, T. As novas tecnologias na escola e no mundo atual: fator de inclusão social do aluno com necessidades especiais? In: III CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO ESPECIAL, 3, 2002, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: MEC: 2002. .p. 1-17.

GOOGLE MAPS™. **Google Maps™**. Disponível em: https:<//www.google.com.br/maps/preview.> Acesso: 29 de jun. de 2017.

GONZÁLEZ, M. P. **Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial.** Tese (Doutorado em Matemática Educativa). Instituto Politécnico Nacional: Centro de Investigación em Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada - Unidad Legaria: México, D.F., 2009.

GRAVINA, M.A. ET AL(org). **Matemática, mídias e didática**: tripé para a formação do professor de matemática. Porto Alegre: EVANGRAF, 2012.

GRANDE, A. L. **O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear.** 2006. 208f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

GREGORIO, V. L. S. S. **Um olhar sobre os objetos de aprendizagem no ensino da matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.** 2011

1 f. (Mestrado Acadêmico em Cognição e Linguagem) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro, RJ. 2011.

HABERMAS, J. **Conhecimento e interesse**. Rio de janeiro: Editora Guanabara, 1987.

HOHENWARTER, M. 2007. **GeoGebra - INFORMAÇÕES**. Disponível em: https://app.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf. Acesso em: 13 de agosto 2016.

JAMMAL, E. F. **Os ostensivos e não ostensivos utilizados no estudo das noções de ponto e reta no plano no ensino médio**. 2011. 244 f. (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo. 2011.

JORDÃO, A. L. I.; BIANQUINI, B. L. Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio. **REVEMAT**. Florianópolis: UFSC, v.9, n. 2, p. 69-86, 2014.

KAMPFF, A. J. C. **Tecnologia da informática e comunicação na educação**. Curitiba: IESDE Brasil S/A., 2006.

KARRER, M. **Articulação entre álgebra linear e geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica**. 2006. 435 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

KENSKI, V. M. Aprendizagem mediada pela tecnologia. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, v. 4, n.10, p.47-56, set./dez. 2003.

_______________ **Educação e tecnologias:** o novo ritmo da informação. Campinas: Papirus, 2012.

KRIPKA, R. M. L.; KRIPKA, M.; PANDOLFO, P. C. N.; PEREIRA, L. H. F.; VIALI, L; LAHM, R. A. Aprendizagem de Álgebra Linear: explorando recursos do GeoGebra no cálculo de esforços em estruturas. **Revista Acta Scientiae**, Canoas: Universidade Luterana do Brasil. v. 20, n.4, p. 544-546, jul./ago., 2017.

KRIPKA, R. M. L.; VIALI, L., LAHM, R. A utilização dos recursos do *Google Earth*™ e do *Google Maps*™ no ensino de ciências. **Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa,** Cáceres (Espanha)*:* Universidad de Extremadura, v. 13, p. 89-101, ago./set., 2014.

_______________________________ Tecnologias de Informação e Comunicação na Formação de Professores. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**. Vitória: Instituto Federal do Espírito Santo, v. 6, n. 01, p. 45 - 57, março, out./dez., 2016.

KOLMAN, B.; HILL, D. R. **Introdução a Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC,. 2006.

LEÃO, M. F; REHFELDT, M. J. H.; MARCHI, M. I O uso de um ambiente virtual de aprendizagem como ferramenta de apoio ao ensino presencial. **Abakós**, Belo Horizonte: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, v. 2, n. 1, p. 32–51, ago./dez, 2013.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática.** Trad. Carlos Irineu da Costa. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora 34, 2010.

_________. **O que é o virtual?** São Paulo: Editora 34, 1999.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São Paulo. Cortez, 1994.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus. 2003.

MARCHETTO, R. Utilização do software *MATLAB* como recurso tecnológico de aprendizagem na transformação de matrizes em imagens. **REVEMAT**. Florianópolis: UFSC, v.11, n. 1, p. 118-130, 2016.

MARIANI, V. C.; MARTIM, E. Aplicações do *MATLAB* no ensino de disciplinas básicas nos cursos de engenharia. In: XXXI CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA (XXXI COBENGE), 31, 2003, Rio de Janeiro. **Anais**.... Rio de Janeiro/RJ: Associação Brasileira de Educação em Engenharia (ABENGE), 2003. p.1-9.

MASETTO, M. T. Mediação Pedagógica e o uso da tecnologia. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica.** 21 ed. Campinas, SP: Papirus, 2013. p. 141-171. (Coleção Papirus Educação).

MINAYO, M. C. de S. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde**. 12. ed. São Paulo: Hucitec, 2010.

MONTEIRO, M. F. S. **Retas e planos na geometria analítica espacial:** uma abordagem envolvendo conversões de registros semióticos com o auxílio de um software de geometria dinâmica. 2011. 248 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo. 2011.

MONTEIRO, A.; BARROS, R. As Tecnologias da Informação e da Comunicação e o Desenvolvimento de Estratégias de Resolução de Problemas por Estudantes do Ensino Superior da área da Saúde. **EaD em Foco**, v. 6, n. 3, p. 50–58. 2016.

MORAES, M. C. Informática educativa no brasil: um pouco de história. **Em Aberto**, Brasília: INEP, ano 12, n.57, p.17-26, jan./mar. 1993.

MORAES, R. Análise de Conteúdo. **Educação: Revista da Faculdade de Educação**, Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, v. 21, n. 34, p. 7 –32, mar. 1999.

___________. Uma experiência de pesquisa coletiva: introdução à análise de conteúdo. In: GRILLO, M.C.; MEDEIROS, M.F. (Orgs*).* **A construção do conhecimento e sua mediação metodológica***.* Porto Alegre, EDIPUCRS, 1998, p.111-130.

MORAN, J. M. **As mídias na educação**. 2008. Disponível em: < http://smec.salvador.ba.gov.br/site/documentos/espaco-virtual/espaco-edu-com-tec/artigos/midias%20na%20educa%C3%A7ao.pdf>. Acesso em ago. de 2017.

_____________. O vídeo na sala de aula. **Comunicação e Educação**. São Paulo: Universidade de São Paulo, v.1, n.2, p. 27-35, jan./abr.,1995.

_____________. **A educação que desejamos**: novos desafios e como chegar lá. Campinas: Papirus, 2007.

MORAN, J. M Ensino e aprendizagem inovadores com apoio de tecnologias. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica.** 21 ed. Campinas, SP: Papirus, 2013. p. 11-72. (Coleção Papirus Educação).

_____________. **Mudar a forma de ensinar e de aprender: Transformar as aulas em pesquisa e comunicação presencial-virtual**. 2000. Disponível em**: <**http://www.eca.usp.br/prof/moran/site/textos/tecnologias_eduacacao/uber.pdf>. Acesso em: 03 de ago. de 2017

MOREIRA, M. A. Al final, qué es Aprendizaje Significativo?: **Revista Qurriculum.** La Laguna: Universidad de La Laguna, v. 25, p. 29-56, jan./dez., 2012.

______________ **Aprendizagem significativa**. Coleção Publicações Acadêmicas do CESPE/UNB. Brasília: Editora da UNB, 1999.

_______________. **Ensino e aprendizagem - enfoques teóricos**. 2. ed., São Paulo: Ed. Moraes, 1985.

_______________. **Organizadores prévios e aprendizagem significativa**. 2012a. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/>. Acesso em: 20 set. 2016.

_______________. **Mapas Conceituais e Aprendizagem significativa**. 2012b. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/ >. Acesso em: 20 set.2016.

MOREIRA, M. A. **Metodologias de Pesquisa em Ensino.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. **Aprendizagem significativa – A teoria de David Ausubel**. São Paulo: Editora Moraes, 1982.

MORGADO M. J. L. **Formação de professores de matemática para o uso pedagógico de planilhas eletrônicas de cálculo de análise de um curso a distância via Internet.** 2003. 284 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

NÓVOA, A. Para una formación de profesores construída dentro de la profesión. **Revista de Educación**, Madri: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, n. 350, p. 1-10, set./dez., 2009.

OLABUENAGA, J.I. R.; ISPIZUA, M.A. **La descodificacion de la vida cotidiana: metodos de investigacion cualitativa.** Bilbao: Universidad de Deusto, 1989.

OLIVEIRA, C. L. **Significado e contribuições da afetividade, no contexto da Metodologia de Projetos, na Educação Básica**. 2006. Dissertação (Mestrado) – CEFET-MG, Belo Horizonte, MG, 2006.

OLIVEIRA, C.; MOURA, S. P.; SOUZA, E. R. TIC'S na educação: a utilização das tecnologias da informação e comunicação na aprendizagem do aluno. **Pedagogia em Ação**. Belo Horizonte: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, v. 7, n. 1, p. 75-95, jan./dez.,2015.

OLIVEIRA, J. A.; SILVA, A. M. C.; PINHEIRO, N. A. M.; SILVEIRA, R. M. C. F. A Informática no processo de Ensino e Aprendizagem de matemática. In: I SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1, 2009, Ponta Grossa. **Anais**.... Ponta Grossa: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia (PPGECT)/ Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), 2009, p. 833-850.

PAPERT, S. **A máquina das crianças:** repensando a escola na era da informática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PAVLOPOULOU, K. **Propédeutique de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation sémiotique**. 1994. 241 f. Tese (Doutorado) Université Louis Pasteus, Strasbourg, 1994.

PARMEGIANI, R. Explorando as transformações lineares no plano com o uso do *MATLAB*. In: XXXIX CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA (XXXIX COBENGE), 39, 2011, Blumenau. **Anais....** Blumenau: Associação Brasileira de Educação em Engenharia (ABENGE), 2011. p. 1-10.

PERALI, L. C**. Operações com vetores e suas aplicações no estudo da física:** uma abordagem envolvendo conversões de registros semióticos com auxílio de um ambiente de geometria dinâmica. 2011 217 f. (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo. 2011.

PERRENOUD, P. Formar professores em contextos sociais em mudança: prática reflexiva e participação crítica. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação **(**ANPEd**).** n. 12, p. 5-21, set./dez., 1999.

_____________. **Pedagogia na escola das diferenças**: fragmentos de uma sociologia do fracasso. Trad. Cláudia Schilling. 2. ed. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

POZO, J. I. **Aprendizes e mestres: a nova cultura da aprendizagem**. Trad.: Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed Editora, 2002.

PONTE, J. P. Álgebra no currículo escolar. **Educação e Matemática.** Lisboa: Revista da Associação dos Professores de Matemática. n. 85, p. 36-42, nov./dez., 2005.

__________. Formação do professor de Matemática: perspectivas atuais. In: PONTE, J. P. (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.** 1. ed. [S.l: s.n.], 2014. p. 343–360.

PORTO, T. M. E. As tecnologias de comunicação e informação na escola; relações possíveis...relações construídas. **Revista Brasileira de Educação.** Rio de Janeiro: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação **(**ANPEd**).** v. 11, n. 31 p. 43-57, jan./abr., 2006.

PRENSKY, M. **Digital Natives, Digital Immigrants**. 2001. Disponível em <www.marcprensky.com/writing> Acesso em 10 de julho de 2016.

___________ O papel da tecnologia no ensino e na sala de aula. **Conjectura:** Filosofia e Educação . Caxias do Sul: Universidade de Caxias do Sul, v. 15, n. 2, p. 201-204, mai./ago., 2010.

PRETTO, N. L. **Uma Escola com/sem futuro.** Campinas: Papirus, 1996.

PRETTO, N. L.; RICCIO, N. C. R. A formação continuada de professores universitários e as tecnologias digitais. **Educar***.* Curitiba: Universidade Federal do Paraná, n. 37, p. 153-169, maio/ago. 2010.

PREZOTTI FILHO, P. R. **Uma Proposta de Ensino dos Temas Sistemas Lineares e Determinantes.** 2014. 102 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória, 2014.

QUEIROZ, E.M. **Teorias de Aprendizagem**. UNINOVE. 57 p. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/42079973/TeoriasAprendizagem>. Acesso em: em 20 set 2017.

RAMALHO JÚNIOR, F.; FERRARO, N G.; SOARES, P. A. T. **Os Fundamentos da Física**. 10. ed. São Paulo: Moderna, 2009.

RANGEL, W. S. A. **Projetos de Modelagem Matemática e sistemas lineares:** contribuições para a formação de professores de matemática**.** 2011. 139 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

RESENDE, G.; MESQUITA, M. G. B. F. Principais dificuldades percebidas no processo ensino-aprendizagem de matemática em escolas do município de Divinópolis, MG. **Educação. Matemática e Pesquisa***.* São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, v.15, n.1, p.199-222, jan./mar., 2013.

RIBEIRO, J. R.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor:** explorando conceitos de equação e de função. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

RICHIT, A.; FARIAS, M. M. R.; MISKULIN, R. G. S. CABRAL, L. F.Articulação entre Álgebra Linear e Tecnologias Digitais: perspectivas de exploração matemática no software GeoGebra. In: VII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA (VII CIBEM), 6, 2013, Montevidéo. **Anais...** Montevidéo: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (SEMUR). 2013. p. 515-522.

RODRIGUES, J. R. **Criação de um software de apoio ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear:** base e dimensão de um espaço vetorial. 2009. 150 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

ROSA, R. R.; VIALI, L. Utilizando recursos computacionais (planilha) na compreensão dos Números Racionais. **Bolema (Boletim de Educação Matemática).** Rio Claro: Universidade Estadual Paulista (UNESP), n. 31, p. 183-199, jan./abr., 2009.

SANTOS, P. M. **Aplicação da modelagem matemática no ensino médio à luz da Teoria Dos Registros De Representação Semiótica.** 2012. 69 f. (Mestrado Acadêmico em Cognição e Linguagem) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro. 2012.

SCILAB. **History.** Scilab Enterprises S.A.S 2015. Disponível em: <http://www.scilab.org/scilab/history>. Acesso em: 09 de nov. de 2016.

SILVA, A. C. **Teste *t* de Student.** Universidade Federal do Pará. 2013. Disponível em: < http://www.ufpa.br/heliton/arquivos/aplicada/seminarios/M1_01_Ana_Silva_testes_t_student_igualdade_variancias.pdf > Acesso em: 15 jul. 2016.

SILVA, A. M. **Uma análise da produção de significados para a noção de base em Álgebra Linear**.1997. 147f. Dissertação (Mestrado). Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, RJ, 1997.

SILVA, A. V. M. **Caderno de atividades com o software GeoGebra: sistemas lineares.** 2014. 16 f. Produto de Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2014.

SILVA, C. X.; BARRETO FILHO, B. **Matemática:** participação & contexto: ensino médio. São Paulo: FTD, 2008.

SILVA, C. Z. S. B. **Ensino de Álgebra Linear I:** uma experiência na Universidade do Amazonas. 1994. 79 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, RJ, 1994.

__________ **Álgebra Linear como curso de serviço para a Computação**. 1999. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 1999.

SOUZA, C. A., DE BASTOS, F.P., ANGOTTI, J.A.P. Redes e formação inicial dos professores em ciências naturais e tecnologias. In: III Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências. 3, 2001, São Paulo. **Anais....** São Paulo: SBF.

SOUZA, V. R. B. **Cônicas, álgebra linear e GeoGebra, uma combinação que deu certo.** 2014. 82 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Introdução à álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1987.

STORMOWSKI, V., GRAVINA, M. A., LIMA, J. V. Tecnologia na aula de matemática: a importância do potencial semiótico. **Revista Novas Tecnologias na Educação (RENOTE)**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, v. 11, n. 3, p. 1-10, set./dez., 2013.

TRIOLA, M. F. **Introdução à estatística: atualização da tecnologia**. Tradução de Ana Maria Lima de Farias, Vera Regina Lima de Farias e Flores. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução a Pesquisa em Ciências Sociais: a pesquisa qualitativa em educação.** São Paulo: Atlas, 1987.

VALADARES, J. A Teoria da Aprendizagem Significativa como Teoria Construtivista. **Aprendizagem Significativa em Revista (Meaningful Learning Review).** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, v. 1, n. 1, p. 36-57, jan./abr., 2011.

VALENTE, J. A. Análise dos diferentes tipos de softwares usados na Educação In J. A. Valente (org) **O Computador na Sociedade do Conhecimento**. Campinas (SP): NIED-UNICAMP, p. 71-84. 1999a.

______________. **Computadores e Conhecimento**: repensando a educação. Campinas: UNICAMP/NIED, 1993a.

_______________ Diferentes usos do computador na Educação. **Em Aberto**, Brasília: INEP, Ano 12, n.57, p.3-16, jan./mar.,1993b.

_______________ **Informática na educação: instrucionismo x construcionismo**. 1997. Disponível em: <https://divertire.com.br/educacional/artigos/7.htm>. Acesso em: 26 nov. 2017.

_______________. Informática na Educação: uma questão técnica ou pedagógica? **Pátio**. Porto Alegre: Grupo A, ano 3, n. 9, p. 20-23, mai./jul., 1999b.

_________________ Informática na Educação no Brasil: análise e contextualização histórica. In J. A. Valente (org) **O Computador na Sociedade do Conhecimento**. Campinas (SP): NIED-UNICAMP, p. 11-28. 1999c.

VEEN, W.; VRAKKING, B. **Homo Zappiens**: educando na era digital. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIALI, L. **Tabelas**. Série Estatística Básica. 2016. Disponível em: <http://www.pucrs.br/famat/viali/graduacao/engenharias/material/apostilas/Tabelas.pdf>. Acesso: 16 de junho de 2017.

VIALI, L.; BERLIKOWSKY, M. E. Cerveja e estatística: vida e obra de um mestre cervejeiro. **Vidya.** Santa Maria, v. 36, n. 2, p. 507-522, jul./dez., 2016.

WELLS, G. **Indagación dialógica***:* hacia una teoría y una práctica socioculturales de la educación. Barcelona: Paidós, 2001.

YIN, Robert K. **Estudo de caso: planejamento e Métodos.** Trad. Daniel Grassi - 2.ed. -Porto Alegre: Bookman, 2001

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 2008.

ZUGNO, G. M. M.; SILVA, M. J.; SILVA, R. S. Sobre o uso das tecnologias digitais e suas implicações no estudo da existência de soluções para sistemas 2x2: uma análise por meio da mudança no tratamento semiótico à luz da teoria de Raymond Duval. **Revista Eletrônica de Matemática (REMAT)**. Bento Gonçalves: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), v. 1, n. 1, jan./jun., 2015.

ANEXOS

Anexo 1: Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado estudante,
Você está sendo convidado(a) a participar de um estudo intitulado "Aprendizagem significativa e ensino de Álgebra Linear: explorando registros semióticos por meio de recursos das TIC". Esse estudo possibilitará compreender como processos de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear podem ser influenciados por inovações didáticas e pelo uso de tecnologias de informação de comunicação (TIC), o que poderá auxiliar no planejamento e qualificação de nossas aulas. Os dados obtidos na pesquisa serão usados na elaboração do trabalho de doutorado da pesquisadora Rosana Maria Luvezute Kripka, sob orientação do Prof. Dr. Regis Alexandre Lahm. Antes de aceitar sua participação, solicitamos que você leia as informações contidas nesse documento.

OBJETIVOS DO ESTUDO

(i) Identificar conhecimentos prévios sobre conceitos da disciplina de Álgebra Linear.
(ii) Desenvolver uma proposta didática para ensino e aprendizagem a serem aplicados em uma disciplina de Álgebra Linear para alunos do ensino superior.
(iii) Aplicar a proposta elaborada e atividades que explorem softwares computacionais para resolução de problemas propostos.
(iv) Realizar a constituição de dados para avaliação da proposta.
(v) Analisar os dados visando verificar se a proposta propiciou construção de novos conhecimentos e se houve aprendizagem significativa em matemática;
(vi) Verificar potencialidades ou fragilidades das atividades propostas ao explorar o trânsito entre diferentes registros semióticos dos conceitos tratados.
(vii) Interpretar os dados visando identificar potencialidades ou fragilidades no uso dos recursos tecnológicos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem propostos.

PROTOCOLO DO ESTUDO

A aplicação da pesquisa ocorrerá no decorrer da disciplina de Álgebra Linear, que ocorrem as segundas-feiras de 8h às 9h e 40 min e quartas-feiras de 9h 55min às 11h 35 min, durante 25 encontros de 2h/aula de duração. Os encontros ocorrerão em sala de aula normais e em salas de aula do Laboratório Central de Informática (LCI) da IES, RS, BR, localizado no prédio B5, sala 206. A pesquisa se realizará no período de abril a junho de 2015. Não estão previstas atividades fora do dia e horário de aula.

MODO DE COLETA DE DADOS

Para a coleta de dados serão utilizados questionários, entrevistas, produção dos alunos nos trabalhos, e anotações no diário de bordo da pesquisadora.

BENEFÍCIOS

Ao participar do estudo, você estará auxiliando os pesquisadores a reconhecer as percepções do grupo de estudantes sobre as propostas pedagógicas aplicadas, o que poderá trazer benefícios futuros para a proposição de inovações metodológicas para o ensino de Álgebra Linear, o que também poderá ajudar a melhorar a qualidade da aprendizagem nessa disciplina.

CONFIDENCIALIDADE

Os dados dos questionários e os resultados individuais e coletivos do estudo são confidenciais e não poderão ser utilizados para outros objetivos que não estejam descritos neste termo. Os resultados deste estudo deverão ser publicados, mas a identidade dos participantes não será revelada em nenhum momento. Somente o pesquisador poderá identificar a origem das amostras. O Comitê de Ética em Pesquisa da PUCRS poderá ter acesso aos dados da pesquisa para poder asseguras que seus direitos estão sendo protegidos.

DIREITO DE CANCELAR A PARTICIPAÇÃO NO ESTUDO

Os estudantes participantes podem, em qualquer momento, cancelar sua participação no estudo. Isto não influenciará o andamento do estudo e seus resultados futuramente.

QUESTÕES/DÚVIDAS

Qualquer dúvida sobre os direitos dos participantes do estudo, favor entrar em contado com Rosana Maria Luvezute Kripka (54-81125554), Dr. Regis Alexandre Lahm (51-81794073) ou diretamente com o Comitê de Ética e Pesquisa da PUCRS (51-3320-3345). O participante receberá uma via do documento que será elaborado em 2 vias (a outra via assinada fica de porte da Pesquisadora). Funcionamento do CEP (Comitê de Ética e Pesquisa da PUCRS): segunda a sexta feira, das 8h às 12h e das 13h30min às 17h. Endereço: Av. Ipiranga, 6681, Prédio 40, 5º andar, sala 505, PUCRS. CEP 90619-900.

