PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

LUCAS NUNES OGLIARI

O CONTEÚDO DE FUNÇÕES NA ESCOLA: RASTROS DOS MOVIMENTOS DE REFORMA NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL

ORIENTADOR: Dr. MARCOS VILLELA PEREIRA

Porto Alegre
2014

LUCAS NUNES OGLIARI

O CONTEÚDO DE FUNÇÕES NA ESCOLA: RASTROS DOS MOVIMENTOS DE REFORMA NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada como requisito para a obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

ORIENTADOR: Dr. MARCOS VILLELA PEREIRA

Porto Alegre

2014

LUCAS NUNES OGLIARI

O CONTEÚDO DE FUNÇÕES NA ESCOLA: RASTROS DOS MOVIMENTOS DE REFORMA NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada como requisito para a obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Aprovada em: ____de___________________de________.

BANCA EXAMINADORA:

____

Prof. Dr. Diogo Franco Rios - UFPel

____

Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo - UFRGS

____

Profa. Dra. Maria Helena Camara Bastos - PUCRS

Porto Alegre

2014

Dedico esta tese aos meus pais, Darci Ogliari e Maria Luiza Nunes Ogliari, por me ensinarem o valor da educação e do trabalho, e à minha esposa, Larissa Bitencourt Gomes, pelo seu carinho e sua doação.

AGRADECIMENTOS

Aos colegas do Colégio Santa Família, hoje Instituto São Francisco - Santa Família, em Porto Alegre, pelo companheirismo e, em especial, à Fátima Aguiar (Coordenadora) e à Irmã Aparecida (Diretora), que, durante os anos de 2010 e 2011, não mediram esforços ao me apoiar nos estudos.

Aos alunos e colegas da Escola Municipal de Ensino Fundamental Herbert José de Souza (Betinho), em Alvorada, pela compreensão em meus momentos de ausência e às "vices", Claudia Lisiane Canabarro e Cristiana Móttolla Levandowski, pela disponibilidade e paciência. E, em especial, ao Diretor e amigo Luis César Marques de Almeida, por ter me incentivado e apoiado durante os quatro anos em que estive envolvido com o doutorado, pois sem a sua ajuda não seria possível concluir essa etapa de meus estudos.

À coordenadora do Curso de Matemática, Licenciatura, Complexo de Ensino Superior de Cachoeirinha (CESUCA), Beatriz Petrella dos Santos, por me incentivar e acreditar no meu trabalho.

Ao meu irmão Ítalo Ogliari, pelas leituras, debates e correções.

Ao meu compadre Manoel Rodrigues e sua esposa Adriana Suhnel, pela disponibilidade.

À CAPES, pela bolsa de estudos na Argentina.

Ao Sindicato dos Professores do Ensino Privado do Rio Grande do Sul (SINPRO/RS), pelo Fundo Rotativo de Apoio à Qualificação Docente.

E, por fim, em especial, ao meu orientador, Dr. Marcos Villela Pereira, pela oportunidade, pelos ensinamentos, pela compreensão e paciência durante esses quatro anos.

RESUMO

Esta tese de Doutorado em Educação apresenta um estudo que envolve a história do ensino de matemática no Brasil e, especificamente, o conteúdo de funções na escola. O objetivo desta tese é o de identificar os elementos referentes ao conteúdo de funções no ensino secundário brasileiro que se somaram com o advento das reformas curriculares para o ensino de matemática e que se apresentam, atualmente, como rastros nos livros didáticos de ensino fundamental (séries finais). Os movimentos de reforma explorados na tese são: a Reforma Campos, em 1931, a Reforma Capanema, em 1942, e o Movimento da Matemática Moderna (MMM), nas décadas de 1950 e 1960. O estudo traz como objeto de análise coleções de livros didáticos editadas no cerne desses movimentos de reforma, em especial as coleções que tiveram maior vendagem e/ou as coleções que melhor representaram os programas estabelecidos para o ensino de matemática em virtude das reformas, são elas: *Curso de Matemática Elementar*, de autoria de Euclides Roxo; *Matemática*, de Cecil Thiré e Mello e Souza; *Curso de Matemática*, de Cecil Thiré e Mello e Souza, com coautoria de Euclides Roxo; *Matemática Ginasial*, de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza e *Matemática: Curso Moderno*, do autor Osvaldo Sangiorgi. São analisadas também as dez coleções de livros didáticos de matemática selecionadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para o ano de 2014. Através da análise dessas coleções, à luz do ideário sobre o ensino de matemática de cada época, é possível concluir que o conteúdo de funções no ensino fundamental (séries finais), atualmente apresentado nos livros didáticos, é constituído por uma sobreposição de elementos referentes aos movimentos de reforma que estabeleceram, além de um espaço específico ao conteúdo de funções no currículo da disciplina, a metodologia empregada na sua apresentação, a sua notação, conceituação e definição.

Palavras-chave: Matemática. Funções. Ensino Secundário. Movimentos de Reforma. Livro Didático.

ABSTRACT

This doctoral thesis in Education presents a study that involves the history of mathematics education in Brazil and specifically the content of functions in secondary school. The objective of this thesis is to identify the elements relating to the content of functions in the Brazilian secondary school which added with the advent of curricular reforms in the teaching of mathematics and appear currently as traces in textbooks of elementary school (final years). The Reform movements explored in the thesis are: the Campos Reform, in 1931, the Capanema Reform, in 1942, and the Modern Mathematics Movement (MMM), in the 1950s and 1960s. The study has as object of analysis collections of textbooks published at the heart of these reform movements, especially the best-selling collections and/or the collections that best represented the established programs for teaching mathematics by virtue of the reforms, which are: *Curso de Matemática Elementar*, authored by Euclides Roxo , *Matemática*, by Cecil Thiré and Mello e Souza, *Curso de Matemática*, by Cecil Thiré and Mello e Souza, co-authored by Euclides Roxo, *Matemática Ginasial*, by Euclides Roxo, Cecil Thiré and Mello e Souza, and *Matemática: Curso Moderno*, authored by Osvaldo Sangiorgi. Ten collections of mathematics textbooks selected by the National Program for Textbooks (NPT) for the year 2014 are also analysed. Through the analysis of these collections in the light of ideas about the teaching of mathematics of each time, it can be concluded that the content of functions in elementary school (final years), currently presented in textbooks, consists of a superposition of elements related to reform movements that have established, in addition to a specific space to the content of functions in the curriculum of the course, the method used in their presentation, their notation, conceptualization and definition.

Keywords: Mathematics. Functions. Secondary School. Reform Movements. Textbook.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A presente tese de Doutorado em Educação busca identificar os elementos referentes ao conteúdo de funções no ensino secundário brasileiro que se somaram, se articularam ou se sobrepuseram no decorrer das reformas curriculares para o ensino de matemática. Esses elementos, constituídos em diferentes momentos sociais, políticos, científicos e tecnológicos, caracterizam o conteúdo de funções atualmente, definindo o seu espaço no currículo da disciplina, a metodologia empregada na sua apresentação, bem como sua notação, conceituação e definição. Logo, o objetivo dessa tese é mostrar que o conteúdo de funções apresentado nos livros didáticos é o resultado de uma sobreposição desses elementos.

A identificação desses elementos ocorrerá através da análise de livros didáticos de matemática editados no âmbito dos principais movimentos de reforma para o ensino de matemática. Movimentos esses que compreendem as reformas curriculares institucionalizadas através de decretos de leis nas décadas de 1930 e 1940, conhecidas, nessa ordem, como Reforma Campos e Reforma Capanema, e nas décadas de 1950 e 1960, no âmbito do Movimento da Matemática Moderna (MMM). A escolha desses objetos de análise se justifica pelo fato de que esses materiais exprimiram, em cada época, diferentes perspectivas a respeito do conteúdo de função em decorrência das reformas curriculares.

Para poder realizar esse estudo, certo escopo deve ser dado ao tema, que resulta em um recorte quanto ao nível de ensino sob qual o conteúdo de funções foi abordado e ao qual estiveram relacionadas as coleções de livros didáticos analisadas. Tal nível de ensino ficou entendido como *ensino secundário* brasileiro, que se constitui junto à própria história do país, e, para o escopo que interessa a essa tese, é necessário compreender a sua abrangência desde as primeiras décadas do século XX, o que será possível através de uma revisão bibliográfica, tendo como referência Souza (2008), Nunes (2000), Bomeny (2001), Schwartzman (2005), entre outros.

Em meados da década de 1930, o ensino secundário, de tal modo denominado, era composto por 6 anos e atendia a um público de idade entre 12 e 18 anos, assim estabelecido pela reforma curricular de 1925, conhecida como Reforma Rocha Vaz. Com criação do Ministério da Educação e Saúde Pública, o ministro Francisco Campos atribuiu nova estrutura orgânica ao ensino secundário brasileiro, configurando o curso regular para o mesmo público em 7 anos de duração, dividido em dois ciclos – o fundamental, de 5 anos, e o complementar, de 2 anos. O recorte feito para a análise do conteúdo de funções no que diz respeito ao nível de ensino nessa época esteve pautado na introdução desse estudo na vida dos estudantes, que, com o advento dessa reforma, conhecida como Reforma Campos, ocorreu nas primeiras séries do ensino secundário, ou seja, no ciclo fundamental do ensino secundário (cinco primeiros anos).

Em 1942, com a promulgação de uma nova lei orgânica para o ensino, depois conhecida como Reforma Capanema, o ensino secundário foi reestruturado de maneira que a sua divisão se dava em curso ginasial, com 4 anos de duração, e curso colegial, com 3 anos de duração. O curso colegial atendia a dois cursos paralelos, o clássico e o científico. A análise do conteúdo de funções no âmbito da Reforma Capanema teve como foco o curso ginasial, pois o conteúdo de funções, sob essa nova estrutura, foi introduzido, na coleção analisada, no quarto ano desse nível de ensino.

Em 1971, o ensino foi dividido em 1º e 2º graus, sendo o 1º grau composto pelo ensino primário e pelo ginasial (com duração de 8 anos) e o ensino médio passou a abranger o segundo ciclo do antigo secundário, ou do colegial (com duração de 3 anos). E em 1996, com a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, a educação brasileira foi reestruturada em educação básica e superior. A educação básica foi dividida em três etapas: educação infantil, ensino fundamental (antigo 1º grau, com duração, atualmente, de 9 anos, a partir da resolução CNE/CEB nº 3/2005, de 3 de agosto de 2005, que ampliou o ensino fundamental para nove anos de duração) e ensino médio (antigo 2º grau, com duração de 3 anos). Atualmente, o ensino de funções é introduzido no último ano do ensino fundamental (9º ano).

Portanto, no texto que segue, a denominação *ensino secundário* admite os níveis de ensino reconhecidos em diferentes épocas como: o próprio ensino secundário fundamental de 5 anos, estabelecido em 1931, o curso ginasial (1º, 2º, 3º e 4º anos), estabelecido em 1942, o ensino de 1º grau, série finais (5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries), a partir de 1971, e o ensino fundamental, séries finais (6º, 7º, 8º e 9º anos), atualmente. O termo “ensino secundário” é usado para fazer referência a qualquer uma das modalidades descritas acima, e os termos, quando distintos, identificam cronologicamente o ensino brasileiro.

Ao conceito de função no ensino secundário brasileiro é dada atenção especial desde de o início do sáculo XX. Para Karlson (1961, p.376), “[...] Se existisse uma taquigrafia especial para os matemáticos, onde as palavras mais frequentes estivessem representadas por símbolos particulares, deveríamos começar por uma palavra e somente uma: a palavra “Função”. A notável importância que Karlson (1961) confere ao conceito de função – ele afirma ainda que este conceito sustenta a moderna maneira de pensar a matemática na era de Descartes, Leibniz e Newton – é somada à capacidade de explorar este conhecimento, e também a própria matemática, através de diferentes perspectivas na evolução da história. A função matemática "lançou" a matemática para o mundo, elucidando a íntima relação desta ciência com a natureza das coisas e dos homens.

Karlson (1961) exemplifica, de forma simples, o processo de conceituação de uma função matemática relacionando os *passos* e o *trajeto percorrido* de um homem em movimento:

> O viandante na floresta põe um pé diante do outro — e a cada passada o caminho por ele vencido se acresce de uma nova porção. O trajeto guarda com o número de passos uma relação fixa e determinada; e com esta simples constatação já esboçamos propriamente o caráter duma função: existe uma *interdependência* entre duas grandezas — no caso, o número de passos e o trajeto — e essa interdependência obedece a uma *lei* determinada. Matematicamente expressamo-la dizendo que: "o trajeto é uma função do número de passos (KARLSON, 1961, p. 378).

O exemplo dado transita sobre um ponto de inflexão onde a função deixa de ser um movimento da natureza das coisas, do concreto, e passa a ter significado na linguagem matemática, na aritmética, na álgebra e na geometria. Se devidamente medido e atribuído valores (em metros) a cada passo dado pelo viandante (tabela 1), por exemplo, é possível descrever aritmeticamente o trajeto em função dos passos com grande precisão.

Tabela 1: relação entre os passos e o trajeto percorrido

Passos (pé por pé)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Trajeto (metros)	0,80	1,6	2,4	3,2	4

Fonte: O autor.

Nesse caso, a *variável número de passos* (p) é arbitrária, independente de qualquer outra grandeza, porém a *variável trajeto* (T) depende do número de passos, ou seja, varia conforme a outra grandeza a qual está relacionada. Temos T em função de p ou, em linguagem apropriada, $T = f(p)$. E de acordo com a tabela, teríamos, a cada passo, um avanço de 0,8 m, que representaria a média da passada do viandante, ajustando a lei de nossa função, algebricamente, da seguinte maneira: $f(p) = 0{,}8 \cdot p$, podendo ainda representar geometricamente essa mesma situação através de um gráfico no plano cartesiano. A partir daí, não será mais necessário voltar ao viandante e nem à floresta para tratar desta função na matemática, em particular.

O conceito de função, bem como a sua definição dentro da própria matemática, é o resultado de um conjunto de esforços de matemáticos em diferentes épocas, cada qual com sua contribuição, partindo, possivelmente de Galileu Galilei (1564 – 1642), a respeito do "[...] tratamento quantitativo nas suas representações gráficas" (ZUFFI, 2001, p. 11). A evolução da função matemática perpassa significativamente por Leonhard Euler (1707 - 1783), que introduziu o termo "expressão analítica" (que se chama também de "lei" da função) no conceito e contribuiu para a linguagem simbólica, sendo *f(x)*, um dos termos usados para denotar uma função de *x* (ZUFFI, 2001).

Após Euler, outros matemáticos seguiram contribuindo para o conceito de função, como Lagrange (1736 - 1813), Augustin Cauchy (1789 -1857) e Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805 - 1859) – que tomou as relações entre variáveis como uma *regra de correspondência*. Do século XVI em diante a função passou a ser considerada como um eixo no estudo da matemática e a partir da teoria dos conjuntos, desenvolvida por Georg Cantor (1845 - 1918), o conceito de função teve sua definição dada da maneira mais formal:

> Dados dois conjuntos de elementos, respectivamente denotados por *A* e *B*, dizemos que *B* é função de *A* – ou que *A* é aplicado em *B*, *A*→*B* – quando para todo elemento de *A* há um elemento correspondente em *B* e quando não há dois elementos distintos e *B* que correspondem ao mesmo elemento em *A*.
> Para tornar o conceito ainda mais preciso, frequentemente define-se a relação funcional entre *A* e *B* como "o conjunto de pares ordenados *(a, b)*, onde *a* é um elemento de *A* e *b* é um elemento de *B*, de sorte que se *(r, p) = (r, q)*, então *p = q*." (BOYER, 1992, p. 27-28).

O conceito de função foi formalizado na modernidade, mas, de forma difusa, sua base epistemológica, assim como a de tantos outros conceitos em matemática, faz parte do desenvolvimento do pensamento matemático primitivo e antigo. De certa forma, os babilônios já lidavam, intuitivamente, com ideias relacionadas a funções, como um "instinto de funcionalidade", isso "desde cerca de 2000 a.C., em seus cálculos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, as quais podiam ser tomadas como 'funções tabuladas', e que eram destinadas a um fim prático" (ZUFFI, 2000, p. 11).

Caraça (1951) traz a ideia de correspondência como vital para a designação dos números naturais na história, em que no simples fato de contagem reconhece-se a necessidade da correspondência. Segundo Caraça (1951):

> [...] podemos dizer que a contagem se realiza fazendo corresponder sucessivamente, a cada objeto da coleção, um número da sucessão natural [*1, 2, 3, 4, 5, 6, ...*]. Encontramo-nos assim em face da *operação de <<fazer corresponder>>*, uma das operações mentais mais importantes e que na vida de todos os dias utilizamos constantemente.

> Esta operação de <<*fazer corresponder*>> baseia-se na *ideia de correspondência*, que é, sem dúvida, uma das ideias basilares da Matemática. (CARAÇA, 1951, p. 7 grifo meu)

A associação entre números e quantidades de objetos traz perfeitamente a ideia de correspondência, onde cada número natural corresponde a uma posição, por estarem enfileirados e/ou agrupados em certas porções. E compreender funções é também compreender o significado de *correspondência* na matemática. A ideia de correspondência está presente nos fundamentos do conhecimento matemático e, mesmo que primitiva, é precursora da relação entre a natureza das coisas e o pensamento.

O termo "correspondência" é subjacente ao conceito de função, mas uma função, além de corresponder, descrever e relacionar grandezas, *gera* grandezas, tem a capacidade de transformar. Karlson (1961) reconheceu a capacidade de transformação de uma função expressa em sua *imagem*[1] e fez alusão a um *organismo vivo* ao dar significado a essa imagem como um objeto criado, transformado:

> A função assemelha-se aqui a uma máquina que, segundo um plano preestabelecido em todos os detalhes, forma um novo objeto, completamente acabado, a partir da porção de matéria prima que nela introduzimos — por exemplo um gramofone, que traduz em música toda oscilação gravada no disco preto." (KARLSON, 1961, p. 386).

Portanto, o conceito de função permite relacionar, manipular e gerar grandezas, e por possuir esse caráter "[...] dinâmico, vivo, em formação" (KARLSON, 2001, p. 387), possibilitou às ciências, de um modo geral, gozar desse conceito para mapear, ilustrar e diagnosticar suas grandezas e variáveis.

No ensino secundário brasileiro, é possível encontrar o conceito de função como tema de debates entre professores e matemáticos em meio às propostas de modernização do ensino de matemática de maneira acentuada na história da disciplina. São momentos que perpassam pela história do ensino de matemática no Brasil de um modo geral e pela constituição da educação no país, dando sentido ao ensino secundário brasileiro em seus diferentes contextos sociais e políticos, como retrata o segundo capítulo desta tese.

Os movimentos reformistas do ensino, em geral, que se estenderam a partir do final do século XIX, traziam como fator comum a "renovação", ou seja, na perspectiva apontada por Caruso (2011), uma superposição das propostas tradicionais com as inovadoras. Os movimentos para o ensino de matemática não foram diferentes quando se trata do conteúdo de funções. As propostas de reforma para o ensino da disciplina, ligadas a movimentos de

---

[1] Valor ou conjunto de valores gerados em função de *x*.

modernização do ensino de matemática, que propunham uma *matemática nova*, se deram em diferentes países e de diferentes maneiras.

No final do século XIX, em meio a uma sociedade ainda ligada à agricultura, mas em transição às novas demandas modernas, a matemática servia como um paradigma para o pensamento lógico, tratando de conteúdos bastante elementares, onde os métodos de ensino enfatizavam os aspectos formais, e, na escola, a disciplina tinha um caráter estático e desligado das aplicações. No entanto, a indústria e o comércio demandavam, além de uma instrução matemática mais ampla, a compreensão de conhecimentos mais modernos e avançados que servissem de base para aplicações técnicas (SCHUBRING, 2004, p.12).

Em decorrência das novas demandas de instrução e aplicação da matemática, são organizados congressos em diversos países da Europa com o intuito de discutir os rumos da disciplina na educação, resultando em propostas de reforma curriculares para a disciplina, e que só chegariam ao Brasil algumas décadas mais tarde, mais precisamente na década de 1930, onde o conceito de função foi peça chave para estabelecer a junção das matemáticas no currículo como uma disciplina única. Instituiu-se, além da unificação das disciplinas de aritmética, álgebra e geometria em uma única matemática, a entrada oficial do conteúdo de funções, enfatizando a função numérica, nas primeiras séries do ensino secundário.

Devido ao seu caráter unificador em presença "das matemáticas", a função havia se tornado conceito axial para o ensino de matemática nos países mais desenvolvidos no final do século XIX, sendo o seu estudo, em meio ao progresso tecnológico da época, imprescindível para aproximação do ensino secundário com a matemática acadêmica e científica.

A pretensão de se tratar do conceito de função já nas séries iniciais do ensino secundário brasileiro foi aludida pelo professor Euclides de Medeiros Guimarães Roxo, diretor do Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro, por volta da década de 1930, que teve voz em meio à Reforma Campos, esta decisão, porém, não se sustentou com o ministério Capanema, alguns anos mais tarde. Por conta de uma decisão ministerial, no ano de 1942, o conceito de função foi retirado das primeiras séries do ensino secundário, não fazendo parte, na nova organização curricular, do curso ginasial.

Por volta da metade do século XX, tendo uma abordagem um pouco diferente da reforma da década de 1930, as propostas de modernização do ensino de matemática traziam em seus fundamentos, além da "recente" estruturação do conteúdo de álgebra (século XIX) propagada pelas ideias do Grupo Bourbaki[2], a perspectiva da pedagogia voltada às ciências,

[2] Pseudônimo de um grupo de matemáticos, na sua maioria, franceses, que teve seus primórdios em meados da década de 1920.

principalmente no que diz respeito à psicologia e à contribuição de Piaget. Estas influências se mostram evidentes no Brasil com base no ideário dos primeiros Congressos Nacionais de Ensino da Matemática (CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA NO CURSO SECUNDÁRIO, 1957; 1959a; 1959b).

Não obstante, como pode ser visto com mais detalhes no terceiro capítulo desta tese, o sentido dado ao ensino de matemática a partir dos novos estudos de álgebra – sob uma perspectiva estruturalista da matemática – contribuiu para que o conteúdo de funções voltasse a ser pauta nas discussões acerca do ensino de matemática. Estas discussões fundamentaram o ideário do Grupo de Estudos em Educação Matemática (GEEM), liderado por Osvaldo Sangiorgi, que, no início da década de 1960, tomou a frente da organização curricular da disciplina de matemática para o ensino secundário e teve sua proposta de reforma curricular aprovada como os *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa para o Ginásio e para o Colégio*, documento que trazia a base curricular da disciplina de matemática em âmbito nacional. Através deste documento, o conteúdo de funções, além de compor a quarta série do currículo do curso ginasial, ganhou nova notação junto à teoria dos conjuntos, ao estudo das relações e estruturas, expandindo o conceito de função, transcendendo a perspectiva de função numérica.

As implicações referentes aos movimentos de reforma e seus agentes, como acima mencionadas, deixam a entender que a função matemática no ensino brasileiro foi reorientada, dentre outros fatores, por vetores que se originaram em discursos próprios da ciência, tendo como extremidades agentes politicamente influentes ligados ao ensino da disciplina. Haja vista, então, que a intenção de reproduzir o conhecimento denominado *função* na educação brasileira, especificamente no ensino secundário, não ocorreu somente através da organização e significação da ciência em si, mas também, ou talvez muito mais, por meio de decisões tomadas a seu respeito que perpassam, por exemplo, por diferentes posições sobre orientações metodológicas, como o fato de tratar ou não do conceito de função como axial no ensino, e também pela subordinação a normatizações impostas por reformas curriculares na produção de livros didáticos.

No início do século XX, então, o conceito de função, em particular, simbolizou a renovação e modernização do ensino secundário brasileiro de matemática. Já a partir da década de 1950, a teoria dos conjuntos e o conceito de estrutura matemática foram as referências à modernização do ensino. Diante disso, é possível reconhecer uma grande demanda de esforços teóricos e metodológicos feitos por educadores e professores de matemática ao tratar da disciplina em diferentes épocas, resultando em diligências que serviram, antes de tudo, para vigorar tendências para o ensino, constituídas sob determinado cenário discursivo e político na história do ensino da disciplina.

E os livros didáticos de matemática, nesse aspecto, representaram, em certa medida, as tendências curriculares de cada época e, por esse motivo, servirão como elemento de argumentação para essa tese, ou por intermédio de autores que já exploraram algumas dessas coleções e/ou por intermédio da análise direta mediante a disponibilidade dos exemplares.

Entende-se que há, por meio da expressão do conteúdo de funções nos materiais didáticos exemplares de cada época, a possibilidade de se verificar a consolidação desse conhecimento sob as diferentes perspectivas acerca de sua transmissão no ensino. Portanto, para que seja possível compreender a maneira como o conteúdo de funções passou a ser transmitido em decorrência das reformas curriculares, optou-se pela análise de coleções de livros didáticos de matemática que obedecessem aos seguintes critérios: representar o ideário da reforma curricular de sua época, introduzir o conteúdo de funções e ter uma vendagem e distribuição significativa.

Sendo assim, os livros didáticos de matemática escolhidos foram: *Curso de Matemática Elementar* – dois volumes, com o primeiro volume e edição de 1929, de autoria de Euclides Roxo; *Matemática* – dois volumes, com o primeiro volume editado em 1930, de Cecil Thiré e Mello e Souza; *Curso de Matemática* – do terceiro ao quinto volume, continuação da coleção *Matemática* de Cecil Thiré e Mello e Souza, com coautoria de Euclides Roxo.

As coleções citadas acima serviram de referência para diversos estudos sobre a Reforma Campos e, consequentemente, sobre as primeiras abordagens referentes ao conteúdo de funções nas séries iniciais do ensino secundário brasileiro (VALENTE 2004; 2008a; DASSIE, 2001; 2008; BRAGA, 2003; 2006; CARVALHO, 2004).

Também foi objeto de análise a coleção *Matemática Ginasial*, de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza, que tinha como principal objetivo substituir a coleção *Curso de Matemática*. Essa "nova coleção", como afirmam os autores no prefácio de cada um de seus quatro volumes, estava de acordo com os novos programas da lei orgânica para o ensino secundário, que foi expedida em 1942, com a Reforma Capanema.

Esta investigação também trouxe como objeto de análise a coleção de livros didáticos *Matemática: Curso Moderno*, do autor Osvaldo Sangiorgi, com o seu primeiro exemplar em 1963, editado de acordo como *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa para o Ginásio e para o Colégio*, tendo o próprio Sangiorgi como um dos mentores do programa. Além de apresentar as inovações propostas no âmbito da modernização da matemática referente à sua época, foi a coleção de livros didáticos de matemática de maior vendagem na década de 1960.

Na década de 1990, as orientações curriculares para o ensino brasileiro ganharam uma referência nacional, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). No quarto capítulo desta tese, faz-se uma reflexão sobre as tendências curriculares a partir da década de 1980 e, no capítulo seguinte, será feita a análise das coleções de livros didáticos de matemática de ensino fundamental, séries finais, selecionadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), indicadas para o ano de 2014. As coleções analisadas são: *Descobrindo e Aplicando a Matemática*, de Alceu dos Santos Mazzieiro e Paulo Antônio F. Machado; *Matemática – Bianchini*, de Edwaldo Roque Bianchini; *Matemática – Ideias e Desafios*, de Dulce Satiko Onaga e Iracema Mori; *Matemática – Imenes & Lellis*, de Luiz Márcio Pereira Imenes e Marcelo Cestari Terra Lellis; *Matemática: teoria e contexto*, de Marília Ramos Centuríon e José Jakubovic; *Praticando Matemática: edição renovada*, de Álvaro Andrini e Maria José C. de V. Zampirolo; *Projeto Araribá – Matemática*, de Fabio Martins de Leonardo; *Projeto Teláris – Matemática*, de Luiz Roberto Dante; *Projeto Velear – Matemática*, de Antonio José Lopes e *Vontade de Saber Matemática*, de Patricia Rosana M. Pataro e Joamir Roberto de Souza.

Ao final, serão identificados os rastros deixados pelos movimentos de reforma discutidos nos capítulos anteriores em relação à abordagem contemporânea do conteúdo de funções. E, por fim, abre-se uma discussão sobre a possibilidade de, através da compreensão dos diferentes contextos sociais, políticos e discursivos que embasaram as modificações e normatizações do conteúdo de funções no ensino de matemática no Brasil em diferentes épocas, desprender este conhecimento de seu estado intencional, libertando-o e deixando-o em evidência para uma nova reorientação.

2 O ENSINO SECUNDÁRIO BRASILEIRO E AS REFORMAS FRANCISCO CAMPOS E GUSTAVO CAPANEMA

O que dá sentido ao currículo de uma disciplina, de um modo geral, são questões centrais do tipo: “o que deve ser ensinado?” ou “quais saberes são mais relevantes para esta ou aquela área do conhecimento?”. A constituição de um currículo, portanto, ocorre, fundamentalmente, através de escolhas. E algumas dessas escolhas são apresentadas neste trabalho na medida em que se investiga a movimentação do conteúdo de funções no currículo de matemática do ensino secundário brasileiro e, particularmente, o fato do conceito de função ter sido eleito conteúdo axial na década de 1930 no Brasil – responsável por reorganizar o currículo da disciplina – e não outro, ou o fato de que a teoria dos conjuntos e o conceito de estrutura, nas décadas de 1950 e 1960, estiveram em ascensão no ensino brasileiro, e não mais o conceito de função.

Admitindo-se as implicações de determinadas escolhas na constituição do currículo de uma disciplina, este deixa de ser apenas de uma organização de conhecimentos que se constituiu sob conceitos puramente pedagógicos e de aprendizagem, e passa a ser, também, um local de disputas ideológicas, de convencimento, de repressão; sendo assim, um território político, um espaço de poder. No entanto, esta tese não tem como objetivo aprofundar-se no estudo sobre as teorias do currículo, mesmo que reconhecendo as possíveis aproximações que, vez que outra, possam se estabelecer advindo de determinadas argumentações. Por isso, cabe aqui apenas resgatar a constituição do ensino secundário no Brasil a fim de traçar alguns dos apontamentos mais relevantes a respeito da organização do seu currículo na história que possam contribuir, de alguma maneira, para esta investigação.

Em se tratando do currículo do ensino secundário no Brasil, este passou, na sua história, por diversas transformações, tanto na sua estrutura quanto nos seus objetivos, sempre em detrimento das novas demandas da sociedade para a formação dos indivíduos. No Brasil, o ensino secundário encontra seu cerne ainda na sociedade colonial, quando foram introduzidos pelos jesuítas, através de políticas colonizadoras, os primeiros colégios de ensino secundário, como “produto da missão da Companhia de Jesus no Brasil”. Os colégios jesuítas brasileiros, diferentemente dos colégios europeus – que tinham como referência a universidade – nasceram de uma política procedente da própria ordem jesuítica, separando o ensino das humanidades, destinado aos filhos dos colonos mais abastados, do ensino catequista, destinado à população indígena (NUNES, 2000, p. 36-39).

A partir da metade do século XVIII, já com a expulsão dos jesuítas pela política pombalina, o ensino secundário passou a ser oferecido em aulas isoladas ou avulsas em todas as províncias, salvo raras iniciativas. O desmantelamento do ensino católico no Brasil após a expulsão dos jesuítas do país acabou com, praticamente, o único ensino que se tinha naquela época. No período imperial, no início do século XIX, com a chegada da corte portuguesa no Rio de Janeiro, em uma sociedade predominantemente rural, ainda havia pouco acesso até mesmo ao ensino primário, pois quando este existia, ficava a cargo dos governos das províncias, ou ocorria através de tutores particulares ou padres paroquianos. Somente na capital do país é que começou a se constituir o que viria a ser, posteriormente, um sistema de ensino público, sendo fundado, em 1838, no Rio de Janeiro, o Colégio Pedro II, a primeira escola pública de ensino secundário (SCHWARTZMAN, 2005, p. 18).

As primeiras instituições que trataram do ensino secundário tiveram como concepção primordial promover a educação da elite, e a estrutura de ensino conveniente à elite pode ser deduzida das reformas que o Colégio Pedro II sofreu em sua história. O ensino secundário nos últimos trinta anos do Brasil Império foi marcado pela importância delegada ao ensino científico, pois, por volta de 1870, as escolas secundárias limitavam-se ao estudo de línguas modernas mais usuais e línguas mortas, a noções de física e química. As mudanças, em geral destinadas às escolas secundárias nas últimas três décadas do Império, baseavam-se nas modificações introduzidas no próprio Colégio Pedro II, que tinha como foco enriquecer o currículo com matérias científicas exigidas nos preparatórios para as faculdades. Porém, essas mudanças tiveram maior efeito discursivamente do que na prática pedagógica. (NUNES, 2000, p. 43).

De acordo com Bomeny (2001, p. 29), na primeira década do século XX, 80% da população era analfabeta, e a tônica da época era a de que “só a ciência salvaria”, sendo assim, “todas as iniciativas públicas tiveram que se justificar segundo parâmetros dos avanços científicos da época. A educação não escapou dessa onda, e foi um dos campos onde a ciência moderna teve maior acolhida como justificativa de propostas de reforma”.

Ocorreu, então, uma sucessão de reformas no ensino brasileiro em geral entre os anos de 1889 e 1930 (Primeira República): Reforma Benjamin Constant, em 1890; Código Epitácio Pessoa, de 1901; Reforma Rivadávia Correa, em 1911; Reforma Carlos Maximiliano, de 1915; Reforma João Luiz Alves e Rocha Vaz, de 1925, todas, de algum modo, preocupadas em organizar o ensino secundário, e foi nesta última reforma, a de Luiz Alves e Rocha Vaz[3], que o

[3] Com as medidas adotadas pelos ministros João Luiz Alves e Rocha Vaz, o ensino secundário passa a ser seriado, como já salientado, com a duração de seis anos, sendo o último ano um curso de Filosofia. Tem por finalidade fornecer preparo fundamental e geral para a vida, qualquer que seja a profissão a que se dedicasse posteriormente o estudante. A conclusão do 5º ano já dava direito ao prosseguimento de estudos em nível superior, desde que,

ensino secundário ficou oficialmente caracterizado como um prolongamento do ensino primário.

No entanto, mesmo diante de todas essas reformas, foi somente na década de 1930, quando Getúlio Vargas assume o governo do país, que a educação passa a ser prioridade nacional. Foi criado o primeiro ministério voltado à educação, que até então era de responsabilidade do Ministério do Interior ou do Império, ou ainda do Ministério da Instrução Pública e dos Correios e Telégrafos. Em 1931, com a reforma Francisco Campos, o ensino secundário passou a ter sete anos de duração e ser dividido em dois ciclos: o primeiro ciclo, denominado de curso secundário fundamental, com duração de cinco anos, e o segundo ciclo, denominado curso secundário complementar, com duração de dois anos, subdividido em três especialidades que correspondiam a cursos superiores (engenharia e agronomia; medicina, odontologia; farmácia e veterinária; direito).

No dia 4 de abril de 1942 foi homologada, pelo decreto nº 4.244, a nova Lei Orgânica do Ensino Secundário, trazendo a divisão dessa modalidade de ensino em dois ciclos, porém, alterava a configuração da estrutura anterior, sendo que o primeiro ciclo compreenderia um só curso, o curso ginasial, e o segundo compreenderia dois cursos paralelos, o curso clássico e o curso científico, como segue:

> **Art.** 2º O ensino secundário será ministrado em dois ciclos. O primeiro compreenderá um só curso: o curso ginasial. O segundo compreenderá dois cursos paralelos: o curso clássico e o curso científico.
> **Art.** 3º O curso ginasial, que terá a duração de quatro anos, destinar-se-á a dar aos adolescentes os elementos fundamentais do ensino secundário.
> **Art.** 4º O curso clássico e o curso científico, cada qual com a duração de três anos, terão por objetivo consolidar a educação ministrada no curso ginasial e bem assim desenvolvê-la e aprofundá-la. No curso clássico, concorrerá para a formação intelectual, além de um maior conhecimento de filosofia, um acentuado estudo das letras antigas; no curso científico, essa formação será marcada por um estudo maior de ciências (BRASIL, 1942).

Além do ensino secundário foram instituídos: ensino normal, ensino industrial, ensino comercial e ensino agrícola. Todos com o primeiro ciclo de quatro anos e o segundo ciclo de três anos.

As últimas duas reformas que ocorreram sob o governo de Getúlio Vargas, através de seus ministros Francisco Campos e Gustavo Capanema, foram, naquela época, amplamente discutidas entre intelectuais, professores, representantes da Igreja e do exército. Segundo Schwartzman (2005, p. 21):

---

claro, o estudante fosse aprovado nos vestibulares. Aos concluintes do 6º ano, será atribuído o grau de bacharel em ciências e letras (SOUZA, 2008).

> Os intelectuais e professores e educadores da época se dividiam profundamente em suas orientações ideológicas e doutrinárias, indo desde os fascistas autoritários (Francisco Campos) e os católicos ultramontanos (Alceu Amoroso Lima) até pragmatistas do tipo americano (Anísio Teixeira) e os que acreditavam nos poderes científicos da nova pedagogia (Lourenço Filho e Fernando de Azevedo), chegando aos marxistas (Paschoal Lemme). Em Parte, os conflitos estavam relacionados ao pacto assinado entre Getúlio Vargas e a Igreja Católica conservadora, segundo o qual a educação brasileira seria reorganizada sob a supervisão e a direção de Igreja, e ao qual se punham ferrenhamente os reformistas mais liberais e a esquerda.

E o que prevaleceu no final, ainda segundo Schwartzman (2005, p. 21), "não foram as doutrinas, mas sim os instintos burocráticos e administrativos do ministro Capanema, imbuído dos valores nacionalistas e conservadores da época", o que vai ter reflexo determinante na constituição do currículo do ensino secundário e, particularmente, do currículo de matemática, como veremos mais adiante.

O ensino secundário continuou nesses moldes até o ano de 1961, passando, na década de 1950, por uma grande expansão ao acesso à escola e por um estado de cultura de conscientização política e mobilização social, sendo um "momento de inversão da tradição elitista da educação brasileira", e esta demanda da educação popular dava espaço a uma fatia maior da sociedade (BOMENY, 2001 p. 58-59). A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional reestruturou a educação em ensino primário, médio e superior.

Segundo Nunes (2000, p. 56):

> A partir de 1961, numa acepção ampla, ensino secundário, educação secundária, educação de nível médio ou ensino médio referiam-se a todo o tipo de estudos pós-primários no nível de primeiro ciclo (secundário, comercial, industrial, agrícola e normal) e no nível de segundo ciclo (secundário, comercial, industrial, agrícola e normal). Numa acepção restrita, o ensino secundário referia-se ao ramo secundário do primeiro ciclo definido pela Lei 4.024, de 1961, a famosa Lei de Diretrizes e Bases. Essa lei constituiu-se na maior de todas as leis de equivalência surgidas desde meados dos anos cinquenta, pois permitiu a articulação, pelo menos teórica, entre todos os cursos de grau médio nos dois ciclos, o que valia para a transferência entre os cursos e para o ingresso no ensino superior.

Outras reformas importantes ocorreram nas décadas de 1960 e 1971, mas que não se limitavam ao ensino secundário. No entanto, em 1971, de acordo com as tendências internacionais, o ensino obrigatório passou a ser de oito anos, e não mais de quatro anos, como anteriormente (SCHWARTZMAN, 2005, p. 18). A lei 5.892, de 1971, reformularia o ensino, sendo que o primeiro ciclo do ensino secundário acabou sendo incorporado ao ensino de primeiro grau, juntamente ao antigo ginásio, sendo a obrigatoriedade escolar de oito anos prevista para uma faixa etária dos 7 aos 14 anos de idade (NUNES, 2000, p. 58).

Em 20 de dezembro de 1996, foi aprovada a Lei de Diretrizes e Bases, nº 9.394, com educação básica obrigatória e gratuita dos 4 aos 17 anos de idade, organizada da seguinte forma: pré-escola; ensino fundamental e ensino médio (BRASIL, 1996). No Decreto de Lei nº 11.274, de 6 de fevereiro de 2006, o ensino fundamental passa a ser de 9 anos.

Neste longo percurso da constituição do ensino secundário brasileiro, em meio às reformas curriculares e reorientações estruturais do ensino, o conteúdo de funções esteve presente, de maneira determinante, nas discussões a respeito dos rumos do currículo da disciplina, vinculado inicialmente à modernização do ensino de matemática no final do século XIX e início do século XX.

2.1 MODERNIZAÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA E A REFORMA CAMPOS: A ESCOLARIZAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

O processo de escolarização do conteúdo de funções no ensino secundário brasileiro tem seus fundamentos em iniciativas a respeito do ensino realizadas na Alemanha, onde o conceito de função foi ator principal no ensino da disciplina, e isso ocorreu no primeiro movimento internacional de reforma curricular da matemática, no final do século XIX. Em meio a uma sociedade que passava por um processo de transição, de um paradigma agrícola para um industrial, fizeram-se necessárias algumas mudanças na estrutura educacional, pois a matemática da escola já não condizia com a realidade da sociedade no final do século.

Ocorreram iniciativas de reformas em alguns países da Europa no início do século XX e na Prússia, especificamente, o influente matemático alemão Felix Klein começou a forjar a ampla aliança que exigiria a reforma de toda a instrução matemática orientando-a para o conceito de função. Em 1908, no IV Congresso Internacional de Matemáticos, que ocorreu em Roma, foi criado um comitê chamado *Internationale Mathematische Unterrichtskomission* (IMUK), responsável por fazer um levantamento a respeito da situação da instrução matemática nas escolas secundárias dos países mais desenvolvidos, tendo como presidente o matemático Felix Klein, que fez do IMUK um veículo que contribuiu para a realização de seu programa de reforma. O comitê passou de apenas relator da situação do ensino secundário dos países desenvolvidos para um agente de mudanças em todos os níveis educacionais, agregando um maior número de países e implantando a ideia de que uma reforma no ensino de matemática se fazia necessária (SCHUBRING, 2004).

Entre outros aspectos que evidenciaram a necessidade de reforma no ensino de matemática, o que levou Felix Klein a tomar iniciativa diante da situação da instrução matemática no final do século XIX foi a sucessão de problemas já evidenciados naquela época no que tocava à transição do ensino secundário para o ensino superior, o que fez com que ele procurasse dar sentido ao sistema escolar como alicerce para o ensino superior. Após propor mudanças ao gabinete ministerial e ter suas ideias aprovadas, mas ainda sem permissão para pô-las em prática, Felix Klein contou com o apoio de professores treinados que serviram como agentes de implementação de sua proposta de reforma em determinadas escolas. Klein carregava um slogan em sua reforma que, segundo Schubring (2004, p. 33), “tal *slogan* era a famosa noção de raciocínio funcional, ou – para dizê-lo mais concretamente – a ideia de que o conceito de função deveria impregnar todas as partes do currículo de matemática”. E de acordo com o programa de Klein, o conceito de função deveria ser introduzido já nas séries iniciais.

Conforme Braga (2006, p. 43), na obra *Matemática Elementar sob um Ponto de Vista Superior*, do matemático Felix Klein, estão expostas muitas ideias que, mais tarde, tornar-se-iam os princípios da modernização do ensino secundário no século XX, sendo que a introdução do conceito de função em tal nível de ensino estava fundamentada, principalmente, na preocupação do matemático em desenvolver este conteúdo, paulatinamente, durante as séries, com o intuito de preparar os alunos para o cálculo infinitesimal.

É factual que uma das condições que possibilitaram que o conceito de função viesse a compor o currículo da disciplina de matemática no ensino secundário em muitos países europeus e, posteriormente, no Brasil, foi o fato desta decisão ter se dado pelo ideário do matemático Felix Klein e sua preocupação com o ensino superior. Para Braga (2006, p. 43), seria difícil imaginar que,

> [...] se a reforma não tivesse sido liderada por um matemático atuante na Universidade, mas sim por educadores emergentes da escola primária, ou mesmo secundária, a introdução do referido item tivesse o lugar de destaque que lhe foi atribuído ou, até mesmo, constasse da relação de conteúdos propostos.

O Brasil, no início do século XX, tinha como referência para a constituição do ensino secundário o Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro. O professor do Colégio Pedro II, Eugênio de Barros Raja Gabaglia, havia representado o país no V Congresso Internacional de Matemática, em Cambridge, em 1912, ainda assistido pelo IMUK, dirigido por Felix Klein, dentre outros matemáticos. E, de acordo com o terceiro número da revista *L’Enseigniment mathématique*, de abril de 1914, que dedicou esse número a um balaço do VI Congresso Internacional de Matemática, o nome de Gabaglia também estava presente na lista dos membros da comissão internacional. A revista destaca, dentre as conferências internacionais que se realizaram no VI

Congresso, “[...] a conferência de Émile Borel sobre ‘a adaptação do ensino secundário de matemática ao progresso da ciência’ e a sessão principal dos trabalhos do congresso, cujo tema a ‘introdução das primeiras noções do cálculo e de funções no ensino secundário’” (VALENTE, 2004, p. 54).

Apesar de Gabaglia ter participado dos congressos sobre a modernização do ensino de matemática, ele não havia se preocupado em trazer esta perspectiva para o ensino brasileiro, possivelmente por manter uma postura mais tradicional e menos reformista[4]. E com a morte do professor Eugênio de Barros Raja Gabaglia, em 1919, Euclides Roxo, já professor assistente do Colégio Pedro II, toma a frente e é nomeado “catedrático interino de matemática”. Roxo tomará as primeiras iniciativas a respeito da modernização do ensino de matemática no Brasil, propondo uma reforma curricular aos moldes das propostas de Felix Klein.

2.1.1 Euclides Roxo e o *novíssimo programa do ensino secundário*

A escolarização do conceito de função no ensino secundário ocorreu através de uma proposta feita por Euclides Roxo, inicialmente à Congregação do Colégio Pedro II, como uma iniciativa radical de reforma do currículo da disciplina, baseada na “grande reforma” do professor Felix Klein na Alemanha, há trinta anos. A Reforma de Felix Klein trazia no seu âmago a unificação das matemáticas e a entrada do conceito de função nas primeiras séries do ensino secundário, tal como estava previsto na proposta de Euclides Roxo[5].

No entanto, a reforma curricular no Brasil se deu de maneira autoritária, de acordo com Valente (2002), pelo fato de que, ao ser chamado por Francisco Campos, Ministro da Educação e Saúde Pública[6], para ser membro do Conselho Diretor da Associação Brasileira de Educação

---

[4] [...] ao que tudo indica, o mestre pouco ou nada teria se enfronhado nos debates sobre a reforma modernizadora e mais teria feito o papel de relações públicas do governo brasileiro. Outra hipótese é que Gabaglia, participando dos debates, teria também alinhado suas posições àquelas da Itália, quem sabe até, por uma questão de afinidade de origem familiar... Gabaglia, é possível pensar também, teria interesses menos idealistas e mais pragmáticos: divulgar e dar uso aos livros F.I.C., que traduziu pela Garnier - livros que seriam considerados ultrapassados, em face do ideário da modernização proposto pela reforma internacional (VALENTE, 2004, p. 57).

[5] Werneck (2003, p. 84), que investigou a “gênese do primeiro programa de ensino de matemática brasileiro”, com base no Arquivo Pessoal Euclides Roxo (APER), concluiu que, mesmo sob o ideário dos programas de reformas que visavam à modernização do ensino de matemática na época, Euclides Roxo, “[...] ao invés de programas, utilizou-se de livros de vários autores, de diferentes países, para a elaboração do primeiro programa brasileiro de Matemática”. Carvalho (2004, p. 94) aponta que no prefácio do seu livro *Curso de Mathematica Elementar*, de 1929, Euclides Roxo explica que adotou as ideias de Felix Klein e do IMUK referentes ao ensino de matemática e que modelou o seu livro de acordo com os livros-texto do professor Ernst Breslich, nascido na Alemanha, autor do livro *SeniorMathematics Book I*, que representava a matemática de maneira unificada em um só volume.

[6] Na condição de diretor de Colégio Pedro II, nomeado por Getúlio Vargas, Roxo é chamado por Francisco Campos, o primeiro ministro do recém-criado Ministério da Educação e Saúde Pública, para compor uma comissão que irá elaborar um projeto de reforma do ensino brasileiro (VALENTE, 2002, p. 18).

(1929 – 1931) e fazer parte da comissão do ensino secundário desta associação, Euclides Roxo acaba por reportar todas as ideias de modernização presentes em sua proposta de reforma feita à Congregação do Colégio Pedro II para âmbito nacional, por decreto de lei[7].

Assim sendo, a implantação oficial do conteúdo de funções nas primeiras séries do ensino secundário brasileiro ocorreu menos delineada do que inicialmente planejada, pois todo processo de implantação do novo programa do Colégio Pedro II, idealizado para ser desenvolvido de maneira progressiva, através de um compêndio redigido pelo próprio Euclides Roxo, *Curso de Matemática Elementar*, tendo um volume para cada ano, acabou, de fato, sendo interrompida pela ampla reforma do sistema educacional brasileiro:

> No ano de 1929, a reforma deveria restringir-se ao âmbito do Colégio Pedro II e, para a sua aplicação, não havia um livro didático específico com esse fim. Somente, em meados do segundo semestre desse ano, é publicado o primeiro volume da coleção Curso de Matemática Elementar, de autoria de Euclides Roxo, elaborado em total consonância com o novo programa e o novo método de ensino. Em 1930, é editado o volume II destinado aos alunos do segundo ano. (BRAGA, 2003, p. 75).

Valente (2004, p. 76) afirma que o referido livro didático elaborado por Euclides Roxo tinha como objetivo a proposta de modernização do ensino no Brasil, sendo que "a intenção principal era a da reestruturação da sequência de conteúdos a ensinar, visando à fusão dos vários ramos (aritmética, álgebra, geometria), até então separados", o que caracterizou o surgimento da disciplina *Matemática* no ensino brasileiro, e, junto a ela, o conteúdo de função nas primeiras séries do curso secundário. No entanto, o autor se questiona sobre o que de fato seria modernizar o ensino de matemática no Brasil, e a resposta a esta pergunta foi, ao que lhe pareceu, "[...] adaptar de alhures, dos países considerados referência, dos países que buscaram modernizar a educação, programas de ensino e, sobretudo, livros didáticos" (VALENTE, 2004, p. 63).

Por conseguinte, de acordo com o *Novíssimo Programa do Ensino Secundário*, nos termos do Art. 10 do decreto n. 19.890, de 18 de abril de 1931[8], no adendo que se refere a este artigo, fica explícita a intenção de unificar as matemáticas (aritmética, álgebra, geometria) e de que a noção de função simbolizava esta unificação:

---

[7] Decreto nº. 19.890, de 18 de abril de 1931, que dispõe sobre a organização do ensino secundário. Esta reforma do ensino secundário, ocorrida no ministério de Francisco Campos, em 1931, através do decreto nº 19.890, foi consolidada em 4 de abril de 1932 pelo decreto nº 21.241 (DESSIE, 2001).

[8] Art. 10. Os programas do ensino secundário, bem como as instruções sobre os métodos de ensino, serão expedidos pelo Ministério da Educação e Saúde Pública e revistos, de três em três anos, por uma comissão designada pelo ministro e à qual serão submetidas as propostas elaboradas pela Congregação do Colégio Pedro II (BRASIL, [1931b]).

> A matemática será sempre considerada como um conjunto harmônico cujas partes estão em viva e íntima correlação. A acentuação clara dos três pontos de vista – aritmético, algébrico e geométrico – não deve, por isso, estabelecer barreiras intransponíveis, que impeçam o estudante de perceber as conexões entre aquelas disciplinas. Para dar unidade à matéria, estabelecendo-se essa estreita correlação entre as diferentes modalidades do pensamento matemático, será adotada, como ideia central do ensino, a noção de função, apresentada, a princípio, intuitivamente e desenvolvida, nas séries sucessivas do curso, de modo gradativo, tanto sob a forma geométrica como sob a analítica. Como um desenvolvimento natural do conceito de função, será incluído na 5ª série o ensino das noções fundamentais e iniciais do cálculo das derivadas, tendo-se não só em vista a sua aplicação a certas questões, geralmente tratadas em matemática elementar por processos artificiais, como ainda aos problemas elementares da mecânica e da física. Essas noções não serão ensinadas como matéria à parte, mas entrelaçadas ao corpo das demais disciplinas matemáticas (BRASIL, [1931b]).

Ainda sobre o conteúdo de função:

> A noção de função constituirá a ideia coordenadora do ensino. Introduzida, a principio, intuitivamente, será depois desenvolvida sob feição mais rigorosa, até ser estudada, na última série, sob ponto de vista geral e abstrato. Antes mesmo de formular qualquer definição e de usar notação especial, o professor não deixará, nas múltiplas ocasiões que se apresentarem, tanto em Álgebra como em Geometria, de chamar a atenção para a dependência de uma grandeza em relação à outra ou como é determinada uma quantidade por uma ou por várias outras (BRASIL, [1931b]).

É implantada pela primeira vez no currículo do ensino de matemática brasileiro, na segunda série do ensino secundário, a noção de função, no item II, intitulado por Aritmética e Álgebra, onde traz: “Noção de função de uma variável independente. Representação gráfica. Estudo das funções $y = ax$ e $y = a/x$; exemplos” (BRASIL, [1931b]). Segundo Valente (2002, p. 29), ao se referir ao programa encabeçado por Roxo:

> [...] o conceito de *função* passa a fazer parte da matemática escolar no programas advindos da reforma “Francisco Campos”. Por força de regime de exceção, Euclides Roxo elaborou praticamente sozinho, o que devia ser objeto de ensino para o Brasil. A presença do conceito de *função* nos programas de matemática, desde o primeiro ciclo, embrião do que viria a se tornar o ginásio, é garantida por uma política educacional autoritária.

Tais programas, previstos para o ensino de matemática, são consolidados através dos primeiros livros didáticos, que agora não são mais de aritmética, álgebra ou geometria, mas de *matemática*.

2.1.2 O conteúdo de funções nos livros de *matemática* antes da Reforma Campos

Em detrimento das mudanças implantadas pela reforma ministerial ou, anteriormente, pelas reformas feitas à Congregação do Colégio Pedro II, as produções de materiais didáticos que depois fariam referência ao *Novíssimo Programa* já ocupavam os bancos escolares, pois antes de 1929 os livros não eram organizados de acordo com um programa em específico, e sim separados por compêndios de aritmética, álgebra e geometria, podendo ser usados em uma ou mais séries.

> Com a nova estrutura para a matemática escolar implantada pelo Colégio Pedro II, a partir de 1929, surgiu também um novo tipo de livro didático destinado a esta disciplina. Para seguir as novas propostas os livros de aritmética, álgebra e geometria não poderiam ser adotados, pois um dos pontos fundamentais da reforma era a fusão dos ramos, ou seja, a matemática na educação secundária deveria ser sempre considerada como um conjunto harmônico. Dessa forma, novos livros didáticos deveriam ser editados para o ensino da matemática. (DASSIE, 2008, p. 154).

Segundo Dassie (2008, p. 154), em 1929, as três primeiras coleções editadas com o objetivo de atender ao programa do Colégio Pedro II – e consequentemente abordar o conceito de função nas primeiras séries do ensino secundário – foram, de acordo com a sua data de publicação: *Como se Aprende Mathematica*, em dois volumes, de Savério Cristófaro, que foi publicada a partir de julho de 1929; o *Curso de Mathematica Elementar*, em três volumes[9], de Euclides Roxo, comentado anteriormente, publicado a partir de setembro de 1929, e, Mathematica, já em 1930, em três volumes[10], de Cecil Thiré e Mello e Souza.

Os dois primeiros volumes do livro de Savério Cristófaro, *Como se Aprende Mathematica*, foram publicados antes da coleção de Euclides Roxo, trazendo o indicativo de que as obras haviam sido elaboradas “de acordo com a atual orientação do ensino de aritmética, álgebra, geometria e trigonometria, adaptada no Colégio D. Pedro II”. No entanto, conforme Dassie (2008, p. 158), “o conceito de função não é tratado como ideia central no ensino”.

Braga (2006), ao fazer uma descrição dos volumes da coleção *Curso de Matemática Elementar*, de Euclides Roxo, ressalta que na página 66 do quinto capítulo do primeiro volume, intitulado *Adição, subtração, multiplicação e divisão de segmentos – polinômios lineares*, já é possível encontrar “[...] uma primeira aproximação do conceito de dependência funcional” (p. 98), onde “[...] o autor solicita ao educando que, por meio da linguagem simbólica das equações, exprima a dependência entre quantidades em diversas situações propostas (p. 98-99)”, conforme a figura abaixo (figura 1[11]):

---

[9] O terceiro volume chama-se *Curso de Matemática, 3ª série, II, Geometria, publicado em 1931*, após a Reforma Campos, e por se tratar especificamente de geometria, não será abordado no texto.

[10] Segundo Dassie (2008, p. 168), apesar dos livros destinados ao primeiro e segundo ano terem sido publicados em 1931 e o terceiro em 1932, as origens dessa coleção não se relaciona com os programas da reforma Francisco Campos, pois os programas de tal reforma só foram publicados em junho desse mesmo ano, a dedicatória no livro do primeiro ano é datada em novembro de 1930 e o terceiro volume, anunciado, encontrava-se no prelo em 1931.

[11] O uso de figuras na descrição e análise das coleções servirá para: (1) ilustrar alguns tópicos tratados em especial; (2) servir como referência para comentar e explorar o texto presente no livro que seja de importância para a análise; (3) preservar as cores, a grafia e as ênfases na apresentação de determinados tópicos em cada coleção. Portanto, a

— 66 —

2. Um homem tinha 25 livros e vendeu *v* livros. Indicar, sob fórma de equação, o numero *x* de livros com que ficou.

3. Um homem possuia *p* livros e vendeu *v*. Com quantos ficou?

Exprimir por meio de equações a dependencia entre os numeros dos seguintes problemas:

4. Um individuo possue *c* cavallos e adquire mais *a*. Fica então com *C* cavallos.

5. Em uma turma de *a* alumnos, ha *m* do sexo masculino e *f* do feminino.

6. Um operario ganha *m* mil réis por dia durante 6 dias e fica com *M* mil réis.

7. Um artigo que custou *c* mil réis é vendido por *v* mil réis com um prejuizo de *p* mil réis.

8. Exprima, por meio de igualdade, que *s* é maior do que *a*; *b* maior do que *a*; *d* é menor do que *c*; *x* é menor do que *m*.

9. A differença entre dois numeros é 95; si o menor é *a*, qual é o maior?

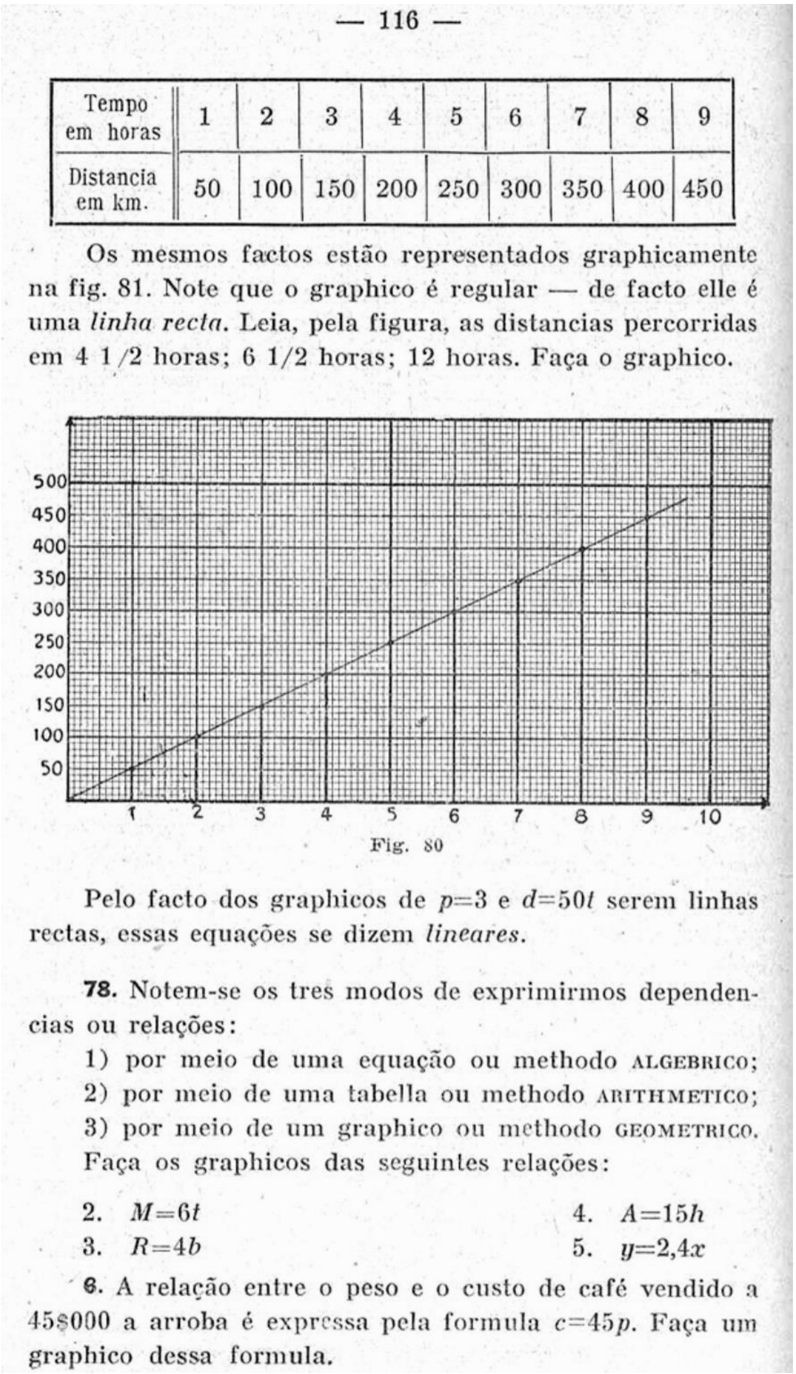
Figura 1: explorando o conceito de função.
Fonte: VALENTE, [2005a].

Para Braga (2006), através das colocações propostas na página 66 do livro *Curso de Matemática Elementar*, Roxo dá o primeiro passo em relação à aplicação da metodologia que explora o desenvolvimento do conceito de função desde as séries iniciais. O mesmo autor ainda ressalta que Euclides Roxo faz referência a Felix Klein no prefácio desse primeiro volume afirmando que a introdução precoce do conceito de função era a essência do moderno movimento de reforma.

Assim como Braga (2006), Dassie (2008) também descreve o primeiro volume da coleção, observando que no sétimo capítulo, denominado *Uso dos gráficos – disposição tabular de dados numéricos*, algumas relações com o plano cartesiano já indicavam a abordagem referente ao conteúdo de funções. O primeiro volume é caracterizado pelo tratamento da informação, articulando dados numéricos, tabelas e gráficos, trazendo a ideia de relações entre grandezas, que fundamentam o trabalho posterior com as funções. Na página 116, ainda no sétimo capítulo, Euclides Roxo apresenta uma tabela e um gráfico de uma função que descreve

leitura dos textos presentes nas figuras é imprescindível para a compreensão dos argumentos procedentes da análise das coleções.

um móvel em velocidade constante e, além disso, reforça que a relação de dependência pode ser exprimida de modo algébrico, aritmético e geométrico, dando a ideia de que esta relação perpassa pelos três ramos, antes disjuntos, da matemática (figura 2).



— 116 —

Tempo em horas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Distancia em km.	50	100	150	200	250	300	350	400	450

Os mesmos factos estão representados graphicamente na fig. 81. Note que o graphico é regular — de facto elle é uma *linha recta*. Leia, pela figura, as distancias percorridas em 4 1/2 horas; 6 1/2 horas; 12 horas. Faça o graphico.

Fig. 80

Pelo facto dos graphicos de $p=3$ e $d=50t$ serem linhas rectas, essas equações se dizem *lineares*.

78. Notem-se os tres modos de exprimirmos dependencias ou relações:

1) por meio de uma equação ou methodo ALGEBRICO;
2) por meio de uma tabella ou methodo ARITHMETICO;
3) por meio de um graphico ou methodo GEOMETRICO.

Faça os graphicos das seguintes relações:

2. $M=6t$
3. $R=4b$
4. $A=15h$
5. $y=2,4x$

6. A relação entre o peso e o custo de café vendido a 45$000 a arroba é expressa pela formula $c=45p$. Faça um graphico dessa formula.

Figura 2: modos de exprimir dependências ou relações.
Fonte: VALENTE, [2005a].

Nota-se que nessa página do livro (figura 2) Euclides Roxo ressalta, escrevendo em caixa alta, os termos “ALGEBRICO”, “ARITHMETICO” e “GEOMETRICO”, o que é um tanto emblemático, pois evidencia que a relação de dependência entre grandezas ou variáveis possibilita unificar as matemáticas. Além disso, Roxo deixa claro que, além desses três métodos (algébrico, aritmético e geométrico) exprimirem uma mesma relação, ou seja, estarem unificados por ela, a referência à álgebra diz respeito à equação, a referência à tabela remete à aritmética e a referência à geometria diz respeito à representação gráfica dessa relação no plano cartesiano.

Qualquer uma das três representações poderia descrever a relação entre duas grandezas ou variáveis, mas Roxo optou por ressaltar a possibilidade de apresentá-las em sequência, como uma tríade que simboliza o caráter unificador do conceito de função. Mais adiante será possível verificar que essa tríade será uma forte herança deixada pelas primeiras representações do conteúdo de funções no ensino secundário.

Como exposto no Novíssimo Programa do Ensino Secundário em relação ao estudo das funções:

> A representação gráfica e a discussão numérica devem acompanhar, constantemente, o estudo das funções e permitir, assim, uma estreita conexão entre os diversos ramos das matemáticas elementares.
> Além disso, isolado ou unido à fórmula, o gráfico ainda desempenha papel notável como instrumento de análise e de generalização, tal a vivacidade e o poder expressivo deste meio de representação, sobretudo, no estudo das propriedades das funções empíricas. Não há perder de vista, porém, em todo o curso que a representação gráfica não é, por si mesma, o objeto, procurado, mas apenas um meio de denominar visualmente a variação das funções.
> Ao lado dele a tabela merece também ser devidamente apreciada. Como recursos indispensáveis à resolução rápida dos problemas da vida prática, é necessário que o estudante perceba serem tabelas, gráficos e fórmulas algébricas representações da mesma espécie de conexão entre quantidades, e verifique a possibilidade de se tomar qualquer desses meios como ponto de partida conforme as circunstâncias (BRASIL, [1931b]).

No segundo volume do *Curso de Matemática Elementar*, no capítulo VIII, na página 137, denominado *Noção de Função – Proporcionalidade* (figura 3), o conceito de função é tratado com exclusividade.

CAPITULO VIII

Noção de Funcção. — Proporcionalidade

86. Noção de dependencia. — A dependencia de uma grandeza em relação a outra é uma das idéas que mais commummente encontramos na vida diaria. Essa dependencia póde ser verificada, observada ou estabelecida de diversos modos.

As grandezas, com que temos de lidar, quer na observação da natureza, quer nos problemas numericos da pratica, não são, na maioria dos casos, invariaveis ou constantes, mas mudam de valor, segundo dadas circumstancias, isto é, são **variaveis**. Essa variação se dá quasi sempre em correspondencia com a variação de uma ou de varias outras grandezas das quaes a grandeza dada *depende*. Assim, o preço de 10 kgs. de assucar depende do preço por kilo, a distancia que um automovel pode percorrer depende, entre outras cousas, do numero de litros de gazolina que leva no deposito; o tempo que um estudante leva para ir á escola depende, além do mais, da distancia que tem a percorrer; a temperatura observada em um logar depende da hora em que se faz a observação.

Figura 3: noção de função.
Fonte: VALENTE, [2005a].

A página seguinte, 138, traz perguntas com o objetivo de tratar intuitivamente da noção de dependência, do tipo: “De que depende o preço de 8 dúzias de ovos”, ou “Um homem precisa fechar um terreno retangular. De que depende o número de tijolos a gastar?”, e logo após, traz o conceito de função através de um exemplo envolvendo as grandezas *tempo* e *temperatura* (figura 4).

87. Funcção. — A experiencia nos ensina que a temperatura, em um determinado logar, modifica-se de um momento para outro, isto é, varia com o tempo, ou, em outras palavras ainda, a grandeza variavel, que é a temperatura, depende do tempo. Ambas as grandezas, tempo e temperatura, modificam-se, mas entre ellas subsiste permanentemente uma relação associativa tal, que a cada instante corresponde uma dada temperatura. Uma tal ligação entre duas grandezas variaveis é o que se chama uma **relação funccional.**

Figura 4: função.
Fonte: VALENTE, [2005a].

Euclides Roxo optou pelo método intuitivo para explorar o conceito de função. Através de perguntas, Roxo intencionava aproximar o conceito de função da realidade do aluno, de modo que ele, aos poucos, se familiarizasse com a relação entre grandezas e que percebesse que aquele conhecimento também fazia parte do dia a dia e poderia partir de um conhecimento prévio pautado em experiências cotidianas, ou seja, que todos já sabem, intuitivamente, um pouco sobre funções.

Euclides Roxo segue as orientações do Novíssimo Programa do Ensino Secundário, que sugere que a apresentação do conceito de função seja explorada, a princípio, de maneira intuitiva. Quanto aos métodos de um modo geral, está exposto no programa que:

> Partindo da intuição viva e concreta a feição lógica crescerá, a pouco e pouco, até atingir, gradualmente, a exposição formal ou por outras palavras, os conhecimentos serão adquiridos, a princípio, pela experimentação e pela percepção sensorial, e, depois, lentamente, pelo raciocínio analítico (BRASIL, [1931b]).

A maneira como Euclides Roxo introduz a noção de dependência, valendo-se da relação de proporcionalidade, corrobora com o desenvolvimento intuitivo do conceito de função por esta ser uma relação direta e simples e também por já ser comum aos alunos.

Dassie (2008) ressalta que no capítulo IX do segundo volume o processo denominado regra de três para a resolução de problemas também é articulado com funções do tipo $y = ax$, da mesma maneira, no capítulo 11, *Problemas do 1º grau a uma incógnita*, a resolução é trabalhada junto ao conceito de função a partir do tratamento gráfico, geométrico e algébrico, mais precisamente, “no capítulo 11, deste segundo volume, os dois primeiros tópicos apresentam particularidades da denominada função linear geral” (p. 165-166).

É possível ver na figura 5, na página 223 do capítulo XI do segundo volume do livro de Roxo, a maneira como é definida a função polinomial do primeiro grau, trazida por muitos livros didáticos, atualmente, como *função afim*. As particularidades dos coeficientes (angular e linear) são comentadas na mesma página, onde é acrescido à função $y = 3x$ a constante 5, sendo essa função expressa através de um gráfico na página seguinte (figura 6).

CAPITULO XI

Problemas do 1° grau a uma incognita. — Discussão. — Generalização

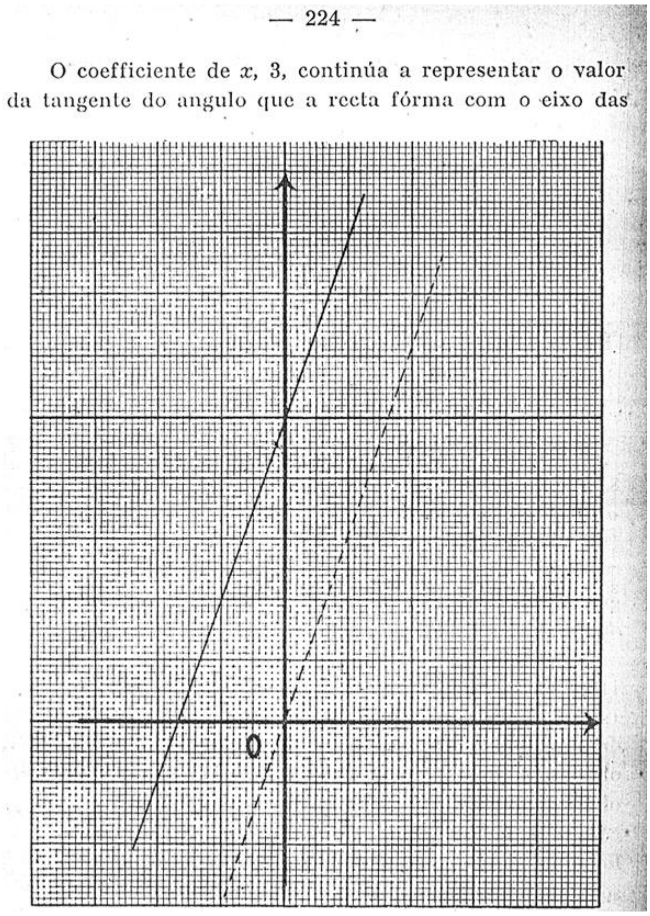
132. A funcção linear geral. — Conforme vimos no § 99, todas as rectas que se podem traçar pelo ponto origem correspondem a todas as funcções proporcionaes (do typo $y = ax$) possiveis.

Que funcções representam, porém, consideradas como graphicos, as rectas que não passam pela origem das coordenadas ?

Tomemos a recta representativa da funcção $y = 3x$ (fig. 89) e desloquemol-a parallelamente a si mesma (conservando a sua direcção) de 5 cm. para cima da origem, isto é, até que a sua intersecção com o eixo das ordenadas fique a 5 cm. da origem e para cima desta; obtemos assim a fig. 96. Todas as ordenadas da recta ficaram desse modo augmentadas de 5; mas todos os valores de funcção tambem ficaram accrescidos de 5, de sorte, que ella passou a ser:

$$y = 3x + 5.$$

Figura 5: problemas do 1º grau com uma incógnita.
Fonte: VALENTE, [2005a].



— 224 —

O coefficiente de *x*, 3, continúa a representar o valor da tangente do angulo que a recta fórma com o eixo das

Figura 6: coeficiente de *x*.
Fonte: VALENTE, [2005a].

Como já mencionado, a introdução precoce do conceito de função no ensino secundário e o trabalho através da noção de funcionalidade, proporcionando a junção das diversas partes da matemática sempre que possível, caracterizavam a modernização do ensino de matemática de acordo com as propostas desencadeadas na Alemanha, por Felix Klein, e, referente aos primeiros dois primeiros volumes do *Curso de Matemática Elementar* de Euclides Roxo, Braga (2006) afirma que no primeiro volume, como mostrado anteriormente, “essa máxima materializa-se ao longo dos capítulos IV, V, VIII e IX, entre outros” (p. 99), e quanto ao segundo volume:

> Os capítulos V, VI e VII apresentam um encadeamento de assuntos executado com muita naturalidade.
> [...] O Capítulo VIII faz uma pausa no encadeamento que vinha ocorrendo ao abrir espaço a uma apresentação mais específica de função. No entanto, verificar-se-á que o entretecimento de assuntos e os elos voltarão a ser estabelecidos nos capítulos seguintes, agora enriquecidos pelas diferentes representações funcionais.
> [...] No capítulo XI, após ter transitado por regra de três, o leitor volta a se deparar com a *função proporcional*.
> [...] O livro prossegue abordando a resolução de sistemas de equações lineares através de processos algébricos e gráficos. A construção de sistemas é feita a partir da interpretação gráfica. Função, como pode se observar, continua onipresente no texto (BRAGA, 2006, p.101-102).

A continuidade da coleção *Curso de Matemática Elementar* foi interrompida, ficando somente com seu primeiro e segundo volumes, segundo Braga (2006, p. 103), "[...] dentre outros fatores, a uma melhor aceitação de outras coleções de cunho mais conservador quanto aos aspectos metodológicos e que também atendiam aos recentes programas instituídos".

A coleção que mais se aproximou da proposta de reforma do ensino secundário foi a do próprio Euclides Roxo, *Curso de Matemática Elementar*, por articular o conceito de função a diferentes conteúdos nos volumes de sua coleção. No entanto, segundo Braga (2006, p. 103) "[...] o sucesso da coleção da dupla Cecil Thiré e J. C. Mello e Souza torna-se inquestionável. O primeiro volume, lançado em 1930, atinge, já em 1934, a 6ª edição".

Euclides Roxo desistiu de sua proposta referente ao *Curso Elementar de Matemática* e interrompeu a escrita dessa coleção no terceiro volume, juntando-se com Cecil Thiré e Mello e Souza, escrevendo como coautor, a partir do terceiro volume, a continuidade da coleção *Matemática*, que passou a se chamar *Curso de Matemática.*

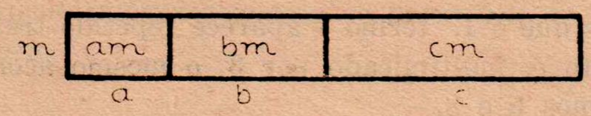
2.1.3 O conceito de funções na coleção *Matemática*, de Cecil Thiré e Mello e Souza

A coleção *Matemática*, em dois primeiros volumes, de autoria da dupla de Cecil Thiré e Mello e Souza, foi editada como alternativa à obra *Curso de Mathematica Elementar* de Euclides Roxo, que era uma das poucas obras que seguia as reformas do Colégio Pedro II. A obra de Cecil Thiré e Mello e Souza passaria a atender ao programa do Colégio Pedro II somente a partir de 1932. (VALENTE, [2005a]).

De posse do livro *Matemática*, 1º ano do ensino secundário, no exemplar do ano de 1936, em sua 9ª edição[12], verifica-se, na página XV, o prefácio da 2º edição, datado de 1932, indicando certas mudanças em relação à primeira edição, possivelmente para a adequação ao programa do Colégio Pedro II, conforme ressaltado (VALENTE, [2005a]). A alteração que chama a atenção, além de "modificar ligeiramente a seriação de alguns capítulos", foi a inclusão, no capítulo II, das "[...] primeiras noções sobre a representação das quantidades por meio de letras, afim de habituar, desde logo, o aluno com o cálculo literal e iniciá-lo na generalização das diversas transformações elementares" (THIRÉ; SOUZA, 1936, p. XV), pois essas primeiras noções servirão de base para o tratamento algébrico do conceito de função, abordadas nesta coleção desde o primeiro volume.

[12] As edições lançadas após o ano de 1932, já sob regência da Reforma Campos, tiveram, a partir de então, como conteúdo curricular nas primeiras séries ginasiais o conceito de função. No prefácio da segunda edição, presente no primeiro volume, há a indicação das poucas alterações decorrentes da reforma.