Favor preencher abaixo se concordar em participar do estudo:
Eu, ____, fui informado (a) dos objetivos desta pesquisa de forma clara e detalhada. Recebi informações sobre os procedimentos que serão feitos. Todas as minhas dúvidas foram esclarecidas e sei que poderei solicitar novas informações a qualquer momento. Além disso, sei que as informações obtidas durante o estudo são confidenciais e privadas, e que poderei retirar-me do estudo a qualquer momento.

____

________________ de __________________ de 2016.

Atenciosamente,
Rosana Maria Luvezute Kripka – Licenciada em Matemática e professora da UPF/RS/BR.

Anexo 2: Questionário: Identificação de Conhecimentos Prévios

1. Você se lembra de ter aprendido matrizes em algum momento do ensino básico? O que são ou como você as compreende? Para que são utilizadas?

2. Você se lembra de ter aprendido determinantes em algum momento do ensino básico? O que são ou como você os compreende? Para que são utilizados?

3. O que você lembra em relação aos sistemas lineares? Explique o que são e, se recordar, indique também para que servem.

4. Você se lembra de ter estudado vetores? Quando ou como os estudou (em que contexto)? O que eles são? Para que servem?

5. O que você lembra em relação ao estudo de funções lineares? Explique o que são e, se recordar, indique também para que servem.

____

____

Prezado estudante!

Agradeço muito sua colaboração, pois suas respostas vão ajudar no planejamento e na qualificação de nossas aulas. As informações solicitadas a seguir, servirão para qualificar o processo de ensino, bem como para identificar possíveis dificuldades de aprendizagem. Agradeço novamente a sua disposição em colaborar! Profa. Rosana.

Dados Gerais

Nome:____

Data de Nascimento: Dia: ___________ Mês:___________ Ano: ______________

Sexo: ☐ Feminino ☐ Masculino

Cidade onde Reside: ____

Tem filhos? ☐ Sim ☐ Não. Se a resposta for “Sim”, informe quantos: _________

Atualmente reside com: ☐ Pais ☐ Sozinho ☐ Cônjuge ☐ Filhos ☐ Colega(s)

Escola de Procedência: ☐ Col. Público ☐ Col. Particular ☐ Col. Púb./Part.

Tipo de Ensino médio: ☐ Regular ☐ EJA/ supletivo

Período do Ensino médio: ☐ Diurno ☐ Noturno ☐ Diurno/Noturno

Ano de término do Ensino Médio: ______________________________________

Curso atual de graduação:____

Ano de ingresso na IES: ____

Atualmente está trabalhando? _______ **Quantas horas semanais?** __________

Você já cursou essa disciplina? ☐ Sim ☐ Não. Se a resposta for “Sim”, informe quantas vezes a cursou, quando foi realizada e quem foi o professor_____________

Você possui algum problema de saúde que acredite que possa influenciar em sua aprendizagem? ☐ Sim ☐ Não. Se a resposta for “Sim”, informe qual é:

____

Anexo 3: Questionário: Método de Triangulação e Planilha

Atividade 9 – Questionário sobre Método de triangulação com planilha Excel

1. Você compreendeu o método de triangulação de matrizes? Para que serve?

____
____
____
____
____

2. As atividades propostas na aula com uso da planilha Excel ajudaram ou atrapalharam a compreensão do método? Por que?

____
____
____
____
____

3. Você gostou das atividades ou não? Por que?

____
____
____
____
____

Anexo 4: Questionário: Avaliação com uso de Tecnologias Digitais

Questionário sobre uso de tecnologias digitais na II Avaliação (G1)

Oi pessoal,
para me ajudar a compreender como percebem a proposta da disciplina, gostaria de solicitar que me respondessem, por e-mail mesmo, a seguinte pergunta:

Como você percebeu (sentiu) a possibilidade de o uso dos recursos tecnológicos durante a realização da avaliação? Mudou algo? De que modo? Era como você esperava?

Fico muito agradecida por responderem, pois suas percepções vão ajudar na elaboração de novas atividades/ avaliações.
Abraços,
Profa. Rosana M. L. Kripka

Anexo 5: Questionário Final

Prezado estudante!

Ao responder as perguntas a seguir você estará ajudando a perceber como ocorreu a aprendizagem significativa em Álgebra Linear, ocorrida no semestre passado, o que possibilitará avaliar a metodologia utilizada e o futuro planejamento e qualificação das aulas de Álgebra Linear! Profa. Rosana.

Questionário Final

1. A disciplina possibilitou que você compreendesse o que são matrizes e onde podem ser utilizadas? Explique.
2. A disciplina possibilitou que você compreendesse o que são determinantes e onde podem ser utilizados? Explique.
3. A disciplina possibilitou que você compreendesse o que são sistemas lineares e onde podem ser utilizados? Explique.
4. Após o estudo de espaços vetoriais, a disciplina possibilitou que você compreendesse ou ampliasse o conceito de vetores? Por que?
5. Como você compreende as transformações lineares? O que são do ponto de vista matemático? Elas são importantes na Engenharia Civil? Por que?
6. Como você compreende os autovalores e autovetores? O que são do ponto de vista matemático? Eles são importantes na Engenharia Civil? Por que?

Prezado estudante!

Agradeço muito sua colaboração pois suas respostas vão ajudar na avaliação da metodologia utilizada e no futuro planejamento e na qualificação das aulas de Álgebra Linear! Profa. Rosana.

Anexo 6: Questionário sobre uso de Tecnologias

Prezado estudante!

Ao responder as perguntas a seguir você estará ajudando a perceber como ocorreu a aprendizagem em Álgebra Linear, neste semestre, o que possibilitará avaliar a metodologia utilizada e o futuro planejamento e qualificação das aulas de Álgebra Linear! Profa. Rosana.

Questionário - Uso de tecnologias

1. Você acredita que o uso de tecnologias influenciaram a aprendizagem da Álgebra Linear, facilitando ou atrapalhando o processo? Explique e, se possível, exemplifique com suas percepções sobre as atividades propostas.

2. Você gostou das atividades onde foram utilizadas as tecnologias? Como se sentiu? Teria alguma sugestão para melhoria das atividades?

Prezado estudante!

Agradeço muito sua colaboração pois suas respostas vão ajudar na avaliação da metodologia utilizada e no futuro planejamento e na qualificação das aulas de Álgebra Linear! Profa. Rosana.

Anexo 7: Questionário Compreensão e Aprendizagem Significativa

Prezado estudante! Ao responder as perguntas a seguir você estará ajudando a perceber como e se ocorreu a construção de conhecimentos na disciplina de Álgebra Linear (ministrada no ano passado). Isso possibilitará avaliar a metodologia utilizada, bem como o futuro planejamento, visando a qualificação das aulas. Como já faz algum tempo, solicito que reflitam antes de responder e que respondam apenas pelo que se lembram. Evitem consultar os materiais de aula. Agradeço muito a sua colaboração. Abraços. Profa. Rosana.

Questionário Compreensão e Aprendizagem Significativa

1. Quais são os tópicos que você lembra terem sido abordados na disciplina de Álgebra Linear? Caso lembre, explique o que significam.
2. Você já viu aplicações ou usou conceitos abordados nessa disciplina em outras disciplinas do curso? Se já percebeu, comente sobre eles e, se possível, exemplifique.
3. Você usou ou está usando os conhecimentos construídos na disciplina de Álgebra Linear em alguma aplicação profissional ou pessoal? Se a resposta for afirmativa, explique como isso ocorreu e, se possível, exemplifique.
4. Você se recorda quais foram os recursos tecnológicos utilizados nas aulas? Qual a finalidade de cada um deles?
5. Cite exemplos de uso dos recursos tecnológicos digitais vistos na disciplina em sua prática pessoal ou profissional.
6. Na sua opinião, o uso de recursos tecnológicos digitais influenciaram de que maneira a compreensão dos conceitos de Álgebra linear abordados? Explique sua resposta e cite exemplos, se possível.
7. Como você percebeu o método de ensino e de aprendizagem usada na disciplina? Cite aspectos positivos ou negativos sobre o desenvolvimento das aulas, destacando o que mais chamou sua atenção.

Anexo 8: Tarefa 1

Tarefa 1 - Representação de problemas por meio de Sistemas Lineares.

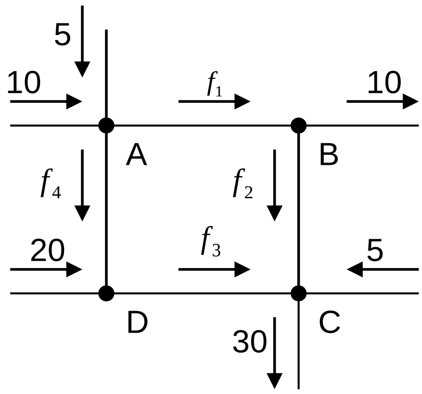
1. Vídeo sobre resolução de problemas: A voz do interior. Fonte: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1192

2. Desafio: Num parque de diversões o dono resolveu fazer uma promoção, cobrando o ingresso de adulto R$ 5,00 e de criança R$ 3,00. No final do dia a catraca registrou que 2000 pessoas entraram no parque e a bilheteria arrecadou R$ 7600,00. Quantos adultos e crianças entraram no parque?

3. Exemplo de Equilíbrio de esforços em estruturas: apresentação projeto de extensão uma ponte para o futuro.

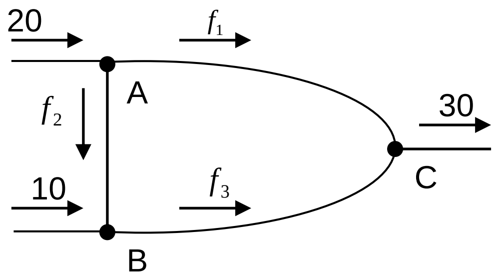
4. Análise de redes: Sabendo que, para existir conservação do fluxo em uma rede, é necessário que em cada nó de uma rede, todo o fluxo de entrada é igual ao fluxo de saída, obtenha um sistema que possibilite calcular os possíveis fluxos através da rede de encanamento de água, mostrada na Figura 1. (POOLE, 2004, p. 100)

Figura 2: Rede de encanamento de água



5. Desafio: A Figura 3 mostra uma rede de canos de água com fluxo medido em litros por minuto. Obtenha o sistema de equações lineares que possibilita encontrar os fluxos possíveis na rede:

Figura 3: Rede de canos de água com fluxo medido em litros por minuto.



Anexo 9: Tarefa 2 (com uso de tecnologias digitais)

Tarefa 2 (com tecnologias): Resolução de Sistemas com Duas Variáveis

Exercícios a serem desenvolvidos em duplas durante a aula e a resolução deve ser entregue para avaliação.

Nomes da dupla:____

Para todos os sistemas lineares a seguir faça:

a) Resolva o sistema linear, apresentando a(s) estratégia(s) utilizadas para comprovar a solução encontrada (caso exista). Caso não exista solução apresente também sua argumentação.
b) Caso existam infinitas soluções, forneça duas soluções particulares.
c) Classifique o sistema, justificando suas respostas.

1. $\begin{cases} x+2y=-3 \\ 3x+y=1 \\ 4x-5y=14 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-3y=-5 \\ 6x+2y=10 \\ 3x+y=5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+3y=3 \\ 2x+6y=6 \\ 5x+15y=15 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y=7 \\ 3x-y=13 \\ x-4y=-3 \\ x+3y=15 \end{cases}$

Anexo 10: Tarefa 2 (sem uso de tecnologias digitais)

Atividade 2 (sem tecnologias): Resolução de Sistemas com Duas Variáveis

Exercícios a serem desenvolvidos em duplas durante a aula e a resolução deve ser entregue para avaliação.

Nomes da dupla:

____

Para todos os sistemas lineares a seguir faça:

a) Resolva o sistema linear, apresentando a(s) estratégia(s) utilizadas para comprovar a solução encontrada (caso exista). Caso não exista solução apresente também sua argumentação.

b) Caso existam infinitas soluções, forneça duas soluções particulares.

c) Classifique o sistema, justificando suas respostas.

1. $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + y = 1 \\ 2x + 2y = -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x + 6y = 6 \\ 5x + 15y = 15 \end{cases}$

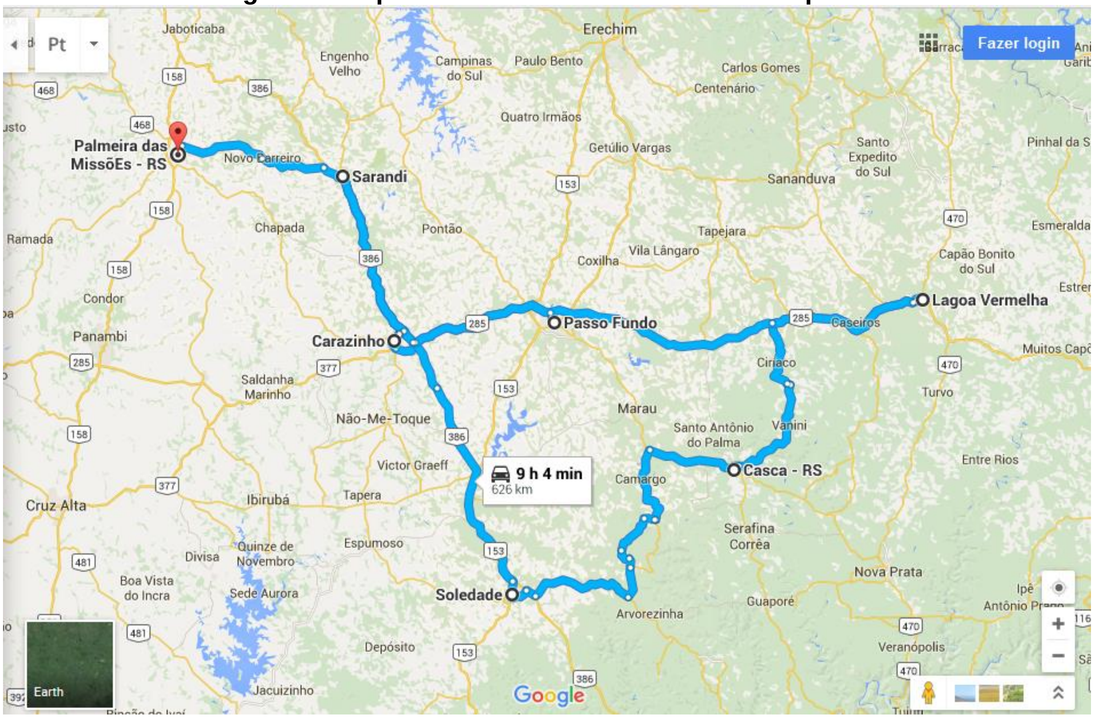
3. $\begin{cases} x + y = 7 \\ -x + y = -3 \\ x + 3y = 15 \end{cases}$

Anexo 11: Tarefa 3 (com uso de tecnologias digitais)

Tarefa 3 - Resolução de problema – com uso de tecnologias digitais

Suponha que se queira instalar um curso de graduação novo em algum dos Campi da IES localizados em Passo Fundo, Carazinho, Casca, Lagoa Vermelha, Palmeira das Missões, Sarandi e Soledade conforme a Figura 1. Qual Campus deveria ser escolhido, de modo que a maior distância a ser percorrida por estudantes que morassem nestas sete cidades fosse a menor possível?

Figura 1: Mapa com as cidades envolvidas no problema.



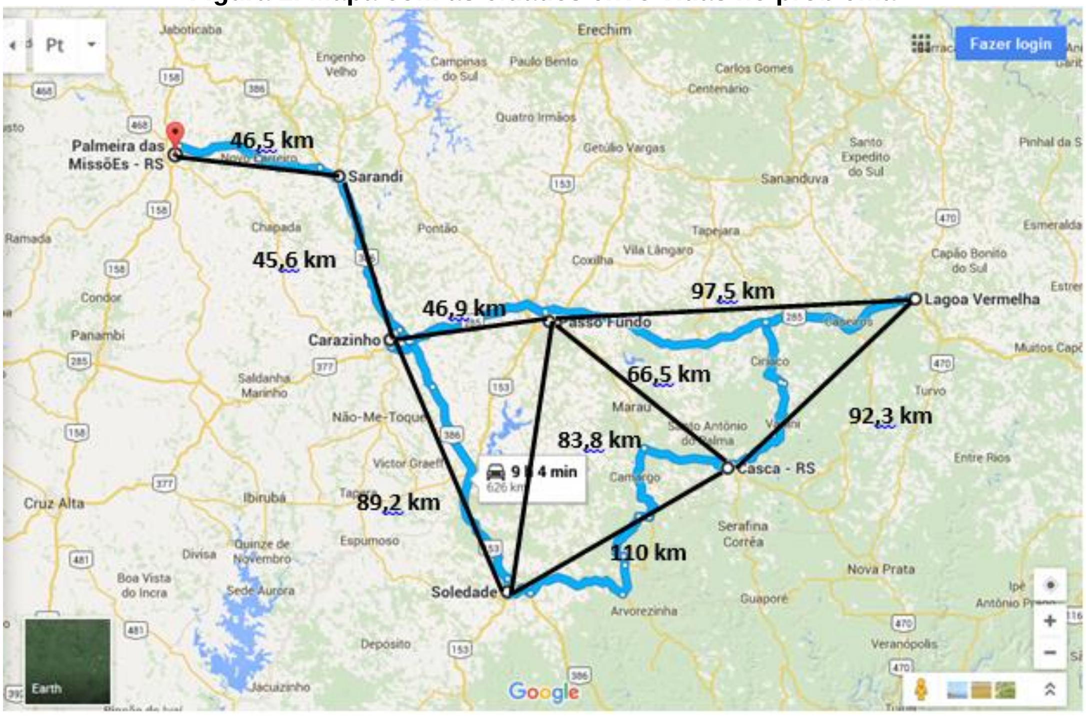
Fonte: Google Maps™(2016)

Anexo 12: Tarefa 3 (sem uso de tecnologias digitais)

Tarefa 3 - Resolução de problema – sem uso de tecnologias digitais

Suponha que se queira instalar um curso de graduação novo em algum dos Campi da IES localizados em Passo Fundo, Carazinho, Casca, Lagoa Vermelha, Palmeira das Missões, Sarandi e Soledade conforme a Figura 1. Qual Campus deveria ser escolhido, de modo que a maior distância a ser percorrida por estudantes que morassem nestas sete cidades fosse a menor possível?

Figura 1: Mapa com as cidades envolvidas no problema.



Fonte: Google Maps^{TM}(2016)

Anexo 13: Tarefa 4

Tarefa 4: Operações com matrizes – identificando conhecimentos prévios

1. Dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$,

calcule se possível (caso não seja possível justifique):

a) $A + B$

b) $A + D$

c) $5A$

d) AB

e) BC

f) B^t

Anexo 14: Tarefa 5

Disciplina: Álgebra Linear Profa. Rosana M. L. Kripka

Instruções para uso da planilha Excel em operações com matrizes

Adição de Matrizes: A+B — Deve ser inserida a fórmula na primeira celula e arrastada para as demais células. (Devem ser de mesma ordem!!!)

A				B				A+B		
2	5	8		9	4	7		11	9	15
3	-4	9		-8	2	10		-5	-2	19

Multiplicação por escalar: — Deve ser inserida a fórmula na primeira célula e deve ser fixado o valor da constante (no caso C16 deve ser escrito como C16) e em seguida deve ser e arrastada para as demais

k*A	k=	2	
	2*A		
	4	10	16
	6	-8	18

Multiplicação de matrizes: A*C

1) Selecione as células que vão armazenar o resultar do produto das matrizes. Em seguida, clique em fórmulas e clique em inserir função.

2) Selecione a categoria: Matemática e Trigonometria e escolha a função MATRIZ.MULTI.

3) Selecione os dados da primeira matriz clicando no botão à direita. Após selecionar as células clique novamente no botão à direita. Faça o mesmo para a segunda matriz.

4) NÃO clique em ok - clique ao mesmo tempo: CRTL+SHIFT+ENTER

Obs: Para existir o produto: número de colunas da primeira matriz tem que ser igual ao número de linhas da segunda matriz.

A *	C =	D			C				
2X3	3X4	2X4			4	2	3	6	
					5	8	-2	2	
		A			-3	9	7	3	
		2	5	8	9	116	52	46	D
		3	-4	9	-35	55	80	37	

Transposição

1) Selecione as células que armazenarão a matriz transposta. Em seguida, clique em fórmulas e clique em inserir função.

2) Selecione a categoria: tudo e escolha a função TRANSPOR.

3) Selecione os dados da matriz a ser transposta e em seguida clicando no botão à direita. Após selecionar as células clique novamente no botão à direita.

4) NÃO clique em ok, mas clique ao mesmo tempo: CRTL+SHIFT+ENTER

	A					
A	2	5	8	A^t	2	3
	3	-4	9		5	-4
					8	9

Anexo 15: Tarefa 6 (com uso de tecnologias digitais)

Tarefa 6 – Problemas com uso de armazenamento e manipulação de matrizes – com uso da planilha Excel

1. Uma loja de materiais de construção entre alguns de seus produtos mais vendidos tinha um estoque, no início de mês: 600 sacos de cimento, 50 m^3 de areia, 550 sacos de argamassa para porcelanato, 400 sacos de rejunte para porcelanato, 20 bacias para banheiro, 15 kits para instalação de bacias para banheiro, 20 cubas para banheiro, 500 m^2 de piso porcelanato. Para evitar a falta destes produtos a pronta entrega, foram repostos, na metade do mês: 200 sacos de cimento, 15 m^3 de areia, 250 sacos de argamassa para porcelanato, 150 sacos de rejunte para porcelanato, 8 bacias para banheiro, 8 kits para instalação de bacias para banheiro, 10 cubas para banheiro e 350 m^2 de piso porcelanato. No entanto, ao longo do mês foram vendidos: 450 sacos de cimento, 35 m^3 de areia, 420 sacos de argamassa para porcelanato, 340 sacos de rejunte para porcelanato, 12 bacias para banheiro, 10 kits para instalação de bacias para banheiro, 9 cubas para banheiro e 480 m^2 de piso porcelanato. Calcule:

a) Qual o estoque da loja no final do mês em relação aos produtos citados?

b) Quanto deve ser comprado de cada item, no final do mês, para repor o estoque para o início do próximo mês?

c) Considerando que os preços dos produtos dos produtos são: saco de cimento - R$ 31,90; m^3 de areia - RS125,00; saco de argamassa para porcelanato - R$ 20,90; saco de rejunte para porcelanato - R$ 36.50; bacia para banheiro - R$ 469,00; kit para instalação da bacia - R$ 23,00, cuba para o banheiro - R$ 219,90; m^2 do porcelanato - R$ 49,90, calcule os valores estimados dos estoques no início do mês, após a reposição e no final do mês.

d) Supondo que a loja compre os itens a preço de custo, sendo em média a 38% mais baratos, calcule os valores de custo de cada item considerado.

e) Caso uma empreiteira compre: 80 sacos de cimento, 8 m^3 de areia, 150 sacos de argamassa para porcelanato, 70 sacos de rejunte para porcelanato, 4 bacias para banheiro, 4 kits para instalação de bacias para banheiro, 4 cubas para banheiro e 380 m^2 de piso porcelanato e outra construtora compre: 38 sacos de cimento, 3 m^3 de areia, 50 sacos de argamassa para porcelanato, 28 sacos de rejunte para porcelanato, 2 bacias para banheiro, 2 kits para instalação de bacias para banheiro, 2 cubas para banheiro e 80 m^2 de piso porcelanato, calcule quanto cada uma pagará por suas compras.