No segundo capítulo do livro (o índice do primeiro volume consta no ANEXO A), então intitulado de *Adição*, constam subcapítulos (p. 32-33) que tratam especificamente de grandezas variáveis e constantes, indicando a convenção sobre o uso de letras ora como variáveis, ora como incógnita. É dada atenção, também, ao uso de índices (linhas) ou acentos para representar uma analogia entre quantidades de mesma espécie. O uso de letras para representar variáveis apresenta-se, efetivamente, nos capítulos referentes às quatro operações, potencializando a possibilidade de se fazer a comunicação entre as diferentes matemáticas, como, por exemplo, na *explicação gráfica* da propriedade distributiva, na *multiplicação de um número por uma soma*, apresentando, primeiramente, um retângulo como medidas definidas por incógnitas, ou variáveis (figura 7).



14 — Explicação gráfica.

O produto de uma soma indicada por um número pode ser facilmente explicado:

Consideremos um retângulo de altura m e de base igual a

$$a + b + c.$$

Figura 7: explicação gráfica.
Fonte: THIRÉ; SOUZA, 1936, p.54.

Na sequência, o cálculo da área da figura em função da medida de seus lados representa, algebricamente, a propriedade distributiva (figura 8).

A área dêsse retângulo será dada, como sabemos, pelo produto da base $a + b + c$ pela altura m:

$$(a + b + c) \times m.$$

O retângulo, porém, como a figura nos mostra, pode ser decomposto em três retângulos: o primeiro de área am, o segundo de área bm e o terceiro de área cm; logo a área do retângulo dado será igual à soma

$$am + bm + cm.$$

Como a área do retângulo dado é

$$(a + b + c) \times m$$

concluimos a seguinte igualdade:

$$(a + b + c) \times m = am + bm + cm$$

Figura 8: explicação gráfica, conclusão.
Fonte: THIRÉ; SOUZA, 1936, p.55.

O livro faz uso frequente da álgebra para exprimir regularizações e padrões. Na página 150, por exemplo, no capítulo intitulado *Frações Ordinárias*, o produto de uma fração por um número inteiro é representado por $a \times \frac{m}{n} = \frac{am}{n}$. Ou ainda, no vigésimo capítulo, intitulado *Representação das quantidades por meio de letras*. *Expressões algébricas*, é definido o termo "fórmula", como "[...] uma igualdade que nos dá, sob forma abreviada, os cálculos que devemos efetuar sobre os dados de um problema para obtermos o valor da incógnita" (THIRÉ; SOUZA, 1936, p.307). No vigésimo primeiro capítulo, *Equações do 1º grau*, a resolução de uma equação é definida, inicialmente, por sua forma $ax = b$ e sua resolução como $x = \frac{b}{a}$ (figura 9).

24 — Resolução da equação $ax = b$.

Seja resolver a equação

$$ax = b$$

na qual a e b representam, conforme uma convenção bastante conhecida, números dados. Assim a equação

$$7x = 12$$

é da fórma $ax = b$.

Dividamos por a ambos os membros dessa equação

$$ax = b$$

Temos:

$$\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$$

ou, simplificando o fator a no 1.º membro da equação:

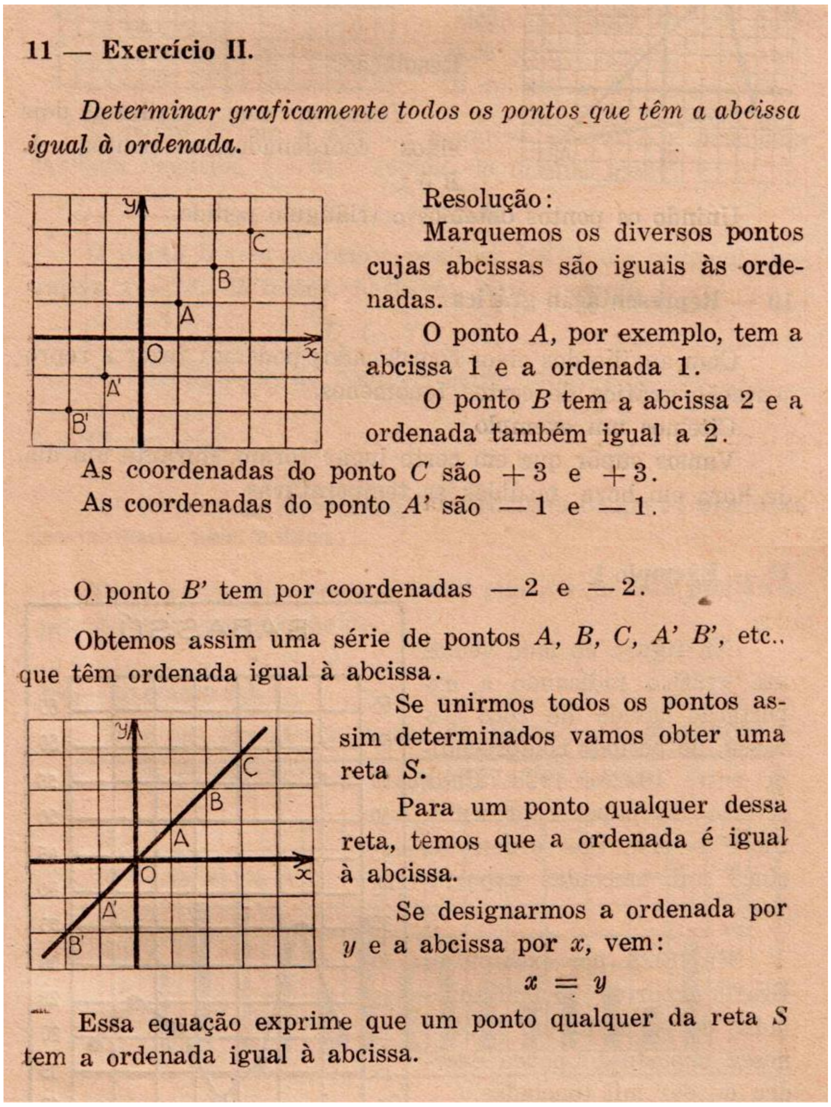
$$x = \frac{b}{a}$$

Fica assim resolvida a equação.

Figura 9: resolução da equação *ax* = *b*.
Fonte: THIRÉ; SOUZA, 1936, p.335.

O primeiro volume da coleção Matemática de Cecil Thiré e Mello e Souza não faz menção ao conceito de função em momento algum, atendo-se na exploração de regularidades e padronizações, como, por exemplo, a generalização do algoritmo de resolução de uma equação do 1º grau como uma incógnita do tipo *ax* = *b*, visto na figura 9.

Quanto à representação gráfica de regularidades e padronizações, ocorre o mesmo. Sem remeter ao termo “função”, a *função identidade* ($x = y$) é definida pontualmente através de um exercício no vigésimo terceiro capítulo, intitulado *Eixos coordenados*. *Gráficos*. (figura 10).



11 — Exercício II.

Determinar graficamente todos os pontos que têm a abcissa igual à ordenada.

Resolução:

Marquemos os diversos pontos cujas abcissas são iguais às ordenadas.

O ponto A, por exemplo, tem a abcissa 1 e a ordenada 1.

O ponto B tem a abcissa 2 e a ordenada também igual a 2.

As coordenadas do ponto C são $+3$ e $+3$.

As coordenadas do ponto A' são -1 e -1.

O ponto B' tem por coordenadas -2 e -2.

Obtemos assim uma série de pontos A, B, C, A' B', etc., que têm ordenada igual à abcissa.

Se unirmos todos os pontos assim determinados vamos obter uma reta S.

Para um ponto qualquer dessa reta, temos que a ordenada é igual à abcissa.

Se designarmos a ordenada por y e a abcissa por x, vem:

$$x = y$$

Essa equação exprime que um ponto qualquer da reta S tem a ordenada igual à abcissa.

Figura 10: *x = y*.
Fonte: THIRÉ; SOUZA, 1936, p. 348-349.

Mesmo que o tratamento algébrico tenha sido desenvolvido durante boa parte do 1º volume, relacionado, vez que outra, à aritmética e à geometria, aplicado à busca por regularidades – poucas vezes em uma relação explícita de interdependência entre duas grandezas –, o livro não apresenta o conceito de função como axial.

No 2º volume da coleção, ainda intitulado de *Matemática* – o exemplar analisado é de 1935, em sua 4ª edição – os primeiros cinco capítulos são dedicados à geometria, dentre outros mais no decorrer do volume. O termo função aparece pela primeira vez, mesmo antes de ser definido, no nono capítulo, *Medida indireta das distâncias. Funções trigonométricas.* (o índice do segundo volume consta no ANEXO B). Após provar que as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) de um ângulo são números constantes, no mesmo capítulo está indicado que: “O seno, o cosseno e a tangente são denominadas funções trigonométricas ou relações trigonométricas” (THIRÉ; SOUZA, 1935, p. 142).

É nesse volume que a coleção reserva um capítulo para tratar exclusivamente de funções, o décimo oitavo capítulo, intitulado de *Variável e função – Representação gráfica das funções*. O capítulo inicia retomando os conceitos de constante e variável através de exemplos vinculados a fenômenos reais, como as constantes: os quilogramas de um livro ou a relação entre circunferência e diâmetro; ou variáveis: o peso de uma criança ou a riqueza de um país.

É reforçada, também, a representação das constantes, estas pelas primeiras letras do alfabeto, e das variáveis, representadas pelas últimas letras do alfabeto, relações estas dadas por convenção, segundo os autores. Em seguida é apresentado o conceito de variável independente e variável subordinada (dependente), tratando desta relação de maneira puramente algébrica, sem relação com quaisquer grandezas reais, apenas exemplificando, através de uma expressão preestabelecida, a relação entre valores numéricos (figura 11).

3 — Variável independente. Variável subordinada.

Consideremos a expressão:

$$y = 6x - 5$$

na qual x e y, como sabemos, representam variáveis.

Vamos atribuir a x diferentes valores. Façamos, por exemplo, x igual a 2, 3, 4, 5, etc.

Resulta:

Para $x = 2$ $\quad y = 6 \times 2 - 5 = 12 - 5 = 7$
Para $x = 3$ $\quad y = 6 \times 3 - 5 = 18 - 5 = 13$
Para $x = 4$ $\quad y = 6 \times 4 - 5 = 24 - 5 = 19$
Para $x = 5$ $\quad y = 6 \times 5 - 5 = 30 - 5 = 25$

Os valores de x (2, 3, 4, 5...) são variáveis, e o mesmo acontece, com os valores de y (7, 13, 19, 25); o valor de y, porém, resulta do valor que atribuirmos à variavel x. Dizemos, nêsse caso, que a variável x é *independente* e que a variável y é *subordinada.* (*)

A *variável independente* é aquela a que atribuimos um valor qualquer; a *variável subordinada* é aquela cujo valor resulta do valor atribuido à variavel independente.

Figura 11: variável independente e variável subordinada.
Fonte: THIRÉ; SOUZA, 1935, p. 308.

Na nota de rodapé da mesma página há a informação de que alguns autores denominam de *dependente* a variável subordinada.

A definição de função é apresentada partindo-se uma equação:

> Considere a seguinte equação: $y = 2x + 5$.
> Se fizermos, por exemplo, $x = 4$ vamos obter $y = 13$.

> Vemos que para cada valor de x resulta um valor determinado de y. Dizemos, nesse caso, que y é uma *função* de x.
> Se duas quantidades são ligadas de tal modo que sendo dado o valor de uma delas fica determinado o valor da outra, dizemos que uma dessas quantidades é função da outra (THIRÉ; SOUZA, 1935, p. 310).

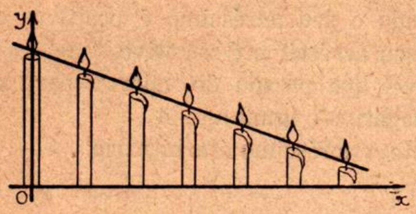
Seguida de exemplos como: “a distância percorrida por um móvel (velocidade constante) é função do tempo”; “o volume do cubo é função da aresta”, e complementado com a afirmação de que “as funções aparecem, na vida corrente, sob uma multiplicidade de aspectos” (p. 310). Na mesma página, os autores fazem referência aos exemplos dados anteriormente como *relações funcionais*.

E, ao tratar da notação de uma função, os autores valem-se do símbolo $f(x)$, “f de x”, ou melhor, $y = f(x)$, “y é igual à função de x”. E, à lei de uma função, os autores referem-se como *forma*, indicando a relação “cubo é função da aresta” primeiramente por $v = f(x)$ e, de posse da “forma” da função $f(x)$, $v = x^3$. Ou ainda, para definir a área de um retângulo em função de sua base (u) e altura (y): $F(u, x) = u \cdot y$ (p. 312).

Ao tratar especificamente da *forma* de uma função, esta é classificada como *função implícita* e *função explícita*, em que uma função representada na forma como no exemplo dado pelos autores, $2y - 8x + 5 = 0$, ou em qualquer forma em que a variável y não esteja “isolada”, está em sua forma implícita, sendo possível transformá-la, isolando-se o y, em uma função explícita. É dada atenção, também, ao “acréscimo” de uma função, ou seja, a variação de y em relação à variação de x (p. 313-315).

O crescimento e decrescimento de funções são representados principalmente por tabelas e gráficos (figura 12).

O tempo em que é feito um certo trabalho é função decrescente do número de operários utilisados nêsse trabalho.



A altura de uma vela que arde é função decrescente do tempo; quando o tempo aumenta a vela diminue.

Uma função dada pode ser crescente ou decrescente conforme os valores atribuidos à variavel (*).

16 — Exercício IV.

Dada a função

$$2x^2 - 11x + 56$$

determinar a sua variação quando atribuimos a x *os seguintes valores*: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Resolução:

Substituimos na função dada x por seus valores. Obtemos os seguintes resultados:

Valores de x	0	1	2	3	4	5	6
Valores da funsão	56	47	42	41	44	51	62

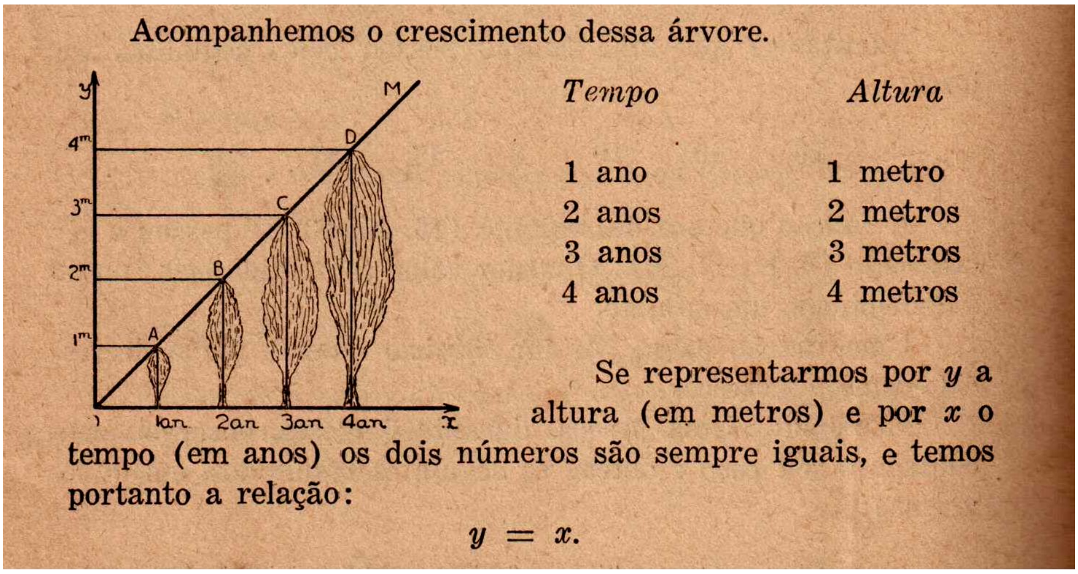
Podemos notar que a função era a princípio decrescente e passou depois a ser crescente.

Figura 12: crescimento e decrescimento de uma função.
Fonte: THIRÉ; SOUZA, 1935, p. 316.

Além de se valer de exemplos relacionados às grandezas comuns do dia a dia (*tempo x número de operários* e *tempo x altura de uma vela acesa*), como pôde ser visto, no exercício IV, figura 12, os autores exploraram, de maneira intuitiva, o crescimento e decrescimento em uma função quadrática. Além de trazer elementos para a representação de uma função e a compreensão de seu crescimento e decrescimento, nesta página há uma nota de rodapé indicada por um asterisco que faz menção, pela primeira vez na coleção, à teoria dos conjuntos e à necessidade desse conteúdo para melhor definir o conceito de função, como reproduzido a seguir:

> Abordaremos aqui o estudo das variações de uma função de um ponto de vista muito elementar e intuitivo. É evidente que esse estudo só pode ser feito, de um modo menos incompleto, à luz da teoria das derivadas. Evitando, portanto, entrar em considerações sobre *domínio* de uma variável, na impossibilidade de definir certos conceitos que iriam exigir algumas noções mais precisas sobre a teoria dos conjuntos (THIRÉ; SOUZA, 1935, p. 316).

Após ser definida a *função linear* como a mais simples das funções, sendo esta "um polinômio de 1º grau em *x*", representada por $y = ax + b$ (p. 318), é dada atenção especial à "representação gráfica de uma função" (figura 13).



Acompanhemos o crescimento dessa árvore.

Tempo	*Altura*
1 ano	1 metro
2 anos	2 metros
3 anos	3 metros
4 anos	4 metros

Se representarmos por y a altura (em metros) e por x o tempo (em anos) os dois números são sempre iguais, e temos portanto a relação:

$$y = x.$$

Figura 13: representação gráfica de uma função.
Fonte: THIRÉ; SOUZA, 1935, p. 318.

No exemplo dado, além explorar grandezas de simples compreensão (tempo x altura), a representação expressa um função elementar, tratada por muitos autores, em livros didáticos, como *função identidade*. Em seguida os autores descrevem os passos para se determinar o gráfico de uma função linear (figura 14).

22 — . Representação gráfica de uma função linear.

Seja

$$y = 2x + 1$$

uma função linear.

Vamos supor que queremos determinar o gráfico dessa função.

Tracemos dois eixos coordenados Ox e Oy.

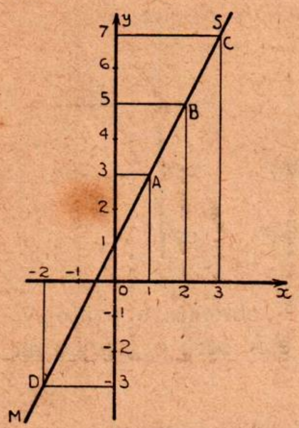
Podemos atribuir à variável independente x diferentes valores: 0, 1, 2, . . ., etc.

Façamos $x = 1$, temos $y = 3$.

Êsse valor dado x (abcissa) e o valor correspondente obtido para y (ordenada) são as coordenadas de um ponto A.

Façamos em seguida $x = 2$ obtemos $y = 5$.

Determinamos um segundo ponto B cujas coordenadas são $x = 2$ e $y = 5$.



Para $x = 3$, teriamos $y = 7$.

Esses valores serão as coordenadas de um terceiro ponto C.

Vamos atribuir a x um valor negativo qualquer. Façamos, por exemplo, $x = -2$:

$$y = 2\ (-2) + 1.$$

Efetuando, vem:

$$y = -3.$$

Com as coordenadas $x = -2$ e $y = -3$, marcamos o ponto D.

Os pontos A, B, C, D assim obtidos indicam que a reta MS será a representação gráfica da função linear dada.

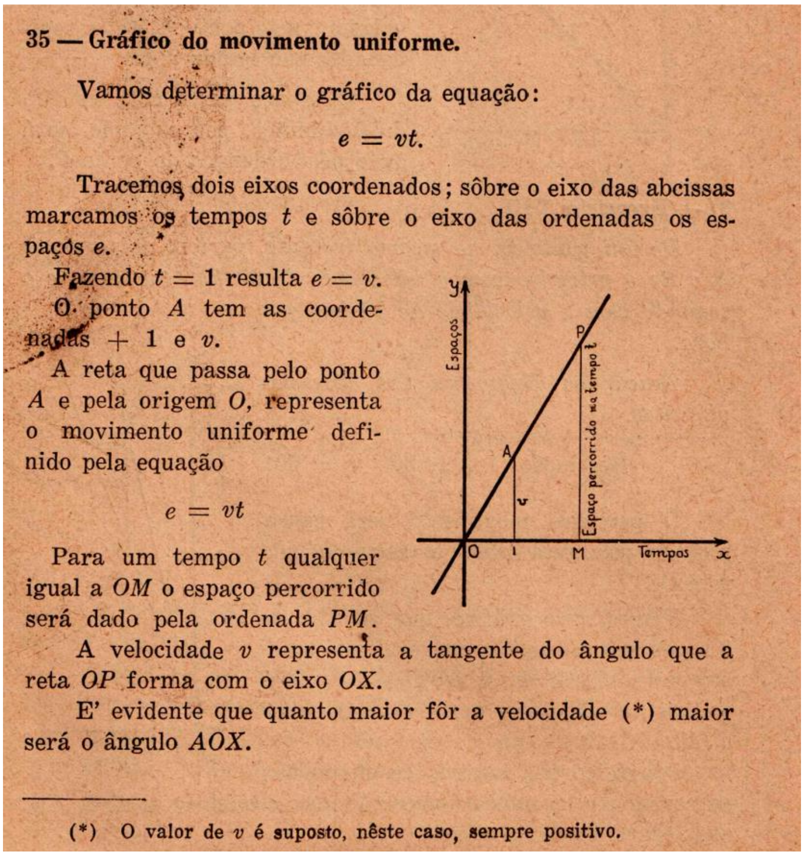
Figura 14: representação gráfica de uma função linear.
Fonte: THIRÉ; SOUZA, 1935, p. 320-321.

Apesar da nota referente à teoria dos conjuntos, no desenvolvimento do conteúdo de funções presente no livro não é feita referência a qualquer tipo de conjunto numérico ao qual pertençam os valores de *x* e *y*, ou seja, os valores de *x* (das abscissas) ou de *y* (das coordenadas) não estão associados ou definidos em um conjunto domínio e/ou imagem ou qualquer relação a algum conjunto numérico (naturais, inteiros, racionais, reais), mesmo que o gráfico represente uma reta contínua, que deixa a entender como domínio qualquer número real.

Apesar de ter sido apresentado apenas números inteiros para o domínio (sem que os autores tenham se referido ao termo domínio), a linha contínua do gráfico da função linear (reta) indica que há valores de y atribuídos a valores de x compreendidos entre 0 e 1, entre 1 e 2, por exemplo (que seriam, de um modo geral, números racionais).

Na sequência, o livro trata do “gráfico de equações” (agora não mais função) do tipo $y = ax$ e $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + 1$, ressaltando que, para a segunda “o parâmetro m é a distância que vai da origem até o ponto em que a reta corta o eixo x e o parâmetro n é a distância que vai da origem até o ponto em que a reta corta eixo y” e que o coeficiente a em $y = ax$ é tido como coeficiente angular. (THIRÉ; SOUZA, 1935, p. 323).

Os autores ainda exploram uma aplicação da função linear na física (função horária), reservando um subcapítulo à “equação do movimento uniforme” (novamente sem se referir à função, mas sim à equação), deduzindo a lei do que seria uma função horária (ou equação, ou fórmula) através de um exemplo sobre determinado trajeto percorrido por um móvel em velocidade constante (uniforme), onde o espaço percorrido “e”, em velocidade constante “v” (no caso, uma constante) é uma função do tempo t: $e = vt$ (figura 15).



35 — Gráfico do movimento uniforme.

Vamos determinar o gráfico da equação:

$$e = vt.$$

Tracemos dois eixos coordenados; sôbre o eixo das abcissas marcamos os tempos t e sôbre o eixo das ordenadas os espaços e.

Fazendo $t = 1$ resulta $e = v$.

O ponto A tem as coordenadas $+ 1$ e v.

A reta que passa pelo ponto A e pela origem O, representa o movimento uniforme definido pela equação

$$e = vt$$

Para um tempo t qualquer igual a OM o espaço percorrido será dado pela ordenada PM.

A velocidade v representa a tangente do ângulo que a reta OP forma com o eixo OX.

E' evidente que quanto maior fôr a velocidade (*) maior será o ângulo AOX.

(*) O valor de v é suposto, nêste caso, sempre positivo.

Figura 15: representação gráfica de uma função linear.
Fonte: THIRÉ; SOUZA, 1935, p. 329.

A última exploração feita no capítulo referente à função matemática é a inclusão do estudo da equação $y = \frac{a}{x}$ e sua representação gráfica. Os autores fazem questão de frisar em nota de rodapé que o estudo desta equação foi incluído neste volume apenas para atender a uma exigência do programa.

O 3º volume da coleção, já com a coautoria de Euclides Roxo e intitulada *Curso de Matemática*, apresenta, no capítulo VI, o estudo das funções $y = x^m$, $y = 1/x^m$ e $y = \sqrt{x}$. Nesse mesmo volume também são abordadas a "interpretação gráfica da resolução de um sistema linear de duas equações com duas incógnitas" e a "resolução analítica e gráfica" de uma equação do 2º grau. No 4º e no 5º volumes, o conteúdo de funções é explorado de maneira que se enquadraria, atualmente, nos livros didáticos de ensino médio, particularmente da 1ª série. No 4º volume são abordadas as funções exponenciais e logarítmicas e no 5º volume os autores apresentam os fundamentos do cálculo infinitesimal.

As críticas, tanto à proposta da reforma iniciada por Euclides Roxo quanto ao conteúdo de seus livros, percorreram toda a década de 1930, o que desencadeou uma disputa por ideais e interesses entre o próprio Euclides Roxo e representantes do exército e da Igreja, culminando em 1942, diante de uma nova reforma curricular, na Reforma Capanema.

Segundo Valente (2005b), após Roxo ter publicado a sua obra *Curso Elementar de Matemática*, tantos outros autores, entre eles, Jacomo Stávale, Cecil Thiré, Mello e Souza, Agricola Bethlem, Algacyr Maeder, publicaram livros didáticos de matemática, todos mencionando explicitamente em suas obras o fato de estarem em consonância com a Reforma Francisco Campos, sendo que esses mesmos autores e outros mais tiveram que reeditar seus livros didáticos sob a vigência da Reforma Gustavo Capanema, após 1942.

Ainda sobre a coleção *Curso de Matemática*, de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza, é possível perceber o efeito das críticas impostas à Reforma Campos no que diz respeito à matemática no ensino secundário e à organização dos conteúdos, em especial ao conteúdo de funções, que estava presente em praticamente todas as séries, como visto.

De posse do 3º volume da coleção Curso de Matemática, já do ano de 1941, na sua quarta edição, no cerne da Reforma Capanema, foi possível constatar que o capítulo referente ao conteúdo de funções foi completamente removido, sendo essa mudança verificada comparando-se o índice dessa edição ao da terceira edição, do ano de 1936. Esse fato indica, também, a subordinação dos autores em relação à nova normatização que tomava corpo no início da década de 1940, levando-os a adequar sua coleção às novas tendências para não perder espaço no mercado de livros didáticos.

2.2 O CONTEÚDO DE FUNÇÕES APÓS A REFORMA CAPANEMA

A reforma Capanema é marcada por um conjunto de iniciativas responsáveis por institucionalizar políticas reclamadas nas décadas anteriores. Após Gustavo Capanema ter assumido o Ministério da Educação e Saúde, em 1934, deu-se início a diversos trabalhos que objetivavam "nacionalizar o ensino", como a reforma do ensino secundário, em 1942, a reforma universitária, o estabelecimento de um padrão nacional de organização do ensino superior e a criação do Sistema de Ensino Profissional (BOMENY, 2001, p. 52).

Desde o início de seu mandato, Gustavo Capanema mostrou-se preocupado, acima de tudo, com a educação do país, e no ano de 1936 teve a iniciativa de distribuir um questionário intitulado *Plano Nacional de Educação: questionário para um inquérito*, que tinha como objetivo "primordial" recolher informações e estudos para a elaboração do Plano Nacional de Educação. O questionário trazia desde questões referentes ao próprio significado do ensino secundário no Brasil até questões mais técnicas, como os horários e locais adequados ao ensino. Diversas manifestações acerca do questionário ocorreram por meio de publicações em jornais e revistas da época, botando em discussão a estrutura do Plano Nacional de Educação. (DASSIE, 2001, p. 35).

Em 1937, Gustavo Capanema enviou a Vargas quinhentos e quatro artigos referentes ao Plano Nacional de Educação que compunham um documento único destinado à aprovação na sua íntegra, com o prazo de validade de uma década. Como afirma Dassie (2001, p.40), "os 504 artigos do Plano Nacional de Educação eram dispostos em 6 partes: Normas gerais, Institutos educativos, Do regime escolar, Do ensino livre, Dos recursos Financeiros e Das disposições gerais e transitórias".

Junto ao decreto de lei nº 4.244, de 4 de abril de 1942, que reestruturou as leis orgânicas do ensino secundário, como visto anteriormente, no capítulo III, intitulado *Dos Programas das Disciplinas*, Art. 18, dá-se abertura à organização dos programas de ensino:

> Os programas das disciplinas serão simples, claros e flexíveis, devendo indicar, para cada uma delas, o sumário da matéria e as diretrizes essenciais. Parágrafo único. Os programas de que trata o presente artigo serão sempre organizados por uma comissão geral ou por comissões especiais, designadas pelo Ministro da Educação, que os expedirá (BRASIL, [1942a]).

Entre o inquérito de Capanema e a homologação da Lei Orgânica, juntamente à abertura da portaria para instituir uma comissão geral para organizar os programas, Euclides Roxo teve a oportunidade de consolidar suas colocações acerca dos programas de matemática para o ensino secundário.

Entre maio e agosto de 1937, a Associação Brasileira de Educação (ABE) promoveu uma série de conferências, onde Euclides Roxo ficou responsável pela conferência intitulada *A Matemática e o Curso Secundário*. Nessa conferência, Euclides Roxo apresentou suas ideias sobre o ensino da matemática referentes ao ensino secundário, defendidas desde 1928 e posteriormente implantadas na Reforma Francisco Campos, apresentando mais uma vez a principal diretriz do ensino da matemática na escola secundária, segundo ele: “o desenvolvimento da matéria como um todo homogêneo, em torno da ideia de função”. Em 1937, Euclides Roxo publicou a obra *A matemática na educação secundária* expondo de forma mais clara o conteúdo dos muitos artigos por ele publicados e da conferência da ABE (DASSIE, 2001, p.43-48).

Com ideias mais sólidas a respeito dos fundamentos de seu programa, Euclides Roxo participou da comissão presidida por Gustavo Capanema para a elaboração dos programas de ensino. Por ter uma postura em destaque, inicialmente como diretor do Colégio Pedro II e, posteriormente, presidente encarregado de elaborar os programas de matemática na Reforma Campos, Euclides Roxo sempre foi alvo de críticas feitas por outros professores e estudiosos envolvidos com a educação.

No cerne da Reforma Campos, Joaquim Inácio de Almeida Lisboa, catedrático do Colégio Pedro II e ex-professor de Roxo, e o próprio Euclides Roxo teceram um árduo debate sobre o atual ensino de matemática por meio de artigos, onde o tema principal era o programa recém-aprovado para o ensino secundário e os livros recém-publicados por Roxo que atendiam a esse programa. Almeida Lisboa afirmava, de antemão, que não havia colaborado de maneira alguma com os atuais programas de matemática, posicionando-se contra as ideias de Roxo. Os debates passaram, em certos momentos, de discussões a respeito das concepções do ensino da matemática para apontamentos de Almeida Lisboa a erros nos livros editados por Roxo e até mesmo discussões de cunho pessoal (CARVALHO, 2004, 125-132).

Ao contrário dos debates por meio de artigos e publicações em jornais que possibilitaram identificar as diferentes posições sobre o ideário do ensino de matemática, segundo Carvalho (2004, p. 137-142), na Reforma Capanema, a atuação de Euclides Roxo foi abundantemente documentada pelo Arquivo Gustavo Capanema da Fundação Getúlio Vargas, no Rio de Janeiro, que guarda uma pasta dedicada exclusivamente a essa reforma, contendo cartas de Euclides Roxo, de Arlindo Vieira e de outros professores dirigidas a Capanema, além de outros documentos que possibilitam compreender a evolução do programa de matemática para o ensino secundário desde as primeiras colocações de Euclides Roxo a Capanema até sua aprovação.

Dassie (2001, p. 87-91), ao recorrer às cartas e documentos referentes à constituição do programa de matemática para o ensino secundário, salienta que o programa sugerido por Euclides Roxo ao ministro Capanema tem diferenças marcantes entre aquele implantado na Reforma Campos. E que essas diferenças são recorrentes nos debates entre Euclides Roxo e alguns professores antes mesmo da constituição da comissão responsável pela elaboração dos programas do curso ginasial, instituída pela Portaria Ministerial nº 101, de 27 de abril de 1942. Isauro Reguera, representando os militares, através de um ofício enviado a Gustavo Capanema, defendia que a seriação das partes da matemática elementar (aritmética, álgebra e geometria) deveriam ser lecionadas separadamente, e em anos diferentes, desde o início do ensino secundário, sendo aritmética prática nas duas primeiras séries e álgebra e geometria tanto na 3ª quanto na 4ª série.

O mesmo autor ainda afirma que, com uma posição contrária a respeito do programa de matemática proposto por Euclides Roxo, o padre Arlindo Vieira, representante da Igreja Católica, influenciou diretamente na constituição do novo programa de matemática para o ensino secundário, defendendo, também, a seriação das partes da matemática elementar, criticando a "confusão dos atuais programas". Arlindo Vieira acreditava que os atuais programas de matemática para o ensino secundário deveriam, a exemplo da França, abordar no 1º e 2º anos apenas aritmética, e no 3º e 4º, "elementos de geometria e álgebra com o aperfeiçoamento da aritmética". Deixando para o ginásio "apenas geometria plana e álgebra até equações do 1º grau inclusive". Quanto aos programas de matemática e de ciências físico-naturais, Arlindo Vieira apontava que esses programas, como estavam previstos para o ensino secundário atualmente, excediam, em conteúdo, os programas de países europeus.

De um modo geral, o programa educacional do país suscitou muitas escolhas e abdicações, como a remoção ou a reorganização de determinados conteúdos no currículo da disciplina, pois muitos eram atores interessados nesse programa, e a Igreja, em particular, pressionou intensamente todo o processo de constituição da reforma. De acordo com Bomeny (2001, p. 49), "a gestão de Gustavo Capanema no Ministério da Educação e Saúde (1934-45) teve que dialogar e negociar com as lideranças católicas ao longo de todo o período de atuação ministerial".

Segundo Dassie (2001, p. 91-92), no dia 20 de maio de 1942, Euclides Roxo enviou uma carta a Gustavo Capanema com uma proposta para os programas de matemática do curso ginasial, no entanto, nesse novo programa Euclides Roxo, embora insista em considerar a matemática como um “todo harmônico”, ressalta a importância de acentuar, “de modo claro e preciso”, os pontos de vista aritméticos, algébricos e geométricos. Mas o conceito de função, apresentado inicialmente de modo intuitivo, continua sendo, para Roxo, a ideia axial do ensino, dando unidade à matéria e estabelecendo a “estrita conexão entre as diversas modalidades do pensamento matemático”.

Antes da oficialização do programa de matemática para o ensino, algumas cópias foram encaminhas, pelo próprio ministro, para representantes da Igreja e do exército. E foi o padre Arlindo Vieira, apoiado por outros dois padres, Achotegui e Chabassus, e pelo representante do exército Azevedo Amaral, quem fez as maiores reivindicações, através de uma carta a Gustavo Capanema, sobre o programa proposto por Roxo. Arlindo Vieira sugere que alguns conteúdos do programa sejam remanejados de uma série para outra e que determinados pontos de algumas unidades, em específico, sejam reavaliados como componentes do programa, mas o único item que o padre Arlindo Vieira pede para ser completamente excluído do programa é a *noção de variável e função*, contido na unidade VI da 3ª série, alegando a impossibilidade de crianças de 13 e 14 anos apreenderem tais noções (DASSIE, 2001, p. 96-97).

De posse das críticas sobre o seu programa, Euclides Roxo rebateu principalmente as alterações propostas pelo padre Arlindo Vieira, também por carta a Gustavo Capanema, pois o exército estava de acordo com o programa de um modo geral, apenas ressaltando sua posição a favor de manter certa separação entre os ramos da matemática, mas sem fazer menção alguma sobre o tema *função*. No entanto, Gustavo Capanema acatou as sugestões do padre Arlindo Vieira e no dia 11 de junho de 1942, por decisão ministerial, o conceito de função não faria parte das séries iniciais do ensino secundário (VALENTE, 2002, p. 19-20), ficando, de acordo com a nova legislação e o novo programa, fora do curso ginasial.

Segundo Dassie (2001, p. 106), os documentos referentes à reforma, em especial as cartas entre Euclides Roxo e padre Arlindo Vieira ao ministro, mostraram que em nenhum momento Gustavo Capanema levou em consideração as reivindicações feitas por Euclides Roxo, ou mesmo pelo representante do exército Azevedo Amaral, porém, as alterações propostas por Arlindo Vieira, remetidas a Capanema na última carta, foram aceitas pelo ministro que, tão logo, expediu o programa. No programa de matemática para o curso ginasial expedido por Gustavo Capanema não há qualquer referência ao conteúdo de funções, ficando a critério, como será visto, do professor ou autor do livro didático apresentá-lo em nível ginasial, pois dentro dos conteúdos dispostos na Unidade I desse programa estão presentes assuntos que, anteriormente estavam associados ao conteúdo de funções, mas que agora aparecem sem referência a esse conteúdo:

Quarta Série

Álgebra

> Unidade I. Equações e desigualdades do 1º grau: 1. Coordenadas cartesianas no plano; representações gráficas. 2. Resolução e discussão de um sistema de duas equações com duas incógnitas. 3. Resolução gráfica de um sistema de duas equações com duas incógnitas; interpretação gráfica da discussão. 4. Resolução de desigualdades do 1º grau com uma ou duas incógnitas. 5. Problemas do 1º grau: fases da resolução de um problema; generalização; discussão das soluções.
> Unidade II. Números irracionais: 1. Grandezas incomensuráveis; noção de número irracional, operações. 2. Raiz n-ésima de um número; radicais; valor aritmético de um radical. 3. Cálculo aritmético dos radicais. 4. Frações irracionais; casos simples de racionalização de denominadores.
> Unidade III. Equações do 2º grau: 1. Existência das raízes no campo real; resolução. 2. Relações entre os coeficientes e as raízes; sinal das raízes. 3. Composição da equação dadas as raízes; aplicação a sistemas simples do 2º grau. 4. Problemas de 2º grau (BRASIL, [1942b]).

Nota-se, então, que o termo "função" não é mencionado na Unidade I, e de acordo com Braga (2006, p. 140, grifos do autor), "[...] por ocasião da elaboração desse programa, houve um extremado cuidado em não se empregar a palavra *função* ao tratar de conteúdos do ginasial", ainda de acordo com o autor, o termo *função* só apareceria no curso clássico.

Braga (2006), ao analisar algumas coleções[13] editadas no âmbito da Reforma Campos, afirma que os capítulos sobre funções e os poucos exercícios presentes no final dos livros do 1º e 2º anos dessas coleções são oficialmente descartados com o advento da Reforma Capanema, e a abordagem funcional presente no 3º, 4º e 5º anos ficou reduzida a uma pequena parte na quarta série ginasial, pois o restante foi contemplado no clássico ou científico, como mostra com mais apreço a análise a seguir de uma dessas coleções.