2. Utilizando os dados dos Quadros 1 e 3, que apresentam as quantidades de nutrientes presentes nos alimentos listados, bem como as quantidades máximas e mínimas de nutrientes, consideradas adequadas por tipo de refeição realizada ao longo do dia, pede-se:

a) Caso sejam realizadas as refeições informadas no Quadro 2, quais seriam as quantidades totais de nutrientes por tipo de refeição?

b) As quantidades de nutrientes ingeridas, por refeição, satisfazem as quantidades máximas e mínimas de nutrientes, consideradas adequadas informadas no Quadro 3? Quais não são repeitadas?

c) Construa um cardápio para um dia, de acordo com sua alimentaçao, e calcule as quantidades totais de nutrientes por cada tipo de refeição. Verifique se as quantidades de nutrientes ingeridas, por refeição, satisfazem as quantidades máximas e mínimas de nutrientes informadas no Quadro 3.

Quadro 1: Quantidades de nutrientes presentes em alimentos.

	Alimento	Quant.	Kcal	Carboid.	Proteína	Vit. A	Vit. B1	Vit. B2	Vit. B3	Vit. C	Lipídios	Cálcio	Ferro	Fibras
x1	Mamão maduro	1 fatia pequena	68,000	14,500	0,200	0,000	0,000	0,000	0,000	20,500	1,000	21,000	0,800	0,600
x2	Pão Francês	1 unidade e meia	134,500	28,700	4,653	0,000	40,000	30,000	0,600	0,000	0,100	11,000	0,600	0,253
x3	Queijo prato	1 fatia média	52,940	0,000	4,400	36,000	6,000	75,000	0,060	0,000	3,930	153,450	0,120	0,000
x4	Presunto magro	1 fatia média	25,200	0,000	3,600	0,000	123,000	30,000	0,660	0,000	1,200	2,100	0,280	0,000
x5	Leite integral	1 copo pequeno cheio	103,950	8,250	5,120	64,350	21,450	313,500	0,390	1,650	5,780	188,100	0,170	0,000
x6	Café solúvel	1 colher de chá	5,160	1,400	0,000	0,000	0,000	8,400	1,220	0,000	0,000	7,160	0,220	0,000
x7	Banana prata	1 unidade média	35,600	9,120	0,520	4,000	36,800	41,200	0,320	6,920	0,120	6,000	0,080	0,160
x8	Aveia flocos finos	1 colher de sopa cheia	52,500	8,250	2,250	0,000	79,500	16,500	0,120	0,000	1,110	0,000	0,000	1,350
x9	Pão de Centeio	1 fatias	69,600	14,370	2,610	0,000	57,000	24,000	0,330	0,000	0,180	6,600	0,690	0,360
x10	Laranja	1 unidade média	81,900	17,640	1,080	23,400	162,000	54,000	0,360	84,600	0,720	81,000	0,360	0,720
x11	Leite Desnatado	1 copo	59,570	8,250	5,940	0,000	49,500	297,000	0,200	1,650	0,170	204,600	0,130	0,000

		pequeno cheio											
x12	Margarina vegetal	1 colher de chá cheia	57,600	0,050	0,030	73,920	0,000	0,000	0,000	0,000	6,480	1,600	0,000	0,000
x13	Geleia de frutas	1 colheres de chá rasas	9,520	2,465	0,005	0,040	0,400	1,200	0,005	0,120	0,005	0,720	0,050	0,000
x14	Maçã verm. Crua	1 unidade média	94,800	21,300	0,600	6,000	58,500	73,500	0,350	8,850	0,750	10,500	0,450	1,050
x15	Bolacha Maria	1 unidades	22,500	3,728	0,390	0,000	9,000	2,500	0,020	0,000	0,653	0,000	0,000	0,000
x16	Bolacha Crean Cracker	1 unidades	21,600	3,485	0,485	0,000	1,500	2,000	0,007	0,000	0,635	2,450	0,080	0,000
x17	Abacaxi	1 fatia grande	52,000	13,700	0,400	5,000	80,000	128,000	0,820	27,200	0,200	18,000	0,500	0,400
x18	Açúcar refinado	1 colheres de chá cheias	7,960	1,990	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
x19	Melancia	1 fatia média	62,000	13,800	1,000	46,000	40,000	60,000	0,400	18,000	0,400	14,000	0,460	0,400
x20	Melão	1 fatia grande	34,390	7,300	0,970	322,000	34,500	23,000	0,600	32,080	0,150	19,550	0,460	0,000
x21	Biscoito maisena	1 unidades	20,150	3,705	0,450	0,000	9,000	2,500	0,020	0,000	0,390	1,100	0,075	0,000
x22	Biscoito doce	1 unidades	18,940	3,363	0,448	0,000	9,000	2,500	0,020	0,000	0,457	1,100	0,010	0,025
x23	Biscoito salgado	1 unidades	21,750	3,485	0,450	0,000	6,500	6,500	0,055	0,000	0,660	2,450	0,080	0,025
x24	Iogurte	1 unidade	91,200	18,600	4,200	0,000	36,000	180,000	0,120	0,000	0,120	144,000	0,120	0,000
x25	Manga rosa	1 espada média	98,420	23,100	0,560	210,000	14,000	85,400	0,290	60,200	0,420	35,000	0,550	1,120
x26	Queijo minas	1 fatia média	93,380	0,000	7,700	67,500	7,500	0,350	0,020	0,000	6,960	158,750	0,200	0,000
x27	Beterraba crua	1 colheres de sopa cheias raladas	7,825	1,440	0,480	0,320	8,000	8,000	0,060	5,630	0,015	5,120	0,400	0,160
x28	Cenoura crua	1 colheres de sopa cheia ralada	6,000	1,285	0,145	0,130	7,200	6,000	0,070	3,215	0,035	6,720	0,073	0,120
x29	Arroz ag. Integral	1 colheres de sopa cheia	70,080	15,026	1,612	0,000	72,000	12,000	1,040	0,000	0,392	0,000	0,000	0,180
x30	Carne boi magra.crua	1 colheres de sopa cheia	22,200	0,000	4,200	1,000	26,000	34,000	1,100	0,000	0,600	2,400	0,640	0,000
x31	Óleo de soja	1 colheres de chá	18,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	2,000	0,000	0,000	0,000

x32	Cebola crua	1 unidade media	22,050	3,920	1,120	1,400	42,000	31,500	0,250	6,790	0,210	22,400	0,350	0,560
x33	Tomate maduro	1 unidade pequena	10,000	1,700	0,500	30,000	40,000	56,500	0,220	17,150	0,150	4,500	0,840	0,300
x34	Feijão preto	1 concha pequena cheia	223,340	40,540	13,480	0,000	102,700	69,550	0,810	0,000	0,830	94,250	2,800	3,190
x35	Chuchu verde	1 fatia pequena	18,600	4,620	0,540	1,200	18,000	24,000	0,240	6,480	0,120	7,200	0,240	0,360
x36	Macarrão cru	1 escumadeira média cheia	388,630	75,900	15,400	24,200	968,000	418,000	6,600	0,000	2,640	26,400	2,090	0,440
x37	Carne frango assada	1 sobrecoxas pequenas	54,500	0,000	9,100	4,000	90,000	100,000	4,250	0,000	2,700	4,000	1,000	0,000
x38	Repolho cru	1 escumadeira média rasa picada	3,750	0,645	0,210	1,500	16,500	9,000	0,060	6,195	0,030	7,950	0,085	0,150
x39	Vagem crua	1 colheres de sopa cheia	8,400	1,540	0,480	25,000	43,000	40,000	0,108	4,660	0,040	11,000	0,233	0,360
x40	Couve manteiga	1 colher de sopa cheia picada	5,000	0,900	0,280	150,000	19,200	49,400	0,070	21,600	0,020	66,000	0,440	0,000
x41	Abóbora	1 colher de sopa rasa picada	14,400	3,530	0,430	100,800	19,800	36,000	0,250	3,420	0,110	4,320	0,250	0,220
x42	Batata inglesa cozida	1 unidade media	119,420	26,740	2,800	7,000	63,000	29,400	2,660	18,340	0,140	15,400	0,980	0,000
x43	Peixe mar cozido	1 colher de sopa cheia	23,400	0,000	5,153	9,900	47,250	30,750	0,990	0,000	0,158	6,300	0,418	0,000
x44	Milho cozido	1 espiga	99,900	20,200	2,700	20,000	75,000	120,000	1,500	0,700	0,700	5,000	0,230	0,000
x45	Ervilha em conserva	1 colher de arroz cheia	34,580	6,540	1,710	30,780	45,600	49,400	0,550	3,800	0,230	12,160	0,800	0,570
x46	Fubá de milho	1 colheres de sopa cheia	68,920	14,680	1,560	0,760	17,000	144,000	0,414	0,000	0,440	3,200	0,180	0,000
x47	Carne porco assada	1 pedaço médio	314,400	0,000	19,200	0,000	448,000	184,000	4,530	0,000	26,400	8,800	2,480	0,000
x48	Peito de frango	1 peito médio	309,600	0,000	37,620	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	16,670	19,800	1,330	0,000
x49	Pizza	1 fatia média	187,110	20,945	6,160	44,660	100,100	77,000	0,920	0,000	9,240	43,890	0,695	0,000

x50	Sorvete de creme	1 bola media	166,400	16,000	4,000	40,000	40,000	136,000	0,160	4,800	9,600	120,000	0,320	0,000
x51	Maionese	1 colher de sopa cheia	179,060	0,160	0,540	9,180	5,400	8,100	0,000	0,000	19,630	0,000	0,000	0,000
x52	Brócolis	1 colher de sopa cheia	11,100	1,650	0,990	60,000	36,000	33,000	0,105	7,380	0,060	39,000	0,390	0,000
x53	Atum	1 colher de sopa cheia	23,360	0,000	3,968	1,600	16,000	9,600	1,600	0,000	0,832	3,040	0,192	0,000
x54	Alface	1 folha média	1,600	0,230	0,120	42,500	1,500	12,500	0,025	0,870	0,020	3,800	0,110	0,070
x55	Pepino	1 colher de sopa cheia picada	3,400	0,400	0,165	0,540	2,700	5,400	0,050	0,540	0,125	16,470	0,415	0,110
x56	Rabanete	1 colher	3,975	0,700	0,150	0,000	7,500	7,500	0,075	4,575	0,035	34,500	0,430	0,175
x57	Arroz polido cru	1 colher de sopa cheia	54,600	11,955	1,080	0,000	13,200	6,000	0,115	0,000	0,090	1,350	0,120	0,090

Quadro 3: Alimentos inseridos ao longo de seis refeições em um dia

CAFÉ DA MANHÃ	LANCHE MANHÃ	ALMOÇO	LANCHE DA TARDE	JANTAR	LANCHE DA NOITE
1 fatia de queijo prato	0,5 copo de Leite Desnatado	3 colheres de arroz integral	0,75 maçã vermelha crua	3,5 colheres de brócolis	0,25 iogurte
1 fatia de presunto magro	1 fatia de melancia	1 colher de feijão preto	0,5 fatia de queijo minas	4 folhas de alface	1 fatia de melancia
1 colher de chá de café solúvel		4 fatias de chuchu	0,75 fatia de presunto magro	2 colheres de beterraba crua	3 biscoitos salgados
1 colher de açúcar refinado		1 sobrecoxa de frango assada		2 fatias de pizza	
2 fatias de pão de centeio		4 colheres de couve manteiga		2 tomates	
1 colher de margarina		1 colher de cenoura crua		2 batatas inglesas	
1 colher de geléia de frutas		1 colher de maionese		1 colher de arroz de ervilha	
2 fatias de abacaxi					
0.5 fatia de melão					

Quadro 2: Quantidades máximas e mínimas de nutrientes para cada refeição

Refeição	%	máx/min		Carb.	Prot.	Vit. A	Vit. B1	Vit. B2	Vit. B3	Vit. C	Lipídios	Cálcio	Ferro	Fibras
Café da manhã	20%	Mínimo	19%	59,28g	11,78g	152mg	171mg	171mg	2,09mg	11,4mg	10,45g	190mg	2,85mg	1,14g
		Máximo	21%	81,9g	29,4g	420mg	630mg	735mg	10,5mg	94,5mg	17,43g	346,5mg	5,46mg	3,15g
Lanche da manhã	5%	Mínimo	4%	12,48g	2,48g	32mg	36mg	36mg	0,44mg	2,4mg	2,2g	40mg	0,6mg	0,24g
		Máximo	6%	23,4g	8,4g	120mg	180mg	210mg	3mg	27mg	4,98g	99mg	1,56mg	0,9g
Almoço	35%	Mínimo	34%	106,08g	21,08g	272mg	306mg	306mg	3,74mg	20,4mg	18,7g	340mg	5,1mg	2,04g
		Máximo	36%	140,4g	50,4g	720mg	1080mg	1260mg	18mg	162mg	29,88g	594mg	9,36mg	5,4g
Lanche da tarde	5%	Mínimo	4%	12,48g	2,48g	32mg	36mg	36mg	0,44mg	2,4mg	2,2g	40mg	0,6mg	0,24g
		Máximo	6%	23,4g	8,4g	120mg	180mg	210mg	3mg	27mg	4,98g	99mg	1,56mg	0,9g
Jantar	30%	Mínimo	29%	90,48g	17,98g	232mg	261mg	261mg	3,19mg	17,4mg	15,95g	290mg	4,35mg	1,74g
		Máximo	31%	120,9g	43,4g	620mg	930mg	1085mg	15,5mg	139,5mg	25,73g	511,5mg	8,06mg	4,65g
Lanche da noite	5%	Mínimo	4%	12,48g	2,48g	32mg	36mg	36mg	0,44mg	2,4mg	2,2g	40mg	0,6mg	0,24g
		Máximo	6%	23,4g	8,4g	120mg	180mg	210mg	3mg	27mg	4,98g	99mg	1,56mg	0,9g

Anexo 16: Tarefa 6 (sem uso de tecnologias digitais)

Tarefa 6: Problemas com uso de armazenamento e manipulação de matrizes – sem uso da planilha Excel

1. Uma loja de materiais de construção entre alguns de seus produtos mais vendidos tinha um estoque, no início de mês: 600 sacos de cimento, 50 m^3 de areia, 550 sacos de argamassa para porcelanato, 400 sacos de rejunte para porcelanato, 20 bacias para banheiro, 15 kits para instalação de bacias para banheiro, 20 cubas para banheiro, 500 m^2 de piso porcelanato. Para evitar a falta destes produtos a pronta entrega, foram repostos, na metade do mês: 200 sacos de cimento, 15 m^3 de areia, 250 sacos de argamassa para porcelanato, 150 sacos de rejunte para porcelanato, 8 bacias para banheiro, 8 kits para instalação de bacias para banheiro, 10 cubas para banheiro e 350 m^2 de piso porcelanato. No entanto, ao longo do mês foram vendidos: 450 sacos de cimento, 35 m^3 de areia, 420 sacos de argamassa para porcelanato, 340 sacos de rejunte para porcelanato, 12 bacias para banheiro, 10 kits para instalação de bacias para banheiro, 9 cubas para banheiro e 480 m^2 de piso porcelanato. Calcule:

a) Qual o estoque da loja no final do mês em relação aos produtos citados?

b) Quanto deve ser comprado de cada item, no final do mês, para repor o estoque para o início do próximo mês?

c) Considerando que os preços dos produtos dos produtos são: saco de cimento - R$ 31,90; m^3 de areia - RS125,00; saco de argamassa para porcelanato - R$ 20,90; saco de rejunte para porcelanato - R$ 36.50; bacia para banheiro - R$ 469,00; kit para instalação da bacia - R$ 23,00, cuba para o banheiro - R$ 219,90; m^2 do porcelanato - R$ 49,90, calcule os valores estimados dos estoques no início do mês, após a reposição e no final do mês.

d) Supondo que a loja compre os itens a preço de custo, sendo em média a 38% mais baratos, calcule os valores de custo de cada item considerado.

e) Caso uma empreiteira compre: 80 sacos de cimento, 8 m^3 de areia, 150 sacos de argamassa para porcelanato, 70 sacos de rejunte para porcelanato, 4 bacias para banheiro, 4 kits para instalação de bacias para banheiro, 4 cubas para banheiro e 380 m^2 de piso porcelanato e outra construtora compre: 38 sacos de cimento, 3 m^3 de areia, 50 sacos de argamassa para porcelanato, 28 sacos de rejunte para porcelanato, 2 bacias para banheiro, 2 kits para instalação de bacias para banheiro, 2 cubas para banheiro e 80 m^2 de piso porcelanato, calcule quanto cada uma pagará por suas compras.

2. Utilizando os dados dos Quadros 1 e 2, que apresentam as quantidades de nutrientes presentes nos alimentos listados, bem como as quantidades máximas

e mínimas de nutrientes, consideradas adequadas por tipo de refeição realizada ao longo do dia, pede-se:

a) Caso sejam realizadas as refeições informadas no Quadro 3, quais seriam as quantidades totais de nutrientes por tipo de refeição?

b) As quantidades de nutrientes ingeridas, por refeição, satisfazem as quantidades máximas e mínimas de nutrientes, consideradas adequadas informadas no Quadro 2? Quais não são repeitadas?

c) Construa um cardápio para um dia, de acordo com sua alimentaçao, e calcule as quantidades totais de nutrientes por cada tipo de refeição. Verifique se as quantidades de nutrientes ingeridas, por refeição, satisfazem as quantidades máximas e mínimas de nutrientes informadas no Quadro 2.

Quadro 1: Quantidades de nutrientes presentes em alimentos.

	Alimento	Quantidade	Carboidratos	Proteína
1	Mamão maduro	1 fatia pequena	14,500	0,200
2	Pão Francês	1 unidade e meia	28,700	4,653
3	Queijo prato	1 fatia média	0,000	4,400
4	Presunto magro	1 fatia média	0,000	3,600
5	Leite integral	1 copo pequeno cheio	8,250	5,120
6	Café solúvel	1 colher de chá	1,400	0,000
7	Banana prata	1 unidade média	9,120	0,520
8	Aveia flocos finos	1 colher de sopa cheia	8,250	2,250
9	Pão de Centeio	1 fatias	14,370	2,610
10	Leite Desnatado	1 copo pequeno cheio	8,250	5,940
11	Margarina vegetal	1 colher de chá cheia	0,050	0,030
12	Geléia de frutas	1 colheres de cha rasas	2,465	0,005
13	Maçã verm. Crua	1 unidade média	21,300	0,600
14	Abacaxi	1 fatia grande	13,700	0,400
15	Açúcar refinado	1 colheres de chá cheias	1,990	0,000
16	Melancia	1 fatia média	13,800	1,000
17	Melão	1 fatia grande	7,300	0,970
18	Biscoito doce	1 unidades	3,363	0,448
19	Biscoito salgado	1 unidades	3,485	0,450
20	Iogurte	1 unidade	18,600	4,200
21	Queijo minas	1 fatia média	0,000	7,700

Quadro 2: Quantidades máximas e mínimas de nutrientes para cada refeição

Refeição	%	máx/min		Carboidratos	Proteínas
Café da manhã	20%	mínimo	19%	59,28g	11,78g
		máximo	21%	81,9g	29,4g
Lanche da manhã	5%	mínimo	4%	12,48g	2,48g
		máximo	6%	23,4g	8,4g
Lanche da tarde	5%	mínimo	4%	12,48g	2,48g
		máximo	6%	23,4g	8,4g

Quadro 3: Alimentos inseridos em três refeições de um dia

CAFÉ DA MANHÃ	LANCHE MANHÃ	LANCHE DA TARDE
1 fatia de queijo prato	0,5 copo de Leite Desnatado	0,75 maçã vermelha crua
1 fatia de presunto magro	1 fatia de melancia	0,5 fatia de queijo minas
1 colher de chá de café solúvel		0,75 fatia de presunto magro
1 colher de açúcar refinado		
2 fatias de pão de centeio		
1 colher de margarina		
1 colher de geléia de frutas		
2 fatias de abacaxi		
0.5 fatia de melão		

Anexo 17: Tarefa 7

Tarefa 7 – Aplicação de matrizes em redes de acessos - uso da planilha Excel

Aplicação em redes de acessos

Definindo:

- $A_6 = [a_{ij}]$.
- Ninguém acessa a si mesmo.
- $a_{ij} = 1$, se P_i tem acesso a P_j,
- $a_{ij} = 0$, se P_i não tem acesso a P_j,

Construa a matriz de acesso, correspondente a rede ilustrada pela Figura 2.

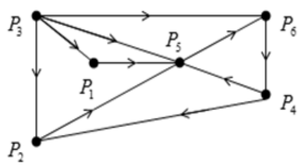


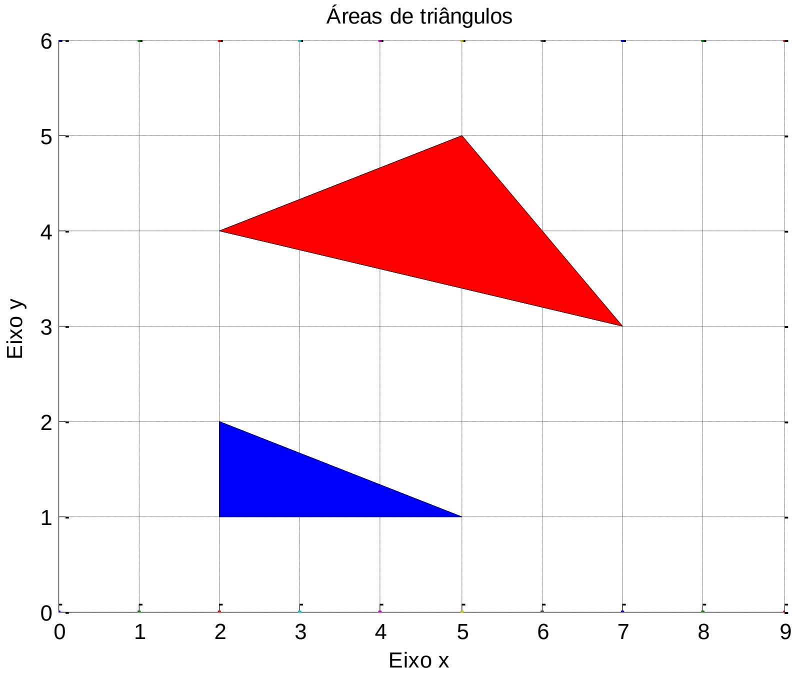
Figura 2: Rede de Acesso

A	Acessos em um estágio					
	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1	0
3	1	1	0	0	1	1
4	0	1	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	1	0	0
A^2=A*A	Acessos em dois estágios					
	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	1	2	1
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	1	0	0
6	0	1	0	0	1	0
A^3=A*A*A	Acessos em três estágios					
	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	2
4	0	0	0	1	0	1
5	0	1	0	0	1	0
6	0	0	0	0	1	1

Anexo 18: Tarefa 8

Tarefa 8: Aplicações de determinantes - conhecimentos prévios

Desafio calcule as áreas dos seguintes triângulos:



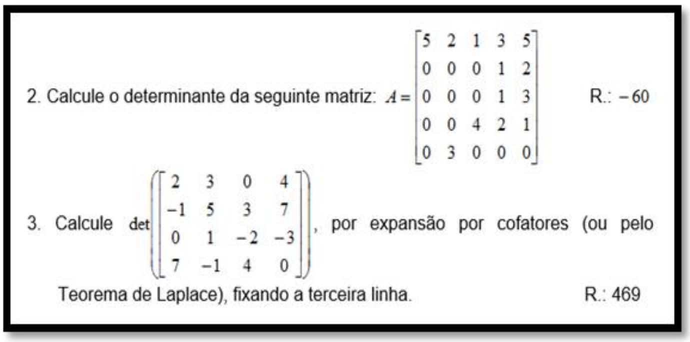
a) $A(2,2), B(2,1), C(5,1)$. R.: $1{,}5$ u.a.

b) $A(2,4), B(5,5), C(7,3)$. R.: 4 u.a.

Anexo 19: Tarefa 9

Tarefa 9: Método de Triangulação com planilha Excel

Instruções para cálculo do determinante com uso de recursos da planilha
PLANILHA 1
Determinante de matrizes: det(A)
1) Selecione a célula que vai armazenar o resultado do determinante. Em seguida, clique em fórmulas e clique em inserir função. 2) Selecione a categoria: Matemática e Trigonometria e escolha a função MATRIZ.DETERM 3) Selecione os dados da matriz clicando no botão à direita. Após selecionar as células clique novamente no botão à direita. 4) Clique em ok, para que a planilha forneça o valor do determinante na célula selecionada. Obs: Para existir o determinante: a matriz deve ser quadrada.
Exemplos (página 23 da apostila):


2. Calcule o determinante da seguinte matriz: $A=\begin{bmatrix}5&2&1&3&5\\0&0&0&1&2\\0&0&0&1&3\\0&0&4&2&1\\0&3&0&0&0\end{bmatrix}$ R.: -60

3. Calcule $\det\left(\begin{bmatrix}2&3&0&4\\-1&5&3&7\\0&1&-2&-3\\7&-1&4&0\end{bmatrix}\right)$, por expansão por cofatores (ou pelo Teorema de Laplace), fixando a terceira linha. R.: 469

A							
5	2	1	3	5			
0	0	0	1	2	det (A)=		
0	0	0	1	3			
0	0	4	2	1			
0	3	0	0	0			
B							
2	3	0	4				
-1	5	3	7		det(B)=		
0	1	-2	-3				
7	-1	4	0				

PLANILHA 2

Exemplos de aplicação:

Dados os vértices de um triângulo: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ o cálculo da área é dado por:

$$|A = \frac{1}{2}\left\| det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right)\right\|$$

Observação: **Para se obter o VALOR ABSOLUTO (OU MÓDULO) de um número:**

1) Selecione a célula que vai armazenar o resultado do módulo. Em seguida, clique em fórmulas e clique em inserir função.

2) Selecione a categoria: Matemática e Trigonometria e escolha a função ABS

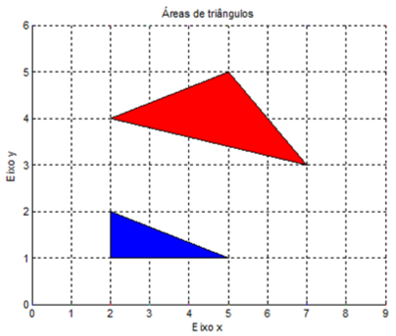
3) Selecione os dados da matriz clicando no botão à direita. Após selecionar as células clique novamente no botão à direita.

4) Clique em ok, para que a planilha forneça o valor do módulo na célula selecionada.

Exemplos: Encontre as áreas do triângulos definido pelos pontos:

a) $A(2,2), B(2,1), C(5,1)$. R.: 1,5 u.a.

b) $A(2,4), B(5,5), C(7,3)$. R.: 4 u.a.



A				B		
det(A)=				det (B)=		
Area 1=				Area 2=		

PLANILHA 3

Exemplos: Calcular pelo Processo de Triangulação:

a) $\det(A)=\begin{vmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \\ 6 & 13 & 1 \end{vmatrix}$ R: a) -36

Op. Elementares
Li<-> Lj
Li -> Li/k
Li->Li+k*Lj

A	4	8	4		det(A)=		(resultado esperado!)	
	0	0	9					
	6	13	1					
					determinante		**Mudança**	**compensacão (X)**
B					det(B)=			
C					det(C)=			
D					det(D)=			
					D é uma Matriz triangular superior:			
					deteminante é o termo principal!!!!			
O determinante da matriz original é:					**det (A)=**			
					det (A)= det(D) x compensações			

PLANILHA 4

Exercícios:

1. Dada a seguinte matriz: $A=\begin{bmatrix} 7 & 7 & 14 & -28 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

   a. Calcule $\det(A)$ pelo processo de Triangulação; R.:-1008

	A	7	7	14	-28		
		2	4	4	0		
		0	-4	-4	0		
		0	0	5	-2		

PLANILHA 5

2. Dada a seguinte matriz: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

   a. Calcule $\det(A)$ pelo processo de Triangulação; R.: -16

	A	1	1	1	1		
		1	-1	1	-1		
		-1	-1	1	1		
		1	-1	-1	1		

Anexo 20: Tarefa 10

Tarefa 10 – Resolução de sistemas lineares pelo método de Gauss-Jordan, com uso do *MATLAB*

Orientação: Resolver os exercícios da apostila da página 44, com interpretação no caderno.

Exercícios

Resolva pelo método de Gauss-Jordan e classifique os seguintes sistemas lineares (justifique suas respostas):

1. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16 \\ 5x_1 - 2x_2 = 4 \\ 10x_1 - 4x_2 = 3 \end{cases}$

R.: Solução: Não existe. Classificação: Sistema Incompatível, pois não existe solução.

2. $\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + 24x_3 + 18x_4 = 84 \\ 4x_1 - 14x_2 + 52x_3 + 42x_4 = 190 \end{cases}$

R.: Solução: $\{x_1 = 86 - 20x_3 \text{ - } 21x_4\,;\ x_2 = 11 - 2x_3 \text{ - } 3\,x_4; x_3 \in R; x_4 \in R\}$ (infinitas)

Sol. Particulares: $\{x_1 = 86\,;\ x_2 = 11; x_3 = 0; x = 0\}$ e $\{x_1 = 66\,;\ x_2 = 9; x_3 = 1; x = 0\}$

Classificação: Sistema Compatível e Indeterminado, pois existe solução e são infinitas soluções.

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ 3x_1 - x_2 = 13 \\ x_1 - 4x_2 = -3 \\ 2x_1 - 8x_2 = -6 \end{cases}$

R.: Solução: $\{x_1 = 5\,;\ x_2 = 2\}$ (existe somente uma única solução)

Classificação: Sistema Compatível e Determinado, pois existe solução e é única.

Anexo 21: Tarefa 11

Tarefa 11 – Uso de sistemas lineares na resolução de problemas com uso de computadores (atividade avaliativa extra sala de aula – interpolação polinomial) - (vale parte de um ponto a ser considerado na segunda avaliação)

Orientações:

1. Entregar registro por escrito individual (não digital, manuscrito) com resolução completa - APRESENTAR TODO O RACIOCÍNIO UTILIZADO e as estratégias que foram pensadas para responder as perguntas.
2. A resolução do sistema (se houver) deve ser realizado pelo método da Eliminação Gaussiana e o escalonamento parcial pode ser realizado com auxílio do *MATLAB* (como exemplos da aula).
3. A comprovação de resultados também deve ser apresentada (sugestão: fazer a comprovação gráfica usando o GeoGebra – o gráfico pode ser salvo e enviado por e-mail.)

PROBLEMA

Um foguete experimental foi lançado de uma certa altura do chão. Se observou que passados 4 segundos, sua altura atingiu 80 metros, após 9 segundos, atingiu 90 metros e que após 12 segundos estava a 55 metros do chão. Pergunta-se:

a) De que altura foi lançado?

b) Qual a altura máxima atingida pelo foguete?

c) Em quanto tempo, após o lançamento, atingiu o chão?

Anexo 22: Tarefa 12 (com uso de tecnologias digitais)

Tarefa 12 – Uso de sistemas lineares na resolução de problemas - com computadores (vale parte de um ponto a ser considerado na segunda avaliação)

Orientações:
1. Entregar registro por escrito individual (não digital, manuscrito) com resolução completa - APRESENTAR TODO O RACIOCÍNIO UTILIZADO e as estratégias que foram pensadas para responder as perguntas.
2. Na resolução dos sistemas lineares dos problemas **escolha um método apropriado,** justificando o motivo da escolha. **Apresente também todos os passos necessários para a sua resolução**. Para realizar os cálculos pode ser utilizado o *MATLAB* e, nesse caso, indicar seu uso e o que foi realizado por meio do software.

PROBLEMAS

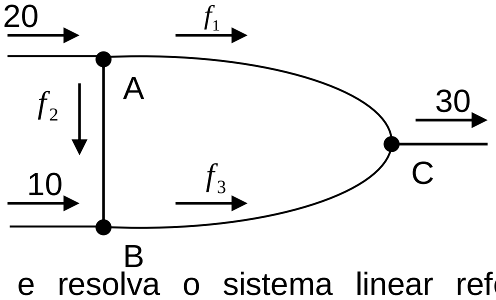
1. Um fabricante de móveis produz cadeiras, mesinhas de centro e mesas de jantar. Cada cadeira leva 10 minutos para ser lixada, 6 minutos para ser tingida e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesinha de centro leva 12 minutos para ser lixada, 8 minutos para ser tingida e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesa de jantar leva 15 minutos para ser lixada, 12 minutos para ser tingida e 18 minutos para ser envernizada. A bancada para lixar fica disponível 16 horas por semana, a bancada para tingir, 11 horas por semana e a bancada para envernizar 18 horas por semana. Quantos móveis devem ser fabricados (por semana) de cada tipo para que as bancadas sejam plenamente utilizadas? (KOLMAN & HILL, 2006, p.56)
2. A Figura 1 mostra uma rede de canos de água com fluxo medido em litros por minuto, faça: (POOLE, 2004, p. 100)

a) Monte e resolva (forneça a solução do sistema) um sistema de equações lineares para encontrar os **fluxos reais possíveis**.

b) Se o fluxo através de AB é restrito a 5 L/min, qual será o fluxo através dos dois ramos?

c) Quais são os fluxos, mínimo e máximo, possíveis através de cada ramo?

Figura 1: Rede de canos de água com fluxo medido em litros por minuto.



3. Modele matematicamente e resolva o sistema linear referente ao seguinte problema (identifique quem são as variáveis utilizadas): "Um estacionamento cobra uma taxa única de R$ 5,50 por cada carro e cada moto estacionados. Ao final do dia o caixa registrou R$ 350,00 para um total de 120 veículos. Quantas motos e quantos carros utilizaram o estacionamento neste dia?"

Anexo 23: Tarefa 12 (sem uso de tecnologias digitais)

Atividade 12 – Uso de sistemas lineares na resolução de problemas - sem computadores (vale parte de um ponto a ser considerado na segunda avaliação)

Orientações:

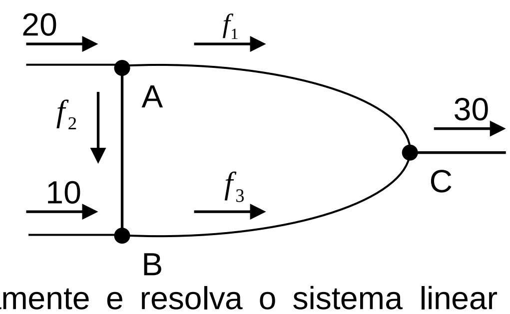
1. Entregar registro por escrito individual (não digital, manuscrito) com resolução completa - APRESENTAR TODO O RACIOCÍNIO UTILIZADO e as estratégias que foram pensadas para responder as perguntas.
2. Na resolução dos sistemas lineares dos problemas **escolha um método apropriado,** justificando o motivo da escolha. **Apresente também todos os passos necessários para a sua resolução**.

PROBLEMAS

1. Um fabricante de móveis produz cadeiras, mesinhas de centro e mesas de jantar. Cada cadeira leva 10 minutos para ser lixada, 6 minutos para ser tingida e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesinha de centro leva 12 minutos para ser lixada, 8 minutos para ser tingida e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesa de jantar leva 15 minutos para ser lixada, 12 minutos para ser tingida e 18 minutos para ser envernizada. A bancada para lixar fica disponível 16 horas por semana, a bancada para tingir, 11 horas por semana e a bancada para envernizar 18 horas por semana. Quantos móveis devem ser fabricados (por semana) de cada tipo para que as bancadas sejam plenamente utilizadas? (KOLMAN & HILL, 2006, p.56)

2. A Figura 1 mostra uma rede de canos de água com fluxo medido em litros por minuto. Faca: (POOLE, 2004, p. 100)
a) Monte e resolva (forneça a solução do sistema) um sistema de equações lineares para encontrar os **fluxos reais possíveis**.
b) Se o fluxo através de AB é restrito a 5 L/min, qual será o fluxo através dos dois ramos?
c) Quais são os fluxos, mínimo e máximo, possíveis através de cada ramo?

Figura 1: Rede de canos de água com fluxo medido em litros por minuto.

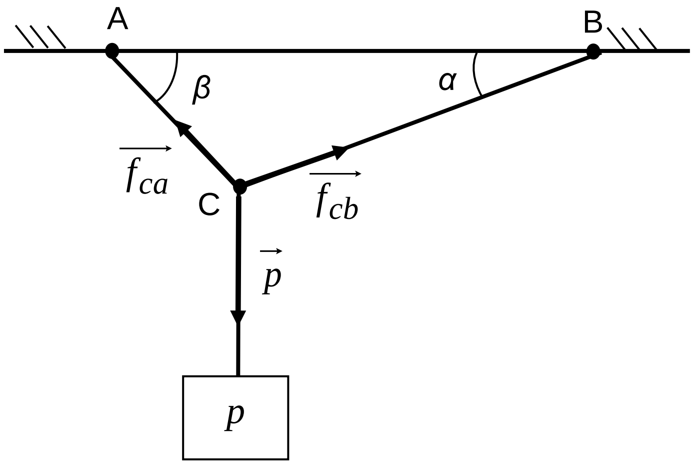


3. Modele matematicamente e resolva o sistema linear referente ao seguinte problema (identifique quem são as variáveis utilizadas): “Um estacionamento cobra uma taxa única de R$ 5,50 por cada carro e cada moto estacionados. Ao final do dia o caixa registrou R$ 350,00 para um total de 120 veículos. Quantas motos e quantos carros utilizaram o estacionamento neste dia?”

Anexo 24: Tarefa 13 (com uso de tecnologias digitais)

Tarefa 13: Resolução de Sistemas Lineares: Equilíbrio de forças

Considere o esquema de forças no diagrama de corpo livre:



DESAFIO: Sendo conhecidos os ângulos α e β e o peso p do objeto suspenso pelas cordas presas nos pontos A e B, é possível escrever um sistema de equações lineares que possibilite determinar os valores das forças, $\overrightarrow{f_{ca}}$ (força na corda esquerda) e $\overrightarrow{f_{cb}}$ (força na corda direita) em função da força peso $\vec{p}$ exercida pelo objeto em suspensão e dos ângulos α e β dados?

Caso seja, identifique o sistema (fornecendo sua expressão) e o resolva, fornecendo a reposta em função do peso e dos ângulos dados.

ROTEIRO PARA CONSTRUÇÃO DO EQUILIBRIO DE FORÇAS
COM O GEOGEBRA

1) Crie uma reta de referência (vamos chamá-la de “teto” do esquema):
   Entrada: y=4
2) Clique na ferramenta “novo ponto”, selecione “ponto em objeto” e clique sobre a reta criada uma vez para criar o ponto “A” e uma segunda vez para criar o ponto “B”.
3) Em seguida clique fora da reta para criar o ponto “C” (abaixo da reta).

Observação: Na “Janela de Álgebra” o ponto A e B estão em azul mais claro e o ponto C em azul mais forte, isso significa que os pontos A e B estão vinculados à reta inicial enquanto o ponto C não possui vínculos.

4) Clique na ferramenta: “Reta perpendicular” e selecione “Reta perpendicular” e clique sobre o ponto C e sobre a reta y=4.
5) Clique na ferramenta “polígono” e selecione “polígono” e, em seguida, clique sobre os pontos A, B, C e A novamente. Clique em mover e em todos os segmentos que definem o lado do triângulo, clique com o botão da direita sobre eles e selecione “Exibir rótulo”. Desse modo as letras criadas para representar os lados do polígono ficarão ocultas.
6) Para criar os vetores-força partindo do ponto C, faça:

a) Clique na ferramenta “novo ponto”, selecione “ponto em objeto” e clique sobre a reta perpendicular, abaixo do ponto C, para criar o ponto “D”.

b) Clique na ferramenta “Reta definida por dois pontos” e selecione a opção “Vetor Definido por Dois Pontos”. Em seguida, clique no ponto C e depois no ponto D. Para destacar o vetor, clique na ferramenta “Mover” e com o botão direito sobre o vetor u criado e selecione o objeto “vetor” e , em seguida, propriedades e na aba “estilo”, selecione a espessura da linha igual a 5.

Observação: Verifique se o vetor está selecionado no menu esquerdo, pois algumas vezes ao clicar com o botão direito em cima do vetor o GeoGebra acaba selecionando a reta perpendicular.

c) Para que a reta perpendicular fique oculta no desenho, clique com o botão direito do mouse sobre a reta e clique sobre “Exibir objeto” que o gráfico da reta perpendicular vai desaparecer.

d) Para ilustrar os vetores força $\overrightarrow{f_{ca}}$ e $\overrightarrow{f_{cb}}$ clique na ferramenta “Reta definida por dois pontos” e selecione a opção “Vetor Definido por Dois Pontos” e, em seguida, para criar o vetor $\overrightarrow{f_{ca}}$, clique no ponto C e depois no ponto A e repetindo o processo, para criar o vetor $\overrightarrow{f_{cb}}$, clique no ponto C e depois no ponto B.

Observação: o vetor “peso” está com o rótulo “u”, e os vetores-força estão com os rótulos “v” e “w”, para modificar esta nomenclatura, clique com o botão direito do mouse em cima de qualquer um desses vetores e selecione propriedades. Na aba "Básico” você poderá modificar o nome do vetor para “p” (peso), fca e fcb para os vetores-força selecionando eles no menu esquerdo dentro das propriedades, lembre de destacar estes vetores aumentando a espessura da linha na aba “Estilo”.

7) Para fazer a marcação dos ângulos entre os vetores e o “teto”, clique na ferramenta: “Ângulo” e em seguida na opção “ângulo”, clique em qualquer lugar

em cima da reta entre os pontos A e B e depois clique no vetor fcb para criar o ângulo α (ângulo entre o vetor e a reta horizontal). Em seguida, clique no vetor fca e em qualquer ponto da reta horizontal entre os pontos A e B para criar o ângulo β (ângulo entre o vetor e a reta horizontal).

Observação: para reposicionar o rótulo dos ângulos, selecione a ferramenta "Mover", clique em "Mover" e, em seguida, em cima de um dos ângulos e arraste para onde desejar (note que o GeoGebra não deixa o rótulo se afastar muito do ponto de origem).

8) Identificados os ângulos α e β , podemos inserir as equações referentes às força $\overrightarrow{f_{ca}}$ e $\overrightarrow{f_{cb}}$ calculadas em função do peso e dos ângulos α e β. Definindo o peso P (em newtons). Entrada: P=50

9) Para definir o valor da força $\overrightarrow{f_{ca}}$ faça: Entrada: FCA=P*cos(α)/(cos(α)*sin(β)+sin(α)*cos(β))

Observação: utilize o ícone à direita da caixa de entrada para selecionar α e β.