2.2.1 O conceito de funções na coleção *Matemática: Ginasial*, de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza

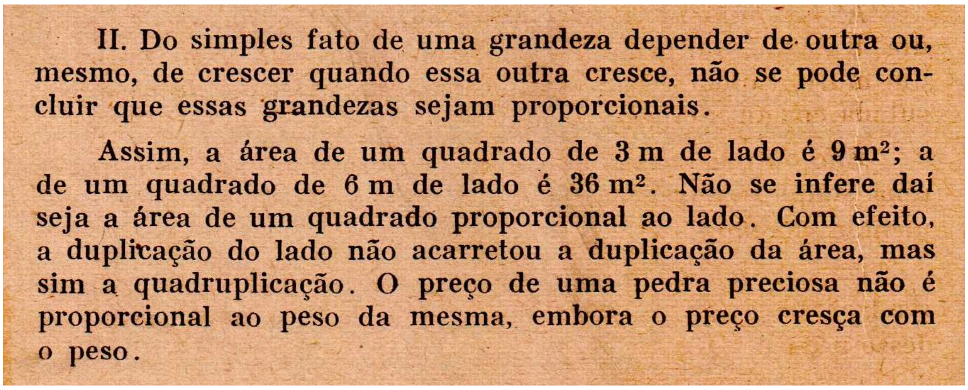
Esses mesmos autores e outros mais reescreveram suas obras didáticas a partir de 1942, com a vigência da Reforma Gustavo Capanema. A coleção *Matemática Ginasial*, de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza, não traz em nenhum de seus três primeiros volumes o conceito de função, porém, mesmo não estando explícito no programa previsto na Reforma Capanema, os autores optaram por apresentar uma introdução ao conteúdo de funções no quarto

[13] Curso de Matemática Elementar, de Euclides Roxo, em dois volumes (1º e 2º anos), *Matemática*, de Cecil Thiré e J. C. Mello e Souza, dois volumes (1º e 2º anos), *Curso de Matemática*, de Euclides Roxo, Cecil Thiré e J. C. Mello e Souza, em três volumes (3º, 4º e 5º anos), *Elementos de Matemática*, de Jacomo Stávale, em cinco volumes, *Lições de Matemática*, de Algacyr Munhoz Maeder, em cinco volumes e *Curso de Matemática*, de Agricola Bethlem, também em cinco volumes.

volume. No primeiro volume, do ano de 1945, na sua 8º edição (exemplar analisado), antes de iniciar a sua unidade, os autores justificam o lançamento dessa nova coleção no seguinte texto: “De acordo com os programas expedidos ultimamente, em consequência da nova Lei Orgânica do Ensino Secundário, elaboramos a série ‘MATEMÁTICA GINASIAL’, em substituição ao nosso antigo ‘Curso de Matemática’”.

No primeiro volume, a primeira unidade inicia com noções fundamentais de geometria (sólidos geométricos, superfícies, linhas, pontos). Na segunda unidade são trabalhadas figuras geométricas, planas e espaciais. Nas demais unidades são trabalhadas a noção de número inteiro, grandezas, unidades, medidas, operações com números inteiros, divisibilidade, frações, frações decimais, números primos, máximo denominador comum e mínimo múltiplo comum, números complexos e frações decimais (ROXO; THIRÉ, SOUZA, 1945a). Não há qualquer indício que faça referência ao conceito de função.

O segundo volume da coleção não é diferente em relação ao conteúdo de função. As primeiras duas unidades tratam de geometria e na sequência: sistema métrico, potências e raízes, razões e proporções e problemas sobre grandezas proporcionais. Nas últimas duas unidades, V e VI, que tratam de proporcionalidade, através de uma explanação acerca de grandezas não proporcionais, as relações entre grandezas são compreendidas como variáveis que se correspondem, mas sem fazer referência ao conceito de função (figura 16).



II. Do simples fato de uma grandeza depender de outra ou, mesmo, de crescer quando essa outra cresce, não se pode concluir que essas grandezas sejam proporcionais.

Assim, a área de um quadrado de 3 m de lado é 9 m²; a de um quadrado de 6 m de lado é 36 m². Não se infere daí seja a área de um quadrado proporcional ao lado. Com efeito, a duplicação do lado não acarretou a duplicação da área, mas sim a quadruplicação. O preço de uma pedra preciosa não é proporcional ao peso da mesma, embora o preço cresça com o peso.

Figura 16: grandezas proporcionais.
Fonte: ROXO; THIRÉ; SOUZA, 1944, p. 174.

No terceiro volume, na quinta unidade, que trata de equações do primeiro grau, há apenas um indício do que seria, algebricamente, uma relação entre duas variáveis. Ao se referir a equações indeterminadas, com duas incógnitas, como no exemplo dado no livro, $x + y = 20$, os autores comentam rapidamente a possibilidade de atribuir um valor a uma incógnita para calcular o valor “correspondente” da outra (figura 17).

139 — Discussão da equação do 1º grau com uma incógnita. Definições. Diz-se que uma equação é *possível* quando admite, pelo menos, uma solução; no caso contrário, diz-se *impossível* (n.º **137**, I). Diz-se *idêntica* uma equação da qual todo número é raiz (n.º **137**, II) e *condicional* uma equação possível não idêntica. [21].

Uma equação condicional é *determinada* ou *indeterminada*, conforme admita número limitado de raízes ou uma infinidade de raízes. Assim, as equações consideradas em n.º **136** são determinadas; a equação

$$x + y = 20$$

é indeterminada. Com efeito, atribuindo a y (ou a x) um valor arbitrário, podemos calcular o valor correspondente de x (ou de y) e obtemos, assim, *quantas soluções quisermos* ou, seja, *uma infinidade de soluções*: $x = 1$, $y = 19$; $x = 2$, $y = 18$, etc.

Discutir uma equação é procurar determinar os casos em que essa equação é *possível, impossível, idêntica*, etc.

Figura 17: equação indeterminada.
Fonte: ROXO; THIRÉ; SOUZA, 1945b, p. 125.

No quarto volume da coleção Matemática Ginasial, já na primeira unidade, intitulada *Equações e desigualdades do 1ª grau*, são definidas coordenadas cartesianas de um ponto e sua representação no plano cartesiano. Também são abordadas as noções de *variável* e *constante*. E na décima primeira página do livro os autores reservam espaço à noção de função (figura 18).

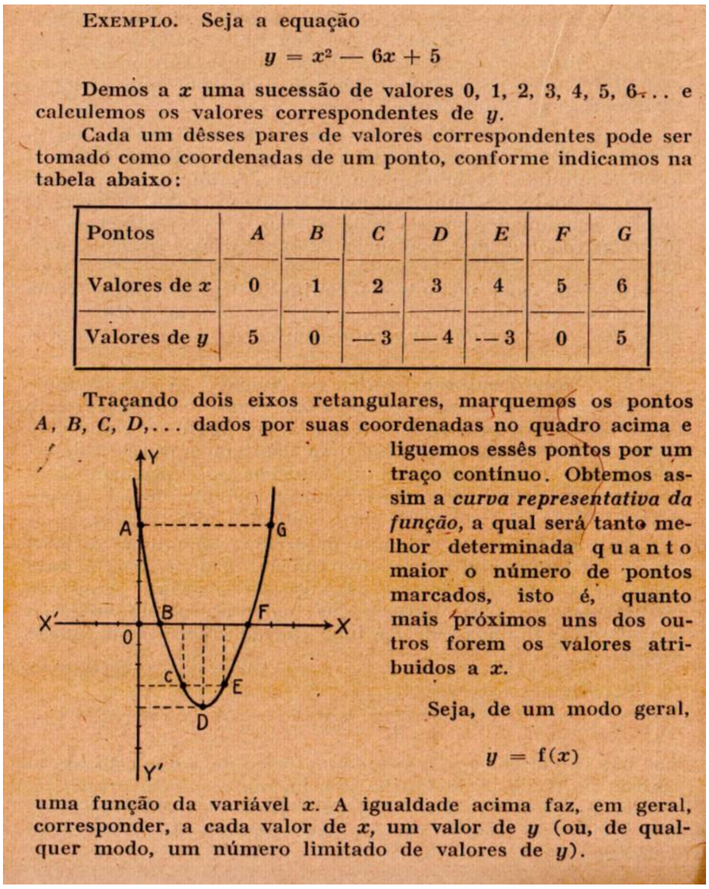
4 — Noção de função. *Uma variável* y *diz-se* FUNÇÃO *de outra variável* x, *quando a cada valor de* x *corresponde um certo valor de* y.

A variável y também se denomina, nesse caso, *variável dependente* ou *variável subordinada* e a variável x se pode chamar *variável independente, variável livre ou argumento.*

A correspondência entre os valores de x e de y, da definição acima, resulta, geralmente, de uma *dependência* (2ª Série, nº **144**) verificada ou estabelecida pela experiência ou pelo raciocínio.

Figura 18: noção de função.
Fonte: ROXO; THIRÉ; SOUZA, 1945c, p. 11.

Na página seguinte os autores trazem a notação de função, fazendo uso da terminologia *f*(*x*) e *y* = f(*x*), trazendo exemplos de funções que relacionam o tempo e o crescimento de uma árvore, o tempo e a distância percorrida por um móvel e o tempo e a temperatura. A representação gráfica de uma função é exemplificada pontualmente por uma função do 2º grau (figura 19), construída a partir de uma tabela onde foram atribuídos valores arbitrários a *x* para se obter os correspondentes *y*.



EXEMPLO. Seja a equação

$$y = x^2 - 6x + 5$$

Demos a x uma sucessão de valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6... e calculemos os valores correspondentes de y.

Cada um dêsses pares de valores correspondentes pode ser tomado como coordenadas de um ponto, conforme indicamos na tabela abaixo:

Pontos	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
Valores de x	0	1	2	3	4	5	6
Valores de y	5	0	— 3	— 4	— 3	0	5

Traçando dois eixos retangulares, marquemos os pontos *A, B, C, D*,... dados por suas coordenadas no quadro acima e liguemos essês pontos por um traço contínuo. Obtemos assim a *curva representativa da função*, a qual será tanto melhor determinada quanto maior o número de pontos marcados, isto é, quanto mais próximos uns dos outros forem os valores atribuidos a x.

Seja, de um modo geral,

$$y = f(x)$$

uma função da variável x. A igualdade acima faz, em geral, corresponder, a cada valor de x, um valor de y (ou, de qualquer modo, um número limitado de valores de y).

Figura 19: representação gráfica de uma função do 2º grau.
Fonte: ROXO; THIRÉ; SOUZA, 1945c, p. 16.

Posteriormente a função linear é definida como um binômio do primeiro grau na forma $ax + b$, seguido de sua representação gráfica. O conteúdo de função fica reservado apenas à primeira unidade do quarto volume, ocupando 19 páginas de todo o livro. Apenas a representação gráfica de equações é explorada com bastante ênfase ainda nessa mesma unidade e na terceira unidade, que trata especificamente da equação do segundo grau.

De certa forma, o conceito de função foi subtraído de boa parte do estudo que envolvia relação entre grandezas e varáveis e a exploração de tabelas, equações e gráficos tornou-se muito mais uma ferramenta metodológica para explorar problemas que envolviam essa relação do que para desenvolver o próprio conceito de função em si. De acordo com Braga (2006), o uso de tabelas, equações e gráficos como ferramenta para resolver problemas se sobrepôs ao desenvolvimento do conceito de função por ter um caráter prático e ser facilitador no ensino secundário, pois

> [...] ao apresentar uma fórmula ou uma tabela para o aluno, é muito mais simples, direto e cômodo para o professor colocá-las basicamente como um recurso para se obter algum valor procurado ou para construir um gráfico do que ficar explorando nelas os diversos e pertinentes enfoques de variação e dependência [...] (BRAGA, 2006, p. 147).

De acordo com o programa estabelecido pela Reforma Capanema, ao conteúdo de funções, como se verificou, não foi reservado um espaço específico no currículo do curso ginasial, ficando como opção do professor ou autor de livros didáticos dar ou não atenção a essa relação.

Segundo Valente (2005b, p. 6), “[...] a Reforma Gustavo Capanema apenas elencou os conteúdos da disciplina que deveriam ser ensinados nas diferentes séries do ensino secundário. Com ela, a disciplina ganhou novas feições”. O autor ainda afirma que “[...] a apropriação que os autores fizeram da nova reforma traduziu-se pela manutenção em separado dos ensinos de Aritmética, de Álgebra e de Geometria, mesmo que sob o manto de uma única disciplina chamada Matemática”.

Portanto, uma vez admitido o conteúdo de função no currículo de matemática em nível de ensino secundário na Reforma Campos, esse se manteve após a Reforma Capanema, mas não mais como um conteúdo axial, presente já nas primeiras séries do ensino secundário, e sim como um conteúdo menos expressivo, presente nos livros didáticos, como verificado, apenas na última série do ginasial, pois esse conteúdo ficaria a cargo do ensino colegial.

O programa para o ensino secundário aprovado na Reforma Capanema sugeria para o ensino ginasial, tanto para matemática quando para as ciências em geral, o estudo de conteúdos elementares, sem envolver ideias muito complexas, pois essas ficariam para os cursos clássico e científico, como explana o próprio programa: “no curso ginasial, a matemática e as ciências naturais serão estudadas de modo elementar. Seria antipedagógico sobrecarregar os alunos, nessa primeira fase dos estudos secundários, com estudos científicos aprofundados (BRASIL, 1942b)”. Essas determinações ecoam a voz do padre Arlindo Vieira, que defendia que assuntos mais complexos não deveriam ser ensinados nas primeiras séries do ginasial, pois “isso só serve para lançar a confusão de espíritos”.

3 MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA (MMM) NO BRASIL

"O que se deseja essencialmente com Modernos programas de Matemática (e esta seria a expressão mais aconselhado) é modernizar a linguagem dos assuntos considerados imprescindíveis na formação do jovem estudante usando os conceitos de conjuntos e de estruturas."

Osvaldo Sangiorgi, 1965, p. 2

A partir da segunda metade do século XX, um novo movimento de reforma para o ensino de matemática tomou proporção, intitulado, posteriormente, de Movimento da Matemática Moderna (MMM). Para Valente (2008c, p. 7), a expressão *matemática moderna* é uma "[...] expressão utilizada no âmbito dos estudos sobre o ensino de Matemática, que se caracteriza num período em que se elaboram novas referências". Segundo Búrigo (1989, p. 75), "Na origem, a expressão 'matemática moderna' ou 'matemáticas modernas' referia-se à evolução interna da própria disciplina, nos últimos 100 anos, em especial a partir do trabalho do grupo Bourbaki".

Lima e Dias (2010) chamam de *matemática moderna* a matemática que se desenvolveu no século XX, tendo seus fundamentos no século XIX, para os autores:

> [...] na historiografia da matemática podem-se evidenciar alguns aspectos do processo de constituição da matemática moderna, tais como: profissionalização, disciplinarização, especialização, unificação e generalização do método científico, que é baseado, dentre outros, na algebrização e na axiomatização.
> [...] A prática da matemática no período prioritariamente anterior ao século XIX se confundia, por exemplo, com a física e os seus ramos como a mecânica e a astronomia, pois não se tinha estabelecido a matemática como um campo disciplinar autônomo de investigação. Ainda, o desenvolvimento da álgebra tornou-se outro ponto fundamental para a constituição da matemática moderna. A álgebra passou a ser imprescindível no estudo das relações matemáticas. [...] Os matemáticos tomaram a aritmética como a linguagem da álgebra e instituíram uma nova caracterização para os números. Estes deixaram de ser associados à ideia empírica de quantidade para serem concebidos como símbolos abstratos, sem qualquer referência à realidade concreta (LIMA; DIAS, 2010, 226).

No entanto, são diversos os motivos que fomentaram as propostas de reforma no currículo de matemática a partir da metade do século XX, e não apenas o desenvolvimento da álgebra a partir da metade do século XIX, mas também questões sociais como os avanços tecnológicos da época e a preocupação com melhorias no ensino da própria disciplina. Para Guimarães (2007, p. 42):

> A Matemática Moderna nasceu num contexto do pós-guerra e foi motivada por um lado, por razões exteriores à Escola e ao ensino, em particular de ordem social, dada

> a necessidade de uma maior e melhor formação matemática dos cidadãos em geral que, como era então reconhecido, a evolução econômica, científica e tecnológica em muitos países, exigia.

Algumas das principais diferenças entre as propostas de modernização do ensino de matemática no Brasil na década de 1930 e as propostas da metade do século XX referentes à grade curricular do ensino secundário foram a ênfase dada à teoria dos conjuntos, ao conceito de estrutura e, consequentemente, ao rigor da linguagem, sob uma perspectiva bournakista e estruturalista da matemática, como veremos adiante.

Este “novo” movimento começou a ser difundido mundialmente por volta da década de 1950. De acordo com Búrigo (1989, p. 71):

> Em 1950 iniciaram-se uma série de encontros promovidos por um grupo que se denominou Comission Internationale pourl’étude et lá mélioration de l’enseignement des mathématiques (CIEAEM). A comissão propunha-se coordenar o trabalho que já era realizado, “psicológico, metodológico e prático”, no sentido da melhoria do ensino da matemática, por diferentes profissionais em diferentes países. Dos seminários participavam professores de matemática e, segundo o caso, tecnologistas, lógicos, psicólogos, historiadores.

Um livro publicado em 1955, contendo textos de alguns membros fundadores da CIEAEM, entre eles Jean Piaget e os matemáticos Dieudonné, Choquet e Lichnerowicz, membros do Grupo Bourbaki, teve repercussão internacional e sua divulgação no Brasil (BÚRIGO, 1989). Pires (2006, p. 24), ao apontar as principais referências para o ensino de matemática em relação aos conteúdos e métodos nas décadas de 1950 e 1960, conclui que “a Matemática Moderna aparecia como [...] filha de Bourbaki e Piaget. De Bourbaki, herdava o formalismo e a ideia de estrutura, e de Piaget, os reformadores tinham as diretrizes de uma pedagogia ativa e as discussões sobre estruturas de pensamento.”.

O Grupo Bourbaki não influenciou apenas a álgebra e os matemáticos, de acordo com Corry (2004), a matemática contemporânea, entre outras áreas do conhecimento, associa a ideia de estrutura na matemática ao nome de Nicolas Bourbaki. O autor ainda afirma que:

> [...] a identificação de estruturas matemáticas com Bourbaki teve uma influência marcante fora da matemática. O exemplo mais conhecido desta influência é encontrado na obra de Jean Piaget. Em sua exposição geral amplamente lida das ideias centrais do estruturalismo, um dos capítulos discute a "nova visão estruturalista da matemática". Neste contexto, Piaget menciona o Programa Erlangen de Klein, devido à utilização bem sucedida do conceito de estruturas de grupo, como a primeira vitória da nova abordagem. (CORRY, 2004, p. 290, tradução nossa).

Em 1959, a Organização Europeia de Cooperação Econômica (OECE) promoveu um inquérito a respeito da situação do ensino de matemática em seus países membros que ficou conhecido como Seminário de Royaumont (ocorrido no Cercle Culturel de Royaumont, na França). A constatação da OECE indicava uma defasagem em relação à matemática prevista no currículo do ensino secundário e o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos na época, ensinados na universidade. Em decorrência disso, no seminário de Royaumont, foi apresentada uma proposta de reforma para o ensino de matemática, culminando, em 1960, no programa de Dubrovnik, através do livro *Um programme moderne de mathématiques por l'enseignement sécondaires* (Um programa moderno de matemática para o ensino secundário). "A proposta de reforma delineada em Royaumont [...] foi fortemente influenciada pelas ideias estruturalistas dominantes na época, em particular no que se refere à Matemática e à Psicologia" (GUIMARÃES, 2007, p. 22).

Guimarães (2007) ressalta a visibilidade de Jean Piaget no Seminário de Royaumont através das possíveis relações de sua teoria com a pedagogia quando Piaget defende, em 1952, a correspondência entre as estruturas matemáticas e as estruturas operatórias da inteligência, chegando mesmo a recomendar tal relação como base didática à matemática[14].

As estruturas, fundamentalmente constituídas por axiomas, seriam os únicos objetos da matemática na ótica bourbakista, o que viria significar a matemática como unidade. Uma estrutura, como foi visto no segundo capítulo dessa tese, é definida por propriedades axiomáticas que gozam certas relações entre elementos de um dado conjunto. E o que também caracteriza as estruturas matemáticas é o fato de que essas se aplicam a elementos de natureza não especificada, ou seja, a natureza dos elementos seria irrelevante (GUIMARÃES, 2007).

A introdução do estudo de álgebra com base no conceito de estrutura, mesmo nas séries iniciais do ensino secundário, está presente em diversos apontamentos na proposta de Royaumont e no programa de Dubrovnik.

> A proposta emanada em Royaumont e Dubrovnik tem a nítida marca de uma concepção estruturalista da Matemática de inspiração bourbakista, com as implicações correspondentes no que se refere à Matemática para ser ensinada no ensino secundário: a ênfase na unidade da matemática (a ideia de "fusão"

[14] "[...] si l'édifice des mathématiques repose sur des «structures», qui correspondent par ailleurs aux structures de l'intelligence, c'est sur l'organisation progressive de ces structures opératoires qu'il faut baser la didactique mathématique" (PIAGET, 1955, p. 32). Para Pires (2000, p. 27), "o desejo de harmonizar o ensino das estruturas matemáticas e o desenvolvimento das estruturas intelectuais coloca dois problemas: de um lado, a palavra estrutura ser empregada por matemáticos e psicólogos sem esclarecer muita coisa. Para fundar uma pedagogia sobre um jogo de palavras é necessário precisar a natureza das ligações entre estruturas matemáticas ensinadas e as estruturas intelectuais da criança. Tal análise não aparece, nem de forma esquemática, nos textos fundamentais dos promotores da reforma".

> Aritmética/Álgebra e de síntese Álgebra/Geometria, e integração de Trigonometria em outros tópicos curriculares); a importância dada à Álgebra e à Geometria Vetorial, bem como às estruturas matemáticas; a orientação axiomática do ensino, isto é, a organização do currículo tendo como última meta o estudo axiomático da Matemática; a preocupação com o rigor e com a linguagem e simbologia matemáticas (GUIMARÃES, 2007, p. 43).

No Brasil, alguns dos mais importantes integrantes do Grupo Bourbaki estiveram presentes no Departamento de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo por períodos inconstantes entre 1945 e 1966. Inúmeros cursos e conferências realizadas pelos membros do grupo durante a sua permanência na Universidade foram determinantes para transmitir o ponto de vista bourbakista estrutural da matemática, concluindo que a influência desses matemáticos no Departamento é incontestável (PIRES, 2006).

Durante o período de 1945 e 1966, os membros do Grupo Bourbaki presentes, em diferentes momentos, na Universidade de São Paulo foram: André Weil, Jean Dieudonné, Jean Delsarte, Alexandre Grothendieck, Laurent Schwartz, Charles Ehresmann, Samuel Eilenberg, Jean-Louis Koszul e, junto a eles, Oscar Zariski, que, segundo Pires (2006, p. 4) "[...] embora não estivesse ligado ao grupo Bourbaki mantinha com estes membros do grupo uma relação profissional e de amizade".

Em meio às visitas dos integrantes dos Bourbaki, de 1955 a 1962, foram realizados quatro Congressos Nacionais de Ensino da Matemática, focados no ensino secundário, que traziam como pauta a modernização do ensino de matemática e, de acordo com Pires (2000, p. 32), "as primeiras manifestações da introdução de novos programas, bem como a introdução da linguagem da Matemática Moderna, destinada aos alunos da escola secundária foram feitas nos Congressos Brasileiros do Ensino de Matemática, realizados em Salvador (1955), Porto Alegre (1957), Rio de Janeiro (1962) e Belém (1967)".

No entanto, referente aos três primeiros Congressos (1955, 1957 e 1969), Búrigo (1989) afirma que:

> O movimento da matemática moderna no Brasil, enquanto articulação de indivíduos e grupos na defesa de uma proposta claramente identificada como "matemática moderna", foi posterior a esses Congressos e não foi consequência direta deles. Embora o tema estivesse presente no debate, de forma crescente a cada Congresso e até mesmo fosse aprovada, em 1957 e em 1959, a proposta de realização de experiências em termos de ensino de "matemática moderna", as iniciativas mais importantes de introdução do movimento no Brasil foram articuladas em outras instâncias (p. 25).

Para Búrigo (1989), existiu uma continuidade entre os esforços que deram origem aos Congressos e o MMM, que se desencadearia a partir da década de 1960, e que configura como indispensável o estudo desses congressos para a compreensão do movimento em si. Segundo a autora, no II Congresso, realizado em Porto Alegre, 1957, o tema "Matemática Moderna" estava presente, mesmo que de forma implícita, em três teses: a de Ubiratan D'Ambrósio, a tese do professor Osvaldo Sangiorgi e, de maneira "mais ousada" (BÚRIGO, 1989, p. 45), que defendia ferrenhamente os ideais da Matemática Moderna, a tese do Major Prof. Jorge Emanuel Barbosa.

Do III Congresso, que ocorreu no Rio de Janeiro em 1959, foram definidas algumas importantes resoluções referentes à Matemática Moderna como a preparação de professores para o ensino da "nova matemática" e "[...] a realização de experiências no secundário com introdução de 'noções' de Matemática Moderna, a serem relatadas no IV Congresso" (BÚRIGO, 1989, p. 49). Essas e outras relações referentes aos Congressos serão exploradas como maior consideração a seguir.

3.1 OSVALDO SANGIORGI, OS CONGRESSOS NACIONAIS DE ENSINO DA MATEMÁTICA E OS *ASSUNTOS MÍNIMOS PARA UM MODERNO PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA O GINÁSIO E PARA O COLÉGIO*

Muitos aspectos referentes às mudanças, tanto no que toca aos conteúdos quanto aos métodos de ensino da disciplina, decorrentes da difusão da Matemática Moderna em diferentes países, estão presentes nas atas e trabalhos apresentados nos primeiros Congressos Nacionais do Ensino da Matemática.

Segundo Sangiorgi (1965, p. 9):

> As primeiras manifestações oficiais da introdução de novos programas, bem como a modernização da linguagem Matemática destinada aos alunos da Escola Secundária, foram feitas através dos Congressos Brasileiros do Ensino da Matemática:
> I, realizado em Salvador (1955);
> II, realizado em Porto Alegre (1957);
> III, realizado no Rio de Janeiro (1959);
> IV, realizado em Belém (1962).

A aproximação dos debates presentes nos quatro primeiros congressos com o discurso sobre a modernização do ensino da matemática ajudam a compreender as mudanças de modernização curriculares propostas no âmbito do MMM, dando atenção especial, neste caso, à perspectiva do professor Osvaldo Sangiorgi a respeito da reforma curricular e de como esta reforma se consolidou em sua coleção de livros didáticos, a mais vendida no Brasil na década de 1960.

O I Congresso Nacional de Ensino da Matemática no Curso Secundário, realizado na cidade de Salvador, de 4 a 7 de setembro de 1955, ocorreu na Universidade da Bahia. A comissão organizadora era composta pelos professores Luiz de Moura Bastos (presidente), Aristides da Silva Gomes (vice-presidente) e pela professora Martha Maria de Souza Dantas (secretária). A comissão executiva era formada pelos professores Roberto José Fontes Peixoto (presidente), Luiz de Agoura Bastos (vice-presidente) e Rosaldo Otacílio Torres (secretário).

O temário do congresso tinha como itens: (1) Horários e Programas; (2) Métodos Gerais de Ensino; (3) Tendências Modernas de Ensino; (4) O livro de Classe; (5) O problema de aperfeiçoamento progressivo do professor. Os Anais estão divididos por Teses: do Distrito Federal, do Espírito Santo, do Rio Grande do Sul, de São Paulo e da Bahia. Reservando, também, um espaço para abordar o livro de classe em específico, para comunicações, seguido de relatórios, atas, relação de inscritos, discurso de abertura e notas taquigráficas.

A Matemática Moderna ainda não se caracteriza, no I Congresso, como um movimento ou como uma proposta de reforma estruturante do ensino de matemática. No entanto, o professor Osvaldo Sangiorgi, que foi convidado a relatar o Programa da Professora Eleonora Ribeiro, na sessão plenária do I Congresso[15], aberta pelo Professor Roberto Peixoto, ao sexto dia do mês de setembro de 1955, já revelava sua posição acerca dos novos programas em detrimento das tendências modernas para o ensino, a que se manifestou:

> Sr. Presidente, eu proporia então o seguinte: o trabalho da professora Eleonora, é trabalho que revela conhecimento na formação do educando. Mas, acredito que seria mais interessante que ela tomasse mais uma vez a palavra, para falar sobre o mesmo, e então eu pudesse fazer uma síntese do meu programa (CONGRESSO, 1955, p. 311).

A preocupação de Sangiorgi em estabelecer, desde o primeiro ano do ginasial, como seria dada a relação entre as matemáticas, se sobressaiu em relação aos demais tópicos a serem discutidos nos Programas. O Presidente, estando de acordo, concedeu a permissão ao professor para fazer uma síntese de seu programa:

> Eu proporia o seguinte: como este programa vai ter, no primeiro ano, tanto aqui no meu programa como no da Profa. Eleonora, Aritmética, Álgebra e Geometria, gostaria de ouvir a opinião do Plenário acerca desta proposição se a Matemática deve ser introduzida nas suas diversas partes com harmonia ou se deve ser dada como um corpo

[15] A sessão teve como foco a apresentação e a discussão de Programas para o ensino de matemática no curso secundário.

> só, um ano uma parte e no outro, outra parte. Será o início de nossa discussão (CONGRESSO, 1955, p. 313).

O professor Roberto Peixoto, concordando com as proposições de Sangiorgi, complementou que "[...] nas tendências modernas do ensino da matemática, ficou votado que devia haver a sistematização das diferentes partes da matemática, quase um trabalho consecutivo, não entrosado, propriamente" e, em seguida, afirmou que "a exposição do Prof. Osvaldo Sangiorgi está sendo muito feliz, de modo que eu sugeriria que ele prosseguisse, para depois, então, determinarmos os nossos trabalhos (CONGRESSO, 1955, p. 313)".

Com permissão para expor suas ideias e, sobretudo, com a atenção do Plenário – nas palavras do professor Roberto Peixoto, "é tão interessante a exposição, que é justo que vá até o fim (CONGRESSO, 1955, p. 313)" –, Sangiorgi tomou a palavra e de maneira incisiva se posicionou a respeito dos programas para o ensino de matemática no secundário. Após relatar as reformas propostas em seu programa, passando pelas quatro séries do ginasial, apontando cada conteúdo abordado nas séries, e após a leitura da proposta da Professora Eleonora, abriu-se a discussão.

Quanto ao conteúdo de funções nos programas apresentados de ambos os professores, a professora Eleonora Ribeiro fazia referência a esse conteúdo na quarta série do ginasial:

> UNIDADE VII
> Coordenadas cartesianas no plano
> 1) Definição das coordenadas cartesianas.
> 2) Representação de um ponto no plano cartesiano
> 3) Noção de função e sua representação no plano cartesiano.
> 4) Resolução gráfica e discussão do sistema de 1º grau com duas incógnitas (CONGRESSO, 1955, p. 71).

Osvaldo Sangiorgi não trazia o termo "função" em seu programa, e no quarto ano do ginasial estavam previstos os seguintes conteúdos:

> 4º Ano
> 1) ÁLGEBRA: Equações do 2º grau com uma incógnita. Equações redutíveis ao 2º grau. Sistemas do 2º grau (simples). Problemas do 2º grau.
> 2) GEOMETRIA: Linhas Proporcionais. Semelhança de figuras planas. Relações métricas nos triângulos. Polígonos regulares. Áreas das figuras planas.
> 3) TRIGONOMETRIA (início): Relações trigonométricas no triângulo retângulo. Uso de tábuas naturais (como vistas à Física) (CONGRESSO, 1955, p. 119).

A aprovação do programa para o ensino secundário ocorreu em plenário, de maneira que as propostas (de Osvaldo Sangiorgi e Eleonora Ribeiro) foram apresentadas por séries e por unidades, para que fossem votados, para cada item em particular, de cada uma das propostas, a adesão ou não ao programa. A unidade VII do programa de Eleonora Ribeiro, por votação, não foi aprovada em plenário:

> Sr. Presidente – A Profa. Eleonora tem como unidade sétima de seu programa... (Lê). Os que acham que essa matéria deve ser incluída no programa da 4º série ginasial, que fiquem como estão. (Não aprovado). (CONGRESSO, 1955, p. 341).

O conteúdo de funções no programa de Osvaldo Sangiorgi só vai aparecer na 3º série do colegial:

> 3º série
> Análise Matemática (início) – conceitos elementares de variáveis e de função. Limite: – primeiras noções sobre derivadas e aplicações ao estudo da variação de uma função. Estudo do trinômio do 2º grau. Noções sobre números complexos. Polinômios e equações algébricas em geral (pequena introdução).
> Geometria Analítica – (início) Estudo no plano até cônicas.

Quanto às questões envolvendo livros didáticos, a tese da Professora Martha Maria de Souza Dantas, que fazia referência a essas questões, foi muito valorizada no mesmo plenário. Dantas tratava de assuntos referentes aos livros de classe, ressaltando as questões econômicas, a falta de incentivo do governo devido às constantes reformas no ensino – fazendo com que os livros de classe sejam trocados frequentemente, e até mesmo em um mesmo ano.

Mais uma vez, Osvaldo Sangiorgi toma a palavra no plenário, agora em relação ao livro de classe:

> Eu gostaria que essas conclusões tão brilhantes que D. Marta apresentou no fim de sua tese, fossem "*in totum*" levadas aos poderes competentes, os três itens que estão aqui:
> 1.º - O livro de classe deve ser elaborado de modo que se torne a chave da ciência para a vida.
> 2.º - O governo promoverá todos os meios de tornar o livro acessível a todo o estudante.
> 3.º - O livro de classe deve ficar perfeitamente a cavalheiro dos programas e reformas (CONGRESSO, 1955, p. 360).

Quanto ao questionamento que Martha Dantas faz em sua tese sobre a possibilidade de retornar aos três livros, de aritmética, álgebra e geometria, para fugir das constantes reformas para o ensino, Osvaldo Sangiorgi diz:

> Que os livros de aritmética, álgebra e geometria que houve tempo em que existiam – e devo dizer eu aprendi neles, antes da reforma e eram livros formidáveis que representavam de fato, uma belíssima contribuição.
> Mas, se nós ficarmos a lado das tendências modernas, nesse nosso congresso, quais sejam, as de entrosamento tanto quanto possível, harmoniosamente, os pontos eu creio que o ideal seriam os livros que tratando dessa parte com todo o carinho possível, não ficassem sujeitos a essas reformas que, praticamente, infelicitam no modo de escrever ou apresentar o trabalho. O ideal seria isso, porque as reformas se sucedem como uma facilidade extraordinária (CONGRESSO, 1955, p. 361).

Sangiorgi vai mais adiante quanto às conclusões de Martha Dantas, sugerindo que estas sejam enviadas a autoridades competentes, propondo ainda que os livros de classe ficassem livres de taxas e impostos referentes ao papel, beneficiando os alunos, os pais e os editores.

Após essas colocações, o Presidente do Plenário põe em votação a sugestão de Osvaldo Sangiorgi, que foi "aprovada por aclamação" (CONGRESSO, 1955, p. 362).

Diante do exposto, fica registrada a efetiva participação do Professor Osvaldo Sangiorgi no I Congresso Nacional de Ensino da Matemática, evidenciando suas convicções acerca da necessidade de reforma no ensino secundário e a importância que, já naquela época, delegava ao livro didático, como ele mesmo falou em plenário, "é preciso fazer que o aluno sinta que naquele livro há um segundo mestre" (CONGRESSO, 1955, p. 361).

O II Congresso Nacional de Ensino da Matemática foi realizado em Porto Alegre, na Faculdade de Filosofia da Universidade do Rio Grande do Sul, de 29 de junho a 4 de julho, em 1957. O temário do II Congresso previa examinar "[...] as questões relativas à aprendizagem de Matemática nos diversos níveis de ensino, à luz dos modernos conhecimentos fornecidos pela psicopedagogia" (CONGRESSO, 1957, p. 21); estudar as bases para a elaboração de programas para os diversos cursos; estudar a influência da matemática nas demais disciplinas; dar atenção à formação científica e pedagógica do professor.

Algumas produções científicas publicadas nos anais do II Congresso Nacional de Ensino da Matemática no Curso Secundário apresentam como referência autores como Jean Piaget e o pseudônimo Nicolas Bourbaki. Os estudos de Piaget acerca das estruturas lógico-matemáticas caracterizaram o discurso psicopedagógico e estiveram veementemente presentes nas propostas que visavam "adaptar" o currículo da matemática às tendências modernas, como mostram as teses de Odila Barros Xavier, do Maj. Prof. Jorge Emanuel Ferreira Barbosa, de Pierre Weil e do próprio Osvaldo Sangiorgi.

Odila Barros Xavier, professora de Didática e de Metodologia de Matemática do Instituto de Educação de Porto Alegre, defende em sua tese algumas propostas para professores primários ressaltando que, adquirida a "visão unitária" da matemática, apreendendo a matemática como "sistema de ideias relacionadas", essa deveria ser uma preocupação do Curso.

Nessa perspectiva, a professora faz referência à noção de *correspondência,* como sendo essa uma das ideias mais fundamentais da matemática, merecendo ser "objeto de estudo especial e cuidadoso". A autora refere-se à importância da noção de correspondência para a própria concepção de número, e afirma que o não estabelecimento de correspondência biunívoca pela criança é sinal de imaturidade, pois essa relação está intimamente ligada ao conceito de número. E, ao fundamentar a importância da ideia de correspondência, Odila Barros Xavier cita alguns autores, entre eles Piaget, no que chega a se questionar: "e como ler Piaget sem a devida fundamentação matemática? E como estudar a 'gênese do conceito do número na criança' sem ler Piaget?" (CONGRESSO, 1959a, p. 178). A Prof.ª Odila Barros Xavier, no mesmo Congresso, ainda ministrou um seminário sobre a obra de Piaget.

Na tese do Maj. Prof. Jorge Emanuel Ferreira Barbosa, "Reflexos do desenvolvimento atual da matemática no Ensino Secundário", é posta em discussão a necessidade de o jovem aprender, no curso secundário, a matemática "[...] como ela é na época respectiva", pois "[...] o jovem deve ter ideia do estado em que se encontra a Matemática da sua geração", o professor ainda enfatiza afirmando que, "neste sentido, a necessidade de introduzir-se na Escola Secundária a forma da Matemática Moderna se faz evidente" (CONGRESSO, 1959a, p. 277-278).

O Maj. Prof. Jorge Emanuel Ferreira Barbosa faz referência a André Weil, do centro Nicolas Bourbaki, que reforça a necessidade de mudanças no currículo da disciplina. Das conclusões aprovadas em plenário referentes a essa tese, ficou proposto que:

> [...] seja incluída a designação de um grupo de professores de diversas partes do país para fazerem a experimentação que julgarem necessária e apresentarem, no próximo congresso, relatório do trabalho afim de que possamos, então sugerir, com autoridade, que conceitos novos convêm ser admitidos, ou até onde deve levar o aluno ao contato do que é a matemática de hoje em dia (CONGRESSO, 1959a, p. 285).