10) Para definir o valor da força $\overrightarrow{f_{cb}}$ faça: Entrada: FCB=P/(cos(α)*tan(β)+sin(α))

11) Para verificar que a projeção dos vetores $\overrightarrow{f_{ca}}$ ($\overrightarrow{f_{ca}}_x$, $\overrightarrow{f_{ca}}_y$) e $\overrightarrow{f_{cb}}$ ($\overrightarrow{f_{cb}}_x$ e $\overrightarrow{f_{cb}}_y$) no eixo x se anulam e que a soma da projeção dos dois vetores no eixo y se iguala ao peso p, faça: Entrada: FCAx=-FCA*cos(β)

Entrada: FCAy=FCA*sen(β)

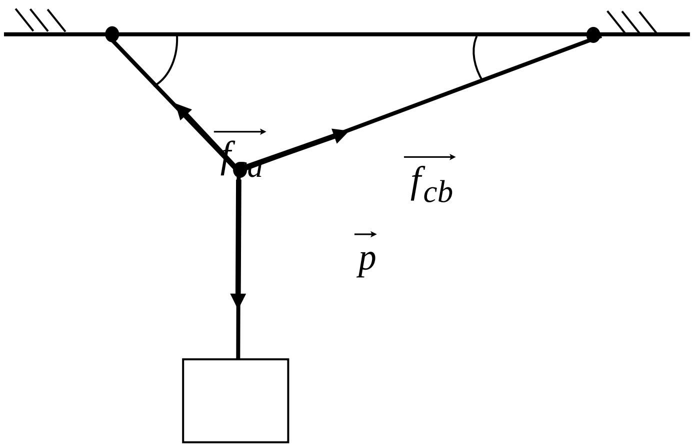
Entrada: FCBx=FCB*cos(α) Entrada: FCBy=FCB*sen(α)

Para visualizar esses valores na janela da geometria selecione ferramenta "Inserir texto" e selecione a opção "Inserir texto" e clique em algum ponto da tela da geometria. Selecione a caixa da "Fórmula LaTex". Na caixa "Editar" escreva o texto que vai aparecer, por exemplo: "FCA=" e em seguida, clique em objetos e vai aparecer uma lista de variáveis. Selecione o objeto "FCA" e clique em ok, que o valor da força $\overrightarrow{f_{ca}}$ vai aparecer na janela da geometria. Assim, é possível verificar se: $\overrightarrow{f_{ca}}_x - \overrightarrow{f_{cb}}_x = 0$ e que $\overrightarrow{f_{ca}}_y + \overrightarrow{f_{cb}}_y - p = 0$

Anexo 25: Tarefa 13 (sem uso de tecnologias digitais)

ATIVIDADE 13: RESOLUÇAO DE SISTEMAS LINEARES: EQUILIBRIO DE FORÇAS (sem tecnologias)

Considere o esquema de forças no diagrama de corpo livre:



1) DESAFIO: Sendo conhecidos os ângulos α e β e o peso p do objeto suspenso pelas cordas presas nos pontos A e B, é possível escrever um sistema de equações lineares que possibilite determinar os valores das forças, $\overrightarrow{f_{ca}}$ (força na corda esquerda) e $\overrightarrow{f_{cb}}$ (força na corda direita) em função da força peso $\vec{p}$ exercida pelo objeto em suspensão e dos ângulos α e β dados? Caso seja, identifique o sistema (fornecendo sua expressão) e o resolva, fornecendo a reposta em função do peso e dos ângulos dados.

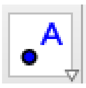
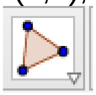
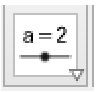
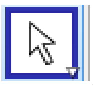
2) Utilizando as formulas obtidas calcule as forcas e $\overrightarrow{f_{cb}}$ quando:

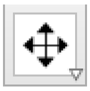
a) $\vec{p} = 50N$, $\alpha = 28{,}28^0$, $\beta = 51{,}75^0$

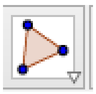
b) $\vec{p} = 100N$, $\alpha = 28{,}28^0$, $\beta = 51{,}75^0$

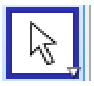
Anexo 26: Tarefa 14 (com uso de tecnologias digitais)

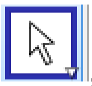
Atividade 14 - ROTEIRO: Transformações Lineares no Software GeoGebra

1) Clique na ferramenta , selecione "ponto" e na janela de visualização selecione os pontos: A(3,2); B(-3,2), C(-3,-2) e D(3,-2)
2) Clique na ferramenta  e selecione "polígono" para, em seguida, clicar sobre os pontos A, B, C, D e A novamente.
3) Clique na ferramenta  e selecione "controle deslizante" e selecione o nome a.
4) Digite a matriz de transformação na janela: Entrada: M1={{a, 0}, {0, a}}
5) Digite na janela: Entrada: T1A=M1*A
6) Digite na janela: Entrada: T1B=M1*B
7) Digite na janela: Entrada: T1C=M1*C
8) Digite na janela: Entrada: T1D=M1*D
9) Clique na ferramenta , selecione "mover" e na janela de visualização movimente o controle deslizante a para 2.

Observação: Se não estiver enxergando os pontos T1A, T1B, T1C e T1D, clique na ferramenta:  e selecione "Reduzir" e clique na janela de visualização até enxergar os pontos.

10) Clique na ferramenta  e selecione "polígono" para, em seguida, clicar sobre os pontos T1A, T1B, T1C, T1D e T1A novamente.

Observação: Para retirar os rótulos dos segmentos: Clique na ferramenta , selecione "mover" e na janela de Álgebra clique em "Segmento", clique com botão da direita e selecione "Exibir rótulo". Faça duas vezes, se necessário.

11) Clique na ferramenta , selecione "mover" e na janela de visualização movimente o controle deslizante alfa.

Responda:

O que acontece com a Figura quando a=1 ou a=-1?

____

O que acontece com a Figura quando a>1 ou a<-1?

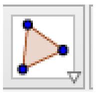
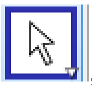
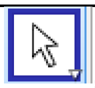
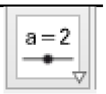
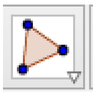
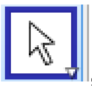
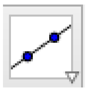
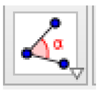
____

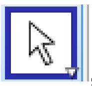
O que acontece com a Figura quando -1<a<1?

____

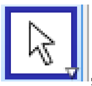
12) Considerando a=2, movimente os vértices A,B,C e D e observe as figuras.

O que aconteceu com as figuras? ____________________________________

13) Movimente os pontos para o primeiro quadrante.
14) Digite a matriz de transformação na janela: Entrada: M2={{1, 0}, {0, -1}}
15) Digite na janela: Entrada: T2A=M2*A
16) Digite na janela: Entrada: T2B=M2*B
17) Digite na janela: Entrada: T2C=M2*C
18) Digite na janela: Entrada: T2D=M2*D
19) Clique na ferramenta  e selecione “polígono” para, em seguida, clicar sobre os pontos T2A, T2B, T2C, T2D e T2A novamente (caso queira, retire os rótulos dos segmentos).
20) Clique na ferramenta , selecione “mover” e na janela de visualização movimente o os pontos A, B, C ou D. O que acontece com o polígono T2A, T2B, T2C, T2D? ____________________
21) Na janela da Álgebra clique sobre M2 e acrescente o sinal negativo para o elemento (1,1), ou seja: {{-1, 0}, {0, -1}} e clique em enter.
22) Responda: O que acontece com o polígono T2A, T2B, T2C, T2D? ________________________________
23) Clique na ferramenta , selecione “mover” e na janela de visualização movimente o os pontos A, B, C ou D. O que acontece com o polígono T2A, T2B, T2C, T2D? ____________________
24) Clique na ferramenta  e selecione “controle deslizante” , selecione ângulo e mude o nome para alfa.
25) Digite a matriz de transformação na janela: Entrada: R={{cos(alfa),-sin(alfa)}, {sin(alfa), cos(alfa)}}
26) Digite na janela: Entrada: RA=R*A
27) Digite na janela: Entrada: RB=R*B
28) Digite na janela: Entrada: RC=R*C
29) Digite na janela: Entrada: RD=R*D
30) Clique na ferramenta  e selecione “polígono” para, em seguida, clicar sobre os pontos RA, RB, RC, RD e RA novamente (caso queira, retire os rótulos dos segmentos).
31) Clique na ferramenta , selecione “mover” e na janela de visualização movimente o controle deslizante do ângulo alfa. O que acontece com o polígono RA, RB, RC, RD?
32) Clique na ferramenta  e selecione “vetor” e selecione os pontos (0,0) e o ponto C, criando o vetor “u”. Clique novamente sobre o ponto (0,0) e o ponto RC, criando o vetor “v”.
33) Clique na ferramenta  e selecione “ângulo” e depois clique sobre o vetor “u” e depois o vetor “v”, criando o ângulo α .

34) Clique na ferramenta , selecione "mover" e na janela de visualização movimente o controle deslizante do ângulo alfa.

O que acontece com os vetores "u=$\overrightarrow{OC}$ " e "v=$\overrightarrow{ORC}$ " ?_________________

35) Clique na ferramenta , selecione "mover" e na janela de visualização movimente o os pontos A, B, C ou D.

O que acontece com as figuras transformadas? ________________________

36) Movimente o os pontos A, B, C ou D, construa um retângulo no primeiro quadrante.

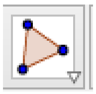
37) Digite a matriz de transformação na janela: Entrada: CH={{1, a}, {0, 1}}

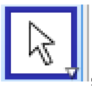
38) Digite na janela: Entrada: CHA=CH*A

39) Digite na janela: Entrada: CHB=CH*B

40) Digite na janela: Entrada: CHC=CH*C

41) Digite na janela: Entrada: CHD=CH*D

42) Clique na ferramenta  e selecione "polígono" para, em seguida, clicar sobre os pontos CHA, CHB, CHC, CHD e CHA novamente (caso queira, retire os rótulos dos segmentos).

43) Clique na ferramenta , selecione "mover" e na janela de visualização movimente o controle deslizante do a.

O que acontece com o polígono CHA, CHB, CHC, CHD?____________________

44) Clique na ferramenta , selecione "mover" e na janela de visualização movimente o os pontos A, B, C ou D.

O que acontece com as figuras transformadas? ________________________

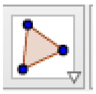
Observação: Podem ser obtidas composições de transformações multiplicando-se as matrizes de transformação. A seguir vamos **refletir a figura em torno da origem e rotacionar ao mesmo tempo**. Para rotacionar a imagem refletida aplica-se o produto de M2*R sobre os pontos da forma:

45) Digite na janela: Entrada: M2RA=M2*R*A

46) Digite na janela: Entrada: M2RB=M2*R*B

47) Digite na janela: Entrada: M2RC=M2*R*C

48) Digite na janela: Entrada: M2RD=M2*R*D

49) Clique na ferramenta  e selecione "polígono" para, em seguida, clicar sobre os pontos M2RA, M2RB, M2RC, M2RD e M2RA novamente.

50) Clique na ferramenta , selecione "mover" e na janela de visualização movimente o controle deslizante do ângulo alfa .

O que acontece com as figuras? ______________________________________

Anexo 27: Tarefa 14 (sem uso de tecnologias digitais)

Atividade 14 - Transformações Lineares (sem uso de tecnologias digitais)

ROTEIRO

Represente o retângulo definido por: A(1,1); B(3,1), C(3,2) e D(1,2) no plano cartesiano.

1) Calcule as novas coordenadas do segmento AB caso sofra uma transformação do tipo: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Fazendo suas representações no plano cartesiano responda:

O que acontece com a Figura quando a=1 ou a=-1?

O que acontece com a Figura quando a>1 ou a<-1?

O que acontece com a Figura quando -1<a<1?

2) Calcule as novas coordenadas do retângulo ABCD caso sofra uma transformação do tipo: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e o represente no plano cartesiano. O que acontece com o polígono transformado? ____

3) Calcule as novas coordenadas do retângulo ABCD caso sofra uma transformação do tipo: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ Responda: O que acontece com a Figura quando:

   $\alpha > 0$? Exemplifique no plano cartesiano. ______________________________

   $\alpha < 0$? Exemplifique no plano cartesiano.______________________________

4) Calcule as novas coordenadas do retângulo ABCD caso sofra uma transformação do tipo: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(52^0) & -sen(52^0) \\ sen(52^0) & \cos(52^0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e o represente no plano cartesiano.

O que acontece com o polígono transformado?________________________

Observação: Podem ser obtidas composições de transformações ao serem multiplicadas as matrizes de transformação.

5) Calcule as novas coordenadas do retângulo ABCD caso sofra uma transformação do tipo: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\cos(52^0) & sen(52^0) \\ -sen(52^0) & -\cos(52^0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e o represente no plano cartesiano.

   a) Observando o efeito da matriz de transformação utilizada, quais efeitos foram combinados?

   b) A matriz utilizada foi obtida pelo produto de quais matrizes de transformação? Indique como foi calculada:

Anexo 28: Tarefa 15 (com uso de tecnologias digitais)

Tarefa 15: Aplicação do métodos das transformações lineares em Criptografia (para ser realizada em duplas)

Nomes da DUPLA: ____

Observação: deve ser entregue no final da aula as folhas com os desenvolvimentos e respostas individual.

Considerando:

Tabela 2: Correspondência entre letras e números

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	-
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

1. Utilizando como chave a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ codifique as palavras “álgebra linear”, utilizado o método das Transformações Lineares, ou seja, para codificar utilize: $L\left(\vec{v}\right) = A\,\vec{v}$. Apresentem os cálculos realizados, ou a indicação deles.

Mensagem original	A	L	G	E	B	R	A		L	I	N	E	A	R	
Pré-codificação															
Mensagem codificada															

Responda: É possível codificar fazendo apenas um produto de matrizes? Se for, diga como.

2. Utilizado o método das Transformações Lineares, sabendo que a chave é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, decodifique a mensagem “26 29 17 49 71 31 44 71 39”, sabendo que: $$L_A\left(\vec{x}\right) = A\vec{x} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}L_A\left(\vec{x}\right) = \vec{x}$$
   Apresentem os cálculos realizados, ou a indicação deles.

Mensagem codificada	26	29	17	49	71	31	44	71	39
Pré-codificação									
Mensagem decodificada									

Responda: É possível decodificar fazendo apenas um produto de matrizes? Se for, diga como.

3. Utilizado o método das Transformações Lineares, sabendo que a chave é a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 8 & 4 \\ -3 & 6 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 8 \\ 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, decodifique o início da frase a seguir:

   Início da frase codificada (Exemplifique como procederam para decodificar a primeira parte da frase no *MATLAB*):

   "153 327 103 145 330 82 315 172 261 423 44 291 264 322 449 225 392 175 364 562 64 219 184 359 447 159 347 218 448 602 58 158 126 160 235 223 392 191 364 560 106 377 170 285 475 169 290 189 233 382 167 491 207 393 636"

   Frase decodificada:

   "____

   ____,

   mas sim o que consegue lidar melhor com a mudança." Charles Darwin.

4. Escolher uma chave possível para codificar a frase de Eugene F. Wane:

   "Toda glória deriva da ousadia para começar"

   Chave escolhida (justifique a escolha):

   Faça a codificação a frase (exemplifique como procederam para codificar a primeira parte da mensagem no *MATLAB*):

Anexo 29: Tarefa 15 (sem uso de tecnologias digitais)

Tarefa 15: Aplicação dos métodos das transformações lineares em Criptografia (para ser realizada em duplas) - sem uso de tecnologias

Nomes da DUPLA: ____

Observação: deve ser entregue no final da aula as folhas com os desenvolvimentos individuais e respostas da dupla.

Considerando:

Tabela 2: Correspondência entre letras e números

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	-
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

1. Utilizando como chave a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ codifique as palavras "álgebra linear", utilizado o método das Transformações Lineares, ou seja, para codificar utilize: $L\left(\vec{v}\right) = A\vec{v}$. Apresentem os cálculos realizados, ou a indicação deles.

Mensagem original	L	I	N	E	A	R
Pré-codificação						
Mensagem codificada						

Responda: É possível codificar fazendo apenas um produto de matrizes? Se for, diga como.

2. Utilizado o método das Transformações Lineares, sabendo que a chave é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, e que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, decodifique a mensagem "26 29 17 49 71 31 44 71 39", sabendo que:

$$L_A\left(\vec{x}\right) = A\vec{x} \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1}L_A\left(\vec{x}\right) = \vec{x}$$

Apresentem os cálculos realizados, ou a indicação deles.

Mensagem codificada	26	29	17	49	71	31	44	71	39
Pré-codificação									
Mensagem decodificada									

Responda: É possível decodificar fazendo apenas um produto de matrizes? Se for, diga como.

3. Inventar uma chave possível para codificação de uma mensagem, que seja de ordem dois e que seja diferente da citada na atividade (essa chave vocês irão utilizar na atividade 4, ok?)

   Chave escolhida:

   Justificativa:

4. Escolham uma palavra com no mínimo duas letras, façam sua codificação com a chave escolhida no item (3) e a enviem (junto com a chave escolhida) para a dupla ao lado.

   Palavra escolhida em português: ___________________________________

   Palavra codificada:____

5. Decodificar a palavra recebida (que está codificada, usando a chave recebida) e enviar para os colegas para verificarem se está correta.

Palavra codificada recebida: ____

Chave recebida:

Palavra decodificada (enviem para outra dupla, para verificarem):______________

Anexo 30: Categorização: questionário sobre uso da planilha

Categoria Inicial	%	Categoria Intermediária	%	Categoria Final
Ajudou a compreensão	8,59	Auxiliou a aprendizagem	21,86	Percepções sobre como a tarefa ajudou na compreensão do método
Possibilitou perceber detalhes do método.	3,91			
Aprimorou/ampliou conhecimentos	2,34			
Ajudou a compreensão - visualização de comandos	2,34			
Permitiu reflexões sobre o método	1,56			
Reforçou a parte teórica.	1,56			
Gostou- auxiliou na aprendizagem	1,56			
Gostou - percebeu facilidade na resolução	3,91	Pela praticidade no uso do recurso	10,95	
Ajudou - facilidade e rapidez no uso do recurso	3,91			
Gostou- evitou erros de cálculos	3,13			
Possibilitou perceber uso na prática	5,47	Por possibilitar perceber uso na prática.	6,25	
Possibilitou perceber praticidade no uso do recurso	0,78			
Por possibilitar a realização de exercícios	2,34	Por possibilitar a realização de exercícios	2,34	
Explicou corretamente a finalidade, porém o método de modo incompleto.	9,38	Se referiu à finalidade ou à descrição do método	19,53	Explicações sobre o método ou finalidade
Se referiu apenas à finalidade do método	7,03			
Se referiu apenas à explicação parcial do método	2,34			
Explicou método e a finalidade	0,78			
Tentou explicar finalidade, mas não conseguiu	1,56	Forneceu explicações vagas	2,34	
Definiu matriz triangular	0,78			
Houve percepção de compreensão do método	17,19	Houve percepção de compreensão do método	17,19	Percepções sobre suas compreensões sobre método
Compreendeu com aulas online	0,78	Houve percepção de compreensão do método com apoio de recursos externos à aula	1,56	
Compreendeu em livros e vídeo aulas	0,78			
Houve percepção de compreensão parcial do método	0,78	Houve percepção de compreensão parcial do método	0,78	
Gostou - aulas mais dinâmicas	3,94	Gostaram por ser uma proposta diferenciada	13,3	Motivos pelos quais gostaram da proposta de Ensino
Gostou - sentiu mais facilidade na aula	1,56			
Gostou - por ser mais prático	1,56			
Gostou - trabalho cooperativo	1,56			

Gostou-conheceu outro recurso para resolução	1,56			
Gostou -atividade se torna mais interessante com o conhecimento do recurso	0,78			
Gostou - aula diferenciada	0,78			
Gostou - participação ativa	0,78			
Gostou - dedicação da professora para com o aluno	0,78			
Destacou a importância do uso de tecnologias no ensino	0,78	Perceberam vantagens no uso das tecnologias digitais	3,12	
Achou interessante por usar um recursos tecnológico digital.	0,78			
Considera útil futuramente	0,78			
Considera que deveria ter mais tarefas no computador.	0,78			
Por não sentir dificuldade na aprendizagem	0,78	Por não sentir dificuldade na aprendizagem	0,78	

Fonte: Autora

Anexo 31: Categorização questionário conhecimentos prévios G1

Categoria Inicial	%	Cat. Int. 1	%	Cat. Int. 2	%	Cat. Int. 3	%	Categoria Final	%
Não se lembra do conceito de matrizes e uso	5,26	Não conseguiu lembrar sobre o conceito de matrizes e uso	7,89	Dificuldades na explicação de conceitos e usos de matrizes	13,16	Dificuldades na explicação de conceitos e usos de matrizes	13,16	Justificativas sobre dificuldades na explicação de conceitos e usos de conhecimentos prévios	40,13
Não se recorda - do conceito de matrizes e uso	1,97								
Não sabe explicar - do conceito de matrizes e uso	0,66								
Não se lembra do conceito de matrizes	1,97	Não conseguiu lembrar sobre o conceito de matrizes	3,29						
Não se recorda do conceito de matrizes	1,32								
Não sabe explicar matrizes	0,66	Não soube se expressar para conceituar ou para dizer onde são usadas matrizes	1,98						
Não sabe definir - do conceito de matrizes	0,66								
Não sabe o que são matrizes e uso	0,66								
Não lembra do conceito de determinantes e usos	5,25	Não conseguiu lembrar do conceito de determinantes e usos	7,23	Dificuldades na explicação de conceitos e usos de determinantes	12,5	Dificuldades na explicação de conceitos e usos de determinantes	12, 5		
Não sabe o conceito de determinantes e usos	1,32								
Não recorda do conceito de determinantes e usos	0,66								
Não lembra do conceito de determinantes	3,29	Não lembra do conceito de determinantes	3,95						
Não recorda o conceito de determinantes	0,66								
Não sabe explicar o conceito de determinantes	1,32	Não sabe explicar o conceito de determinantes	1,32						
Não lembrou o conceito de funções lineares	1,96	Não lembrou o conceito de funções lineares	3,94	Dificuldades na explicação de conceitos e usos de funções lineares	5,92	Dificuldades na explicação de conceitos e usos de funções lineares	5,92		
Não se lembra do uso de funções lineares pois não estudou aprofundadamente	1,32								
Não se recorda o conceito de funções lineares	0,66								
Não se recorda o conceito e uso de funções lineares	0,66	Não lembrou o conceito e uso de funções lineares	1,32						
Não sabe explicar o conceito de funções	0,66								

lineares nem para que servem									
Não sabe explicar o conceito de funções lineares nem para que servem	0,66	Não sabe explicar o conceito de funções lineares nem para que servem	0,66						
Não lembra do conceito de SL	1,32	Não lembra do conceito de SL	1,97	Dificuldades na explicação de conceitos e usos de SL	5,26	Dificuldades na explicação de conceitos e usos de SL	5,26		
Não recorda o conceito de SL	0,65								
Não lembra do conceito de SL e usos	1,97	Não lembra conceito de SL e usos	1,97						
Não sabe explicar o conceito e o uso de SL	1,32	Não sabe explicar o conceito e uso de SL	1,32						
Não lembrou o conceito, pois viu superficialmente	1,32	Não lembrou o conceito de vetores	1,97	Dificuldades na explicação de conceitos e usos de vetores	3,29	Dificuldades na explicação de conceitos e usos de vetores	3,29		
Não lembrou o conceito de vetores	0,65								
Não sabe explicar o conceito de vetores	0,66	Não sabe explicar o conceito de vetores	0,66						
Não lembrou onde podem ser usados conceito de vetores	0,66	Não lembrou onde os vetores podem ser usados	0,66						
Conceituou função linear como função de 1º grau.	3,26	Conceituou função linear como função de 1º grau.	4,58	Conceituou Função Linear	9,2	Conceituou Função Linear	9,2	Compreensão sobre Conceituação de	37,5
Conceituou função linear como função de 1º grau que descreve uma reta no plano cartesiano.	0,66								
Conceituou função linear como função de 1º grau (ax+b).	0,66								
Conceituou função linear como termo independente na equação	0,66	Conceituou sem clareza	2,64						
Conceituou função linear como equação de 1º grau onde a variável é nula	0,66								
Conceituou função linear afirmando que a variável é igual a zero e apresenta o termo independente maior que zero.	0,66								
Conceituou função linear como método para resolver determinados problemas.	0,66								
Conceituou função linear como relação entre duas variáveis	1,32	Conceituou função linear como relação entre duas variáveis	1,32						

Conceituou função linear por sua característica geométrica	0,66	Conceituou função linear por sua característica geométrica	0,66					conhecimentos prévios	
Conceituou matrizes como conjunto de números organizado em linhas e colunas.	0,66	Conceituou matrizes como um conjunto	2,64	Conceituou matrizes	4,6	Conceituou ou Não Conceituou Matrizes	7,9		
Conceituou matrizes - como um conjunto retangular o qual inclui números, simbolos ou expressões.	0,66								
Conceituou matrizes - como dados armazenados em linhas e colunas.	0,66								
Conceituou matrizes - como agrupamentos de números em linhas e colunas.	0,66								
Conceituou matrizes como se fosse determinante	1,96	Conceituou matrizes como se fosse determinante	1,96						
Não conceituou matrizes - exemplificou	1,32	Não conceituou matrizes - exemplificou	1,32	Não conceituou matrizes	3,3				
Não conceituou matrizes - citou modos de resolução	0,66	Não conceituou matrizes - citou modos de resolução	0,66						
Não conceituou matrizes - apenas se referiu ao seu formato em colunas	0,66	Não conceituou matrizes - apenas se referiu ao seu formato em colunas	0,66						
Não conceituou matrizes - disse lembrar de nomenclaturas	0,66	Não conceituou matrizes - disse lembrar de nomenclaturas	0,66						
Conceituou SL como conjunto de equações lineares	0,66	Conceituou SL como conjunto de equações	3,3	Conceituou SL	5,93	Conceituou ou Não Conceituou Sistemas Lineares	7,9		
Conceituou SL como conjunto de equações com mais de uma incógnita.	0,66								
Conceituou SL como sistemas de inúmeras variáveis com várias equações	0,66								
Conceituou SL como equações com várias variáveis	0,66								
Conceituou SL como equações com duas ou	0,66								

mais variáveis									
Conceituou SL como uma equação	0,66	Conceituou SL como uma equação	1,31						
Conceituou SL como uma equação com incógnitas	0,66								
Conceituou SL como equações com uma variável	0,66	Conceituou SL como equações com uma variável	0,66						
Conceituou SL como sistemas	0,66	Conceituou SL como sistemas	0,66						
Não conceituou SL apenas se referiu aos objetivos	1,31	Não conceituou SL apenas se referiu aos objetivos	1,31	Não conceituou SL	1,97				
Não conceituou SL - se referiu aos métodos de resolução	0,66	Não conceituou SL - se referiu aos métodos de resolução	0,66						
Conceituaram vetores como algo que possui intensidade, direção e sentido	1,31	Conceituaram vetores por suas características.	2,62	Conceituou Vetores	6,58	Conceituou Vetores	6,58		
Conceituaram vetores como algo que possui direção e sentido	1,31								
Conceituaram vetores como um indicador de uma força, uma direção e um sentido	0,66	Conceituaram vetores como forças	2,64						
Conceituaram vetores como forças que indicam um sentido	0,66								
Conceituaram vetores como forças com direção e sentido	0,66								
Conceituaram vetores como forças que possuem direção, sentido e intensidade	0,66								
Conceituaram vetores como “setas” que determinam direção e sentido	0,66	Conceituaram vetores como “setas” que determinam direção e sentido	0,66						
Conceituaram vetores relacionados a pontos do plano cartesiano	0,66	Conceituaram vetores relacionados a pontos do plano cartesiano	0,66						
Não conceituou determinante - mas o relacionou à matrizes.	1,31	Não conceituou determinante - mas o relacionou à matrizes.	3,95	Não conceituou determinante	4,61	Conceituou ou Não Conceituou Determinante	5,92		
Não conceituou o determinante mas se	0,66	Não conceituou o	0,66						

referiu ao modo de resolução		determinante mas se referiu ao modo de resolução				s			
Conceituou o determinante como um número real associado a matriz quadrada	0,66	Conceituou o determinante	1,31	Conceituou o determinante	1,31				
Conceituou o determinante como um número real associado à uma matriz	0,66								
Uso de vetores para indicar forças.	1,96	Uso de vetores na representação de forças	5,92	Usos de vetores	9,87	Usos de vetores	9,87	Percepções de usos de conhecimentos prévios	22,37
Uso de vetores para representar forças.	0,66								
Uso de vetores para determinar direções e a força da direção.	0,66								
Uso de vetores para indicar sentido e direção.	0,66								
Uso de vetores para indicar sentido e direção de forças.	0,66								
Uso de vetores em aplicações práticas em problemas de força, para indicar no plano direção, sentido e intensidade.	0,66								
Uso de vetores para achar o módulo, direção e sentido de diversas forças.	0,66								
Uso de vetores para decomposição vetorial.	1,97	Uso de vetores para decomposição vetorial	3,29						
Uso de vetores para decomposição vetorial e cálculo de áreas.	0,66								
Uso de vetores para indicar forças e na decomposição vetorial, para o cálculo de estruturas.	0,66								
Uso de vetores em situações práticas.	0,66	Uso de vetores em situações práticas.	0,66						
Uso de matrizes em sistemas lineares	1,97	Uso de matrizes em SL	2,62	Usos de matrizes	4,6	Usos de matrizes	4,6		
Uso de matrizes em sistemas lineares e armazenamento de dados	0,66								
Uso de matrizes em área de polígono	0,66	Uso de matrizes em determinantes	1,32						
Uso de matrizes em determinantes	0,66								
Uso de matrizes no cotidiano	0,66	Uso de matrizes no cotidiano	0,66						

Uso de determinantes em sistemas lineares	1,97	Uso de determinantes em sistemas lineares	1,97	Usos de determinantes	3,95	Usos de determinantes	3,95		
Uso de determinantes em matrizes	0,66	Uso de determinantes em matrizes	0,66						
Uso de determinantes para achar a matriz inversa	0,66	Uso de determinantes para achar a matriz inversa	0,66						
Uso de determinantes no cotidiano	0,66	Uso de determinantes no cotidiano	0,66						
Uso de SL para resolver problemas com duas variáveis	0,66	Uso de SL para resolver problemas	1,97	Usos de SL	2,63	Usos de SL	2,63		
Uso de SL para resolver um problema	0,66								
Uso de SL resolução de problema com dados incompletos	0,66								
Uso de SL para construção de Gráficos	0,66	Uso de SL para construção de Gráficos	0,66						
Uso de funções lineares em situações práticas.	0,66	Uso de funções lineares em situações práticas.	0,66	Uso de funções lineares	1,32	Uso de funções lineares	1,32		
Uso de funções lineares para calcular valores reais de variáveis dependentes	0,66	Uso de funções lineares para calcular valores reais de variáveis dependentes	0,66						

Fonte: Autora

Anexo 32: Categorização questionário conhecimentos prévios G2

<table>
<tr><th>Categoria Inicial</th><th>%</th><th>Cat. Int.1</th><th>%</th><th>Cat. Int. 2</th><th>%</th><th>Categoria Final</th><th>%</th></tr>
<tr><td>Não lembra conceito de matrizes nem usos</td><td>9,08</td><td rowspan="4">Não se lembram do conceito de matrizes ou de usos</td><td rowspan="4">17,03</td><td rowspan="5">Dificuldades na explicação de conceitos e usos de matrizes</td><td rowspan="5">18,17</td><td rowspan="18">Justificativas sobre dificuldades na explicação de conceitos e usos de conhecimentos prévios</td><td rowspan="18">47,72</td></tr>
<tr><td>Não se lembra do uso de matrizes</td><td>3,41</td></tr>
<tr><td>Não lembra conceito de matrizes</td><td>2,27</td></tr>
<tr><td>Não sabe sobre uso de matrizes</td><td>2,27</td></tr>
<tr><td>Não sabe explicar o conceito de matrizes nem usos</td><td>1,14</td><td>Não sabe explicar o conceito de matrizes nem usos</td><td>1,14</td></tr>
<tr><td>Não lembra conceito de determinantes nem usos</td><td>6,81</td><td rowspan="2">Não lembra conceito de determinantes nem usos</td><td rowspan="2">9,08</td><td rowspan="6">Dificuldades na explicação de conceitos e usos de determinantes</td><td rowspan="6">13,64</td></tr>
<tr><td>Não se recorda do conceito de determinantes nem usos</td><td>2,27</td></tr>
<tr><td>Não conceituou e não sabe sobre uso do determinante</td><td>1,14</td><td rowspan="2">Afirmou ter aprendido, mas não conceituou e disse não saber para que servem.</td><td rowspan="2">2,28</td></tr>
<tr><td>Disse saber calcular, mas não conceituou e disse não saber sobre uso do determinante</td><td>1,14</td></tr>
<tr><td>Não compreende conceito de determinantes nem usos</td><td>1,14</td><td>Não compreende conceito de determinantes nem usos</td><td>1,14</td></tr>
<tr><td>Não se lembrou do uso de determinantes</td><td>1,14</td><td>Não se lembrou do uso de determinantes</td><td>1,14</td></tr>
<tr><td>Não se lembra do conceito de funções lineares nem onde são usadas</td><td>2,27</td><td rowspan="3">Não se lembra do conceito de funções lineares nem onde são usadas</td><td rowspan="3">5,68</td><td rowspan="4">Dificuldades na explicação de conceitos e usos de funções lineares</td><td rowspan="4">6,82</td></tr>
<tr><td>Não se recorda do conceito de funções lineares nem onde são usadas</td><td>2,27</td></tr>
<tr><td>Lembra dos gráficos de funções lineares vagamente, mas não exemplificou</td><td>1,14</td></tr>
<tr><td>Não compreende o conceito de funções lineares nem onde são usadas</td><td>1,14</td><td>Não compreende o conceito de funções lineares nem onde são usadas</td><td>1,14</td></tr>
<tr><td>Não se lembra do conceito de sistemas lineares nem de usos</td><td>3,4</td><td rowspan="2">Não se lembra do conceito de sistemas lineares nem de usos</td><td rowspan="2">4,54</td><td rowspan="3">Dificuldades na explicação de conceitos e usos de SL</td><td rowspan="3">5,68</td></tr>
<tr><td>Lembra vagamente do conceito de sistemas lineares e usos</td><td>1,14</td></tr>
<tr><td>Não se recorda do conceito de sitemas lienares</td><td>1,14</td><td>Não se recorda do conceito de sitemas lienares</td><td>1,14</td></tr>
</table>

Não lembra o conceito de vetores e nem para que servem	2,27	Não lembra o conceito de vetores nem usos	2,27	Dificuldades na explicação de conceitos e usos de vetores	3,41		
Aprendeu vetores de forma iniciada	1,14	Aprendeu vetores de forma iniciada	1,14				
Conceituaram vetores por suas características	4,52	Conceituou vetores	10,2	Conceituou ou Não Conceituou Vetores	11,34	Compreensão sobre Conceituação de conhecimentos prévios	35,23
Conceituaram vetores como forças	3,4						
Conceituou vetores como retas com sentido e direção	1,14						
Conceituaram vetores como representações de grandezas	1,14						
Não conceituou- apenas apresentou uma seta	1,14	Não conceituou vetores	1,14				
Conceituou matrizes se referindo a organização	4,52	Conceituou matrizes	7,93	Conceituou ou Não Conceituou Matrizes	10,21		
Conceituou matrizes como tabela	2,27						
Conceituou matrizes como modo de resolução	1,14						
Não conceituou matrizes - se referiu a exemplos	1,14	Não conceituou matrizes	2,28				
Não conceituou matrizes - se referiu à lembrança da representação	1,14						
Não conceituou - mas o associou ao uso de matrizes em outras disciplinas	1,14	Não conceituou o determinante	4,56	Conceituou ou Não Conceituou Determinantes	5,7		
Não conceituou - se referiu ao método de Sarrus	1,14						
Não conceituou - se referiu ao método de Sarrus e citou tipos e existências de outras fórmulas	1,14						
Não conceituou - apenas disse saber calcular, mas não disse como	1,14						
Conceituou o determinante como um valor associado à uma matriz	1,14	Conceituou o determinante	1,14				
Conceituou SL como conjunto de equações que podem ser resolvidas por matrizes	1,14	Conceituou SL como conjunto de equações	2,28	Conceituou sistemas lineares	4,56		
conceituou SL como conjunto de equações com uma incognita em comum	1,14						
Conceituou sistemas lineares como um modo de resolver equações com várias variáveis	1,14	Conceituou sistemas lineares como um modo de resolver equações com várias variáveis	1,14				
Conceituou SL como análise de incógnitas e igualdade de variáveis	1,14	Conceituou SL como análise de incógnitas e igualdade de variáveis	1,14				
Conceituou função linear como função de 1º grau, com variáveis e incógnitas	1,14	Conceituaram função linear como função de 1º grau.	2,28	Conceituou função linear	3,42		

Conceituou função linear como função de 1º grau e citou sua representação gráfica	1,14						
Conceituou função linear como uma equação de 1° grau.	1,14	Conceituou função linear como uma equação de 1° grau.	1,14				
Uso para indicar sentido ou direção.	2,26	Uso de vetores relacionados à determinação de sentido e direção.	4,54	Usos de vetores	14,77	Percepções de usos de conhecimentos prévios	17,05
Uso para determinar sentido, direção ou deslocamento.	1,14						
Uso para indicar sentido e direção.	1,14						
Uso de vetores na representação de forças	3,39	Uso de vetores na representação de forças	4,53				
Uso de vetores para representar intensidade de forças.	1,14						
Uso de vetores na decomposição vetorial.	2,28	Uso de vetores na decomposição vetorial.	2,28				
Uso em informática aplicada à engenharia, estática. Resistência de materiais I e II, entre outras.	1,14	Uso de vetores relacionados à outras disciplinas	2,28				
Uso como conhecimento básico de física	1,14						
Uso para representar grandezas	1,14	Uso para representar grandezas	1,14				
Uso de Sistemas Lineares	1,14	Uso de Sistemas Lineares	1,14	Uso de Sistemas Lineares	1,14		
Uso da função linear	1,14	Uso da função linear	1,14	Uso da Função Linear	1,14		

Fonte: Autora

Anexo 33: Categorização Conhecimentos Ampliados ou Construídos e Aprendizagem Significativa - G1 (652 unidades de sentido)

<table>
<tr><th>Cat. Inicial</th><th>%</th><th>Cat Int. 1</th><th>%</th><th>Cat Int. 2</th><th>%</th><th>Cat Int. 3</th><th>%</th><th>Categoria Final</th><th>%</th></tr>
<tr><td>Percebe que a disciplina possibilitou compreender matrizes ou usos</td><td>3,85</td><td rowspan="4">Percepções sobre compreensão de matrizes, no final da disciplina</td><td rowspan="4">4,92</td><td rowspan="7">Compreensões de matrizes no final da disciplina</td><td rowspan="7">6,91</td><td rowspan="12">Compreensões de matrizes</td><td rowspan="12">11,2</td><td rowspan="18">Compreensão de conceitos</td><td rowspan="18">52,61</td></tr>
<tr><td>Destacaram que a abordagem de matrizes possibilitou perceber associações da teoria com usos práticos</td><td>0,61</td></tr>
<tr><td>Destacou que a utilização de recursos tecnológicos facilitou compreender matrizes</td><td>0,31</td></tr>
<tr><td>Percebe que não possibilitou compreender matrizes</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Conceituou como tabelas (ou elementos) organizadas por linhas e colunas</td><td>1,38</td><td rowspan="3">No final da disciplina, como conceituaram matrizes</td><td rowspan="3">1,99</td></tr>
<tr><td>Conceituou como tabela</td><td>0,46</td></tr>
<tr><td>Conceituou como forma de organizar dados</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Lembrou de matrizes</td><td>2,29</td><td rowspan="5">Lembranças sobre matrizes, após nove meses</td><td rowspan="5">4,29</td><td rowspan="5">Lembranças sobre matrizes, após nove meses</td><td rowspan="5">4,29</td></tr>
<tr><td>Lembrou do escalonamento</td><td>0,77</td></tr>
<tr><td>Lembrou do conceito de matrizes</td><td>0,61</td></tr>
<tr><td>Lembrou de operações envolvendo matrizes</td><td>0,31</td></tr>
<tr><td>Lembrou de tipos de matrizes</td><td>0,31</td></tr>
<tr><td>Percebe que a disciplina possibilitou compreender SL</td><td>3,38</td><td rowspan="3">Percepções sobre compreensão de SL e aplicações, no final da disciplina</td><td rowspan="3">3,84</td><td rowspan="6">Compreensão sobre SL no final da disciplina</td><td rowspan="6">7,21</td><td rowspan="6">Compreensões sobre SL</td><td rowspan="6">10,89</td></tr>
<tr><td>Destacaram que a abordagem favoreceu a compreensão ou aprimoramento de sistemas lineares</td><td>0,31</td></tr>
<tr><td>Percebe que não possibilitou compreender SL</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Conceituou SL como conjunto de equações lineares com n variáveis</td><td>1,07</td><td rowspan="3">No final da disciplina, como conceituaram SL</td><td rowspan="3">2,76</td></tr>
<tr><td>Conceituou SL como conjunto de equações lineares</td><td>0,77</td></tr>
<tr><td>Conceituou SL como conjunto de equações com incógnitas (ou variáveis)</td><td>0,61</td></tr>
</table>

Conceituou SL como conjunto de equações	0,31								
No final da disciplina lembraram de métodos de resolução de SL	0,61	No final da disciplina lembraram de métodos de resolução de SL	0,61						
Lembrou de SL	1,99	Lembranças sobre SL, após nove meses	3,68	Lembranças sobre SL, após nove meses	3,68				
Lembrou de métodos de resolução de SL	1,08								
Lembrou do escalonamento para resolver SL	0,46								
Lembrou do conceito de SL	0,15								
Percebe que a disciplina possibilitou compreender ou ampliar o conceito de vetores	3,53	Percepções sobre compreensão ou ampliação do conceito de vetores, no final da disciplina	4,14	Compreensão de vetores no final da disciplina	8,28	Compreensões sobre vetores	9,97		
Disse que ampliou ou que possibilitou compreender, mas afirma não ter entendido bem	0,46								
Percebeu que a disciplina não possibilitou compreender ou ampliar o conceito de vetores	0,15								
Compreendeu que pode ser representado na forma algébrica	1,23	Modos como compreenderam que ampliou o conceito de vetores, no final da disciplina	2,91						
Compreendeu melhor pois percebeu usos no cálculo estrutural	0,77								
Disse ter compreendido melhor o conceito de vetores e como aplicá-los, mas não especificou como	0,61								
Percebeu que o conceito envolve elementos de espaços vetoriais, como matrizes	0,15								
Destacou que o uso do GeoGebra possibilitou a compreensão visual	0,15								
Compreende um vetor vinculado apenas a ideia de um representante de uma grandeza vetorial	0,47	Conceituações sobre o conceito de vetores, no final da disciplina	1,23						
Compreende vetor como um conjunto de infinitos segmentos orientados	0,31								
Compreendeu um vetor como um elemento de um espaço vetorial	0,15								
Compreendeu vetores como retas que possuem coordenadas	0,15								
Compreendeu vetores como segmentos de	0,15								

retas que possuem direção, sentido e comprimento, que podem ser representados nos espaços uni, bi e tridimensional									
Lembrou de vetores	1,08	Lembranças sobre vetores, após nove meses	1,69	Lembranças sobre vetores, após nove meses	1,69				
Lembrou dos Espaços Vetoriais	0,46								
Lembrou da definição de Espaços Vetoriais	0,15								
Percebe que a disciplina possibilitou compreender determinantes	3,84	Percepções sobre compreensão de determinantes e aplicações, no final da disciplina	3,99	Compreensão de determinantes no final da disciplina	6,9	Compreensões de determinantes	9,51		
Percebe que não possibilitou compreender aplicações de determinantes	0,15								
Conceituou determinantes como números associados à matrizes quadrada	1,38	No final da disciplina, como conceituaram determinantes	2,91						
Conceituou determinantes como um número resultante ou associado à uma matriz	0,77								
Conceituou determinantes como uma função	0,46								
Conceituou determinantes como um número que pode ser representado por uma matriz	0,15								
Conceituou determinantes como um número	0,15								
Lembrou de determinantes	1,53	Lembranças sobre determinantes	2,61	Lembranças sobre determinantes	2,61				
Lembrou da definição de determinantes	0,46								
Lembrou do estudo de cálculos de determinantes	0,31								
Lembrou de métodos de resolução de determinantes	0,31								
Conceituou Autovetores e Autovalores como valores ou vetores que possibilitam a existência de vetores	0,61	Conceituaram Autovalores e Autovetores	2,29	Compreensão de Autovalores ou Autovetores no final da disciplina	5,67	Compreensões sobre Autovalores e Autovetores	6,44		
Conceituou Autovetores como vetores que preservam suas direções após sua transformação e Autovalores como múltiplos que transformam os autovetores	0,46								
Conceituou Autovalores e Autovetores como operadores lineares	0,31								
Conceituou Autovetores e Autovalores como um número a partir de uma matriz	0,31								
Conceituou Autovalor como um número e	0,15								