O professor Pierre Weil, em sua tese "Fundamentos Experimentais para a Didática Psicológica", apresentada no mesmo congresso, estende a fundamentação de seu trabalho sob a perspectiva piagetiana de aprendizagem, reforçando a importância da relação entre "fazer corresponder" e as estruturas mentais, sendo essas estruturas produtos de diferentes conhecimentos escolares. No seu trabalho, o professor expõe, fundamentado em Piaget, que "as estruturas correspondentes ao mecanismo de raciocínio abstrato só amadureceriam entre 10 e 12 anos" (CONGRESSO, 1959a, p. 522), idade, normalmente, de ingresso na primeira série do ginasial.

Quanto ao professor Osvaldo Sangiorgi e sua participação no II congresso, este apresentou sua tese "Matemática clássica ou matemática moderna, na elaboração dos programas do ensino secundário?", onde, declaradamente, defende a modernização do currículo de matemática no ensino, de forma gradual, fundamentado nas propostas de Bourbaki para a matemática e na teoria de Jean Piaget em relação à aprendizagem:

> Podemos, de um modo geral, dizer que a principal diferença entre a matemática clássica e a matemática moderna reside no fato de a primeira ter por base os **elementos simples**, tais como números inteiros, o ponto, a reta, etc... e a segunda um **sistema operatório**, isto é, uma série de estruturas (Bourbaki), sobre as quais se assenta o edifício matemático, destacando-se entre elas as estruturas algébricas, as estruturas de ordem e as estruturas topológicas.

> [...] tendo já sido mostrado (Jean Piaget) que as etapas fundamentais na aprendizagem dos conceitos matemáticos correspondem precisamente aos três tipos de estruturas há pouco descritos, segue que **a elaboração de novos programas deve necessariamente trazer traços que caracterizem, tanto quanto possível, estes dois estados da matemática-ensino, satisfazendo obrigatoriamente a um ensino lógico, e não perdendo nunca de vista o principal objetivo da escola secundária: eminentemente formativo**. (pelo menos até o presente momento)! (CONGRESSO, 1959a, p. 398-399, grifos originais).

Osvaldo Sangiorgi, em seu ensaio, segue criticando o programa para o ensino secundário, frisando que o objetivo de ensinar a matemática como unidade ainda não fora alcançado devido à maneira como se dá a divisão dos conteúdos de matemática entre as séries do ensino secundário. O fato de haver interrupções no desenvolvimento do conhecimento algébrico da 2ª para a 4ª série acarreta, segundo Sangiorgi, um retrocesso.

> Quer dizer que pelo programa atual da 2ª série estamos em torno de uma estrutura algébrica, preconizada pela matemática moderna, e que em programas anteriores não se cogitava. Até aí seria um bem se tal programa lograsse familiarizar o aluno com as principais estruturas algébricas, levando-o a reconhecer propriedades comuns e domínios diversos [...], mostrando-lhes a **matemática elementar como um todo sem compartimentos estanques entre os seus diversos ramos**. Mas não é, infelizmente, o que está ocorrendo, pois o excesso algébrico exigido em uma só série e a má distribuição pelas séries seguintes não permitem que se alcance o objetivo desejado (CONGRESSO, 1959a, p. 400, grifos originais).

Na reorganização do programa exposto por Osvaldo Sangiorgi, no final de sua tese, o estudo de álgebra aparece na 2ª, 3ª e 4ª séries do ginasial e o estudo de funções na 4ª série como um complemento:

> 4ª Série
> 1 – Álgebra elementar:
> Números irracionais; radicais; frações irracionais. Equações do 2º grau e equações redutíveis ao 2º grau. Sistema do 2º grau (simples).
> 2 – Geometria dedutiva:
> Linhas proporcionais; semelhança e equivalência de polígonos. Áreas. Relações métricas nos triângulos retângulos, obliquângulos e no círculo. Polígonos regulares. Medida da circunferência e do círculo.
> 3 – Complementos:
> Coordenadas cartesianas no plano; representação de um ponto; noção de função e sua representação cartesiana. Resolução gráfica e discussão de sistemas do 1º grau a duas incógnitas. Razões trigonométricas de um ângulo agudo. Uso de tábuas de valores naturais. (CONGRESSO, 1959a, p. 404).

Já o III Congresso Nacional de Ensino da Matemática, que ocorreu de 20 a 25 de julho de 1959, no Rio de Janeiro, e contou com a participação de cerca de 500 professores de matemática, incluindo Osvaldo Sangiorgi, teve como objetivos estudar os problemas relativos ao ensino de matemática não apenas no curso secundário, mas também nos cursos: comercial, industrial, normal e primário. A comissão do ensino secundário foi presidida pelo professor

Ary Quintela, que faz uma síntese dos programas aprovados nos congressos anteriores retomando o fato de que a estruturação desses programas sempre esteve atrelada a discussões acerca da disposição dos conteúdos no currículo (sequência, ordem, justaposição, concomitância) dentro do que cada um entendia por aritmética, por álgebra, por geometria e por trigonometria.

Ary Quintela propõe, então, uma reflexão sobre a conceituação dos ramos da matemática: aritmética, álgebra, geometria e trigonometria. E, quanto ao estudo de funções, ele afirma que:

> Não nos parecem necessárias, para fins em vista, considerações sobre os ramos superiores da Matemática, para nós, fora de programa. Diremos apenas que, como *Análise Matemática*, poderemos entender o estudo dos *números* e das *funções*, diante dos conceitos de *conjunto*, *ordem*, *correspondência*, *sucessão*, *densidade*, *continuidade*, *convergência* etc, isto é, sempre diante da ideia de *infinito*, em suas variadas manifestações (CONGRESSO, 1959b, p. 50).

Sobre a questão do aperfeiçoamento de professores, foi sugerida, na conclusão do congresso, acerca da tese "Do aperfeiçoamento dos professores registrados", da Professora Martha Maria de Souza Dantas, "[...] a criação de cursos de preparação à Matemática Moderna [...]" (CONGRESSO, 1959b, p. 213), incluindo, nessa formação, a teoria dos conjuntos e a álgebra moderna (ou abstrata).

Das recomendações aprovadas pelo congresso, a do Professor Irmão Leôncio José foi "solicitar aos Srs. Professores que realizem experiências no Curso Secundário sobre a introdução de noções de Matemática Moderna e levem ao 4º Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática o resultado das mesmas" (CONGRESSO, 1959b, p. 214). De acordo com Valente (2008b), "essa orientação foi plenamente seguida pelo G.E.E.M. – Grupo de Estudos do Ensino de Matemática, grupo paulista criado sob a liderança do professor Osvaldo Sangiorgi, em 1961".

O GEEM, em 1962, em cooperação com o IBECC (Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura – UNESCO) produziu o livro "Matemática Moderna para o Ensino Secundário", que reuniu artigos de professores do Brasil e de outros países cujo tema discutia a Matemática Moderna no ensino secundário. O primeiro artigo que compõe esse livro, intitulado "Introdução da Matemática Moderna no Ensino Secundário, de autoria de Sangiorgi, além de justificar a existência do GEEM, trata de apontar os principais aspectos considerados importantes, segundo Osvaldo Sangiorgi, para a reforma no ensino de matemática.

Um dos pontos ressaltados no texto é o de vencer a barreira imposta pela falsa impressão de que a matemática só deve pertencer aos adultos. Sangiorgi (1965, p. 2) lembra que "[...] o psicólogo Piaget mostrou, exaustivamente, a correspondência existente entre as estruturas algébricas e os mecanismos operatórios da inteligência de uma criança", portanto, segundo o autor, é preciso ressaltar "o que pertence à matemática nas primeiras manifestações da criança". Sangiorgi afirma que o que se deseja, essencialmente, com os modernos programas de matemática é "[...] modernizar a linguagem dos assuntos considerados imprescindíveis na formação do jovem estudante usando os conceitos de conjunto e estrutura" (p. 2), conceitos que, segundo o autor, permitirão ao estudante, desde o primário, sem dispendioso esforço, compreender a "unidade existente na interpretação dos fatos".

Outro ponto ressaltado por Osvaldo Sangiorgi é a questão da unidade da matemática, pois, segundo o autor, o caráter estrutural da matemática não admite tratar da matemática como "compartimentos estanques", como a aritmética, a álgebra, a geometria, a trigonometria, etc.

> Na verdade, esses nomes só podem satisfazer didaticamente a um atendimento de distribuição de assuntos, que devem, porém, conservar a matemática no singular, a fim de que sua unidade seja posta em evidência a cada passo, pela identidade dos métodos e procedimentos empregados tanto para números como para letras, para polinômios, para ponto, para vetores, etc... (SANGIORGI, 1965, p. 3)

Mais um ponto que ainda cabe ressaltar, e que, para Osvaldo Sangiorgi, caracteriza a matemática moderna, é a questão do rigor da linguagem através da utilização de símbolos lógicos, "[...] que respondem pela precisão indispensável que deve prevalecer nessa ciência" (SANGIORGI, 1965, p. 4). O autor exemplifica usando os símbolos lógicos $\forall$ (para todo) e $\exists$ (existe pelo menos um), quantificadores universais.

Atento a esses pontos, Osvaldo Sangiorgi (1965, p. 4) conclui que:

> Preocupando-se, assim, a Matemática atual, muito menos com a natureza dos elementos que estuda (números, letras, polinômios, pontos,...) e muito mais com o tipo de estrutura que caracteriza as relações existentes entre esses elementos – que aparentemente pareciam não estar subordinados a relação alguma – é fundamental que a Escola secundária de hoje transmita aos seus jovens alunos as verdadeiras mensagens que é portadora a chamada Matemática Moderna.

O livro também traz alguns dos trabalhos apresentados no IV Congresso de Ensino da Matemática, como o trabalho de Omar Catunda, de Osvaldo Sangiorgi e do próprio GEEM, trazendo os *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Ginásio e para o Colégio*, programa que teve aprovação unânime no IV Congresso.

O IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática foi realizado em 1962, de 22 a 28 de julho, em Belém do Pará, e teve, em seu temário, pela primeira vez em um congresso, o tópico “Introdução à Matemática Moderna na escola secundária”, seguidamente do tema “Experiências realizadas em cursos regulares ou experimentais”.

A preocupação com o rigor da linguagem matemática no IV Congresso, tanto no que diz respeito à potencialidade no desenvolvimento de conjecturas matemáticas quanto às barreiras que isso poderia acarretar, pôde ser conferida na apresentação de Omar Catunda “Os conceitos fundamentais de matemática: conjuntos e estruturas”, no excerto que segue: “é minha intenção expor aqui, em linguagem a mais simples e chã possível, as ideias de conjunto e estrutura, que formam o fundamento das teorias matemáticas modernas.” (CATUNDA, 1965, p. 69).

O professor Omar Catunda ainda se refere à importância do conceito de função matemática, exemplificando-o através de noções intuitivas (ou como ele mesmo diz, “exemplos corriqueiros”) e posteriormente definindo-o:

> Este conceito, introduzido explicitamente somente no século 17, é hoje colocado na própria base da teoria dos conjuntos. O seu significado é o de correspondência ou representação unívoca e pode ser esclarecido com exemplos corriqueiros: a) como a cada ser humano corresponde um único outro – ser humano que é o seu pai, temos aqui uma função (pai), definida no conjunto dos seres humanos e com valores no mesmo conjunto: assim, o pai de Alexandre Magno é Felipe da Macedônia [...] (CATUNDA, 1965, p.72-73).

Omar Catunda expõe no texto a diferença entre a *matemática antiga* e a *matemática moderna*, sendo esta diferença pautada na maneira de apresentar uma teoria matemática, culminada pela própria linguagem matemática, tendo como grande potencializador dessa diferença a teoria dos conjuntos, o conceito de função, consequentemente, e o conceito de estrutura.

Segundo Catunda (1965), no desenvolvimento da matemática antiga estava subtendido que os conceitos de número e ponto eram os conceitos primitivos fundamentais da matemática, sendo a matemática a “Ciência da Medida” ou a “Ciência da quantidade”, etc., no entanto, a revisão dessa perspectiva inicia-se no século XIX, com a teoria dos conjuntos de Cantor, que havia evoluído, até a década de 1960, mais de meio século para chegar no aspecto atual. Para Catunda (1965):

> Atualmente, portanto, uma teoria matemática se apresenta mais ou menos como segue: “consideremos um conjunto A (inteiramente indeterminado). Suponhamos que este conjunto tem a estrutura E descrita pelos seguintes postulados: (a), (b), (c),... Então, dos postulados (a) e (b) se deduz o teorema (p). Deste teorema e do postulado (c), deduz-se outro teorema (q); e assim por diante”. Estabelecida assim a teoria, ela se aplicará a qualquer conjunto que satisfaça aos mesmos postulados, seja esse conjunto dado por uma outra ciência ou tirado de uma outra teoria matemática, por meio de definições convenientes (CATUNDA, 1965, p. 75).

Omar Catunda descreve as estruturas algébricas de ordem, semigrupo e grupo, como visto em 2.1, e comenta sobre a necessidade dessa nova linguagem:

> Pode-se lamentar o novo vocabulário e a multiplicidade de novos sinais que é necessário aprender, mas isso é inevitável e não creio que demande grande esforço da parte dos estudantes. Aliás, a tendência da matemática sempre tem sido o incremento do uso da linguagem simbólica, que sistematiza e assim reforça o seu âmbito de ação (CATUNDA, 1965, p. 75).
> .

Apesar de reconhecer a demanda de símbolos presentes na nova linguagem, Omar Catunda afirma, no último parágrafo do seu texto, que essa linguagem seria essencial para a renovação da matemática:

> Apenas assinalarei ainda que o movimento pela renovação do ensino da matemática, que se processa no mundo inteiro, já está repercutindo entre nós, e que é de se prever que dentro de alguns anos as ideias que aqui expus sejam tão corriqueiras entre os cultores de Matemática, como o são hoje os sistemas de postulados da Geometria Euclidiana e as propriedades das progressões. E com essa nova linguagem, particularmente com o conceito agora claro de estrutura, a rainhas das ciências ganhará enormemente em vigor e em possibilidade de aplicação e progresso (CATUNDA, 1965, p. 85-86).

As sessões de estudos relativos à *Introdução da Matemática Moderna na Escola Secundária* foram presididas pelo Prof. Omar Catunda, tendo como um de seus assessores o professor Osvaldo Sangiorgi, que ministrou, na mesma sessão, uma aula-demonstração sobre “sistemas matemáticos e estruturas”.

No trabalho intitulado *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Ginásio e para o Colégio*, apresentado pelo GEEM, são expostos os assuntos mínimos para as quatro séries do curso ginasial e para as três séries do curso colegial, onde, a nível ginasial, a ideia de estrutura, a partir do conceito de conjunto, aparece em, praticamente, todos os assuntos sugeridos.

Nesse programa, o conteúdo de funções é estabelecido na quarta série do curso ginasial, como se pode ver, agora não mais como um “complemento”, como constava no programa aprovado no III Congresso:

> QUARTO ANO GINASIAL
> 3. Funções:
> a) função linear e sua representação gráfica cartesiana;
> b) resolução gráfica de sistema de equações;
> c) função trinômio do 2º grau, representação gráfica (SANGIORGI, 1965, s/n).

Ainda assim, o conteúdo de funções, no curso colegial, passa da terceira série para a primeira série, ou seja, os alunos estudam funções na última série do ginasial e na primeira série do colegial, como segue na organização curricular atual, onde os alunos têm o primeiro contato com o conteúdo de funções no 9º ano do ensino fundamental, dando continuidade no primeiro ano do ensino médio. Búrigo (2010, p. 296) reconhece essa transição como um “efeito do movimento sobre o currículo escolar”, a exemplo: “[...] o estudo das funções desde o ensino fundamental e, especialmente, desde o início do ensino médio”.

Além de ter sido aprovado de forma unânime no IV Congresso, em Belém do Pará, como já referido, o trabalho apresentado pelo GEEM havia sido também aprovado de forma unânime pelo plenário relativo à Comissão de Matemática do V Encontro de Mestres, realizada em São Paulo, capital, um mês antes. O GEEM deixou explícitas as suas intenções a respeito de seu trabalho ao almejar que, dentro das possibilidades das Diretrizes e Bases da Educação Nacional, os *Assuntos Mínimos* viessem a se tornar “[...] reais diretrizes para um verdadeiro norte do ensino da Matemática nas escolas secundárias do país” (GEEM, 1965, p.91).

3.2 A MATEMÁTICA MODERNA CHEGA AOS LIVROS DIDÁTICOS: CONJUNTOS, ESTRUTURAS E FUNÇÕES NO CURSO GINASIAL

Osvaldo Sangiorgi e o GEEM obtiveram sucesso em suas investidas sobre as novas diretrizes para o ensino de matemática. De acordo com Valente (2009, p. 3):

> Chegada a década de 1960, vieram os tempos em que vigeu a LDB 4024/1961. Com ela, uma grande liberdade aos estados brasileiros para definirem a sua organização curricular. Sangiorgi e a Cia. Editora Nacional puseram-se a trabalhar no sentido de oficializar um programa moderno para o ensino de matemática. A luta foi a de estabelecer que o programa formulado pelo G.E.E.M., sob a presidência de Osvaldo Sangiorgi, ganhasse aceitação de entidades representativas do ensino de matemática, sensibilizasse as autoridades educacionais e servisse para respaldar uma programação a ser seguida nos livros didáticos. As ações tiveram início em São Paulo, onde em junho de 1962, ocorreu o V Encontro dos Mestres. No Evento, foram apresentados para discussão 24 itens que deveriam compor a programação moderna para o ginásio, bem como 18 itens sob o título “Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Colégio – Orientação e Sugestões para o seu desenvolvimento”.

No relatório final do V Encontro de Mestres, assinado pelos professores Benedito Castrucci, Omar Catunda, Osvaldo Sangiorgi e Luiz Mauro Rocha, foram aprovados, de maneira unânime, como já referido, os estudos apresentados pelo GEEM no IV Congresso Nacional de Ensino da Matemática acerca dos programas mínimos de Matemática para o ensino secundário.

> Ao que tudo indica, a estratégia montada pelo G.E.E.M. foi bem sucedida. Isso permitiu a Osvaldo Sangiorgi parametrizar as suas obras pelo programa levado ao IV Congresso, que após o Evento ganhou o *status* de um programa nacional para o ensino da matemática moderna no Brasil.
> Assim, já no ano seguinte, em finais de 1963, surge a primeira obra didática de matemática moderna, escrita por Sangiorgi. De modo progressivo, foram lançadas pela Editora Nacional as obras para o ginásio, de uma coleção de quatro volumes: 1964, primeiro volume utilizado no 1º. Ano; 65, 2º. Ano; 66, 3º. Ano; e 1967, último volume da coleção, lançado para o 4º. Ano ginasial.
> As referências curriculares utilizadas por Osvaldo Sangiorgi em seus livros constituíam os chamados *assuntos mínimos* que representavam uma listagem de conteúdos e instruções metodológicas mencionadas desde o primeiro volume da coleção [...] (VALENTE, 2009, p. 3-4).

Osvaldo Sangiorgi, então, lançou seu primeiro volume de livros didáticos, *Matemática: Curso Moderno*, em 1963, sob o viés do *programa moderno* para o ensino de matemática – constituído no cerne da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, de 1961, que dava abertura, através da criação dos Sistemas Estaduais, à rediscussão do currículo escolar.

> Os livros de Sangiorgi tornaram-se *best-sellers*, o sucesso da coleção moderna foi confirmado pelas novas edições do primeiro volume: em 1965, mais de 250 mil novos livros são editados e assim, anualmente, o livro teve tiragens na casa de 250 mil exemplares, até 1967, alcançando a sua 10ª edição [...].
> A obra de Sangiorgi, autor que pela primeira vez elaborou um texto didático de matemática moderna para ser utilizado nos ginásios, espalhou-se pelo Brasil (VALENTE, 2008d, p. 31).

Portanto, cabe analisar como o conceito de função matemática foi abordado na perspectiva do MMM, através do livro de maior vendagem na época.

3.2.1 A coleção *Matemática: Curso Moderno*: conjuntos e estruturas

A coleção *Matemática: Curso Moderno*, para os cursos ginasiais, é composta por quatro volumes, e os exemplares analisados a seguir datam de 1968. Diferente das coleções anteriormente analisadas, essa coleção reorganiza os conteúdos presentes em seus volumes, de maneira que seja possível transcorrer com a teoria dos conjuntos por, praticamente, todos os anos do ensino ginasial, ou seja, aos poucos a linguagem referente à teoria dos conjuntos vai sendo desenvolvida na coleção, dando suporte, principalmente, para o estudo das estruturas.

Fazendo-se uma analogia ao que Euclides Roxo havia pensado para o ensino secundário em relação ao conceito de função – sobre a questão da unidade matemática e de como essa percepção seria desenvolvida em sua coleção, precocemente, paulatinamente, através do conceito de função –, Osvaldo Sangiorgi propõe algo semelhante para sua coleção quanto ao método de ensino, só que agora em relação às estruturas matemáticas. Portanto, para entender "espaço" do conceito de função, de como será desenvolvido o conteúdo de funções, no geral, na obra de Osvaldo Sangorgi, é preciso compreender a perspectiva da matemática como um todo nesta coleção.

Osvaldo Sangiorgi, no primeiro volume da coleção Matemática: Curso Moderno, faz a abertura do livro com uma carta ao estudante ou, como ele coloca, "uma palavra para você *(o aluno)* que inicia o ginásio...". Segue abaixo um excerto do texto original:

> Meu caro estudante:
> Você, provavelmente já foi iniciado no estudo de *Matemática* de um modo diferente daquele pelo qual seus irmãos e colegas mais velhões estudaram.
> Sabe por quê?
> Porque a *Matemática* para eles, na maioria das vezes era um "exagero de cálculos", "problemas complicados, trabalhosos e fora da realidade" que o tornavam, quase sempre, um *fantasma*!
> Hoje, na era Atômica em que vivemos, isso é trabalho para as máquinas (os fabulosos computadores eletrônicos de que tanto falam nos jornais...), razão pela qual você vai aproveitar o seu precioso tempo aprendendo o verdadeiro *significado* e as belas *estruturas* da *Matemática Moderna* (SANGIORGI, 1968a, carta ao estudante, grifo do autor).

Alguns elementos inovadores podem ser conferidos na coleção de Osvaldo Sangiorgi no que toca aos conteúdos e à agregação de novos conceitos e noções, conforme citados no capítulo 3, ou seja, como a linguagem simbólica referente à teoria dos conjuntos e o estudo das estruturas como elemento unificador. Esses elementos são tidos como inovadores não apenas na concepção de Osvaldo Sangiorgi, pois a teoria dos conjuntos e o conceito de estrutura são tópicos característicos da evolução da álgebra a partir da segunda metade do século XIX.

Como visto, o rigor da linguagem matemática também é um elemento fundamental que denota a Matemática Moderna. Abel, Cauchy, entre outros matemáticos do século XIX, marcaram definitivamente a matemática com esse aspecto (REVUZ, 1980). A noção de *conjunto*, *relação* e *operações* e, fundamentalmente, o conceito de *estrutura*, formam o alicerce da modernização da matemática em âmbito mundial no final do século XIX, advento dos novos anseios que resultariam na consolidação de uma *Nova Matemática*, elementos esses presentes na coleção de Osvaldo Sangiorgi.

Quanto à presença dos conteúdos que envolvem conjuntos, relações e operações, na coleção Matemática: Curso Moderno, de Osvaldo Sangiorgi, estes dão abertura à coleção. A noção de conjunto – apresentada no livro como a noção concreta de coleção – e as relações de pertinência e inclusão são exploradas no primeiro capítulo do volume 1 juntamente com a apresentação do *Diagrama de Venn*, que precede o conteúdo de operações com conjuntos: intersecção, reunião, complementação e produto cartesiano.

Desde as primeiras páginas, faz-se uso da linguagem simbólica para explorar relações e operações, o que significa que Osvaldo Sangiorgi estava decidido a tornar concreta, através de sua coleção, suas crenças acerca das contribuições da modernização do ensino de matemática. E uma dessas contribuições era a utilização de símbolos lógicos como uma maneira de modernizar a linguagem, trazendo, através de seu domínio, os elementos matemáticos antes considerados primitivos (número, letra, ponto, entre outros já citados por ele) para o mundo das estruturas.

Essa simbologia é bastante explorada no conteúdo referente a conjuntos. As a*plicações*, presentes ainda no primeiro capítulo, fazem uso do Diagrama de Venn representando operações com conjuntos – as *Práticas Modernas*, assim como são chamadas essas representações no livro (figura 20).

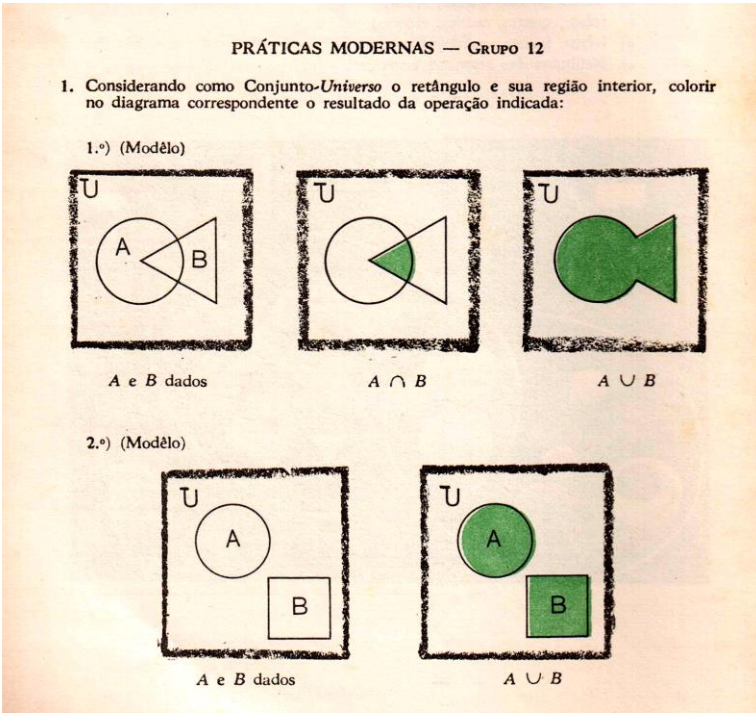
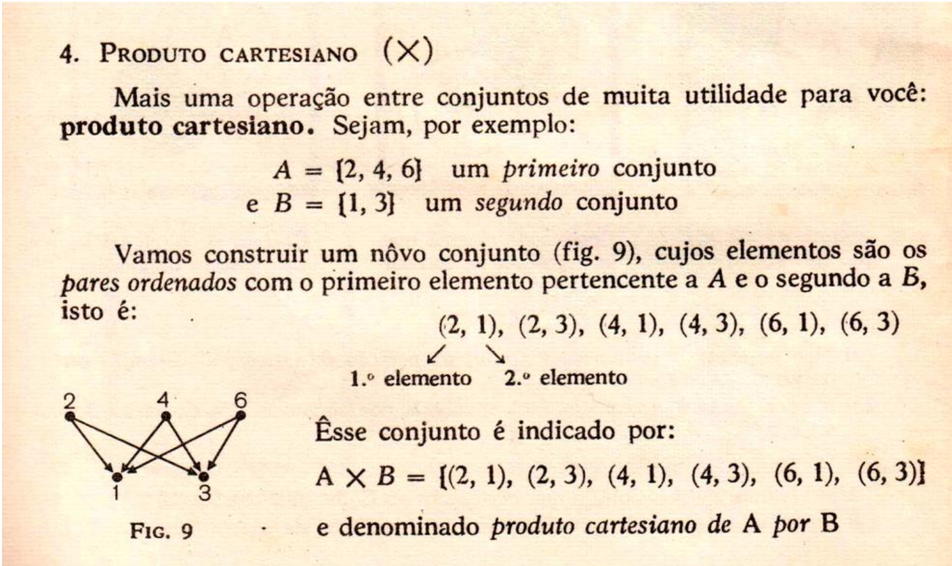


Figura 20: práticas modernas.
Fonte: SANGIORGI, 1968a, p. 22.

Logo em seguida, é apresentada outra operação entre conjuntos, juntamente à representação dessa relação por intermédio de um grafo: o “produto cartesiano” (figura 21).


4. PRODUTO CARTESIANO (×)

Mais uma operação entre conjuntos de muita utilidade para você: **produto cartesiano.** Sejam, por exemplo:

$A = \{2, 4, 6\}$ um *primeiro* conjunto
e $B = \{1, 3\}$ um *segundo* conjunto

Vamos construir um nôvo conjunto (fig. 9), cujos elementos são os *pares ordenados* com o primeiro elemento pertencente a A e o segundo a B, isto é:

(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3)

1.º elemento 2.º elemento

FIG. 9

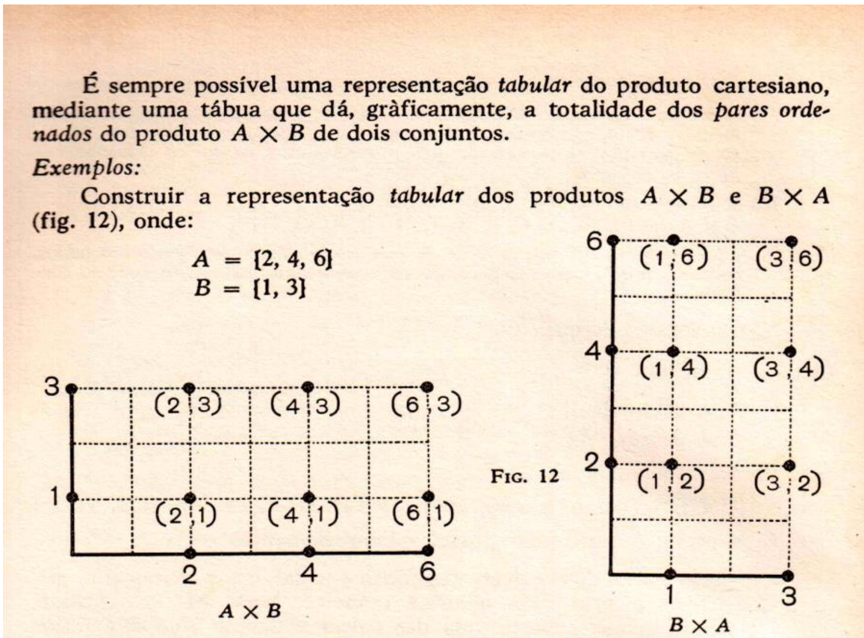
Êsse conjunto é indicado por:

$A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3)\}$

e denominado *produto cartesiano de* A *por* B

Figura 21: produto cartesiano.
Fonte: SANGIORGI, 1968a, p. 22.

Esta operação também é representada por diagramas, dando margem para que, uma vez estabelecido um par ordenado de um produto $A \times B$ de dois conjuntos, cada par seja expresso em um plano, de maneira "tabular", sendo esta, então, a representação do produto cartesiano por intermédio do plano cartesiano, em uma relação binária (figura 22).


É sempre possível uma representação *tabular* do produto cartesiano, mediante uma tábua que dá, gràficamente, a totalidade dos *pares ordenados* do produto $A \times B$ de dois conjuntos.

Exemplos:

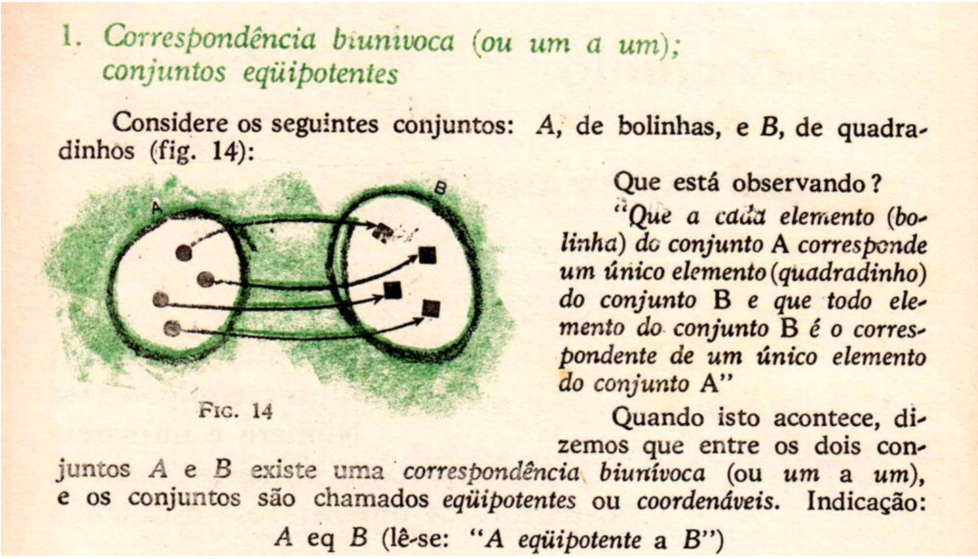
Construir a representação *tabular* dos produtos $A \times B$ e $B \times A$ (fig. 12), onde:

$A = \{2, 4, 6\}$
$B = \{1, 3\}$

FIG. 12

Figura 22: plano cartesiano.
Fonte: SANGIORGI, 1968a, p. 28.

A partir da compreensão de produto cartesiano, dá-se margem para que seja definida a noção de correspondência, só que desta vez não por intermédio de letras que representam variáveis, ou da dependência entre duas grandezas, como visto no quarto capítulo dessa tese, na análise dos livros que antecederam o MMM, mas sim através de conjuntos que mantém certa correspondência entre seus elementos, como mostra a figura 23.


1. *Correspondência biunívoca (ou um a um); conjuntos eqüipotentes*

Considere os seguintes conjuntos: *A*, de bolinhas, e *B*, de quadradinhos (fig. 14):

Que está observando?

"Que a cada elemento (bolinha) do conjunto A *corresponde um único elemento (quadradinho) do conjunto* B *e que todo elemento do conjunto* B *é o correspondente de um único elemento do conjunto* A"

Quando isto acontece, dizemos que entre os dois conjuntos *A* e *B* existe uma *correspondência biunívoca* (ou *um a um*), e os conjuntos são chamados *eqüipotentes* ou *coordenáveis*. Indicação:

A eq *B* (lê-se: "*A eqüipotente a B*")

Figura 23: correspondência biunívoca.
Fonte: SANGIORGI, 1968a, p. 32.

Já no primeiro capítulo do primeiro volume são trabalhados conceitos e notações que permitirão, mais tarde, definir uma função através da relação entre conjuntos, como o conceito de correspondência biunívoca, que representa uma *função bijetora*, e a representação por diagramas de flechas.

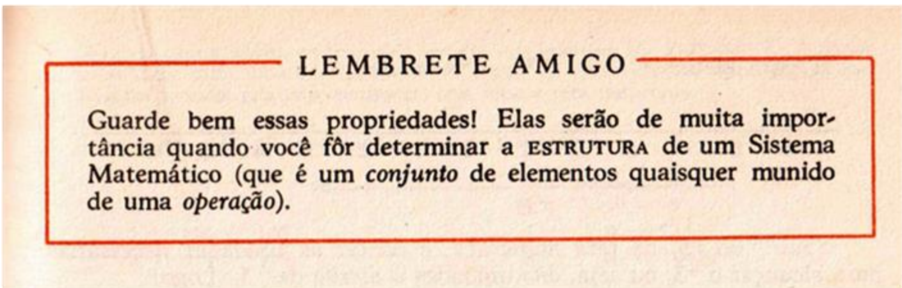
No entanto, o objetivo imediato de se ter apresentado as relações entre conjuntos vem na segunda parte do primeiro capítulo (ver índice no ANEXO C), onde é trabalhado o conjunto dos números naturais e suas operações. Uma *operação* é, assim definida pelo autor, como uma estrutura, como um sistema formado por um conjunto não vazio que possui em si uma lei que relaciona dois elementos desse conjunto com um terceiro. Nas palavras do autor, uma operação é "uma lei [também chamada de lei de composição] ou regra que permite **associar** a *dois números naturais um terceiro número natural*" (SANGIORGI, 1968, p. 85).

Diagramas, conjuntos, relações e estruturas e as propriedades estruturais das relações (fechamento, propriedade comutativa, associativa, distributiva, elemento neutro e simetria) percorrem boa parte do primeiro volume. Esta abordagem é justificada em destaque pelo autor no início do primeiro volume (ANEXO D).

No segundo volume, na carta ao estudante, o autor ressalta, novamente, a importância do estudo das estruturas: “um novo mundo está a sua espera. Você que já teve contato com a *Matemática Moderna* da 1ª série, irá saborear mais intensamente, agora, os seus frutos, mediante as belas *estruturas* que serão estudadas” (SANGIORGI, 1968b, carta ao estudante).

Neste volume, a respeito do estudo das estruturas, o livro traz, já no primeiro capítulo, o estudo sobre as propriedades estruturais no conjunto dos racionais absolutos; no segundo capítulo, são propostos *problemas com novas estruturas*, onde são estabelecidas relações entre razão e proporção.

Da mesma maneira, nos capítulos seguintes (ver ANEXO E), são definidos o conjunto dos números inteiros relativos e o conjunto dos números racionais relativos, trazendo, também, as propriedades estruturais das operações nesses conjuntos. O autor faz questão de destacar em um “lembrete amigo” (destaques presentes em toda a coleção, que visam retomar de forma sucinta algumas definições exploradas em cada capítulo) o conceito de estrutura (figura 24).


LEMBRETE AMIGO

Guarde bem essas propriedades! Elas serão de muita importância quando você fôr determinar a ESTRUTURA de um Sistema Matemático (que é um *conjunto* de elementos quaisquer munido de uma *operação*).

Figura 24: lembrete amigo (estruturas).
Fonte: SANGIORGI, 1968b, p. 135.

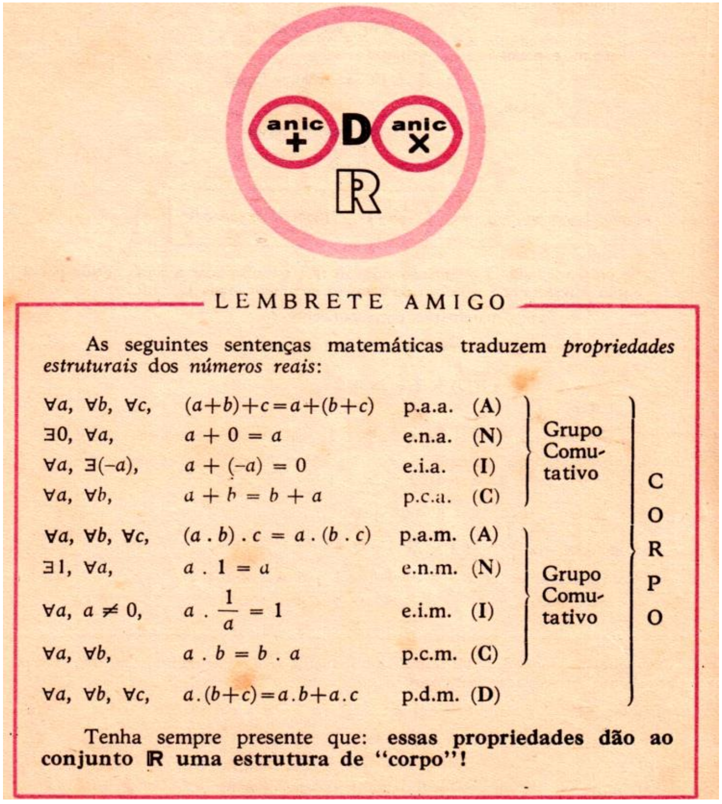
Neste mesmo volume, ao final do livro, dá-se atenção especial às sentenças abertas, às relações binárias e à representação através de flechas e “laços” (como em grafos dirigidos).