Autovetor como um vetor que preserva a dimensão									
Conceituou Autovalores e Autovetores como transformações vetoriais	0,15								
Conceituou Autovetores como novos vetores associados aos autovalores e às transformações e os autovalores como os múltiplos das equações lineares	0,15								
Conceituou Autovetores como valores que possibilitam encontrar Autovalores para escrever a combinação linear	0,15								
Não compreendeu ou não se lembram de alguma aplicação de Autovalores e Autovetores na engenharia	0,77	Percepções sobre compreensão do conceito de Autovalores e Autovetores e de usos, no final da disciplina	1,84						
A disciplina não possibilitou compreender o que são Autovalores e Autovetores	0,61								
A disciplina possibilitou compreender o que são Autovalores e Autovetores	0,46								
Compreende que Autovetores e Autovalores são importantes, pois estão associados à transformações / transformações lineares	0,93	Associações realizadas sobre o conceito de Autovalores e Autovetores, no final da disciplina	1,23						
Compreende que Autovetores e Autovalores utiliza a nocão de vetores relacionado à forças em um objeto	0,15								
Compreende que Autovetores e Autovalores estão relacionados à dependência linear	0,15								
Conceituou Autovetores como vetores que preservam suas direções após sua transformação	0,31	Apenas Conceituaram Autovetores	0,31						
Lembrou de Autovalores e Autovetores	0,62	Lembranças sobre Autovalores e Autovetores	0,77	Lembranças sobre Autovalores e Autovetores	0,77				
Lembrou da definição de Autovalores e Autovetores	0,15								
Conceituou TL como função entre dois espaços vetoriais	0,46	Conceituaram TL	2,45	Compreensões de TL, no final da disciplina	3,68	Compreensões sobre TL	4,6		
Conceituou TL como transformação de vetores	0,46								
Conceituou TL como operações entre vetores	0,46								
Conceituou TL como transformação de	0,31								

matrizes									
Conceituou TL como aplicação linear	0,31								
Conceituou TL como conceitos aplicados em vetores	0,15								
Conceituou TL como ações em vetores	0,15								
Conceituou TL como métodos para deslocar figuras	0,15								
Afirmou que a disciplina possibilitou compreender o conceito de TL	0,47	Percepções sobre compreensão do conceito de TL e de usos	1,23						
A disciplina possibilitou comprender TL principalmente com uso do GeoGebra	0,31								
Afirmou que a disciplina não possibilitou compreender o conceito de TL	0,15								
Disse não saber de se TL são importantes na Engenharia Civil	0,15								
Disse não lembrar de ver exemplos de usos de TL na Engenharia Civil	0,15								
Lembrou de TL	0,77	Lembranças sobre TL	0,92	Lembranças sobre TL	0,92				
Lembrou da definição de TL	0,15								
Uso de matrizes na organização e manipulação de dados	2,91	Percepções sobre usos de matrizes, no final da disciplina.	6,44	Percepções sobre usos de matrizes	9,81	Percepções sobre usos dos conceitos	30,52	Percepções Gerais sobre usos dos conhecimentos contruídos na disciplina	39,42
Uso de matrizes na resolução de problemas	1,23								
Uso de matrizes na resolução de sistemas	0,92								
Uso de matrizes na codificação de mensagens	0,77								
Uso de matrizes na programação de computadores	0,46								
Uso de matrizes na interpretação de gráficos	0,15								
Lembrou do uso de matrizes na organização de dados	1,22	Lembrou de usos de matrizes, após nove meses	3,37						
Lembrou do uso de matrizes na resolução de SL	0,77								
Lembrou do uso na resolução de problemas	0,61								
Lembrou do uso de matrizes em métodos variados	0,46								
Lembrou de usar matrizes no cálculo numérico	0,31								
Uso de determinante no cálculo de área	2,15	No final da disciplina, como perceberam usos	5,53	Percepções sobre usos determinantes	6,6				
Uso de determinante para calcular matriz inversa	1,23								

Uso de determinante para resolver SL	0,92	de determinantes								
Uso de determinante na resolução de problemas	0,31									
Uso de determinantes para verificar dependência linear	0,31									
Uso de determinante para encontrar equações	0,31									
Uso de determinantes em função matemática	0,15									
Uso de determinantes na identificação se um sistema é homogêneo ou não.	0,15									
Lembrou de usar determinantes para cálculo de área	0,61	Lembranças sobre uso de determinantes	1,07							
Lembrou de determinantes para organizar problemas	0,31									
Lembrou de determinantes para resolver SL	0,15									
Uso de SL na resolução de problemas	1,7	No final da disciplina, como perceberam usos de SL	4,3	Percepções sobre usos de SL	5,37					
Uso de SL em problemas de fluxo em redes	0,61									
Uso de SL na otimização de problemas	0,46									
Uso de SL para resolver problemas algébricos	0,46									
Uso de SL em problemas de estática	0,46									
Uso de SL em balanceamento de equações químicas	0,31									
Uso de SL na área de ciências exatas	0,15									
Uso de SL em matrizes	0,15									
Lembrou de resolução de problemas com SL	0,47	Lembranças sobre uso de SL	1,07							
Lembrou do uso em problemas de fluxo	0,15									
Lembrou do uso para o cálculo de forças em estática	0,15									
Lembrou do uso para resolver o método das Frações Parciais em cálculo	0,15									
Lembrou de uso de SL para determinar incógnitas	0,15									
Percebeu aplicações de TL e citou exemplo de uso na engenharia	2,3	No final da disciplina, como perceberam usos de TL	4,91	Percepções sobre usos de TL	5,06					
Percebeu aplicações de TL em vetores ou figuras e citou exemplos	1,53									
Percebeu aplicações de TL e citou exemplos de uso na codificação de mensagens	0,77									
Indicou uso de TL em estrutura metálica	0,31									

<table>
<tr><td>Lembrou do cisalhamento e da codificação de mensagens</td><td>0,15</td><td>Lembranças sobre uso de TL</td><td>0,15</td><td></td><td></td><td rowspan="15"></td><td rowspan="15"></td><td rowspan="18"></td><td rowspan="18"></td></tr>
<tr><td>Percebe o uso de vetores na representação de forças</td><td>0,63</td><td rowspan="6">No final da disciplina, como perceberam usos de vetores</td><td rowspan="6">1,54</td><td rowspan="9">Percepções sobre usos de vetores</td><td rowspan="9">2,15</td></tr>
<tr><td>Percebeu uso de vetores em Estática</td><td>0,31</td></tr>
<tr><td>Percebeu uso de vetores na codificação de mensagens</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Percebe o uso de vetores como representantes de matrizes</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Percebe o uso de vetores na representação de formas geométricas</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Percebe o uso de vetores em problemas de engenharia</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Lembrou uso de vetores em Física e em Estática</td><td>0,31</td><td rowspan="3">Lembranças sobre uso de vetores</td><td rowspan="3">0,61</td></tr>
<tr><td>Lembrou de uso de vetores em armazenamento de variáveis, em programação</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Lembrou de vetores para descobrir o valor de uma incógnita</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Perceberam que Autovalores e Autovalores são usados para o cálculo de vibrações em estruturas</td><td>0,93</td><td rowspan="4">No final da disciplina, perceberam a aplicação de Autovalores e Autovetores na engenharia</td><td rowspan="4">1,38</td><td rowspan="5">Percepções sobre usos de Autovalores e Autovetores</td><td rowspan="5">1,53</td></tr>
<tr><td>Percebeu que Autovalores e Autovalores são aplicados na análise estrutural</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Percebeu que Autovalores e Autovalores são aplicados em cálculos de áreas e resistências</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Percebeu que Autovetores e Autovalores são usados para expandir espaços vetoriais uniformemente</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Lembrou da aplicação de Autovalores e Autovetores</td><td>0,15</td><td>Lembrou da aplicação de Autovalores e Autovetores</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Perceberam uso na disciplina de Cálculo Numérico.</td><td>1,39</td><td rowspan="3">Perceberam usos de conceitos de AL em outras disciplinas</td><td rowspan="3">5,37</td><td rowspan="3">Percepções de uso acadêmico dos conceitos de AL</td><td rowspan="3">5,68</td><td rowspan="3">Percepções sobre usos do conhecimento construído em</td><td rowspan="3">8,9</td></tr>
<tr><td>Perceberam uso na disciplina de Estática</td><td>0,61</td></tr>
<tr><td>Perceberam uso na disciplina de Geometria</td><td>0,61</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Perceberam uso de conceitos em disciplinas, mas não especificaram em qual delas</td><td>0,46</td><td rowspan="9"></td><td rowspan="9"></td><td rowspan="10"></td><td rowspan="10"></td><td rowspan="15">AL</td><td rowspan="15"></td><td rowspan="15"></td><td rowspan="15"></td></tr>
<tr><td>Perceberam uso em programação, na disciplina de algoritmos</td><td>0,46</td></tr>
<tr><td>Perceberam uso nas disciplinas de Cálculo I ou II</td><td>0,46</td></tr>
<tr><td>Perceberam uso na disciplina de EDO</td><td>0,31</td></tr>
<tr><td>Perceberam uso na disciplina de Resistência dos Materiais 1.</td><td>0,31</td></tr>
<tr><td>Perceberam uso na disciplina de Física</td><td>0,31</td></tr>
<tr><td>Percebeu uso na disciplina de Estruturas</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Percebeu uso nas disciplinas Hidráulica 1 e 2, Análise Estrutural 1</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Percebeu uso na disciplina de cinemática e dinâmica.</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Não perceberam usos de conceitos de Álgebra Linear em outras disciplinas do curso</td><td>0,31</td><td>Não perceberam usos de conceitos de Álgebra Linear em outras disciplinas do curso</td><td>0,31</td></tr>
<tr><td>Usou conceitos de AL somente em aplicações acadêmicas</td><td>1,23</td><td rowspan="3">Modos de percepção usos de conceitos de AL em outros contextos</td><td rowspan="3">1,84</td><td rowspan="5">Percepções sobre usos de conceitos de AL em outros contextos</td><td rowspan="5">3,22</td></tr>
<tr><td>Usou conceitos de AL em aplicações profissionais</td><td>0,46</td></tr>
<tr><td>Usou conceitos de AL na vida pessoal</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>Não percebeu usos de conceitos de AL em outros contextos</td><td>1,07</td><td rowspan="2">Não perceberam usos de conceitos de AL em outros contextos</td><td rowspan="2">1,38</td></tr>
<tr><td>Não percebeu usos de conceitos de AL pessoalmente ou profissionlamente.</td><td>0,31</td></tr>
<tr><td>Destacaram o uso das tecnologias como importante na aprendizagem</td><td>0,46</td><td rowspan="4">Influência do uso de recursos tecnológicos na aprendizagem</td><td rowspan="4">1,23</td><td rowspan="4">Aspectos positivos</td><td rowspan="4">4,75</td><td rowspan="4">Lembrança de aspectos positivos e negativos da proposta</td><td rowspan="4">5,83</td><td rowspan="4">Percepções sobre o método de ensino e de aprendizagem usado na disciplina</td><td rowspan="4">7,97</td></tr>
<tr><td>Uso do computador/ tecnologia facilitou a aprendizagem</td><td>0,31</td></tr>
<tr><td>Lembraram que ter acesso aos recursos tecnológicos digitais facilitou a resolução de tarefas</td><td>0,31</td></tr>
<tr><td>Lembrou que o uso de recursos tecnológicos</td><td>0,15</td></tr>
</table>

possibilitou a visualização da aplicação prática dos métodos									
Lembrou que o método de ensino foi bom/ favoreceu a compreensão	0,92	Lembranças positivas sobre o método de ensino	1,23						
Percebeu o ensino proposto de modo prático e dinâmico	0,31								
Lembraram que as aulas eram interessantes, pois apresentava aplicações práticas na engenharia	0,46	Lembram de aulas interessantes	1,06						
Lembrou que as aulas eram interessantes por possibilitarem o uso de recursos tecnológicos digitais	0,15								
Lembrou que as aulas eram interessantes pois as tarefas eram cooperativas	0,15								
Lembrou de aulas interessantes e bem ministradas	0,15								
Lembrou sentir interesse na matéria	0,15								
Lembraram que a abordagem possibilitou perceber associações da teoria com usos práticos	0,77	Lembraram que a abordagem possibilitou perceber associações da teoria com usos práticos	0,77						
Após nove meses, percebem que a disciplina colaborou com sua formação profissional	0,46	Após nove meses, percebem que a disciplina colaborou com sua formação profissional	0,46						
Sentiram dificuldades em relação ao tempo disponível para as tarefas	0,31	Sentiram dificuldades em relação ao tempo disponível para as tarefas	0,31	Aspectos negativos	0,77				
Lembraram da avaliação muito extensa	0,31	Lembra da avaliação muito extensa	0,31						

Lembrou que sentiu falta da realização de mais exercícios em aula	0,15	Lembra que sentiu falta da realização de mais exercícios em aula	0,15						
Lembram que não perceberam aspectos negativos	0,31	Lembram que não perceberam aspectos negativos	0,31	Lembram que não perceberam aspectos negativos	0,31				
Lembrou que a abordagem possibilitou um melhor aproveitamento	0,48	Lembranças sobre aprendizagem	0,93	Lembranças sobre aprendizagem	0,93	Lembranças sobre aprendizagem	0,93		
Lembrou que a aprendizagem de Álgebra Linear possibilitou melhorar a compreensão de problemas e estimulou o raciocínio lógico	0,15								
Lembrou que a disciplina foi exigente, mas que foi valiosa	0,15								
Lembrou que percebeu aprovação da turma	0,15								
Lembrou que sentiu dificuldades para aprender	0,15	Lembranças sobre dificuldades	0,6	Lembranças sobre dificuldades	0,6	Lembranças sobre dificuldades	0,6		
Lembrou de sentir dificuldades com exigência	0,15								
Lembrou que sentiu dificuldades na interação com a professora	0,15								
Lembrou que percebeu que o uso do computador pode ter gerado dificuldades para alguns	0,15								
Não se Lembraram das aulas	0,31	Não conseguiram se lembrar das aulas ou expressar os conceitos	0,61	Não conseguiram se lembrar das aulas ou expressar os conceitos	0,61	Não conseguiram se lembrar das aulas ou expressar os conceitos	0,61		
Lembra que aprendeu, mas não se recorda.	0,15								
Não conseguiu expressar em linguagem natural	0,15								

Fonte: Autora

Anexo 34: Conhecimentos Ampliados ou Construídos e Aprendizagem Significativa – G2

Cat. Inicial	%	Cat. Int. 1	%	Cat. Int. 2	%	Cat. Int. 3	%	Cat. Final	%
Percebe que a disciplina possibilitou compreender Matrizes	5,38	Percepções sobre compreensão de matrizes, no final da disciplina	5,62	Compreensões de matrizes no final da disciplina	7,83	Compreensões de matrizes	12,96	Compreensão de conceitos	54,04
Percebeu que possibilitou compreender matrizes, mas complicou	0,24								
Percebeu que o uso de matrizes facilita os cálculos	1,73	Percebeu que o uso de matrizes facilita os cálculos	1,73						
Conceituou matrizes como tabelas	0,24	No final da disciplina, como conceituaram matrizes	0,48						
Conceitou matrizes como um sistema simplificado	0,24								
Lembraram de matrizes	2,21	Lembranças sobre matrizes, após nove meses	5,13	Lembranças sobre matrizes, após nove meses	5,13				
Lembrou do escalonamento	0,98								
Lembrou de operações matriciais	0,73								
Lembrou do conceito de matrizes	0,73								
Lembrou dos tipos de matrizes	0,24								
Lembrou de métodos de resolução de matrizes inversas	0,24								
Perceberam que a disciplina possibilitou compreender SL e usos	4,43	Percepções sobre compreensão de SL e aplicações, no final da disciplina	5,89	Compreensão de SL no final da disciplina	6,85	Compreensões sobre SL	12,71		
No final da disciplina destacaram a existência de vários métodos de resolução de SL	1,22								
Percebeu que foi importante estudar SL e métodos	0,24								
Conceituou SL como comparações de equações com variáveis em comum	0,24	No final da disciplina, como conceituaram SL	0,96						
Conceituou SL como problemas reais	0,24								
Conceituou SL como um conjunto de variáveis dependentes	0,24								
Comprendeu SL como tranformcação de equações e pontos	0,24								
Lembraram de métodos de resolução de SL	2,69	Lembranças sobre SL, após nove	5,86	Lembranças sobre SL, após	5,86				
Lembraram de SL	2,19								

Lembraram do conceito de SL	0,98	meses		nove meses					
Perceberam que a disciplina possibilitou compreender ou ampliar o conceito de vetores	3,69	Percepções sobre compreensão ou ampliação do conceito de vetores, no final da disciplina	4,66	Compreensão de vetores no final da disciplina	6,85	Compreensões sobre vetores	8,56		
Perceberam que a disciplina não possibilitou compreender ou ampliar o conceito de vetores	0,49								
Não soube dizer se a disciplina não possibilitou compreender ou ampliar o conceito de vetores	0,24								
Não se lembra se a disciplina possibilitou compreender ou ampliar o conceito de vetores	0,24								
Compreenderam que existem outras representações de vetores além dos representados nos espaços bi ou tridimensionais	0,49	Modos como compreenderam que ampliou o conceito de vetores indicados no final da disciplina	2,19						
Perceberam que a disciplina possibilitou compreender os espaços vetoriais	0,49								
Perceberam que a disciplina possibilitou refletir sobre o conceito de vetores	0,49								
Compreende que aprendeu outros meios de realizar operações com vetores	0,24								
Compreendeu que os vetores no espaço podem ser representado na forma algébrica	0,24								
Compreendeu vetores no plano ou no espaço	0,24								
Lembraram de vetores	0,98	Lembranças sobre vetores, após nove meses	1,71	Lembranças sobre vetores, após nove meses	1,71				
Lembrou de espaços vetoriais	0,49								
Lembrou do conceito de Espaços vetoriais	0,24								
Percebe que a disciplina possibilitou compreender determinantes e usos	3,69	Percepções sobre compreensão de determinantes e aplicações, no final da disciplina	5,88	Compreensão de determinantes no final da disciplina	6,6	Compreensões sobre determinantes	8,56		
Percebe que possibilitou compreender determinantes, mas não aplicações	1,71								
Não se lembra do conceito de determinantes e nem de usos.	0,24								
Não percebe uso de determinante fora da AL	0,24								
Conceituou determinante como um número associado a uma matriz quadrada	0,24	No final da disciplina, como Conceituaram Determinantes	0,48						
Conceituou determinante como identidades de matrizes quadradas	0,24								
Não conceituou determinantes, mas se referiu à	0,24	Não conceituou	0,24						

conceitos associados		determinantes, mas se referiu à conceitos associados							
Lembraram de determinantes	1,72	Lembranças sobre determinantes	1,96	Lembranças sobre determinantes	1,96				
Lembrou de um método de cálculo de determinantes	0,24								
Compreendem o conceito e percebem que TL são importantes na Engenharia Civil	1,96	Percepções sobre compreensão do conceito de TL e de usos, no final da disciplina	4,41	Compreensão de TL no final da disciplina	5,63	Compreensões sobreTL	5,87		
Afirmaram que a disciplina não possibilitou compreender o conceito de TL	1,47								
Não se lembraram, no final da disciplina, sobre conceito e uso das TL na Engenharia Civil	0,98								
Conceituaram TL como função	0,49	Conceituaram transformações lineares	1,22						
Conceituaram TL como método diferenciado para facilitar cálculos	0,49								
Conceituou como indicadores de transformações em objetos	0,24								
Lembrança sobre transformações lineares	0,24	Lembrança sobre transformações lineares	0,24	Lembrança sobre transformações lineares	0,24				
A disciplina não possibilitou compreender o que são Autovalores e Autovetores	1,98	Percepções sobre compreensão do conceito de Autovalores e Autovetores e de usos, no final da disciplina	4,42	Compreensão de Autovalores ou Autovetores, no final da disciplina	5,14	Compreensões sobre Autovalores ou Autovetores	5,38		
Não se lembram o que são Autovalores e Autovetores	0,98								
Compreendem que Autovalores e Autovetores são importantes na engenharia	0,73								
Percebem que a disciplina possibilitou compreender o que são Autovalores e Autovetores	0,49								
Não conseguiu compreender o que são Autovalores e Autovetores por desleixo	0,24								
Conceituou Autovalores e Autovetores como espaços 2D e 3D	0,24	Conceituaram Autovalores e Autovetores	0,72						
Conceituou Autovalores e Autovetores como aqueles que não alteram o espaço vetorial ou as propriedades do vetor	0,24								

Conceituou Autovalores e Autovetores como valores possíveis em aplicações	0,24								
Lembrança sobre Autovalores e Autovetores	0,24	Lembrança sobre Autovalores e Autovetores	0,24	Lembrança sobre Autovalores e Autovetores	0,24				
Uso de matrizes na organização e manipulação de dados	2,95	Percepções sobre usos de matrizes, no final da disciplina.	6,60	Percepções sobre usos de matrizes	8,8	Percepções sobre usos dos conceitos	23,22	Percepções Gerais sobre usos dos conhecimentos construídos na disciplina	32,76
Uso de matrizes na resolução de sistemas	1,71								
Uso de matrizes na resolução de problemas	0,98								
Uso de matrizes em computadores	0,24								
Uso de matrizes no planejamento de empresas	0,24								
Uso de matrizes no cálculo do determinante	0,24								
Uso de matrizes na codificação de mensagens	0,24								
Lembrou do uso de matrizes na resolução de SL	0,74	Lembrou de usos de matrizes, após nove meses	2,2						
Lembrou do uso de matrizes para organizar dados	0,49								
Lembrou do uso de Matrizes na resolução de problemas	0,49								
Lembrou do uso de matrizes na resoluçao de equações	0,24								
Lembrou de ver o uso de matrizes, mas não exemplificou	0,24								
Uso de SL em resolução de problemas	2,46	No final da disciplina, como perceberam usos de SL	4,9	Percepções sobre usos de SL	6,36				
Uso de SL em cálculos de esforços em estruturas (Estática)	0,74								
Uso de SL para cálculos algébricos com mais de uma variável	0,49								
Usou SL para resolver diversas equações	0,49								
Uso de SL para organização	0,24								
Uso de SL para previsões	0,24								
Uso de SL para facilitar a resolução de problemas	0,24								
Lembrança de uso de SL no cálculo de esforços	0,49	Lembranças sobre usos de SL	1,46						
Lembrança de uso de SL na resolução de integrais	0,49								
Lembrança de uso de SL na resolução problemas	0,24								

Lembrança de uso de SL no cálculo da área de um polígono	0,24								
Uso de determinante no cálculo de área	1,98	No final da disciplina, como perceberam usos de determinantes	3,92	Percepções sobre usos determinantes	4,41				
Uso de determinante para calcular matriz inversa	0,73								
Uso de deteminante para resolver SL	0,49								
Uso de determinante para calcular autovalores	0,24								
Uso de determinante para verificar outras operações	0,24								
Percebeu uso de determinantes em vetores	0,24								
Lembrança sobre o uso de determinantes	0,49	Lembrança sobre o uso de determinantes	0,49						
Percebeu que Autovalores e Autovalores são aplicados na Engenharia	0,98	No final da disciplina, como perceberam a aplicação de autovalores e autovetores na Engenharia	1,71	No final da disciplina, como perceberam a aplicação de autovalores e autovetores na Engenharia	1,71				
Compreende que Autovalores e Autovetores são usados para calcular coordenadas	0,73								
Percebeu aplicações de TL e citou exemplos de uso em engenharia	0,98	No final da disciplina, como perceberam usos de TL	1,7	No final da disciplina, como perceberam usos de TL	1,7				
Percebeu aplicações de TL, mas não citou exemplos específicos de uso em engenharia	0,24								
Percebeu aplicações de TL em vetores ou figuras e citou exemplos	0,24								
Percebe usos de TL em programas gráficos	0,24								
No final da disciplina, como percebeu uso de vetores	0,24	No final da disciplina, como percebeu uso de vetores	0,24	No final da disciplina, como percebeu uso de vetores	0,24				
Percebeu uso na disciplina de Cálculo Numérico.	1,98	Perceberam usos de conceitos de Álgebra Linear em outras disciplinas	5,88	Percepções de uso acadêmico dos conceitos de AL	6,12	Percepções sobre usos do conhecimento contruído em AL	9,54		
Percebeu uso dos conceitos em disciplinas mas não especificou quais	1,47								
Percebeu uso na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II	1,22								