No terceiro volume, na carta ao estudante, Osvaldo Sangiorgi ressalta o conjunto dos números reais: “[...] você entrará em contato com uma porção de coisas novas. Primeiro, com o *conjunto dos números reais*, que, com relação às operações definidas, possui rica estrutura [...]” (SANGIORGI, 1968c, carta ao estudante). O autor segue apresentando o que será trabalhado no livro, dando ênfase também ao estudo de geometria[16].

[16] Finalmente, vem o “bom-bocado” do livro: o estudo da *Geometria*. Agora não será mais preciso que você “decore” enfadonhos teoremas e mais teoremas, contra o que, erradamente, alguns colegas mais adiantados costumavam “preveni-lo”.
Na verdade, trata-se de uma das partes da Matemática de valor e beleza reconhecidos desde antes de Cristo, pela notável cultura grega da época. Por quê? Porque as figuras geométricas – suas velhas conhecidas desde os

Neste volume, no primeiro capítulo, item 7 (ver ANEXO F), é definida a estrutura algébrica de corpo, “Corpo do números reais” (SANGIORGI, 1968c, p. 21), sendo uma estrutura que permite reduzir as quatro operações conhecidas em duas fundamentais: a adição e a multiplicação, sendo que a subtração de dois números reais a e b é entendia como a adição de a com o oposto de b e a divisão de a por b (ambos reais) é entendida como a multiplicação de a pelo inverso de b (com $b \neq 0$).

Na estrutura de corpo, a adição goza das propriedades – usando a linguagem do livro de Sangiorgi – associativa (A), elemento neutro (N), elemento inverso (I) e comutativa (C), ou seja, uma estrutura de grupo abeliano (ou comutativo). Para a multiplicação no conjunto dos números reais, sem o zero, estas propriedades também se definem como um grupo abeliano (gozando das propriedades A, N, I e C). E, ao relacionar a multiplicação com a adição, no conjunto dos números reais, ainda vale a propriedade distributiva (D). Mais adiante, a estrutura de corpo é retomada em um “lembrete amigo” (figura 25).



LEMBRETE AMIGO

As seguintes sentenças matemáticas traduzem *propriedades estruturais* dos *números reais*:

$\forall a, \forall b, \forall c,$	$(a+b)+c=a+(b+c)$	p.a.a.	(A)	Grupo Comutativo	CORPO
$\exists 0, \forall a,$	$a+0=a$	e.n.a.	(N)		
$\forall a, \exists(-a),$	$a+(-a)=0$	e.i.a.	(I)		
$\forall a, \forall b,$	$a+b=b+a$	p.c.a.	(C)		
$\forall a, \forall b, \forall c,$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	p.a.m.	(A)	Grupo Comutativo	
$\exists 1, \forall a,$	$a \cdot 1 = a$	e.n.m.	(N)		
$\forall a, a \neq 0,$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$	e.i.m.	(I)		
$\forall a, \forall b,$	$a \cdot b = b \cdot a$	p.c.m.	(C)		
$\forall a, \forall b, \forall c,$	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	p.d.m.	(D)		

Tenha sempre presente que: **essas propriedades dão ao conjunto ℝ uma estrutura de “corpo”!**

Figura 25: estrutura de corpo.
Fonte: SANGIORGI, 1968c, p.54.

primeiros anos de escola – quando tratadas “racionalmente”, constituem ótimo estímulo para a *dedução* de certas propriedades comuns a elas e que jamais poderiam ser aceitas se apenas as *observássemos*. E, se *deduzir* é uma das principais qualidades de “ser racional”, o estudo da geometria o fará mais racional ainda! (SANGIORGI, 1968c, carta ao estudante).

As estruturas topológicas também são abordadas nesse volume, no estudo de geometria, reaparecendo no quarto volume, ao final do livro, ilustrando alguns “mapas topológicos”, sugerindo o uso desses estudos até mesmo na geografia.

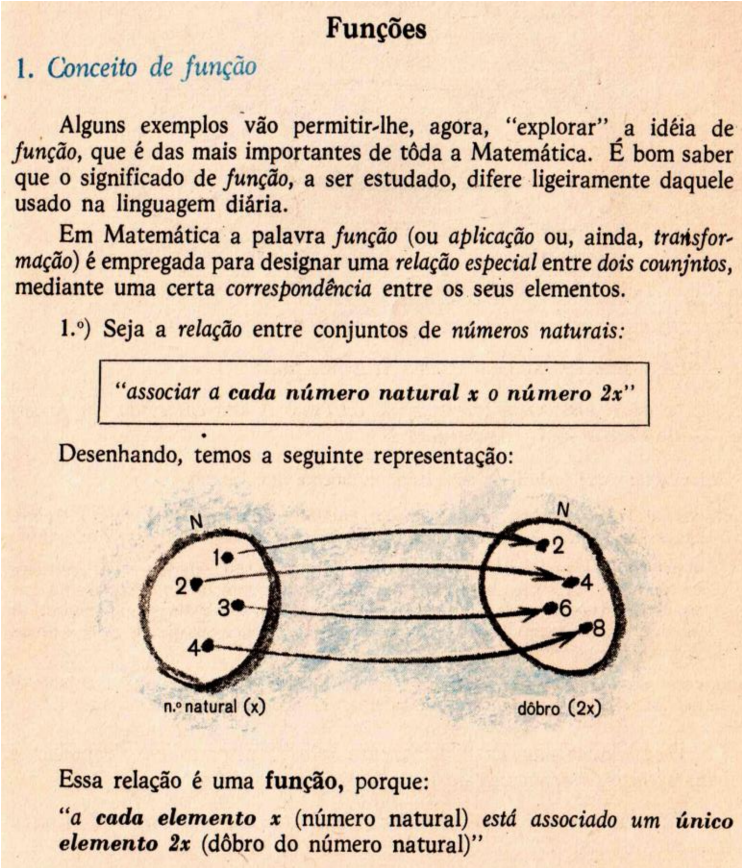
A terceira parte do segundo capítulo do livro é reservada a sistemas de equações e inequações, no entanto o autor optou por não fazer uso da representação gráfica da equação das retas na solução de problemas, pois essa abordagem, nos Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática, está organizada na quarta série do ginasial, como também na coleção de Osvaldo Sangiorgi.

3.2.2 A coleção *Matemática – Curso Moderno*: o conteúdo de funções

É no quarto volume da coleção Matemática: Curso Moderno, de Osvaldo Sangorgi, que o conteúdo de funções é explorado, conceituado e definido. O conceito de função parte da relação entre conjuntos, definido como uma estrutura. O autor faz referência ao conceito de função na carta ao estudante:

> Ao final deste volume, você ficará em posse de assuntos de Matemática relativos aos quatro anos de estudo do Ginásio. E não se esqueça: você estará incluído no primeiro grupo de jovens brasileiros que completa o seu curso ginasial conhecendo as belas *estruturas* da *Matemática Moderna*, a exemplo do que já vem ocorrendo nos grandes países civilizados de nossa época.
> Neste livro o conceito moderno de *função* é dominante, participando ativamente da Álgebra e da Geometria (SANGIORGI, 1968d, carta ao estudante, grifos do autor).

O conteúdo de funções está presente no segundo capítulo do quarto volume da coleção de Osvaldo Sangiorgi (ver ANEXO G), iniciando com uma breve discussão acerca do *conceito de função* (figura 26).



Funções

1. *Conceito de função*

Alguns exemplos vão permitir-lhe, agora, "explorar" a idéia de *função*, que é das mais importantes de tôda a Matemática. É bom saber que o significado de *função*, a ser estudado, difere ligeiramente daquele usado na linguagem diária.

Em Matemática a palavra *função* (ou *aplicação* ou, ainda, *transformação*) é empregada para designar uma *relação especial* entre *dois counjntos*, mediante uma certa *correspondência* entre os seus elementos.

1.º) Seja a *relação* entre conjuntos de *números naturais:*

"*associar a* ***cada número natural x*** *o* ***número 2x***"

Desenhando, temos a seguinte representação:

Essa relação é uma **função,** porque:

"*a* ***cada elemento x*** (número natural) *está associado um único* ***elemento 2x*** (dôbro do número natural)"

Figura 26: funções.
Fonte: SANGIORGI, 1968d, p. 67.

Osvaldo Sangiorgi traz como sinônimos da palavra *função* as palavras *aplicação* e *transformação* e, como se vê, introduz o conceito de função tratando diretamente da relação entre dois conjuntos, como uma "relação especial", mediante "certa correspondência". Para exemplificar esta relação, o livro conta com um exemplo e um contraexemplo, conceituando a função, desta maneira, intuitivamente (SANGIORGI, 1968d): "associar a cada criança o seu pai" (p. 68) como exemplo e "associar a cada pai o seu filho" (p. 69), como contraexemplo.

A definição de função é representada por conjuntos, relacionando cada elemento do conjunto *A* com o seu respectivo em *B* por meio de flechas, trazendo exemplos simples como "associar a cada elemento real x o número x^2". Esta definição por intermédio de conjuntos presente no livro de Osvaldo Sangiorgi consolidou-se no ensino de matemática no Brasil, segundo Mendonça e Oliveira (1999):

> Até os dias atuais, podemos reconhecer que as definições de função utilizam o conceito de conjunto de pares ordenados e são generalizações da definição de

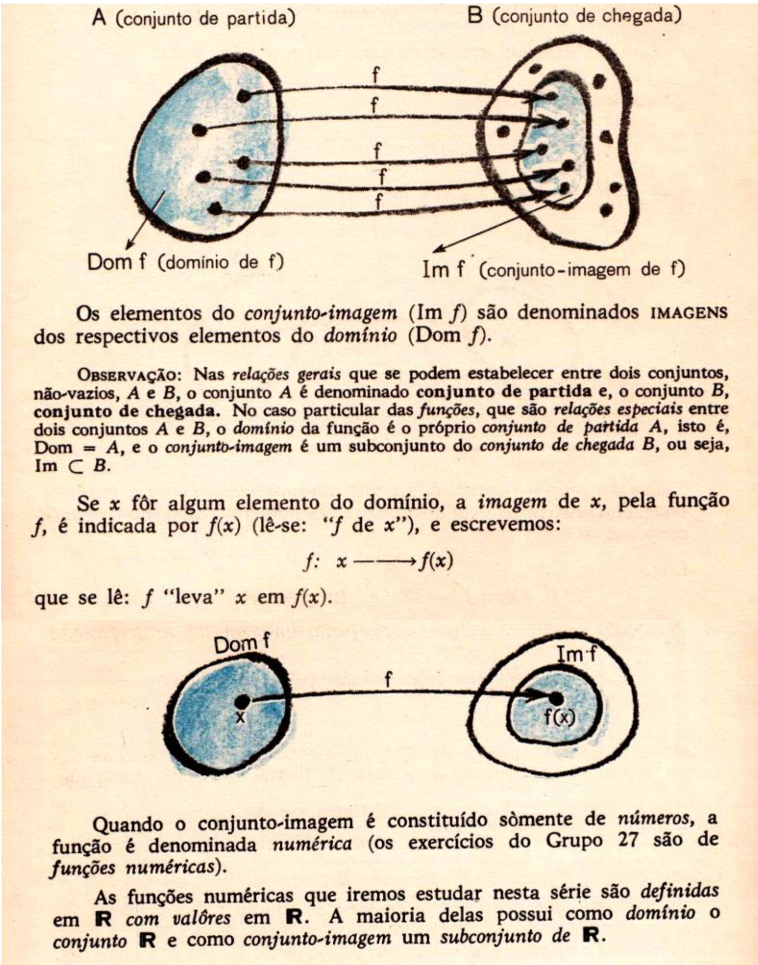
> Dirichlet. É comum nos textos matemáticos de cunho formalista, proposições tal como: Sejam os conjuntos *A* e *B*, de modo $\{(x,y) : x \in A,\ \ y \in B\}$ que denote o produto cartesiano de *A* por *B* representado por $A \times B$. Se para todo elemento *x* pertencente a *A*, existir um e somente um único elemento *y* pertencente a *B*, dizemos que o par ordenado (*x*, *y*) pertence à função.
> Na verdade, a referida concepção tornou-se um marco da inclusão do conceito de função nos currículos e livros didáticos de ensino fundamental e médio, mas especialmente no decorrer do Movimento da Matemática Moderna (MENDONÇA; OLIVEIRA, 1999, p. 37).

Mas, segundo Youschkevltch (1976, p. 38, tradução nossa),

> [...] a definição clássica de uma função incluída em quase todos os tratados atuais em análise matemática é geralmente atribuída a Dirichlet ou Lobatchevsky (1837 e 1834, respectivamente). No entanto, historicamente falando, essa opinião geral é imprecisa, porque o conceito geral de uma função como uma relação arbitrária entre pares de elementos, cada um destes tirado de seu próprio conjunto, foi formulado muito antes, na metade do século XVIII.

Os conceitos subjacentes à definição de função e suas diferentes representações, geométrica/gráfica e também algébrica, por meio de expressões/fórmulas ou através da teoria dos conjuntos, geram uma teia de relações. Para Youschkevltch (1976), a ideia de função, num sentido mais amplo, também está implicitamente contida em relações que envolvem o cálculo de áreas mesmo que das figuras mais simples, como retângulos, círculos, presentes desde o início da civilização e, também, nas primeiras tábuas de operações, utilizadas de modo a facilitar os cálculos.

Como já explorado, a formação do conceito de função, a sua compreensão e generalização se deram de forma gradual, no entanto, sua notação mais formal ocorreu somente com o advento da reestruturação da álgebra, a partir da metade do século XIX. A abordagem dada ao conceito de função no livro de Osvaldo Sangiorgi, quanto a sua “notação usual” e sua definição – através de diagramas de flecha e da relação entre dois conjuntos –, dá ao conteúdo de funções a face “moderna”, como mostra a figura 27.



A (conjunto de partida) B (conjunto de chegada)

f f f f f

Dom f (domínio de f) Im f (conjunto-imagem de f)

Os elementos do *conjunto-imagem* (Im *f*) são denominados IMAGENS dos respectivos elementos do *domínio* (Dom *f*).

OBSERVAÇÃO: Nas *relações gerais* que se podem estabelecer entre dois conjuntos, não-vazios, *A* e *B*, o conjunto *A* é denominado **conjunto de partida** e, o conjunto *B*, **conjunto de chegada.** No caso particular das *funções*, que são *relações especiais* entre dois conjuntos *A* e *B*, o *domínio* da função é o próprio *conjunto de partida A*, isto é, Dom = *A*, e o *conjunto-imagem* é um subconjunto do *conjunto de chegada B*, ou seja, Im $\subset$ *B*.

Se *x* fôr algum elemento do domínio, a *imagem* de *x*, pela função *f*, é indicada por *f*(*x*) (lê-se: "*f* de *x*"), e escrevemos:

$$f\colon\ x \longrightarrow f(x)$$

que se lê: *f* "leva" *x* em *f*(*x*).

Dom f Im f f x f(x)

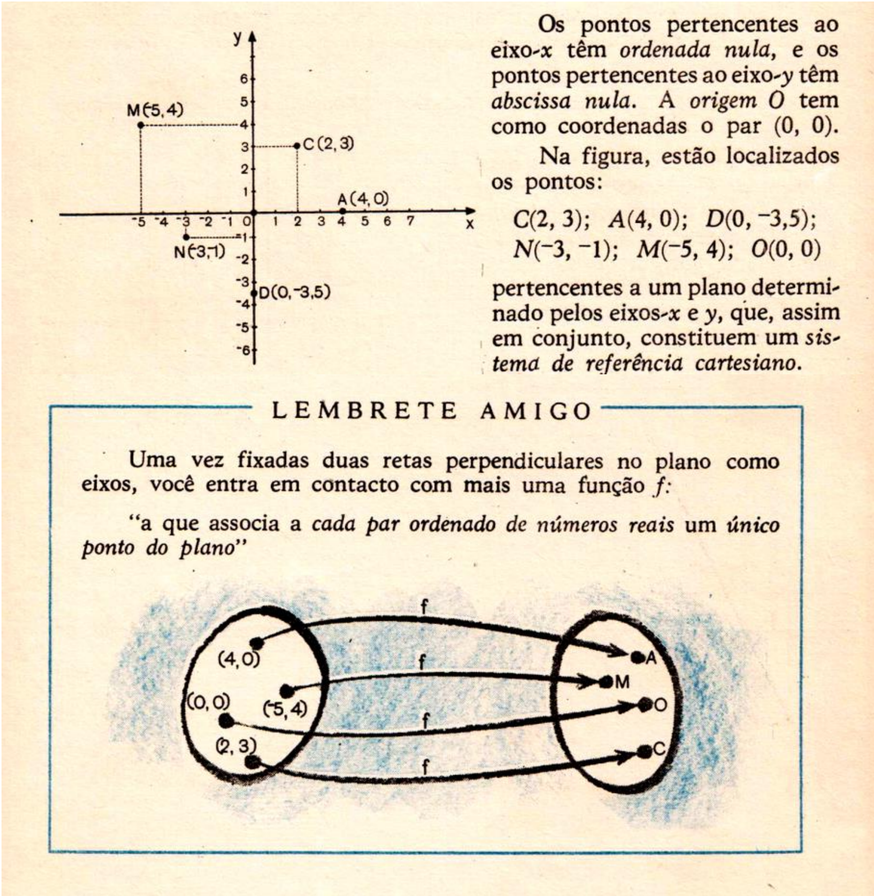
Quando o conjunto-imagem é constituído sòmente de *números*, a função é denominada *numérica* (os exercícios do Grupo 27 são de *funções numéricas*).

As funções numéricas que iremos estudar nesta série são *definidas* em **R** *com valôres* em **R**. A maioria delas possui como *domínio* o *conjunto* **R** e como *conjunto-imagem* um *subconjunto de* **R**.

Figura 27: notação e definição de função.
Fonte: SANGIORGI, 1968d, p. 77-78.

Nota-se que, no livro, uma vez estabelecidos valores para os conjuntos *A* e *B*, a função é tratada como *função numérica.* E, partindo-se de funções numéricas, estas são definidas por sentenças matemáticas que se "traduzem em equações", apresentadas no item três do segundo capítulo (parte 1) como, por exemplo, $y = 3x + 1$ em que $f\colon x \rightarrow 3x + 1$, "entendendo-se que a *qualquer* valor real *x* está associada a *imagem* $y = f(x) = 3x + 1$." (SANGIORGI, 1968d, p. 81, grifos originais).

Em seguida, no item quatro, intitulado *Gráfico das funções*, é apresentado, inicialmente, o plano cartesiano, fazendo-se uma leitura das relações entre os pares ordenados e suas respectivas localizações no plano, de maneira que esta relação seria (como posto em destaque no livro) "uma correspondência biunívoca (ou um a um) entre pares ordenados de números reais e pontos no plano" (SANGIORGI, 1968, p. 86). Nessa relação, o ponto é função dos pares ordenados (figura 28).



Os pontos pertencentes ao eixo-*x* têm *ordenada nula*, e os pontos pertencentes ao eixo-*y* têm *abscissa nula*. A *origem O* tem como coordenadas o par (0, 0).

Na figura, estão localizados os pontos:

$C(2, 3)$; $A(4, 0)$; $D(0, {}^-3{,}5)$; $N({}^-3, {}^-1)$; $M({}^-5, 4)$; $O(0, 0)$

pertencentes a um plano determinado pelos eixos-*x* e *y*, que, assim em conjunto, constituem um *sistema de referência cartesiano*.

LEMBRETE AMIGO

Uma vez fixadas duas retas perpendiculares no plano como eixos, você entra em contacto com mais uma função *f*:

"a que associa a *cada par ordenado de números reais* um *único ponto do plano*"

Figura 28: função dos pares ordenados.
Fonte: SANGIORGI, 1968d, p. 86-87.

No item cinco são trabalhados gráficos de funções definidas por equações com o domínio nos reais, onde, em uma tabela, são atribuídos valores reais a *x* para formar, como os valores de *y* correspondentes, pontos no plano cartesiano, possibilitando, assim, visualizar graficamente (geometricamente) o comportamento da função. A função $y = 2x$ serviu de exemplo para a construção da tabela e do gráfico (figura 29).

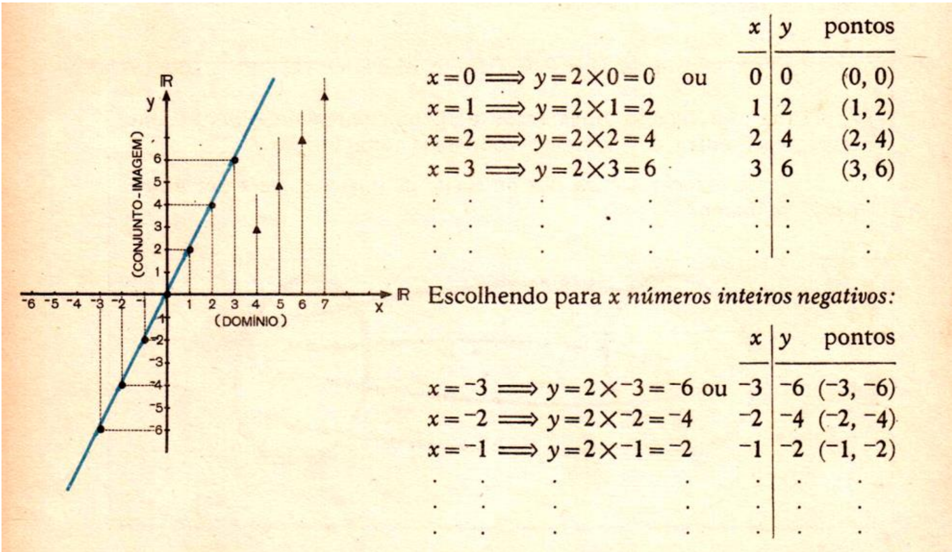
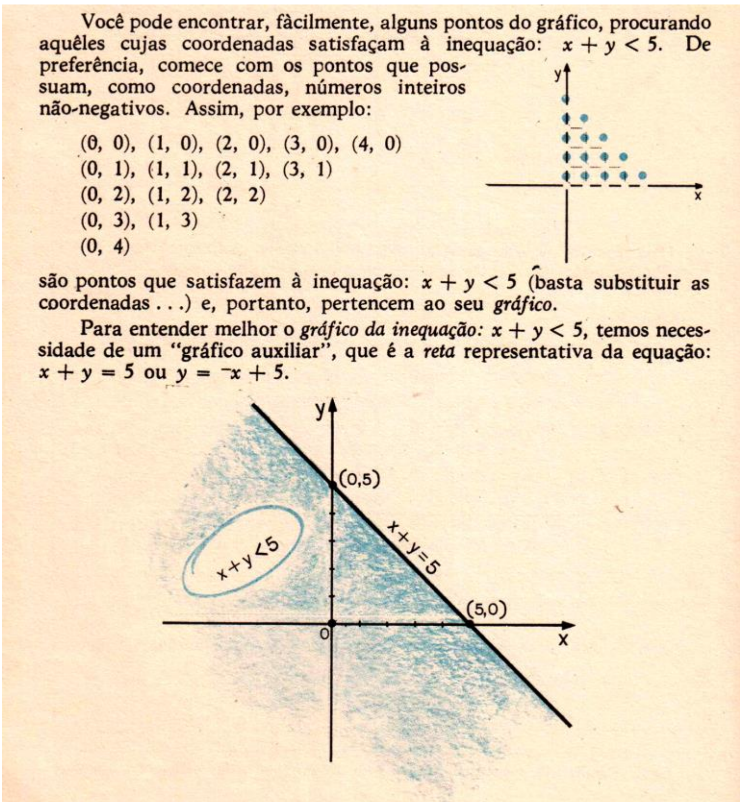


Figura 29: gráfico de funções.
Fonte: SANGIORGI, 1968d, p. 88.

Da mesma forma, atribuindo-se valores reais para *x*, é esboçado o gráfico da função $y = x^2 - x - 6$, ressaltando, em um “Lembrete amigo”, que a função do tipo $y = ax + b$, com $a \neq 0$, tem por gráfico uma reta e que a função $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, tem por gráfico uma parábola.

Na terceira parte do quarto capítulo, é definida a função linear $y = ax + b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, ou função afim, que é a composição da função $y = ax$ com uma translação *b* (assim indicado em rodapé pelo autor). Nos itens que seguem, ainda na terceira parte, são definidos a *raiz* da função, os *zeros* da função, juntamente ao estudo dos sinais de uma função linear, e a função constante. É dada, também, a aplicação da representação gráfica de uma função linear com o objetivo resolver problemas envolvendo sistemas de equações. O mesmo ocorreu no que se refere ao conteúdo de inequações (figura 30).



Você pode encontrar, fàcilmente, alguns pontos do gráfico, procurando aquêles cujas coordenadas satisfaçam à inequação: $x + y < 5$. De preferência, comece com os pontos que possuam, como coordenadas, números inteiros não-negativos. Assim, por exemplo:

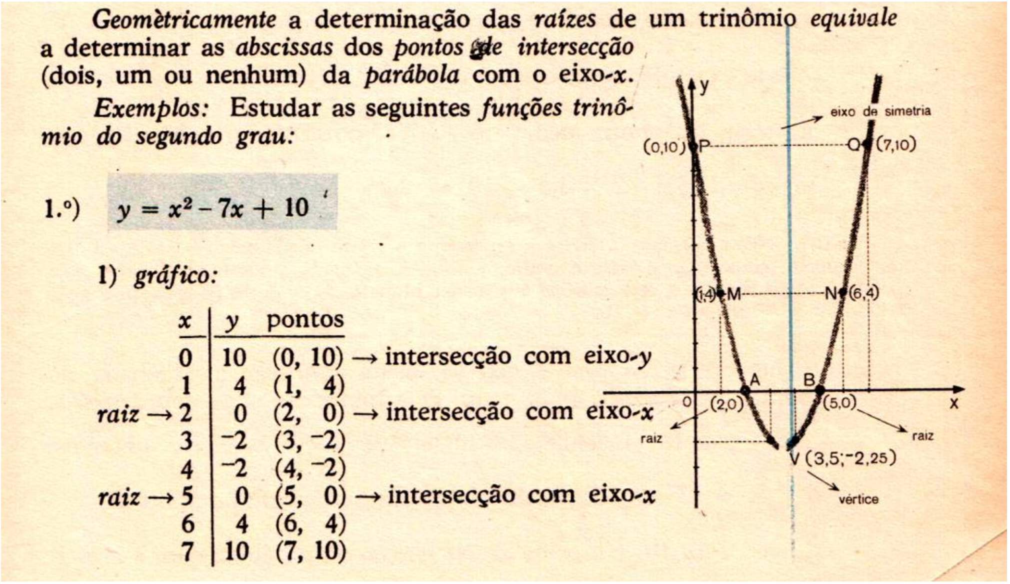
(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0)
(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1)
(0, 2), (1, 2), (2, 2)
(0, 3), (1, 3)
(0, 4)

são pontos que satisfazem à inequação: $x + y < 5$ (basta substituir as coordenadas . . .) e, portanto, pertencem ao seu *gráfico*.

Para entender melhor o *gráfico da inequação:* $x + y < 5$, temos necessidade de um "gráfico auxiliar", que é a *reta* representativa da equação: $x + y = 5$ ou $y = {}^{-}x + 5$.

Figura 30: gráfico de uma inequação do primeiro grau como duas variáveis.
Fonte: SANGIORGI, 1968d, p. 104.

Na quinta parte do quarto capítulo, é definida a *função trinômio do segundo grau* (ou função quadrática) do tipo $y = ax^2 + bx + c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Nos itens que seguem são trabalhados o gráfico da função (figura 31), as raízes e os principais pontos dessa função, como o vértice da parábola e o ponto onde o gráfico intercepta o eixo das ordenadas. É feito o estudo do discriminante (Δ) e sua relação com as raízes e, também, o estudo dos sinais de uma parábola.



Geomètricamente a determinação das *raízes* de um trinômio *equivale* a determinar as *abscissas* dos *pontos* de *intersecção* (dois, um ou nenhum) da *parábola* com o eixo-*x*.

Exemplos: Estudar as seguintes *funções trinômio do segundo grau:*

1.º) $y = x^2 - 7x + 10$

1) *gráfico:*

	x	*y*	pontos	
	0	10	(0, 10)	→ intersecção com eixo-*y*
	1	4	(1, 4)	
raiz →	2	0	(2, 0)	→ intersecção com eixo-*x*
	3	−2	(3, −2)	
	4	−2	(4, −2)	
raiz →	5	0	(5, 0)	→ intersecção com eixo-*x*
	6	4	(6, 4)	
	7	10	(7, 10)	

Figura 31: gráfico de funções do 2º grau.
Fonte: SANGIORGI, 1968d, p. 111.

O conteúdo referente a funções ocupa boa parte do quarto volume do livro de Osvaldo Sangiorgi, como pode ser visto, concentrando-se, explicitamente, no quarto volume, sendo que nos volumes anteriores foram trabalhados apenas alguns termos e definições que serviram para conceituar e definir uma função nesse último volume.

Portanto, uma vez estabelecido o conteúdo de funções como parte integrante do currículo do ensino secundário na década de 1930, esse, após a Reforma Capanema, passou de um conteúdo que tinha como objetivo primordial unificar as matemáticas, servindo de eixo para relacionar as diferentes matemáticas, para um conteúdo à parte, não mais presente nas primeiras séries do secundário. Com o advento da evolução da álgebra e a atenção à teoria dos conjuntos e às estruturas, o MMM se encarregou de trazer esses elementos para a discussão no âmbito educacional, resultando em uma nova notação para conceito de função, a notação por meio de conjuntos.

4 O CURRÍCULO DE MATEMÁTICA NO ENSINO BRASILEIRO NAS ÚLTIMAS DÉCADAS

A reforma do currículo de matemática ocorrida por volta de 1930, que foi o foco de parte deste estudo devido à atenção dada ao conceito de função no currículo do ensino secundário, tinha como finalidade aproximar a matemática do ensino secundário com a matemática acadêmica, fundamentada em justificativas que apontavam a necessidade de acompanhar as demandas sociais da época, dentre tantos outros aspectos que influenciaram e determinaram a educação, amplamente discutidos no início do século XX. O desenrolar do ensino secundário no Brasil da década de 1930 até o século XXI foi marcado por diversas reformas, e algumas dessas reformas foram exploradas, com mais apreço, nesta tese, como a reforma Gustavo Capanema e as leis orgânicas para o ensino em 1942, e também o Movimento da Matemática Moderna nas décadas de 1950 e 1960, que, de certa forma, tentou aproximar a matemática escolar da matemática científica em ascensão na época, principalmente das últimas realizações no campo da álgebra abstrata.

Portanto, como um dos principais motivos que levaram à constituição do currículo de matemática no Brasil, e ainda à constituição da educação matemática como campo de conhecimento distinto, tem-se, fundamentalmente, a preocupação de matemáticos e professores de matemática sobre a qualidade e o impacto da socialização e divulgação das ideias matemáticas às novas gerações.

Muitos estudos evidenciaram esta preocupação, que pode ser demarcada ao final do século XIX, envolvendo o grande avanço da indústria e a transição de uma sociedade rural para uma sociedade industrial e a necessidade de se fazer uma reforma no ensino para dar conta de uma nova perspectiva de trabalho (Felix Klein, na Alemanha, e os primeiros congressos internacionais para o ensino de matemática, mais para o início do século XX, como visto).

Também se deve às universidades europeias que promoveram, ao final do século XIX, a formação para professores secundários, e, consequentemente, especialistas universitários no ensino de matemática. E ainda se tem uma quantidade expressiva de estudos experimentais desenvolvidos por psicólogos americanos e europeus, desde o início do século XX, sobre como as crianças aprendiam matemática (FIORENTINI; LORENZATO, 2006).

Um salto significativo na constituição da Educação Matemática como um campo de conhecimento distinto se deu no âmbito do Movimento da Matemática Moderna (MMM). Os primeiros congressos para o Ensino de Matemática no Brasil, como apresentados nessa tese, fomentaram as discussões acerca da modernização do ensino de matemática no Brasil no final da década de 1950, resultando em expressivas pesquisas no campo da Educação Matemática nas décadas de 1950 e 1960 – a partir daí se deu a introdução no âmbito escolar de uma linguagem "moderna", em nível secundário, linguagem esta pautada na álgebra abstrata e bastante formal e a elaboração dos *Assuntos Mínimos*.

Muitas críticas (Morris Klein[17]) se fizeram presentes acerca da abordagem dada à matemática escolar na perspectiva da MM, fazendo com que a estrutura matemática como conteúdo primordial e unificador da matemática perdesse o foco, prevalecendo apenas a teoria dos conjuntos.

No final da década de 1970 e durante a década de 1980, foi constituída a SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática), e neste período também surgem os primeiros programas de pós-graduação em Educação Matemática. No ano de 2005, já podem ser conferidos mais de mil trabalhos, entre dissertações e teses, no campo da Educação Matemática (FIORENTINI; LORENZATO, 2006).

A década de 1980, após o período de ditadura militar, foi demarcada pela Constituição de 1988, fomentando os movimentos sociais a se consubstanciarem em entidades e instituições. Esta década, para Arelaro (2000, p. 95), "[...] foi um década extremamente rica em termos de realizações educacionais e de disputa política pela redemocratização da sociedade brasileira", refletindo na década de 1990, quando uma nova LDB foi instituída e uma proposta curricular de âmbito nacional foi definida: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais foram elaborados procurando, de um lado, respeitar diversidades regionais, culturais, políticas existentes no país e, de outro, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Com isso, pretende-se criar condições, nas escolas, que permitam aos nossos jovens ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício da cidadania.
> Os documentos apresentados são o resultado de um longo trabalho que contou com a participação de muitos educadores brasileiros e têm a marca de suas experiências e de seus estudos, permitindo assim que fossem produzidos no contexto das discussões pedagógicas atuais. Inicialmente foram elaborados documentos, em versões preliminares, para serem analisados e debatidos por professores que atuam em diferentes graus de ensino, por especialistas da educação e de outras áreas, além de instituições governamentais e não-governamentais. As críticas e sugestões apresentadas contribuíram para a elaboração da atual versão, que deverá ser revista periodicamente, com base no acompanhamento e na avaliação de sua implementação (BRASIL, 1998, p. 5).

Para Mello (2004, p. 21), "desde meados do século XX estão ocorrendo profundas mudanças na educação básica brasileira", mudanças ainda decorrentes da expansão quantitativa

[17] Autor do emblemático livro *O Fracasso da Matemática Moderna*.

do ensino básico, resultante da demanda de acesso à escola, que ocorreu a partir da metade do século XX. “O crescimento quantitativo e os problemas dele decorrentes e os debates suscitados ocorrem no contexto da abertura política e da redemocratização vividas pelo país nos anos de 1970 e 1980”.

Só em 1996, já no Governo de Fernando Henrique Cardoso, é que foi promulgada a nova LDB. Para Mello (2004, p. 23), a nova LDB, além de incorporar lições aprendidas com as iniciativas municipais e estatuais de reforma gerencial e pedagógica da década de 1980, introduziu novos paradigmas curriculares pedagógicos em sintonia com as reformas educacionais correntes.

4.1 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DE MATEMÁTICA, TERCEIRO E QUARTO CICLOS: O CONTEÚDO DE FUNÇÕES

Os PCNs para o ensino básico da 1ª a 4ª série e, separadamente, de 5ª a 8ª (atualmente 6º a 9º anos), são organizados em ciclos de dois anos (séries) cada, sendo que o primeiro ciclo se refere à primeira e segunda séries; o segundo, à terceira e quarta séries; o terceiro ciclo, à quinta e sexta séries, e o quarto ciclo, à sétima e oitava séries, todos contendo dez volumes. Portanto, são analisados a seguir os PCNs de terceiro e quarto ciclos referentes à matemática, por terem abrangência equivalente, ao menos pela faixa etária dos estudantes, às primeiras séries (anos) do ensino secundário ou ao ensino ginasial, e por reservar espaço às primeiras noções do conteúdo de função, atualmente abordadas nos livros didáticos do 9º ano, como será visto a seguir.

O documento organiza-se da seguinte maneira: volume 01, Introdução aos PCNs; volume 02, Língua Portuguesa; Volume 03, Matemática; volume 04, Ciências Naturais; volume 05, Geografia; volume 06, História; volume 07, Arte; volume 08, Educação Física; volume 09, Língua Estrangeira, e volume 10, Temas Transversais (subdividido em um volume para cada tema: Pluralidade Cultural, Meio Ambiente, Saúde, Orientação Sexual).

Os PCNs de matemática de terceiro e quarto ciclos fazem referência ao conceito de função pela primeira vez no capítulo intitulado *Conteúdos de Matemática para o ensino fundamental*, mais precisamente no subcapítulo *Seleção de conteúdos*, onde os conteúdos são apresentados em quatro blocos[18], e na descrição do primeiro bloco, *Números e Operações*, o conceito de função é mencionado dentro da possibilidade de se fazer o uso da álgebra junto aos

[18] Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Tratamento da Informação.

números e operações, mas assegurando que o mesmo só será explorado no terceiro e quarto ciclos com a importância de noção, pois "deverá" ter sua definição formal apenas no ensino médio:

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe" (regras para resolução) de uma equação.
> Esse encaminhamento dado à Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas, possibilita a exploração da **noção de função** nos terceiro e quarto ciclos. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio. (BRASIL, 1998, p 50-51, grifo do autor)

Sobre o bloco *Grandezas e Medidas*, tais conteúdos, segundo os PCNs (BRASIL, 1998, p. 42), "proporcionarão contextos para analisar a interdependência entre grandezas e expressá-la algebricamente", em outras palavras, proporcionam explorar o conceito de função também. E, ao tratar especificamente do terceiro ciclo (6º e 7º anos), "referindo-se aos conceitos e procedimentos" dos conteúdos presentes no primeiro bloco, Números e Operações, os PCNs (BRASIL, 1998, p. 72) sugerem a "compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas".

Sobre os objetivos de matemática para o quarto ciclo, os PCNs reservam à exploração intuitiva do conceito de função matemática, especificamente em relação ao "pensamento algébrico, por meio da exploração de situações-problema", a competência do aluno em "observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis" (BRASIL, 1998, p. 81). Sobre os conteúdos propostos para o ensino de matemática no quarto ciclo, está indicado, ao se trabalhar com álgebra, que "[...] é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função", isto para "a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) [...]" (BRASIL, 1998, p. 84).

Segundo os Parâmetros Curriculares, referente à noção de proporcionalidade, esta poderá ser desenvolvida pelo aluno "ao analisar a natureza da interdependência de duas grandezas em situações-problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais (função afim ou quadrática)" (p. 84-85). Da mesma maneira, como conceitos e procedimentos, referentes ao primeiro bloco tem-se:

> Identificação da natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (afim ou quadrática), expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e representando-a no plano cartesiano (BRASIL, 1998, p. 87).

Referente ao bloco de Grandezas e Medidas, os PCNs propõem a “análise das variações do perímetro e da área de um quadrado em relação à variação da medida do lado e construção dos gráficos cartesianos para representar essas interdependências” (BRASIL, p. 90).

No capítulo *Orientações didáticas para terceiro e quarto ciclos*, no bloco dos Números e Operações, ao tratar especificamente da álgebra, é feito referência ao conceito de função como se este sempre tivesse ocupado o mesmo espaço no currículo da disciplina, afirmando que o lugar deste conceito é “tradicionalmente” no ensino médio:

> Existem também professores que, na tentativa de tornar mais significativa a aprendizagem da Álgebra, simplesmente deslocam para o ensino fundamental conceitos que tradicionalmente eram tratados no ensino médio com uma abordagem excessivamente formal de funções. Convém lembrar que essa abordagem não é adequada a este grau de ensino.

Além do mais, o conceito de função é interpretado, no ensino fundamental, como uma dimensão funcional da álgebra (figura 32), relacionada à variação de grandezas.

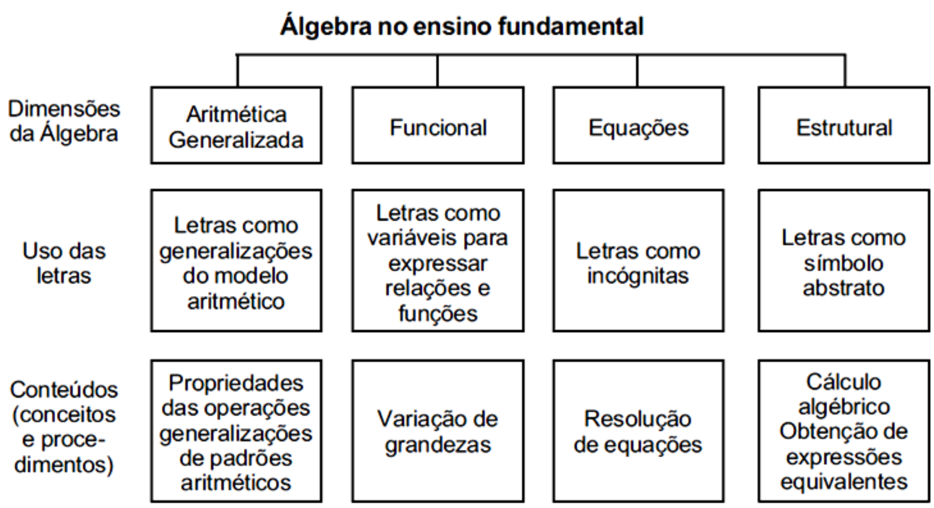


Figura 32: as diferentes dimensões da álgebra escolar e as diferentes funções das letras.
Fonte: BRASIL, 1998, p. 116.

Souza (2013), em sua dissertação de mestrado, realizou uma breve revisão da literatura que envolvia o estudo de álgebra em âmbito escolar no Brasil, constatando que muitas pesquisas desenvolvidas nos últimos anos sobre a álgebra escolar firmaram-se nas concepções do professor Zalman Usiskin, professor emérito da Universidade de Chicago, que desenvolveu diversos estudos acerca da álgebra na escola. Segunda a autora a semelhança entre o quadro que expõe as dimensões da álgebra nos PCNs (figura 32) e as concepções da álgebra de Zalman Usiskin "[...] é um indício de que existe uma influência americana direta sobre o currículo brasileiro do Ensino Fundamental" (SOUZA, 2013, p. 36). Além do mais, o artigo de Usiskin, intitulado *Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis*, faz parte do livro *As ideias da Álgebra*, presente nas referências bibliográficas dos PCNs para o ensino fundamental.

Usiskin (1999, p. 12) apresenta o seguinte quadro em relação às concepções de álgebra, afirmando que "as diferentes concepções de álgebra estão relacionadas a diferentes usos de varáveis":

Quadro 1: concepções de Álgebra, segundo Usiskin (1999)

Concepções da álgebra	***Uso das letras***
Aritmética generalizada	Generalizadores padrões (traduzir, generalizar)
Meios/procedimentos para resolver determinados problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo das relações entre quantidades	Argumentos, parâmetros, sendo um *argumento* um valor de domínio de uma função e um *parâmetro* um número do qual outros números dependam. (relacionar, gráfico)
Estrutura	Marcas arbitrárias no papel, como o estudo das relações arbitrárias entre símbolos. (manipular, justificar)

Fonte: USISKIN (1999, traduzido, adaptado)

Souza (2013) mostra um quadro comparativo entre as concepções de álgebra de Usiskin e as concepções de álgebra presentes nos PCNs:

Quadro 2: concepções de álgebra de Usiskin x PCN.

CONCEPÇÕES DA ÁLGEBRA (USISKIN)/	**USO DA LETRA**

DIMENSÕES DA ÁLGEBRA (PCN)[19]			
Usiskin	**PCN**	**Usiskin**	**PCN**
Aritmética generalizada		Generalizar modelos	Generalizações de modelos aritméticos
Estudo de procedimentos para resolver problemas	Equações	Incógnitas e Constantes	Incógnitas
Estudo de relações entre grandezas	Funcional	Argumentos e Parâmetros	Variáveis para expressar relações e funções
Estudo das estruturas	Estrutural	Sinais arbitrários no papel	Símbolo abstrato

Fonte: SOUZA, 2013, p. 35 (adaptado).

Para Usiskin (1999), é somente quando se toma uma variável como um argumento (ou seja, representando um valor do domínio de uma função) ou um parâmetro (ou seja, representando um número do qual outros números dependam) que é possível tratar especificamente de variáveis dependentes e independentes. Nesse ponto, concebendo a álgebra *como o estudo das relações entre quantidades*, o conteúdo de funções surge de imediato, pela necessidade de se ter um “nome” para valores que dependem do argumento ou parâmetro *x*.

Há de se ter cuidado com os termos usados pelos autores acima citados, pois Usiskin (1999) não aponta o conteúdo de funções como uma “dimensão” da álgebra, mas sim que uma das concepções da álgebra se dá através do estudo de variáveis, ou propriamente de funções, diferente dos PCNs, que se referem ao conteúdo de funções como uma dimensão funcional da Álgebra.

Segundo Barbosa (2008, p. 9):

> Na perspectiva dos PCNs de Matemática para o terceiro e quarto ciclos o conceito de função é entendido como uma das diferentes interpretações para álgebra, ou para as letras; **como um articulador entre diferentes conteúdos** (conceitos e procedimentos); como um forte exemplo da Matemática aplicada à solução de situações-problema concretas ou como exemplo de aplicação da matemática a outras áreas do conhecimento.
> Nessa proposta é também apresentada uma forma não linear de abordagem desse conceito, visto que ele deve ser apresentado em diferentes situações em vários conteúdos (conceito e procedimentos) devendo apenas ser sistematizado no quarto ciclo. O documento em todos os momentos tem chamado a atenção principalmente para o desenvolvimento **da noção de variável**.

Para os PCNs, a função matemática passa a ser, no ensino fundamental, a “ideia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades”, “padrões” ou “generalizações”,

---

19 No quadro original de Souza (2013) consta apenas “Concepções da Álgebra”, alterado para manter a terminologia tal como USISKIN e os PCNs fizeram uso.

desde que envolvidas em situações onde se tenha variáveis ao invés de incógnitas, como, por exemplo, "investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas" (figura 33), onde $n^2 - n$ representa o número de quadradinhos brancos da n-ésima figura, sendo possível verificar, ainda, que os quadradinhos brancos de cada figura, a partir da segunda, podem formar um retângulo de $n \cdot (n - 1)$ quadradinhos brancos, permitindo aos alunos constatar a equivalência entre ambas as expressões[20].

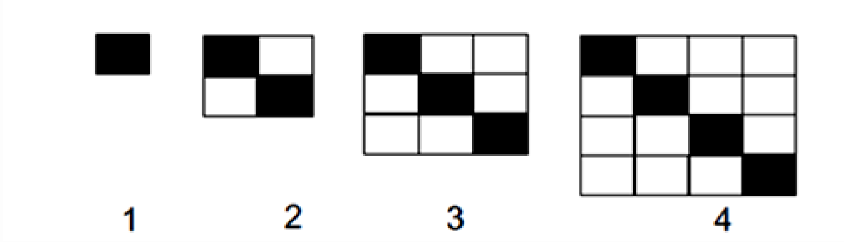


Figura 33: estrutura de uma representação geométrica.
Fonte: BRASIL,1998, p. 117.

Ou, ainda, ao pedir para que os alunos "adivinhem a regra para transformar números, inventada pelo professor, como: um aluno fala 3 e o professor responde 8, outro fala 5 e o professor 12, para o 10 o professor responde 22, para o 11, responde 24 etc", discutindo, ao final, representações do tipo "y = 2x + 2 ou y = 2(x + 1)" (BRASIL, 1998, p. 118).

No texto, o foco do estudo das regularidades e generalizações, representadas algebricamente, tem como objetivo primordial reconhecer o uso de letras como sendo variáveis, diferenciando do seu uso como incógnita. Seja na aritmética ou na geometria, a relação de interdependência entre variáveis, segundo os PCNs, se tratada de forma intuitiva, fazendo-se uso de planilhas e gráficos mediante situações-problema concretas, possibilita desenvolver a noção de função:

> A introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas permite que o aluno veja uma outra função para as letras ao identificá-las como números de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações.
> Além disso, situações-problema sobre variações de grandezas fornecem excelentes contextos para desenvolver a noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Os alunos podem, por exemplo, estabelecer como varia o perímetro (ou a área) de um quadrado, em função da medida de seu lado; determinar a expressão algébrica que representa a variação, assim como esboçar o gráfico cartesiano que representa essa variação (BRASIL, 1998, 118).

---

[20] Mantendo-se as mesmas proporções do texto original na figura w, nota-se, que as figuras tratam de retângulos e não quadrados, talvez a figura possa ter perdido suas proporções originais na arte final do material.

Outro exemplo de abordagem da álgebra como uma linguagem para expressar regularidades sugerido pelos PCNs tem como princípio mostrar aos alunos “as vantagens de determinar expressões algébricas para o preenchimento de planilhas”, através de situações-problema como a de compor um tabela para calcular o preço de uma determinada linha de produtos dando uma margem de lucro de 40% sobre o de custo de cada uma (Figura 34).

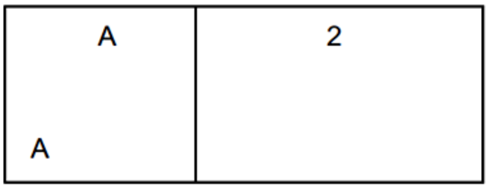
Produto	**P**: preço de custo (R$)	**V**: preço de venda (R$)
I	2,80	2,80 + 2,80 x 0,4 = 3,92
II	5,00	5,00 + 5,00 x 0,4 = 7,00
III	8,25	8,25 + 8,25 x 0,4 = 11,55
IV	9,45	9,45 + 9,45 x 0,4 = 13,23
V	10,00	2 x 7,00 = 14,00
	....	...
	P	P + P x 0,4

Figura 34: preço de venda (V) dos produtos em função do preço de custo (P).
Fonte: BRASIL, 1998, p. 119

De acordo com os PCNs, “O aluno poderá descrever oralmente os procedimentos e em seguida empregar a noção de variável para indicar genericamente o preço de venda (V) dos produtos em função do preço de custo (P): V = P + P x 0,4” (BRASIL, 1998, p. 119). E com o intuito de fazer com que o aluno perceba a diferença do uso de letras na álgebra quando estas representam variáveis ou incógnitas, pode-se lançar mão de questões do tipo “qual é o preço de custo de uma mercadoria que tem o preço de venda R$ 11,20?” (BRASIL, 1998, p. 119), onde o **P**, na expressão (equação) P + P x 0,4 = 11,20, passa a ser uma incógnita.

Dentre outras abordagens ainda sugeridas pelos PCNs ao tratar de álgebra, é ressaltada a visualização de expressões algébricas através do cálculo de área e perímetro de retângulos, sendo que essa visualização, de acordo como os PCNs, pode facilitar a aprendizagem de noções algébricas, como mostra a figura 35.

.



1º) Cálculo da área do retângulo pela multiplicação das dimensões do retângulo: a e a+2: a.(a + 2).

Obtendo-se assim a.(a + 2) = a² + 2a.

2º) Cálculo da área do retângulo pela soma das áreas das figuras que o compõem, o quadrado e o retângulo menor: a² + 2a.

Figura 35: “visualização” geométrica do cálculo de área.
Fonte: BRASIL, 1998, p. 212

Nota-se que, no exemplo dado (figura 35), são definidas expressões algébricas que possibilitam calcular o perímetro e a área de figuras planas simples em função das medidas de seus lados.

Ao final, os PCNs não trazem, em momento algum, as relações entre variáveis, mesmo que no campo da álgebra funcional, para o contexto da teoria dos conjuntos. O documento se posicionou contrariamente diante dessa abordagem para ensino fundamental a discorrer rapidamente sobre as reformas curriculares para o ensino de matemática no Brasil, criticando os fundamentos das reformas propostas no âmbito do MMM:

> O ensino proposto fundamentava-se em grandes estruturas que organizam o conhecimento matemático contemporâneo e enfatizava a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a topologia etc. Esse movimento provocou, em vários países, inclusive no Brasil, discussões e amplas reformas no currículo de Matemática.
> No entanto, essas reformas deixaram de considerar um ponto básico que viria tornar-se seu maior problema: o que se propunha estava fora do alcance dos alunos, em especial daqueles das séries iniciais do ensino fundamental.
> O ensino passou a ter preocupações excessivas com formalizações, distanciando-se das questões práticas. A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, enfatizava o ensino de símbolos e de uma terminologia complexa comprometendo o aprendizado do cálculo aritmético, da Geometria e das medidas.
> No Brasil, o Movimento Matemática Moderna, veiculado principalmente pelos livros didáticos, teve grande influência, durante longo período, só vindo a refluir a partir da constatação de inadequação de alguns de seus princípios básicos e das distorções e dos exageros ocorridos. (BRASIL, 1998, p. 19-20).

Mesmo que os PCNs tenham condenado a linguagem da teoria dos conjuntos, ao conteúdo de funções foram agregados elementos dessa linguagem que resistiram ao tempo, desconsiderando, em parte, as orientações curriculares atuais. Será possível verificar esta condição, dentre outras expostas no PCN referentes ao conteúdo de funções, na contemporaneidade do ensino de matemática, através dos livros didáticos a serem distribuídos em todo o Brasil no ano de 2014.

4.2 O PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO (PNLD)

O livro didático de matemática acompanha o ensino da disciplina no Brasil desde o século XVIII, constituindo, juntamente com os professores de cada época, o ideário do que seria a matemática “ensinável”. Com o ensino militar obrigatório a todo oficial a partir de 1738, o militar português José Fernandes Pinto Alpoim, designado ao Brasil para atuar na formação de militares, escreveu dois livros que vieram a ser, possivelmente, segundo Valente (2008a, p. 141), “[...] os primeiros livros didáticos de matemática escritos no Brasil: Exame de Artilheiros e Exame de Bombeiros, em 1744 e 1748, respectivamente”. Para Valente (2008a):

> A dependência de um curso de matemática aos livros didáticos, portanto, ocorreu desde as primeiras aulas que deram origem à matemática hoje ensinada na escola básica, como vimos na instituição da própria disciplina de matemática no Brasil e sua relação com a coleção de livros didáticos de Euclides Roxo. Desde os seus primórdios, ficou assim caracterizada, para a matemática escolar, a ligação direta entre compêndios didáticos e desenvolvimento de seu ensino no país. (VALENTE, 2008a, p. 141)

Já, segundo D’Ambrósio (2008), o primeiro registro que se tem de uma produção matemática no Brasil, já impressa, data de 1801. Mesmo que de forma ainda pouco representativa, a possibilidade de se encontrar conteúdos programáticos da disciplina de matemática já em materiais impressos há pouco mais de dois séculos indica a importância que era dada à “materialização” de conteúdos e metodologias para o ensino de matemática.

O livro didático no Brasil já recebia atenção especial desde a década de 1930, dada por órgãos vinculados ao Ministério da Educação (MEC), através de decretos e leis que contribuíam para a publicação, importação e utilização de livros didáticos nas escolas, e, em 1945, o Decreto-Lei nº 8460 centralizou na esfera federal o poder de legislar sobre o livro didático. Dentre alguns destes órgãos tem-se: a Fundação Nacional de Material Escolar (Fename), 1967, o programa de coedição com as editoras nacionais, por intermédio da Portaria Ministerial nº 35/70, 1970 e o Instituto Nacional do Livro (INL), 1972, juntamente com o Programa do Livro Didático (Plid), programa especial de coedição de livros didáticos (BRASIL, [2013a]).

Em 1976, à Fename foi delegada a responsabilidade de desenvolver as atividades dos programas de coedição de livros didáticos, levando ao aumento da tiragem dos livros e à criação de um mercado seguro para as editoras, decorrente do interesse do governo federal em obter boa parte dessa tiragem para distribuí-la gratuitamente às escolas e às bibliotecas das unidades federadas. No ano de 1984, o sistema de coedição se extinguiu e o MEC passou a ser comprador dos livros produzidos pelas editoras participantes do Plid (BRASIL, [2013a]).

Na década de 1980, mais precisamente, em 1985, foi instituído o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Segundo o Ministério da Educação (MEC):

> O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica. Após a avaliação das obras, o Ministério da Educação (MEC) publica o Guia de Livros Didáticos com resenhas das coleções consideradas aprovadas. O guia é encaminhado às escolas, que escolhem, entre os títulos disponíveis, aqueles que melhor atendem ao seu projeto político-pedagógico.
> O programa é executado em ciclos trienais alternados. Assim, a cada ano o MEC adquire e distribui livros para todos os alunos de um segmento, que pode ser: anos iniciais do ensino fundamental, anos finais do ensino fundamental ou ensino médio. À exceção dos livros consumíveis, os livros distribuídos deverão ser conservados e devolvidos para utilização por outros alunos nos anos subsequentes (BRASIL, [2013b]).

De acordo com o MEC, ficam responsáveis pela escolha do livro didático os professores e a equipe pedagógica de cada escola, tendo ainda à disposição o Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), como material para orientar a escolha. É sugerido que o livro didático seja “[...] adequado ao projeto político-pedagógico da escola; ao aluno e professor, e à realidade sociocultural das instituições (BRASIL, [2013b]), devendo, cada escola, indicar duas coleções, cuja demanda indicará qual coleção fica reservada à escola entre as duas indicadas.

5 O CONTEÚDO DE FUNÇÕES NOS LIVROS DIDÁTICOS INDICADOS PELO DO PNLD PARA O ANO DE 2014

O Edital de convocação para o processo de inscrição e avaliação de coleções didáticas para o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2014 teve como "Princípios e critérios de avaliação para o componente curricular Matemática" alguns elementos gerais referentes ao ensino de matemática, expostos em onze itens (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, p. 65-66):

> 1. usar com autonomia o raciocínio matemático, para a compreensão do mundo que nos cerca;
> 2. raciocinar, fazer abstrações com base em situações concretas, generalizar, organizar e representar;
> 3. planejar ações e projetar soluções para problemas novos, que exigem iniciativa e criatividade;
> 4. resolver problemas, criando estratégias próprias para sua resolução, ou utilizando estratégias convencionais, desenvolvendo a imaginação e a criatividade;
> 5. compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação;
> 6. estabelecer relações entre os campos da Matemática e entre esses e outros campos do saber;
> 7. relacionar conceitos e estratégias de diferentes campos matemáticos, sendo capaz de identificar diferentes formas ou abordagens para resolver problemas;
> 8. interpretar matematicamente situações do dia a dia, e também do mundo tecnológico e científico;
> 9. avaliar se resultados obtidos na solução de situações-problema são ou não razoáveis;
> 10. fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados;
> 11. utilizar as novas tecnologias da informação e da comunicação.

Quanto aos conteúdos especificamente, o documento apenas ressalta que:

> A escolha de conteúdos adequados à sociedade atual, que possam prover instrumentos eficazes para a resolução de problemas, deve ser valorizada e efetivamente trabalhada no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2011, p. 67).

As coleções aprovadas pelo programa foram: *Descobrindo e Aplicando a Matemática*, de Alceu dos Santos Mazzieiro e Paulo Antônio F. Machado; *Matemática – Bianchini*, de Edwaldo Roque Bianchini; *Matemática – Ideias e Desafios*, de Dulce Satiko Onaga e Iracema Mori; *Matemática – Imenes & Lellis*, de Luiz Márcio Pereira Imenes e Marcelo Cestari Terra Lellis; *Matemática: teoria e contexto*, de Marília Ramos Centuríon e José Jakubovic; *Praticando Matemática: edição renovada*, de Álvaro Andrini e Maria José C. de V. Zampirolo; *Projeto Araribá – Matemática*, de Fabio Martins de Leonardo; *Projeto Teláris – Matemática*, de Luiz Roberto Dante; *Projeto Velear – Matemática*, de Antonio José Lopes e *Vontade de Saber Matemática*, de Patricia Rosana M. Pataro e Joamir Roberto de Souza.

O PNLD disponibiliza aos professores e interessados um guia para a escolha do livro didático de matemática, trazendo uma resenha sobre cada coleção com os seguintes tópicos: *Visão geral*, *Descrição da obra* e *Análise da obra - abordagem dos conteúdos matemáticos*. Esse último tópico é subdividido em: *Seleção e distribuição dos conteúdos*, *Metodologia de ensino e aprendizagem*, *Contextualização* e *Linguagem e aspectos gráfico-editoriais*.

No Guia disponibilizado pelo Programa, no tópico *Visão geral*, são expostos os conteúdos trabalhados nas coleções, separados/distribuídos por ano (6º ano ao 9º ano). De acordo com esse material, o conteúdo de função, em todas as coleções, localiza-se no 9º ano. No subtítulo *Seleção e distribuição dos conteúdos*, presente na resenha de cada coleção, é feita uma análise percentual sobre o espaço destinado a cada *campo da matemática escolar*, sendo esses campos: Números e Operações, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Estatística e Probabilidade – semelhantes às categorias propostas nos PCNs, que separa os conteúdos em quatro blocos: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Tratamento da Informação, como visto anteriormente. O Guia traz como uma de suas referências, em suas *Considerações gerais*, os PCNs (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2013, p. 9).

O Guia comenta sobre o estudo/conteúdo/conceito de função pontualmente no campo da Álgebra, em sete das dez coleções, indo ao encontro do que ficou explícito nos PCNs, ou seja, que o conceito de função é interpretado, no ensino fundamental, como visto anteriormente, como uma dimensão funcional da álgebra, relacionado à variação de grandezas. O quadro abaixo (quadro 3) apresenta o parecer sobre o conteúdo de funções presente no Guia para as sete coleções onde houve essa ocorrência:

Quadro 3: o conteúdo de funções na campo da Álgebra – Guia PNLD 2014: Matemática (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2013)

Coleção	Campo da Álgebra
Descobrindo e Aplicando a Matemática, de Alceu dos Santos Mazzieiro e Paulo Antônio F. Machado.	“[...] não são devidamente valorizadas as articulações entre diferentes representações de um mesmo conceito, como no caso das diferentes representações – algébrica gráfica e tabelas – do **conceito de função** (p. 28)”.
Matemática – Bianchini, de Edwaldo Roque Bianchini.	
Matemática – Ideias e Desafios, de Dulce Satiko Onaga e Iracema Mori.	“[...] algumas atividades destinadas à generalização de padrões ou ao estabelecimento de fórmulas são pouco aprofundadas. O trabalho com equações enfatiza a modelagem de problemas, o que é positivo. No entanto, no **estudo das funções**, as discussões sobre o seu domínio não são bem conduzidas” (p. 43).

Matemática – Imenes & Lellis, de Luiz Márcio Pereira Imenes e Marcelo Cestari Terra Lellis.	A dependência entre duas grandezas é destacada no **estudo de funções**, por meio de tabelas e fórmulas (p. 50).
Matemática: teoria e contexto, de Marília Ramos Centuríon e José Jakubovic.	
Praticando Matemática: edição renovada, de Álvaro Andrini e Maria José C. de V. Zampirolo.	O estudo do campo é, em geral, conduzido de modo satisfatório. A álgebra é estudada em seus vários papéis, em particular para criar modelos matemáticos para situações reais, seja por meio de equações, inequações ou **funções**. Os significados das letras são também focalizados. No entanto, nos dois últimos anos, observa-se demasiada atenção ao cálculo algébrico. Além disso, as construções de gráficos de **funções polinomiais** do 1º e do 2º graus são tratadas de modo superficial (p. 62).
Projeto Araribá – Matemática, Obra coletiva. Diretor: Fabio Martins de Leonardo.	Por vezes, os conceitos desse campo são apresentados de modo superficial, o que pode dificultar a sua compreensão, a exemplo do tratamento dedicado ao **conceito de função** (p. 70).
Projeto Teláris – Matemática, de Luiz Roberto Dante.	A construção da **noção de função** é trabalhada por meio de relação entre grandezas em situações diversificadas (p. 78).
Projeto Velear – Matemática, de Antonio José Lopes.	As letras são abordadas em várias perspectivas, tais como incógnita nas equações, variáveis nas **funções** ou, simplesmente, como entes abstratos, nos polinômios. O tratamento dado ao estudo de sistemas de equações articula as representações algébricas e geométricas. No **estudo das funções**, são exploradas suas representações, em fórmulas, tabelas e gráficos, de maneira articulada (p. 85).
Vontade de Saber Matemática, de Patricia Rosana M. Pataro e Joamir Roberto de Souza.	

Fonte: O autor.

É notável, e um tanto significativa, a mudança conceitual que temos indicado pelos PCNs e também pelo Guia de livros didáticos de matemática do PNLD de 2014 no que toca ao conteúdo de função. De acordo com esses documentos, o conteúdo de funções é compreendido como uma parte de um campo maior da “matemática escolar” que é o campo da álgebra, assim definido pelos Parâmetros.

Esse relacionamento do conteúdo de funções com a álgebra reflete, ou é reflexo, de uma inversão que reorganiza toda estrutura curricular da matemática em nível secundário, mais precisamente no que se refere, hoje, às séries finais do ensino fundamental (6º ao 9º ano, ou antigo ginasial ou as primeiras séries do ensino secundário). Uma vez que o papel da álgebra no conteúdo de funções passa de uma das representações semióticas de uma função, especificamente a sua representação analítica – assim como era compreendido na década de 1930 –, para um campo da matemática que comporta o próprio conteúdo de funções, há uma inversão na estruturação do próprio currículo da disciplina, onde a função perde o caráter de conceito axial. O conteúdo de funções como parte integrante do estudo de álgebra no ensino secundário, a nível fundamental, tem seus fundamentos no cerne da reforma Capanema, como visto anteriormente.

A álgebra apresenta-se, como aponta o Guia do PNLD de 2014, pelo menos a partir do 7º ano em todas as coleções, "ocupando o espaço" do que, na década de 1930, era delegado ao conceito de função. E a álgebra referida pelo Guia, assim como pelos PCNs – a mesma que está presente nas coleções de livros didáticos aprovados pelo Programa –, enfatiza o "uso das letras" na "aritmética generalizada" e "resolução de equações", ou seja, pautada nas operações entre termos algébricos (monômios e polinômios) e no uso das letras como incógnita, distanciando-se da álgebra moderna, idealizadas nos programas para disciplina nas décadas de 1950 e 1960.

Portanto, no que diz respeitos aos conteúdos presentes no currículo da disciplina de matemática atualmente, com base na normatização vigente da disciplina, que tem como orientação curricular os PCNs, e com base na apresentação desses conteúdos nos livros didáticos aprovados pelo PNLD, que serão distribuídos por todo o Brasil em nível fundamental (séries finais) a partir de 2014, fica entendido que ao conteúdo de funções, no presente momento em que se encontra no ensino da disciplina de matemática no Brasil, é reservado um espaço no 9º ano do ensino fundamental (séries finais). Resta saber, então, quais foram os rastros deixados pelos movimentos de reforma no conteúdo de funções durante a sua "vida" escolar no Brasil, que soma, até o momento, pouco mais de oitenta anos. Para isso, é necessário recorrer às páginas dos livros que alcançarão os bancos escolares de todo o Brasil no ano letivo de 2014.

5.1 DAS REFORMAS ÀS PÁGINAS DOS LIVROS ATUAIS: UMA ANÁLISE SOBRE O CONTEÚDO DE FUNÇÕES

O intuito da análise dos livros didáticos de matemática do ensino fundamental, séries finas, aprovados pelo PNLD de 2014, é o de identificar os rastros deixados pelos movimentos de reforma no conteúdo de funções nos livros didáticos atuais, especificamente nos livros do ensino fundamental, séries finais, que fazem parte do PNLD de 2014, pois atualmente é nessa etapa do ensino que é apresentado, nos livros didáticos, pela primeira vez aos alunos de todo o Brasil, o conteúdo de funções.

As diferentes abordagens dadas ao conteúdo de funções nas coleções de livros didáticos anteriormente analisados, editados, sucessivamente, com o advento da Reforma Campos e da Reforma Capanema, e também no âmbito do MMM, apresentam-se nos livros didáticos atualmente como uma sobreposição de elementos que definem, para o conteúdo de funções: um espaço específico no currículo da disciplina e, consequentemente, nos livros didáticos, um conjunto de notações e metodologias através do qual o conteúdo é apresentado, e determinados padrões para a definição do conceito de função.

Como visto na década de 1930, o conteúdo de funções desempenhou um papel fundamental para a disciplina, unificando as diferentes matemáticas, onde compreender a relação entre duas variáveis ou grandezas era: fazer uso de tabelas com valores que se correspondiam, “método aritmético”, exprimir essa relação através de uma equação, “método algébrico”, e expressar essa relação por meio de um gráfico, “método geométrico”. Este aspecto identifica um rastro deixado pela entrada do conteúdo de funções no ensino de matemática no Brasil, normatizado na Reforma Campos.

Além disso, como metodologia comum nas coleções analisadas anteriormente, o conceito de função é inicialmente explorado de maneira intuitiva, sempre através de exemplos, e, só então, é definido formalmente, o que se repete desde o primeiro livro analisado, no cerne da Reforma Campos.

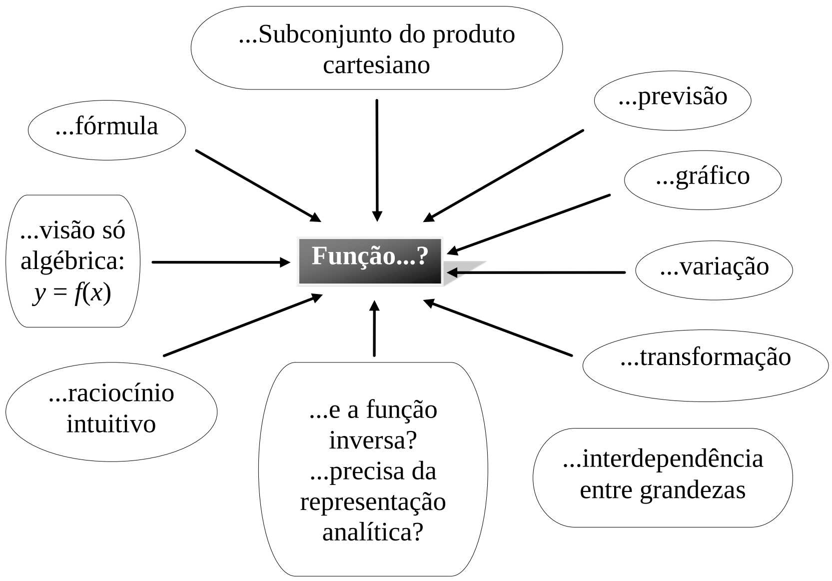
Com advento da Reforma Capanema, em 1942, o conteúdo de funções não sofreu alterações significativas quanto à sua notação e definição, no entanto, o objetivo para o conteúdo de funções no ensino da disciplina perdeu o seu o caráter axial, sendo retirado das séries iniciais do ensino secundário e apresentando-se, em algumas coleções de livros didáticos, em poucas páginas, e apenas na quarta série do curso ginasial.

O que denota, então, um rastro da Reforma Capanema no conteúdo de funções presente nos livros didáticos atuais analisados é o fato de que esse conteúdo, no que se refere à sua conceituação e definição mais fundamental, não se dá paulatinamente, desde as primeiras séries (ou anos), mas se concentra, apresentado, de fato, como o conteúdo de funções, apenas no quarto ano do ensino fundamental, séries finais. Consequentemente, conteúdos que no âmbito da Reforma Campos eram explorados sob o viés de uma função matemática passaram a ser compreendidos apenas aritmeticamente, algebricamente e geometricamente.

No âmbito do MMM, a possibilidade de explorar a teoria dos conjuntos e as estruturas matemáticas desde as séries iniciais do ginasial permitiu agregar novos elementos ao ensino da disciplina, como a notação para o conceito de função através da teoria dos conjuntos. Esta notação, que se apresenta como uma relação, uma transformação, que ocorre entre elementos de dois conjuntos A e B, representada comumente por diagramas de flechas, é identificada nessa tese como um rastro do MMM no Brasil, ampliando o conceito de função para além de sua representação numérica. Junto a isso, o conteúdo de funções, com a determinação dos *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Ginásio e para o Colégio*, se firmou na 4º série do ginasial.

As diferentes representação/notações presentes no conteúdo de funções são discutidas até hoje no ensino de matemática, segundo Mendonça e Oliveira (1999), nas últimas décadas do século XX, diversas pesquisas na educação matemática investigaram o desenvolvimento do conceito de função em alunos, justificando-se justamente por essa variedade de noções e múltiplas representações que estão envolvidas na construção deste conceito matemático, que perpassam pela "simples" relação entre duas grandezas à sua definição através de dois conjuntos, domínio e imagem, sendo uma função certa regra de correspondência que associa a cada elemento do primeiro conjunto um único do segundo. E também por suas várias representações: aritmética, algébrica, geométrica e através de conjunto e diagramas de flechas.

Ainda de acordo com os autores, o questionamento sobre "o que é função", no âmbito educacional, possivelmente terá respostas apoiadas em uma relação de imagens mentais (esquema 1).



Esquema 1: imagens mentais sobre o que é função.
Fonte: MENDONÇA; OLIVEIRA, 1999, p. 39.

Essas imagens mentais ilustram a multiplicidade de representações do conceito de função e as diferentes abstrações/significações em consequência de suas representações. A incursão histórica que relacionou as Reformas e a edição de livros didáticos decorrentes das reformas proporcionou identificar, em diferentes momentos da história da disciplina de matemática no Brasil, os esforços demandados para que uma ou outra imagem ou significado fizesse parte do currículo brasileiro no estudo de funções.

Portanto, para os livros a serem analisados a seguir, dar-se-á ênfase aos seguintes indicadores, todos pautados na apresentação do conteúdo de funções nas coleções:

(i) **Quanto à notação usada para conceituar função, dada por meio de**: (A) *tabelas, equações (expressão analítica, lei de formação) e gráficos*, característica presente desde a entrada do conteúdo de funções no ensino secundário, normatizado na Reforma Campos; (B) *conjuntos e diagramas de flechas*, caracterizando a notação presente no âmbito do MMM.

(ii) **Quanto à definição de função**: (C) *grandezas que variam de acordo com certa relação de interdependência (lei de correspondência)*, definição comum anteriormente ao MMM; (D) *dados conjuntos A e B, uma função é certa relação que associa a cada elemento do primeiro conjunto um único do segundo*, caracterizando a definição através da notação por conjuntos, presente no âmbito do MMM;

(iii) **Quanto ao método**: (E) *se o conceito de função é desenvolvido de maneira intuitiva*. Característica presente desde a Reforma Campos.

(iv) **Quanto ao conteúdo no contexto da coleção**: (F) *Aponta a relação do conceito de função com os demais conteúdos desenvolvidos na coleção;* (G) *Representatividade do conteúdo identificado como o de função na coleção – páginas por conteúdo*.

Os indicadores A, B, C, D, E, F e G serão valorados, ao final, expostos em uma tabela (tabela 4 em 7.2), da seguinte maneira:

- Com um sinal de menos (–), quando não houver qualquer referência ao tópico;
- Com um sinal de mais (+), quando for identificada alguma referência ao tópico;
- Com o sinal de mais duas vezes (++), quando for identificada uma forte referência ao tópico.

O tópico G será expresso em porcentagem (%).

O conceito de função será identificado nas coleções analisadas quando estas fizerem referência ao próprio termo *conceito de função* ou fizerem referência aos termos: *ideia de função, ideia intuitiva de função ou noção de função*. A exploração do conceito de função também será identificada por meio de problemas ou situações que introduzam o conteúdo promovendo a sua compreensão, geralmente dentro de algum contexto, seja esse cotidiano, científico ou matemático.

A definição de função será identificada nas coleções quando estas se valerem de uma linguagem matemática formal, através de símbolos, postulados ou axiomas, para afirmar o “que é” uma função. Concordando com Laudares (2013, p. 9):

> Se conceituar, em Matemática, é uma atividade de compreensão do objeto em estudo e da criação subjetiva de significados pelo estudante, definir é, pela formalização, manipular símbolos, registros, sinais da linguagem específica da área de conhecimento, na qual está imersa o objeto matemático, o conceito em estudo.

Todas as dez coleções analisadas a seguir são compostas por quatro volumes, sendo que cada volume é referente a um dos quatro anos finais do ensino fundamental: o primeiro volume é referente ao 6º ano, o segundo volume é referente ao 7º ano, o terceiro volume é referente ao 8º ano e o quarto volume é referente ao 9º ano. Todas as coleções apresentam um *manual do professor*, pois essas coleções são materiais de divulgação, para o consumo do professor e de venda proibida, entregues nas escolas públicas pelas editoras para a escolha do livro didático a ser distribuído pelo PNLD no ano de 2014.

Cada coleção será brevemente apresentada, ressaltando-se as principais referências abordadas pelos autores para sua realização e a disposição dos conteúdos matemáticos de um modo geral (se organizados em blocos, temas, etc). A análise que segue dará ênfase ao conteúdo de funções, conteúdo presente no quarto volume, 9º ano, de cada uma das coleções, mas sem descartar a possibilidade de se recorrer aos demais volumes das coleções quando necessário.

5.1.1 Coleção *Descobrindo e Aplicando a Matemática*

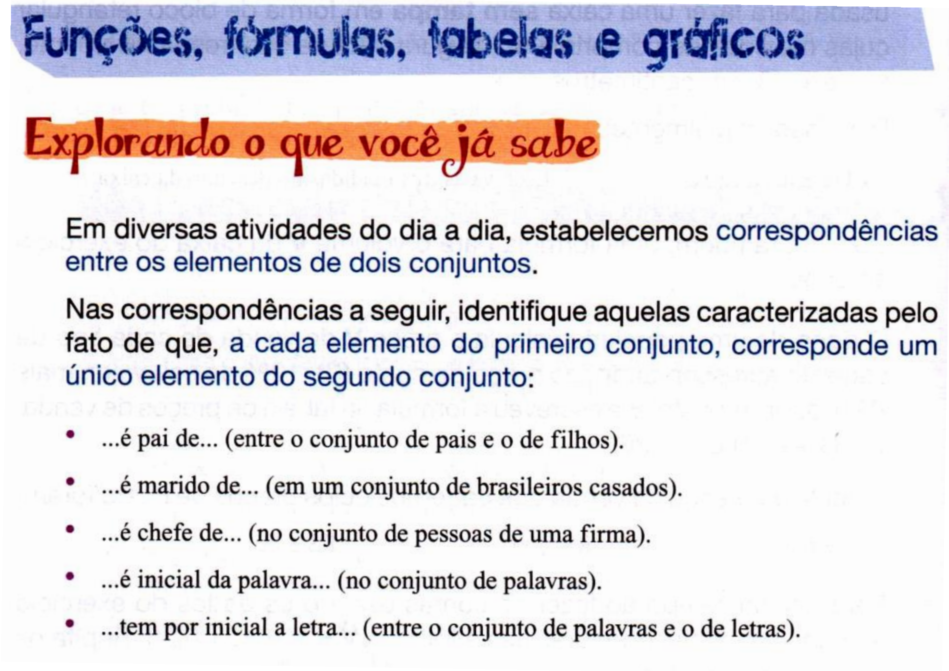
O livro *Descobrindo e Aplicando a Matemática*, de Alceu dos Santos Mazzieiro e Paulo Antônio Fonseca Machado, traz ao final de cada volume uma apresentação da coleção, contendo informações que são significativas para a compreensão da organização e estrutura do livro. Os autores, na apresentação de sua coleção, referem-se a seu trabalho como uma “nova proposta”, cujas razões de terem optado por inovar partem, segundo os autores, do fracasso do ensino de matemática detectado por diversos pesquisadores. Uma dessas razões, a que interessa ao contexto da tese, trata da conexão entre os conteúdos, pois segundo os autores “o ensino isolado dos conteúdos, bloco a bloco, como se entre eles não existissem conexões, ignorando, por exemplo, o vínculo entre a proporcionalidade, a porcentagem, as figuras semelhantes, **as funções** (MAZZIEIRO, FONSECA; 2012a, p. 13, grifos meus).