Percebeu uso na disciplina de Análise Estrutural I	0,73								
Percebeu uso na disciplina de EDO	0,24								
Percebeu uso na disciplina de Topografia	0,24								
Não percebeu usos de conceitos de AL em outras disciplinas	0,24	Não percebeu usos de conceitos de AL em outras disciplinas	0,24						
Usou conceitos de AL somente em aplicações acadêmicas	2,45	Modos de percepção usos de conceitos de AL em outros contextos	3,18	Percepções sobre usos de conceitos de AL em outros contextos	3,42				
Usou conceitos de AL em aplicações profissionais	0,49								
Usou conceitos de AL na vida pessoal	0,24								
Não percebeu usos de conceitos de AL em outros contextos	0,24	Não percebeu usos de conceitos de AL em outros contextos	0,24						
Lembraram de terem aprovado o método de ensino	1,23	Lembranças positivas sobre o método de ensino	3,43	Aspectos positivos	7,82	Lembrança de aspectos positivos e negativos da proposta	10,02	Percepções sobre o método de ensino e de aprendizagem usado na disciplina	13,2
Lembraram de aulas com boas explicações ou boa didática	0,98								
Lembraram do método explicativo, claro, reflexivo ou incisivo	0,73								
Perceberam que o ensino foi proposto de modo prático	0,49								
Lembraram do uso de slides	0,98	Influência do uso de recursos tecnológicos na aprendizagem	2,94						
Lembraram de terem acesso à um bom material impresso	0,98								
Lembraram do uso recursos tecnológicos como facilitadores da aprendizagem	0,98								
Lembraram que a abordagem possibilitou perceber associações da teoria com usos práticos	0,73	Lembrou que a abordagem possibilitou perceber associações da teoria com usos práticos	0,73						

Após nove meses, percebeu que a disciplina foi importante em sua formação profissional	0,24	Após nove meses, percebeu que a disciplina foi importante em sua formação profissional	0,24						
Após nove meses, percebeu que a disciplina colaborou com sua formação pessoal	0,24	Após nove meses, percebeu que a disciplina colaborou com sua formação pessoal	0,24						
Lembrou de professora com amplos conhecimentos sobre conteúdo e aplicações	0,24	Lembra de professora com amplos conhecimentos	0,24						
Lembraram da avaliação muito extensa	1,96	Lembraram da avaliação muito extensa	1,96	Aspectos negativos	2,2				
Lembrou que a organização da apostila dificultou acompanhar aulas	0,24	Lembrou que a organização da apostila dificultou acompanhar aulas	0,24						
Lembraram que viram aplicações	0,99	Lembranças sobre aprendizagem	2,2	Lembranças sobre aprendizagem	2,2	Lembranças sobre aprendizagem	2,2		
Lembraram da resolução de problemas	0,49								
Percebeu que, de modo geral, na turma, houve um bom aprendizado	0,24								
Percebeu que a aprendizagem de álgebra linear possibilitou melhorar a compreensão de problemas e estimulou o raciocínio.	0,24								
Gostou da abordagem, mas sugeriu um maior uso de recursos tecnológicos, pois percebeu que eles ajudaram na compreensão	0,24								
Lembraram que havia uma grande quantidade de conteúdos previstos para uma única matéria	0,74	Lembrança sobre dificuldades	0,98	Lembrança sobre dificuldades	0,98	Lembrança sobre dificuldades	0,98		
Lembrou de ter estudado e ter tido um desempenho médio, por causa de erros cometidos	0,24								

Anexo 35: Categorização Percepções sobre Uso de TD - G1

Cat. Inicial	%	Cat. Inter. 1	%	Cat. Inter. 2	%	Cat. Final	%
Ajudou na compreensão ou aprendizagem dos conteúdos da disciplina	2,59	Facilitou a aprendizagem ou a compreensão na disciplina	8,52	Facilitou a aprendizagem	18,40	Percepções sobre o uso de recursos tecnológicos	52,26
Facilitou aprendizado na disciplina	1,98						
Lembram que facilitaram a compreensão ou aprendizado na disciplina	1,98						
Lembram que ajudaram a compreender ou fixar o conteúdo	0,85						
Melhorou a aprendizagem ou desempenho na disciplina	0,56						
Lembram que melhorou a compreensão	0,56						
Facilitou o processo desenvolvido na disciplina	3,67	Facilitou a realização de tarefas	6,21				
Ajudou (facilitou) a realização da avaliação	2,54						
Possibilitou ampliar o conhecimento	3,67	Possibilitou ampliar o conhecimento	3,67				
Na dsiciplina, gostou das tarefas onde foram utilizadas as tecnologias	6,23	Gostaram ou não do uso de recursos tecnológicos	10,73	Sentimentos e expectativas	17,22		
Achou muito bom ter usado computador na avaliação	1,69						
As tarefas da disciplina foram boas	1,41						
Tarefa/Aulas da disciplina foram excelentes	0,56						
Se sentiu feliz ou bem fazendo as tarefas na disciplina	0,56						
Não gostou das tarefas, nas quais foram utilizadas as tecnologias na disciplina	0,28						
O uso do computador na avaliação foi como o esperado	2,54	Expectativas do uso do computador na avaliação	2,82				
Esperava mais questões com uso de computadores	0,28						
Tarefas da disciplina foram interessantes ou motivadoras	1,42	Sentiram interesse ou motivação para aprender	1,98				
Interessante a avaliação ser realizada com computador	0,28						
Lembra que achou interessante	0,28						
Passou segurança na avaliação, pois evitaria erros de cálculos	0,85	Sentiram confiança/segurança	1,41				
Se sentiu mais confiante na realização das tarefas da disciplina	0,28						
Se sentiu melhor ao usar o computador na avaliação.	0,28						
Expressou sentir dificuldades com a linguagem natural	0,28	Sentiu dificuldades com a linguagem natural	0,28				
Dificuldades no uso de tecnologias na disciplina	2,54	Dificuldades no uso de tecnologias digitais	2,82	Dificuldades percebidas no processo	5,64		
Lembra que sentiu dificuldades no inicio da disciplina, em relacao ao uso de tecnologias	0,28						

Precisou escrever o raciocinio utilizado no papel	1,14	Dificuldades na avaliação	2,82				
Perceberam problema de tempo para resolução das questões.	0,56						
Sentiu dificuldades de lembrança de comandos	0,56						
Não teve bom desempenho por falta de estudos	0,28						
Sentiu falta de revisão de comandos antes da avaliação	0,28						
Aumento de tempo para realização das tarefas na disciplina	1,43	Sugestões dos estudantes sobre uso de tecnologias digitais	3,67	Sobre Sugestões	5,08		
Ter mais questões com uso de computadores em avaliações.	0,56						
As avaliações deveriam ser menores.	0,56						
Disciplina deve continuar com uso de tecnologias.	0,28						
Na disiciplina deveria realizar seminários para integração maior da turma.	0,28						
Uso de outros programas mais específicos da área nas tarefas.	0,28						
Abordar o ultimo conteúdo visto de modo mais prático.	0,28						
Não propuseram sugestões	1,41	Não propuseram sugestões	1,41				
Foi uma experiência diferente/ nova	1,16	Percebem que o uso de tecnologias favoreceu o ambiente de aprendizagem	4,24	Percepções sobre mudanças no ambiente de aprendizagem	4,8		
Possibilitam aulas mais descontraídas e dinâmicas	0,56						
Lembram que possibilitaram aulas mais práticas	0,56						
Lembrou das aulas ocorrerem no laboratório de informática.	0,56						
Possibilitam um clima novo para aula, sem torná-la cansativa	0,28						
Lembram que o uso de tecnologias digitais melhorou o ambiente das aulas	0,28						
A proposta da disciplina foi didática	0,28						
Lembram que foi positivo	0,28						
Lembra que achou importante	0,28						
O uso do computador na avaliação é um recurso mais apropriados à época.	0,28	Perceberam que o uso dos recursos tecnológicos aproxima a realidade da sala de aula	0,56				
Na disciplina uniu as realidades: mundo tecnológico e sala de aula	0,28						
Lembrou que os softwares podem ser usados em outras aplicações matemáticas	0,56	Lembrou que os softwares podem ser usados em outras aplicações matemáticas	0,56	Percepções sobre possibilidade de usos futuros ou em outras aplicações.	1,12		
Uso de computadores capacitam os estudantes para usos futuros.	0,28	Perceberam que o uso dos recursos tecnológicos podem ser úteis no futuro	0,56				
Lembram que puderam conhecer programas que vão auxiliar na vida profissional	0,28						
Facilitam os cálculos nas tarefas da disciplina.	3,39	O uso das tecnologias digitais facilitou os cálculos	8,19	Percepções sobre vantagens no	26,27	Modos como o uso de recursos	28,53
O computador facilitou os cálculos na avaliação	2,26						
Lembra que os recursos tecnológicos facilitavam as resoluções	1,98						

de problemas ou os cálculos				uso de recursos tecnológicos		tecnológicos influenciou a aprendizagem ou a compreensão	
Lembram que facilita a resolução de problemas práticos	0,56						
Reduzem o tempo dos cálculos e tornam mais práticas as tarefas da disciplina.	3,11	Uso das tecnologias digitais otimizou o tempo	7,63				
Uso tecnologias digitais otimizou o tempo na avaliação	3,11						
Lembra que o uso de recursos tecnológicos reduz o tempo dos cálculos e tornava mais práticas as tarefas da disciplina.	1,41						
Possibilitaram perceber a aplicação do conteúdo ou conhecimento prático na disciplina	2,83	Possibilitaram aproximar conhecimentos teóricos e práticos	4,24				
Lembram que possibilitaram exemplificar a teoria na prática	0,85						
Permitiram na disciplina comprovar conhecimentos teóricos na prática.	0,28						
Esclareceu dúvidas na disciplina	0,28						
Favorece a percepção visual de conceitos teóricos na disciplina.	2,54	Uso de tecnologias digitais favoreceu a visualização dos conceitos	3,95				
Lembram que ajudavam na visualização	1,41						
Uso do computador possibilitou evitar erros de cálculos na avaliação	0,85	Uso de tecnologias digitais evitou erros de cálculos	2,26				
Lembram que o uso de tecnologias digitais possibilitava perceber erros	0,85						
Evita erros de cálculos nas tarefas desenvolvidas na disciplina	0,28						
Lembram que possibilitava evitar erros de cálculos	0,28						
Uso na avaliação exigiu conhecimentos teóricos e práticos.	0,58	Favorece a compreensão	1,14	Uso dos recursos na disciplina muda o modo de pensar	2,26		
Lembra que era preciso conhecer os métodos para resolver os problemas com uso de recursos tecnológicos	0,28						
Na disciplina, melhorou o aprendizado	0,28						
Possibilita tempo para desenvolver o conhecimento prático e raciocínio lógico	0,28	Possibilita mais tempo para interpretação e desenvolvimento de raciocínios lógicos	0,84				
Uso do computador possibilitou mais tempo para interpretação na avaliação	0,28						
Lembram que tinham mais tempo para raciocinar e se aprofundar nos conceitos.	0,28						
Propiciou liberdade para pensar	0,28	Propiciou liberdade para pensar	0,28				
Geogebra - resolução gráfica	3,39	Lembrou do Geogebra e finalidades na disciplina	3,96	Lembranças sobre usos do GeoGebra	7,06	Lembranças sobre uso de recursos tecnológicos	19,21
Geogebra - visualização das TL e vetores	0,28						
Geogebra - trabalho com vetores	0,28						
Lembrou do GeoGebra	1,69	Lembrou do GeoGebra	1,69				

Usa GeoGebra- construção ou visualização de gráficos	0,86	Lembraram do uso do GeoGebra após o término da disciplina, na vida pessoal, , acadêmica ou profissional	1,41			digitais	
Usa GeoGebra-resolução de expressões matemáticas gráficos	0,28						
Usa GeoGebra-para tirar dúvidas	0,28						
Usa planilha - manipulação de tabelas com finalidades variadas	1,69	Lembraram de usos da planilha após o término da disciplina, na vida pessoal, acadêmica ou profissional	3,39	Lembranças sobre usos da planilha	6,78		
Usa planilha em outras disciplinas com finalidades diversas	0,85						
Usa planilha - não citou como	0,85						
Uso da planilha na resolução ou construção de matrizes	1,13	Lembraram do uso da planilha na disciplina e finalidades	2,54				
Usou planilha para cálculos de expressões matemáticas ou cálculos	0,85						
Usou planilha para resolução de problemas	0,56						
Lembrou da planilha	0,85	Lembraram da planilha	0,85				
Uso do *MATLAB* para resolução ou construção de matrizes	1,15	Lembraram do uso do *MATLAB* (ou *SciLab*) na disciplina e finalidades	2,83	Lembranças sobre usos do *MATLAB* (ou *SciLab)*	4,24		
Uso do *MATLAB* para escalonar matrizes	0,56						
Uso do *MATLAB* para resolução de equações ou sistemas lineares	0,56						
Uso de *MATLAB* para facilitar cálculos de determinantes e escalonamentos	0,28						
Uso do *MATLAB* na resolução prática de problemas	0,28						
Lembrou do *MATLAB*	1,13	Lembrou do *MATLAB*	1,13				
Lembrou de possibilidade de uso do *MATLAB*, após o término da disciplina	0,28	Lembrou de possibilidade de uso do *MATLAB*, após o término da disciplina	0,28				
Não se lembram de usos posteriores dos recursos tecnológicos digitais vistos na disciplina	0,85	Não se lembram de usos posteriores dos recursos tecnológicos digitais vistos na disciplina	0,85	Não se lembram de usos posteriores dos recursos tecnológicos digitais vistos na disciplina	0,85		
Lembrou da finalidade mas não do nome do recurso.	0,28	Lembrou da finalidade mas não do nome do recurso.	0,28	Lembrou da finalidade mas não do nome do recurso.	0,28		

Fonte: Autora

Anexo 36: Categorização Percepções sobre Uso de TD – G2

Cat. Inicial	%	Cat. Inter. 1	%	Cat. Inter. 2	%	Cat. Final	%
Facilitou o processo de aprendizagem	7,5	Facilitou a aprendizagem ou a compreensão da disciplina	16,59	Facilitou a aprendizagem	17,65	Percepções sobre uso de recursos tecnológicos na disciplina	52,41
Lembra que facilitou a compreensão	3,74						
Ajudou ou auxiliou no processo da aprendizagem	3,74						
Facilitou a compreensão	1,61						
Possibilitou usar programas na resolução de problemas	0,53	Possibilitou ampliar o conhecimento	1,06				
Possibilitou aprender a utilizar programas	0,53						
Gostaram das tarefas	10,18	Gostaram das tarefas onde foi utilizado tecnologias	12,32	Sentimentos sobre uso de recursos tecnológicos na disciplina	14,44		
Gostou da aula realizada no laboratório	2,14						
Sentiu segurança	0,53	Sentiram segurança/ confiança	1,06				
Lembram que sentiram confiança	0,53						
Sentiu que instigou o interesse	0,53	Sentiu que despertou interesse	1,06				
Se sentiu empolgado	0,53						
Torna aula mais dinâmica ou agiliza	3,22	Percebem que o uso de tecnologias digitais favoreceu o ambiente de aprendizagem	8,56	Percepções sobre mudanças no ambiente de ensino e aprendizagem	9,63		
Lembra que influenciaram ou que influenciaram positivamente a aprendizagem	2,67						
Influenciou de forma positiva	1,07						
Lembra que torna a aula mais ágil ou prática	1,07						
Destacou que as tarefas estimulavam a autonomia	0,53						
Lembra de ter usado laboratório de informática	1,07	Lembra de ter usado o laboratório de informática	1,07				
Sugere mais aulas com uso de tecnologias interativas	4,82	Sugestões dos estudantes sobre usos de tecnologias digitais	5,35	Sobre sugestões	9,1		
Sugeriu que as provas deveriam ser com uso de computadores	0,53						
Não propuseram sugestões	3,75	Não propuseram sugestões	3,75				
Indica que a não familiaridade com o software *MATLAB* em apenas uma atividade pode ter dificultado para alguns	0,53	Dificuldades percebidas	1,06	Dificuldades percebidas	1,06		
Percebeu que foram utilizados poucos recursos tecnológicos na disciplina e que os cálculos manuais estão ultrapassados	0,53						
Percepções sobre possibilidade de usos futuros ou em outras aplicações	0,53	Percepções sobre possibilidade de usos futuros ou em outras	0,53	Percepções sobre possibilidade de usos futuros ou em	0,53		

		aplicações		outras aplicações			
Possibilitou praticidade/facilidade e rapidez nos cálculos	3,74	Uso de recursos tecnológicos facilitou os cálculos	8,02	Percepções sobre vantagens no uso de recursos tecnológicos.	18,18	Modos como o uso de recursos tecnológicos influenciou a aprendizagem ou a compreensão	24,6
Facilitaram os cálculos	3,21						
Lembra que possibilitaram praticidade e rapidez nos cálculos	1,07						
Possibilitou ver uso da teoria em aplicações	1,61	Possibilitou aproximar conhecimentos teóricos e práticos	4,28				
O usodos recursos de modo prático favoreceu a compreensão	1,61						
Lembra que acrescenta ao acadêmico percepções da prática	0,53						
Lembra que a aula prática ajudou a fixar o conteúdo	0,53						
Uso de tecnologias digitais possibilitou a visualização gráfica	2,69	Uso de tecnologias digitais possibilitou a visualização gráfica	2,69				
Evitou perder tempo com resoluções	1,6	Uso de tecnologias digitais otimizou o tempo	2,13				
Lembra que tornam as resoluções mais rápidas	0,53						
Possibilitou conferir os resultados	0,53	Uso de recursos tecnológicos possibilitou evitar erros de cálculos	1,06				
Lembra que possibilitava conferir seus cálculos, o que facilitou seus estudos	0,53						
Favoreceu a observação, interpretação e a compreensão	2,7	Favoreceu a Compreensão	4,83	Uso dos recursos na disciplina mudou o modo de pensar	6,42		
Possibilitou esclarecer os conteúdos	1,07						
Lembra que melhorou a comprensao dos cálculos	0,53						
Lembra facilitou a compreensão por possibilitar perceber erros	0,53						
Fez pensar mais	0,53	Fez pensar mais	0,53				
Lembra que para usar os recursos precisava saber os conceitos	0,53	Lembra que para usar os recursos precisava saber os conceitos	0,53				
Percebe as tecnologias como ferramenta	0,53	Percebeu as tecnologias como ferramenta	0,53				
Uso o *MATLAB* para resolução de matrizes	2,68	Lembram do *MATLAB* e finalidades na disciplina	5,35	Lembranças sobre usos do *MATLAB*	6,95	Lembranças sobre uso de recursos tecnológicos digitais	22,99
Usou *MATLAB* para resolução de sistemas lineares	2,14						
Usou *MATLAB* para codificação de matrizes	0,53						
Uso o *MATLAB* para cálculos matriciais	1,07	Lembranças de usos do *MATLAB* após o término da disciplina, na vida acadêmica	1,6				
Usa o *MATLAB* em Cálculo numérico mas não disse a finalidade	0,53						
Lembraram de uso do GeoGebra na visualização gráficos	2,15	Lembraram do uso do	3,75	Lembranças sobre	6,42		

Lembraram de uso do GeoGebra para compreensão de funções	1,6	GeoGebra na disciplina e finalidades		usos do GeoGebra			
Lembraram do uso do GeoGebra para compreensão de funções em outras disciplinas	1,07	Lembraram de usos do GeoGebra após o término da disciplina, na vida acadêmica	1,6				
Lembraram do uso do GeoGebra para estudos na disciplina de Cálculo, mas não disse com que finalidade	0,53						
Lembraram do GeoGebra	1,07	Lembraram do GeoGebra	1,07				
Lembranças sobre usos do Data Show ou slides em aulas e finalidades na disciplina	2,67	Lembranças sobre usos do Data Show ou slides em aulas e finalidades na disciplina	2,67	Lembranças sobre usos do Data Show ou slides em aulas e finalidades na disciplina	2,67		
Não têm usado os recursos tecnológicos digitais vistos na disciplina, na vida pessoal ou profissional.	2,16	Não têm usado os recursos tecnológicos digitais vistos na disciplina, na vida pessoal ou profissional.	2,16	Não têm usado os recursos tecnológicos digitais vistos na disciplina, na vida pessoal ou profissional.	2,16		
Lembraram que usaram um programa para manipular matrizes	1,07	Se lembraram das finalidades mas não do nome dos recursos tecnológicos utilizados na disciplina	2,14	Se lembraram das finalidades mas não do nome dos recursos utilizados na disciplina	2,14		
Lembraram que usaram software para resolução de SL	1,07						
Percebe a potencialidade do uso da plailha, mas não cita como	0,53	Percepções e lembranças sobre usos da planilha após o término da disciplina, na vida pessoal ou profissional	1,59	Percepções e lembranças sobre usos da planilha após o término da disciplina, na vida pessoal ou profissional	1,59		
Lembrou do uso da palnilha - topografia	0,53						
Lembrou do uso da planilha na-manipulação de matrizes	0,53						
Lembrou do uso da planilha, *MATLAB* e GeoGebra na disciplina, para facilitar a aprendizagem, mas não citou a finalidade	0,53	Lembraram do uso de planilha, *MATLAB*, GeoGebra	1,06	Lembraram do uso de planilha, *MATLAB*, GeoGebra	1,06		
Lembrou do uso da planilha, *MATLAB* e GeoGebra tanto na vida pessoal, como na profissional, mas não disse como.	0,53						

Fonte: Autora.

Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
Pró-Reitoria de Graduação
Av. Ipiranga, 6681 - Prédio 1 - 3º. andar
Porto Alegre - RS - Brasil
Fone: (51) 3320-3500 - Fax: (51) 3339-1564
E-mail: prograd@pucrs.br
Site: www.pucrs.br