Os autores comentam sobre o surgimento das diversas tendências para o ensino de matemática, segundo eles, em consequência do fracasso do ensino de matemática, como a Modelagem Matemática, a Etnomatemática, os recursos relacionados à História da Matemática, entre outros, mas afirmam que a proposta da coleção não se baseia apenas nessas novas tendências, pois de acordo com os autores, ao se referirem à proposta da coleção de um modo geral, “nossas principais referências, além das citadas na bibliografia, foram a **Lei de Diretrizes e Bases** (LDB) e os **Parâmetros Curriculares Nacionais** (PCN)” (MAZZIEIRO; MACHADO, p. 14, 2012a, grifos originais).

A coleção trata especificamente do conceito de função no seu quarto volume, ou seja, no volume referente ao 9º ano. O conceito de função está presente no terceiro capítulo desse volume, intitulado *Calculando com letra e com números*. Antes de dar início aos conteúdos, é feita uma relação sobre os tópicos a serem trabalhados, com o subtítulo *Neste capítulo, você vai aprender como*, onde alguns tópicos, os que tratam especificamente de funções, estão listados abaixo:

- Reconhecer se uma correspondência entre dois conjuntos é ou não função e, no caso afirmativo, identificar o “domínio” da função.
- Expressar perímetros, áreas e volumes como função de uma variável.
- Usar as notações $y = f(x)$, $F(x)$ para funções e identificar pares $(x\ ,\ f(x))$ que pertençam aos gráficos.
- Representar funções por seus gráficos, seus diagramas ou suas tabelas.
- Representar dados relacionados com fatos do dia a dia, registrados através de gráficos de funções (MAZZIEIRO; MACHADO, p. 62, 2012b).

No subcapítulo do terceiro capítulo, intitulado *Funções, fórmulas, tabelas e gráficos*, o conceito de função é explorado de maneira intuitiva (figura 36), identificado no tópico “explorando o que você sabe”, que segundo os autores, é uma seção presente em diversos momentos da coleção que tem o intuito de estabelecer conexão entre os conhecimentos prévios dos alunos e o que ele vai aprender (MAZZIEIRO; MACHADO, 2012a).



Funções, fórmulas, tabelas e gráficos

Explorando o que você já sabe

Em diversas atividades do dia a dia, estabelecemos correspondências entre os elementos de dois conjuntos.

Nas correspondências a seguir, identifique aquelas caracterizadas pelo fato de que, a cada elemento do primeiro conjunto, corresponde um único elemento do segundo conjunto:

- ...é pai de... (entre o conjunto de pais e o de filhos).
- ...é marido de... (em um conjunto de brasileiros casados).
- ...é chefe de... (no conjunto de pessoas de uma firma).
- ...é inicial da palavra... (no conjunto de palavras).
- ...tem por inicial a letra... (entre o conjunto de palavras e o de letras).

Figura 36: funções, fórmulas, tabelas e gráficos.
Fonte: MAZZIEIRO; MACHADO, 2012b, p. 88.

O termo correspondência aparece como a primeira relação que se deve estabelecer para compreender o conceito de função, e também a necessidade de usar o conceito de conjuntos para dar sentido à correspondência, sendo uma função uma correspondência entre os elementos desse conjunto. O que mostra um forte indicativo sobre o conteúdo de função que remete à década de 1960, explorando a compreensão do conceito de função através da teoria dos conjuntos, ou seja, um rastro do MMM no Brasil no conteúdo de funções.

Na página seguinte é dado um exemplo que traz um retângulo de lados $3x+2$ e x, relacionando a variável x ao perímetro da figura, de forma que se obtenha a função $P(x) = 8x + 4$, frisando que “[...] a cada valor dado a x encontraremos um único valor correspondente para o perímetro” (MAZZIEIRO; MACHADO, 2012b, p. 89). A definição de função encontra-se em destaque no livro e está pautada na teoria dos conjuntos (figura 37), trazendo termos como domínio e imagem da função, próprios da relação entre conjuntos.

Dados dois conjuntos A e B, uma função de A em B é uma regra que associa a cada elemento de A um único elemento de B.

Ao conjunto A, dá-se o nome de "domínio da função", e ao conjunto B, o nome de "contradomínio da função".

Designando a função por **f**, escrevemos: **f** : A → B (que se lê **f** de A em B), significando que, a cada elemento **x** do domínio A, corresponde um único elemento **y** = **f**(x) de B, chamado de imagem de **x** pela função **f**, ou também valor da função **f** no ponto **x**. O conjunto que contém todas as imagens dos elementos do domínio chama-se "conjunto imagem da função".

Figura 37: definição de função.
Fonte: MAZZIEIRO; MACHADO, 2012b, p. 89.

Na página seguinte, os autores ressaltam a importância do conceito de função afirmando que "o conceito de função é muito importante não apenas na Matemática, mas também nas mais variadas áreas do conhecimento humano, como você verá em diversas atividades nas próximas páginas (MAZZIEIRO; MACHADO, 2012b, p. 89)". Ainda segundo os autores:

> Note que, nas páginas anteriores, já exploramos diversas atividades com leis de funções, como, por exemplo, a cada valor da aresta corresponde um único valor do volume do cubo, a cada valor do raio da circunferência corresponde um único comprimento dela, e outras correspondências como o peso de uma encomenda e o valor do frete para seu transporte, preço de custo de caderno e o preço de venda, número de dias trabalhados e salário. Nessas atividades, não é difícil identificar os dois conjuntos entre os quais se está estabelecendo a correspondência entre seus elementos (MAZZIEIRO; MACHADO, 2012b, p. 89).

Nas seis páginas seguintes, são explorados diversos exercícios que relacionam funções e suas aplicações em diferentes contextos, como na física, relacionando tempo e distância, na economia, tratando do lucro de uma empresa em função da quantidade de mercadorias produzidas e vendidas, ou na geometria, relacionando a rotação de um polígono com a posição dos vértices (figura 38), entre outras.

97. Neste exercício você vai imaginar rotações do hexágono regular da figura, em torno do ponto O, no sentido anti-horário, para estabelecer correspondências entre seus vértices, usando a função cuja lei é definida assim:

$$R(v, n) = v_1$$

onde $\mathbf{v}_1$ é o vértice correspondente à posição que ocupará o vértice **v**, girando o hexágono em torno do ponto O, **n** graus, no sentido anti-horário.

Agora, escreva em seu caderno o que deve substituir as interrogações em cada item a seguir, como no exemplo:

R(F, 60º) = A

a) R(B, 180º) = ?
b) R(C, 240º) = ?
c) R(D, 300º) = ?
d) R(F, 360º) = ?
e) R(C, 420º) = ?

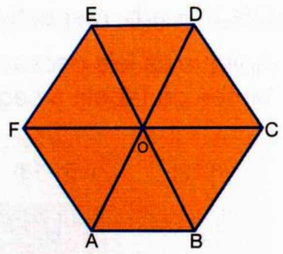


Figura 38: relação entre vértices na rotação de um hexágono.
Fonte: MAZZIEIRO; MACHADO, 2012b, p. 92.

Em especial um exercício que relaciona uma proporcionalidade ao conceito de função (figura 39) é destacado pelos autores.

88. Uma proporcionalidade interessante:

Em 1660 um cientista inglês, Robert Hooke, descobriu que, uma vez suspensa, uma mola de comprimento C_o, até certos limites, aumenta seu comprimento de um valor **x** proporcionalmente ao peso nela suspenso ou à força (F) nela exercida. Dentre diversas aplicações desta descoberta, a mais simples você deve conhecer: as balanças de molas.

Agora, resolva as questões a seguir, usando o que já conhece: proporcionalidades diretas são expressas por funções cujas leis são do tipo **F(x) = kx** (**k** constante e diferente de zero).

Uma mola com 14 cm de comprimento, já suspensa, aumenta seu comprimento, até ficar em repouso, para 18 cm, quando penduramos em sua extremidade um objeto cujo peso é 1 kg. Use a expressão F(x) = Kx e resolva:

a) Calcule o valor da constante K em kg/m.

b) Calcule o comprimento da mola quando sustentar, em equilíbrio, objeto que pesa 2,5 kg.

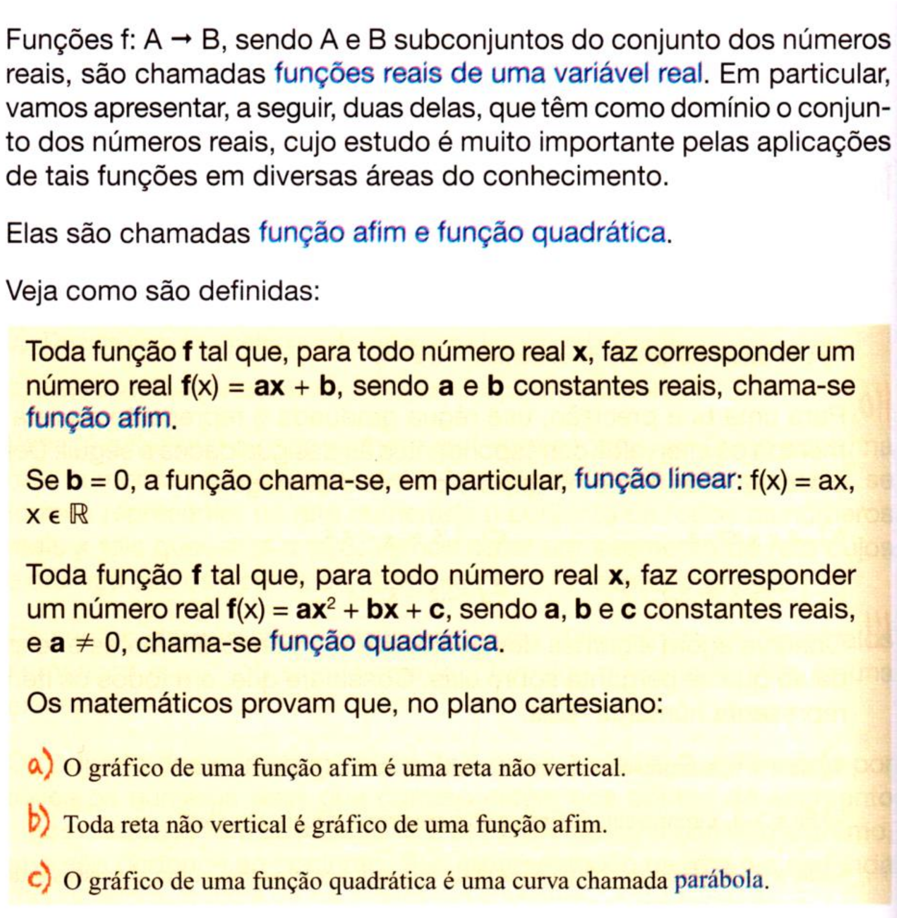
Figura 39: uma proporcionalidade interessante.
Fonte: MAZZIEIRO; MACHADO, 2012b, p. 92.

Em nota exclusiva ao professor, presente somente no *livro do professor*, os autores sugerem comentar com os alunos a relação entre função e grandezas diretamente proporcionais:

> Comente com os alunos: vocês já viram anteriormente como definir quando duas grandezas são diretamente proporcionais; agora, com base no exercício 88 é possível dar outra definição: dizemos que as grandezas são diretamente proporcionais se a cada valor *x* da primeira grandeza corresponder um valor *y* da segunda, satisfazendo a lei $y = ky$ ($k \neq 0$ e constante) (MAZZIEIRO; MACHADO, 2012b, p. 91).

Essa definição estava presente na década de 1930, no cerne do programa do Colégio Pedro II, como visto no quarto capítulo desta tese.

São comuns nesse capítulo tabelas que relacionam as variáveis *x* e *y* de modo que se possa "descobrir" a lei da função que associa cada valor *x* com o seu correspondente *y*. Na página 99, são definidas as funções *afim e quadrática* (figura 40).



Funções f: A → B, sendo A e B subconjuntos do conjunto dos números reais, são chamadas funções reais de uma variável real. Em particular, vamos apresentar, a seguir, duas delas, que têm como domínio o conjunto dos números reais, cujo estudo é muito importante pelas aplicações de tais funções em diversas áreas do conhecimento.

Elas são chamadas função afim e função quadrática.

Veja como são definidas:

Toda função **f** tal que, para todo número real **x**, faz corresponder um número real $f(x) = ax + b$, sendo **a** e **b** constantes reais, chama-se função afim.

Se $b = 0$, a função chama-se, em particular, função linear: $f(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$

Toda função **f** tal que, para todo número real **x**, faz corresponder um número real $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo **a**, **b** e **c** constantes reais, e $a \neq 0$, chama-se função quadrática.

Os matemáticos provam que, no plano cartesiano:

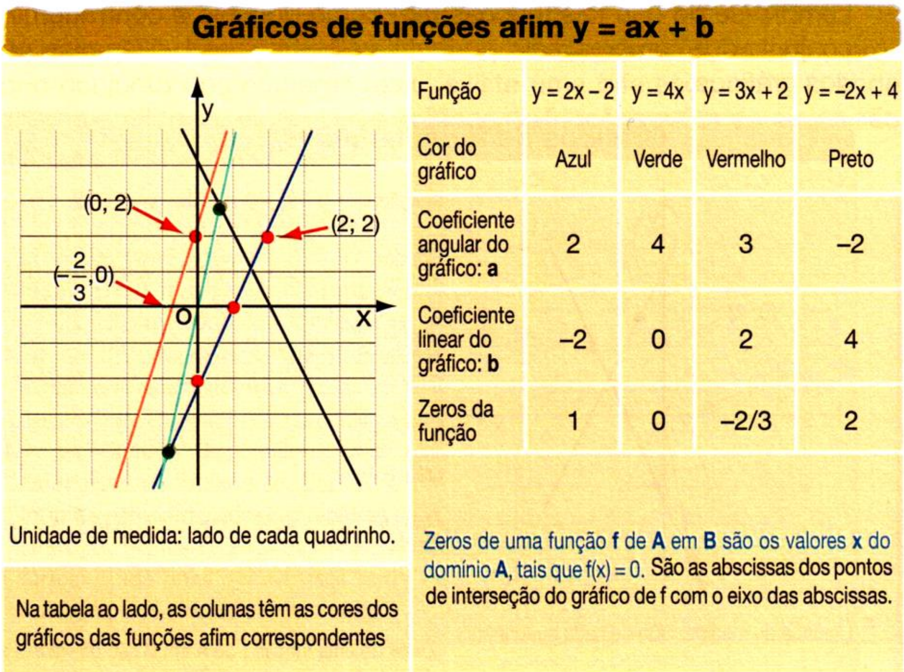
a) O gráfico de uma função afim é uma reta não vertical.

b) Toda reta não vertical é gráfico de uma função afim.

c) O gráfico de uma função quadrática é uma curva chamada parábola.

Figura 40: funções afim e quadrática.
Fonte: MAZZIEIRO; MACHADO, 2012b, p. 99.

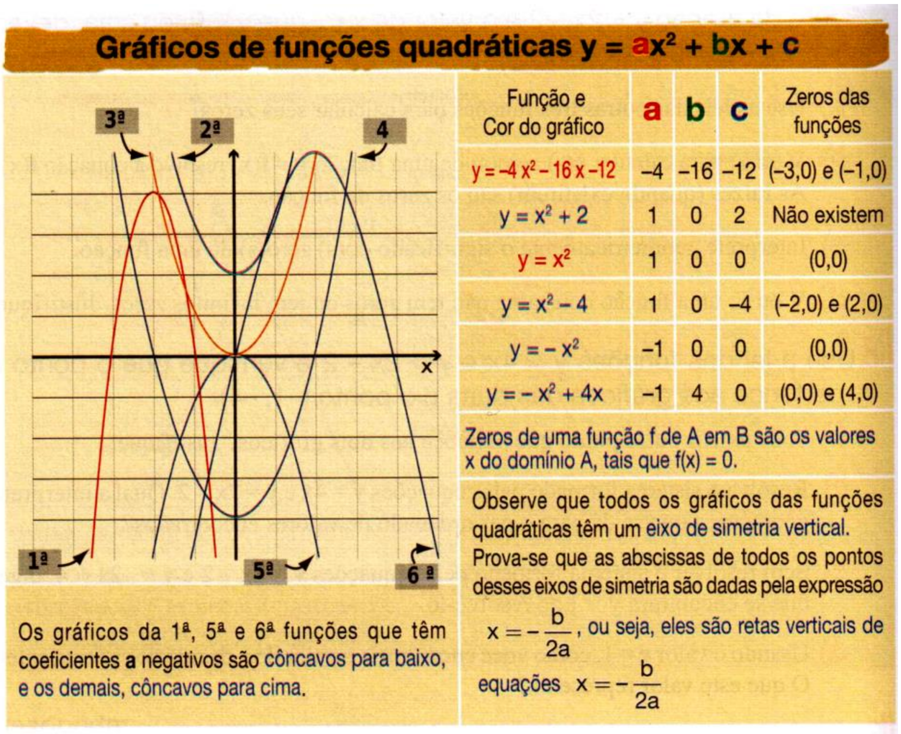
Como é possível notar, ambas as funções, através de sua definição, são compreendidas no conjunto dos números reais. As representações das funções por meio de tabela de valores livremente atribuídos e do gráfico no plano cartesiano (figura 41 e 42) estão presentes desde as primeiras coleções analisadas nesta tese, que datam da década de 1930, já a relação da função com o conjunto dos números reais é característico da década de 1950, advento, no Brasil, do MMM. Elementos esses presentes nessa coleção.



Função	$y = 2x - 2$	$y = 4x$	$y = 3x + 2$	$y = -2x + 4$
Cor do gráfico	Azul	Verde	Vermelho	Preto
Coeficiente angular do gráfico: **a**	2	4	3	−2
Coeficiente linear do gráfico: **b**	−2	0	2	4
Zeros da função	1	0	−2/3	2

Zeros de uma função **f** de **A** em **B** são os valores **x** do domínio **A**, tais que f(x) = 0. São as abscissas dos pontos de interseção do gráfico de f com o eixo das abscissas.

Figura 41: tabelas e gráficos de funções afins.
Fonte: MAZZIEIRO; MACHADO, 2012b, p. 102.



Função e Cor do gráfico	a	b	c	Zeros das funções
$y = -4x^2 - 16x - 12$	−4	−16	−12	(−3,0) e (−1,0)
$y = x^2 + 2$	1	0	2	Não existem
$y = x^2$	1	0	0	(0,0)
$y = x^2 - 4$	1	0	−4	(−2,0) e (2,0)
$y = -x^2$	−1	0	0	(0,0)
$y = -x^2 + 4x$	−1	4	0	(0,0) e (4,0)

Zeros de uma função f de A em B são os valores x do domínio A, tais que f(x) = 0.

Observe que todos os gráficos das funções quadráticas têm um eixo de simetria vertical. Prova-se que as abscissas de todos os pontos desses eixos de simetria são dadas pela expressão $x = -\frac{b}{2a}$, ou seja, eles são retas verticais de equações $x = -\frac{b}{2a}$

Figura 42: tabelas e gráficos de funções quadráticas.
Fonte: MAZZIEIRO; MACHADO, 2012b, p. 104.

No capítulo 9 do mesmo volume, intitulado *Atividades complementares*, ainda são explorados exercícios que propõem a resolução de sistema de equações por intermédio da análise gráfica das equações, entendendo cada equação como uma função no conjunto dos reais em que o ponto de intersecção entre as retas corresponde à solução do sistema.

A coleção dedica ao conteúdo de funções 20 páginas no terceiro capítulo do quarto volume (9º ano do ensino fundamental) e mais 17 páginas de atividades complementares. Por mais que o conceito de funcionalidade esteja presente de maneira implícita no cálculo de áreas ou em relações entre grandezas diretamente proporcionais, nos diferentes volumes da coleção, essas conexões só são estabelecidas nas páginas referidas acima, somando 37 páginas das 1198 páginas de toda a coleção, ou seja, o conteúdo de funções, não levando em conta as relações implícitas que se possa estabelecer no desenvolvimento dos demais conteúdos de matemática presentes no livro, ocupa, aproximadamente, 3,01% da coleção.

Como salientado no Guia do PNLD de 2014, nesta obra, o conteúdo de funções não valoriza fortemente as articulações entre as diferentes representações do conceito de função (aritmético, algébrico e geométrico), porém, valoriza, em alguns exercícios, como visto, a possibilidade de compreender diferentes conteúdos estudados nas séries anteriores como uma função. O conceito de função é apresentado de maneira intuitiva, tendo um forte indicativo dessa metodologia, assim como a definição de função através de conjuntos, no entanto, em momento algum é feito o uso de diagramas de flechas.

5.1.2 Coleção *Matemática – Bianchini*

A coleção *Matemática – Bianchini*, de Edwaldo Roque Bianchini, traz em cada um dos seus quatro volumes um *Suplemento com orientações para o professor*, contendo uma parte comum aos quatro volumes e outra direcionada aos conteúdos específicos de cada ano. Logo na apresentação de suas orientações o autor faz referência aos PCNs, afirmando que “este suplemento [...] discute variadas propostas de avaliação de aprendizagem sobre a luz dos atuais Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)” (BIANCHINI, 2011a, p. 5). E como estrutura de sua coleção, os conteúdos de matemática estão divididos em quatro “eixos”: números e operações; grandezas e medidas; espaço e forma; tratamento da informação (exatamente os blocos sugeridos nos PCNs).

Antes mesmo de tratar de funções, no terceiro volume da coleção, no oitavo capítulo, intitulado *Frações algébricas e sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas*, é apresentado ao aluno o plano cartesiano e o estudo de equações da reta como ferramenta para a solução de sistemas de equações (figura 43).

8 Solução gráfica de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Dada uma equação do 1º grau com duas incógnitas, existem infinitos pares de números reais que são soluções dessa equação.

Como exemplo, vamos considerar a equação $x + y = 3$. Como as equações $x + y = 3$ e $y = 3 - x$ são equações equivalentes, os pares ordenados que satisfazem a equação considerada são da forma:

$$(x, \underbrace{3 - x}_{y})$$

Para determinar alguns desses pares, atribuímos a x qualquer valor real e encontramos o valor correspondente de y.

Veja na tabela abaixo alguns desses pares.

x	−1	0	0,5	1	2	2,5	3	4
y = 3 − x	4	3	2,5	2	1	0,5	0	−1
Par obtido	(−1, 4)	(0, 3)	(0,5; 2,5)	(1, 2)	(2, 1)	(2,5; 0,5)	(3, 0)	(4, −1)

Os pares ordenados (−1, 4), (0, 3), (0,5; 2,5), (1, 2), (2, 1), (2,5; 0,5), (3, 0) e (4, −1) são algumas soluções da equação $x + y = 3$.

Figura 43: solução gráfica de um sistema do 1º grau com duas incógnitas.
Fonte: BIANCHINI, 2012b, p. 219.

Sem fazer qualquer referência ao conceito de função, o autor toma as incógnitas da equação de infinitas soluções com variáveis interdependentes, de maneira que para cada valor atribuído a x exista um valor correspondente y, e que, juntos, formam o par ordenado que soluciona a equação, formando uma reta no plano cartesiano. Tomando outra equação como exemplo, $2x + y = 5$, e fazendo o mesmo procedimento, é dada, graficamente, a solução do sistema composto pelas duas equações, $x + y = 3$ e $2x + y = 5$ (figura 44).

Construindo em um mesmo plano cartesiano as retas que são as soluções gráficas das duas equações, verificamos que elas se encontram no ponto (2, 1), que é a solução do sistema.

$x + y = 3$

x	**y**	**(x, y)**
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

$2x + y = 5$

x	**y**	**(x, y)**
0	5	(0, 5)
2,5	0	(2,5; 0)

Dessa forma, podemos resolver graficamente um sistema representando as retas de cada equação em um mesmo plano cartesiano, e o ponto de cruzamento determinado é a solução do sistema.

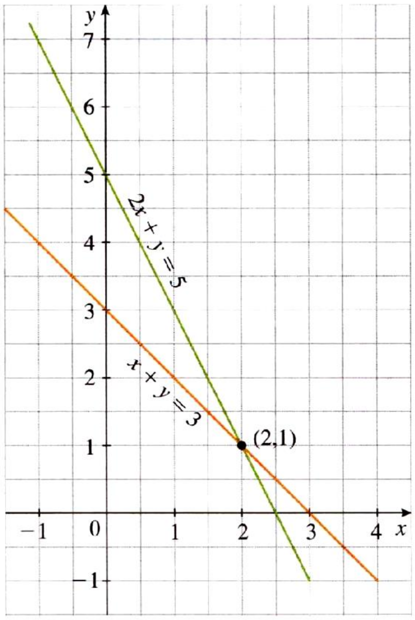


Figura 44: equações no plano cartesiano.
Fonte: BIANCHINI, 2012b, p. 221.

A abordagem inicial referente ao conteúdo de função ocorre no sétimo capítulo do quarto volume da coleção, intitulado *Estudos das funções*, volume referente ao 9º ano do ensino fundamental. De maneira intuitiva, com o subtítulo *Conceito de função*, é dado um exemplo envolvendo o valor a ser pago no final de cada mês pela assinatura de uma TV a cabo em função do número de programas adicionais contratados. No exemplo explorado no livro, a contratação do serviço cobra dos assinantes R$ 95,00 fixos por mês e mais R$ 5,00 por programa adicional contratado. A definição de função (em destaque na página 181 do livro) se dá a partir desse exemplo (figura 45).

Dizemos que a grandeza y é **função** da grandeza x se há entre elas uma correspondência tal que, para cada valor de x, exista um único valor de y.

Na função que relaciona o número de programas extras comprados (x) e o preço a pagar (y), escrevemos a sentença $y = 95 + 5x$. Nesse caso, as letras x e y são chamadas de **variáveis** e a sentença $y = 95 + 5x$ é chamada de **lei da função**.
Em geral, indicamos que y é uma função de x por $y = f(x)$ (lemos: "y é igual a f de x"). Então, para o caso em que a lei da função é $y = 95 + 5x$, podemos escrever $f(x) = 95 + 5x$.

Figura 45: O conceito de função.
Fonte: BIANCHINI, 2012c, p. 181.

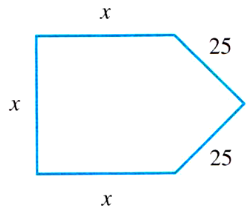
O autor não faz referência à teoria dos conjuntos em nenhum momento para denotar o conceito de função, apenas ressalta em uma nota histórica que "a teoria dos conjuntos, criada pelo matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), propiciou ampliar o conceito de função até chegar à definição conhecida atualmente" (BIANCHINI, p. 186, 2012b). Já ao referir-se à função polinomial do 1º grau, esta é definida no conjunto dos números reais (figura 46).

2 Função polinomial do 1º grau

Considere o exemplo a seguir.

No pentágono ao lado, as medidas são dadas em centímetro. O perímetro desse polígono depende dos valores que forem atribuídos a x. Indicando o perímetro por y, temos:

$$y = 3x + 50$$



A função definida pela lei $y = 3x + 50$ é um exemplo de **função polinomial do 1º grau**.

> Uma função polinomial do 1º grau é toda função do tipo $y = ax + b$, com a e b sendo números reais e $a \neq 0$, e é definida para todo x real.

Figura 46: função polinomial do 1º grau.
Fonte: BIANCHINI, 2012c, p. 191.

A função polinomial do 2º grau é definida da mesma forma (função quadrática). Tanto para a função do 1º grau quanto para função do 2º grau, é comum o uso de tabelas e representações gráficas no plano cartesiano, como mostra a figura 47.

Quadro com alguns pontos simétricos ao vértice do gráfico de $y = x^2 - 4x + 3$

x	y	(x, y)	
0	3	(0, 3)	
1	0	(1, 0)	
2	−1	**(2, −1)**	V
3	0	(3, 0)	
4	3	(4, 3)	

Gráfico da função

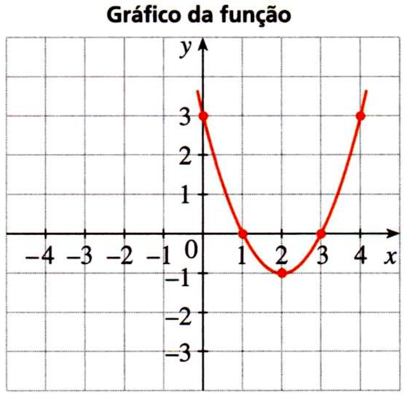


Figura 47: Representação gráfica de uma função polinomial do 2º grau.
Fonte: BIANCHINI, 2012c, p. 208.

Os exercícios propostos no livro percorrem aplicações na economia, na física, na geometria, ou seja, sempre que possível se estabelecer uma lei de correspondência entre grandezas. Nas orientações para o professor, presentes no final do livro do 9º ano do ensino fundamental, na parte específica intitulada de *Orientações gerais para o desenvolvimento dos* *capítulos*, referente ao capítulo 7, o que apresenta o conteúdo de funções, estão expostos, em 3 páginas, apenas dicas para explorar melhor os exercícios presentes nos capítulos como, por exemplo, sugerir aos alunos que construam tabelas para relacionar os valores dos pares ordenados com o intuito de melhor organizar os dados.

Para os quatro volumes da coleção *Matemática – Bianchini*, são dedicadas 35 páginas ao conteúdo de funções, referentes ao sétimo capítulo do quarto volume da coleção (9º ano do ensino fundamental), o que confere uma representatividade do conteúdo identificado como o de função na coleção (páginas por conteúdo) de aproximadamente 3,05%.

A coleção apresenta uma forte referência à exploração de tabelas, equações e gráficos para desenvolver o conteúdo de funções, deixando de lado a notação através de conjuntos e diagramas de flechas, não havendo, também, apontamentos que indiquem a relação do conceito de função com demais conteúdos estudados nas séries anteriores. O conceito de função é explorado intuitivamente, apresentando forte indicativo dessa metodologia. A definição de função é dada através da relação de correspondência entre duas grandezas, descartando a relação entre conjunto.

5.1.3 Coleção *Matemática – Ideias e Desafios*

A coleção *Matemática – Ideias e Desafios*, de Dulce Satiko Onaga e Iracema Mori, também traz no final de cada livro um manual apresentando a coleção, tendo uma parte comum para os quatro volumes e outra parte, diferente para cada volume, dedicada aos conteúdos específicos de cada um dos quatro anos do ensino fundamental, séries finais. Na apresentação da obra, as autoras estruturam os conteúdos de matemática em seis blocos, de maneira semelhante aos blocos sugeridos pelos PCNs (números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas e tratamento da informação): Números, Problemas e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Álgebra e Tratamento da Informação. E, ao descrever os conteúdos trabalhados em cada ano, dentro desses seis blocos, o conteúdo das funções aparece no bloco da Álgebra, no 9º ano (MORI; ONAGA, 2012a). Na parte específica do manual, referente ao quarto volume, 9º ano, ao tratar da unidade referente ao estudo das funções, as autoras, no tópico intitulado *Orientações didáticas*, optaram por conceituar função intuitivamente, afirmando que:

> É nesse momento que os alunos têm o primeiro contato com as funções, um contato que deve iniciar-se pela compreensão do significado e pela percepção da

> interdependência entre duas grandezas, pois essas são questões muito mais relevantes do que as definições formais e abstratas.
> A construção do conceito de função é um processo demorado, e o nível de compreensão varia de um aluno para o outro. Assim, partimos de situações-problema concretas e próximas da realidade dos alunos, o que subsidia a compreensão e o significado de uma relação de interdependência entre duas grandezas (quando uma grandeza varia, a outra também varia segundo uma lei) (MORI; ONAGA, 2012a, p. 44).

Antes de apresentar o conteúdo de funções, a coleção *Matemática – Ideias e Desafios* aborda, no terceiro volume, referente ao 8º ano do ensino fundamental, representações gráficas de equações na solução de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, sem fazer relação em momento algum com o conteúdo de funções. O conteúdo de funções está presente somente no quarto volume, referente ao 9º ano, na unidade 8, dividida em três capítulos, na sequência: *Funções: significados e registros*, *Função afim* e *Função afim: estudo de sinais*. O primeiro capítulo da unidade 8 inicia com um texto que explora, através de exemplos, o significado de dependência entre grandezas (figura 48).

CAPÍTULO 1

Funções: significados e registros

Proponha aos alunos outras situações-problema próximas da realidade deles, que possam ajudá-los na compreensão, na construção do significado e na interpretação de relações de interdependência entre grandezas.

Introdução

É comum ler ou ouvir nos meios de comunicação frases como estas:

Nessas frases, a palavra **função** foi empregada com diferentes significados.

Quando relacionamos duas grandezas que dependem uma da outra, estamos usando o conceito de **função**. Este é um importante conceito da Matemática, que está presente na maioria dos campos de conhecimento humano.

Observe quatro exemplos nos quais usamos esse conceito em Matemática:

Em um salto de paraquedas, enquanto o paraquedas estiver fechado, podemos considerar que o corpo está em queda livre. Após o salto, quanto mais tempo ele permanecer fechado, maior será a velocidade com que o paraquedista cairá: a velocidade **depende**, entre outros fatores, do tempo. Nessa situação, velocidade é função do tempo.

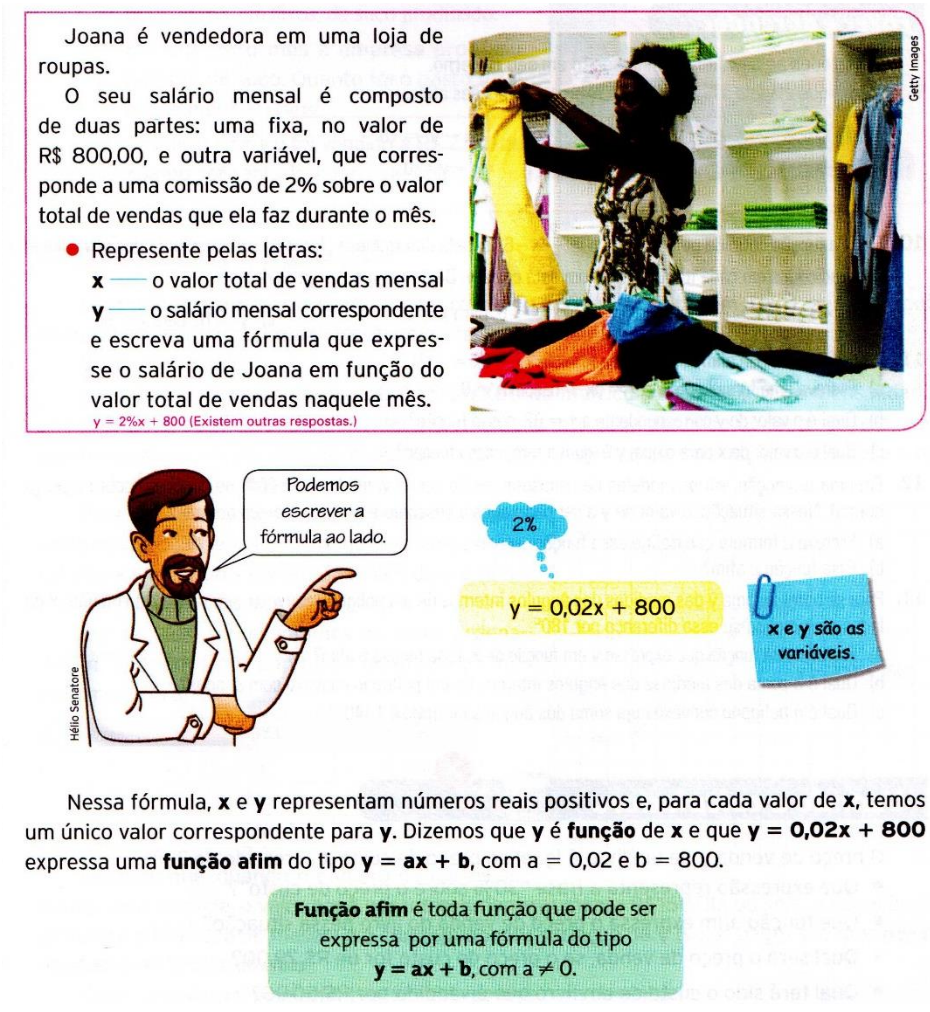
Outro exemplo: o preço das passagens de ônibus **depende**, entre outros fatores, da distância entre a cidade de embarque e a de destino. Ou seja, nessa situação o preço da passagem é função da distância a ser percorrida.

Figura 48: funções: significados e registros.
Fonte: MORI; ONAGA, 2012b, p. 210.

As referências feitas ao conceito de função nas páginas seguintes frisam a relação de correspondência entre duas grandezas, como em um exemplo ilustrado pela seguinte situação: “em 1 mês uma fábrica de refrigerantes produziu cerca de 10 milhões de litros. Como a procura do produto estava crescendo, o gerente propôs um aumento na produção de 1,5 milhão de litros por mês” (MORI; ONAGA, 2012b, p. 212). Após apresentar uma tabela com a produção mensal (em milhões de litros) referente aos próximos cinco meses, chega-se à seguinte **fórmula** (assim como denotada a lei da função nesse exemplo): “**p = 10 + 1,5t**, em que **t** e **p** são as variáveis”.

As autoras não definem matematicamente uma função, apenas se valem de exemplos para indicar que determinadas relações são funções. Um exemplo dado no livro se vale da situação em que a cada aluno da classe corresponde um número da chamada, e que nessa situação não há nenhum aluno sem número na chamada e nenhum aluno com mais de um número de chamada, assim, “em Matemática, dizemos que esse tipo de **correspondência** entre o conjunto dos alunos da classe e o conjunto dos números naturais é uma **função**” (MORI; ONAGA, 2012b, p.211).

Ao definir uma *função afim* as autoras se valem de outro exemplo envolvendo a relação entre duas grandezas, como mostra a figura 49.


Joana é vendedora em uma loja de roupas.

O seu salário mensal é composto de duas partes: uma fixa, no valor de R$ 800,00, e outra variável, que corresponde a uma comissão de 2% sobre o valor total de vendas que ela faz durante o mês.

- Represente pelas letras:
  x —— o valor total de vendas mensal
  y —— o salário mensal correspondente
  e escreva uma fórmula que expresse o salário de Joana em função do valor total de vendas naquele mês.
  y = 2%x + 800 (Existem outras respostas.)

Nessa fórmula, **x** e **y** representam números reais positivos e, para cada valor de **x**, temos um único valor correspondente para **y**. Dizemos que **y** é **função** de **x** e que **y = 0,02x + 800** expressa uma **função afim** do tipo **y = ax + b**, com a = 0,02 e b = 800.

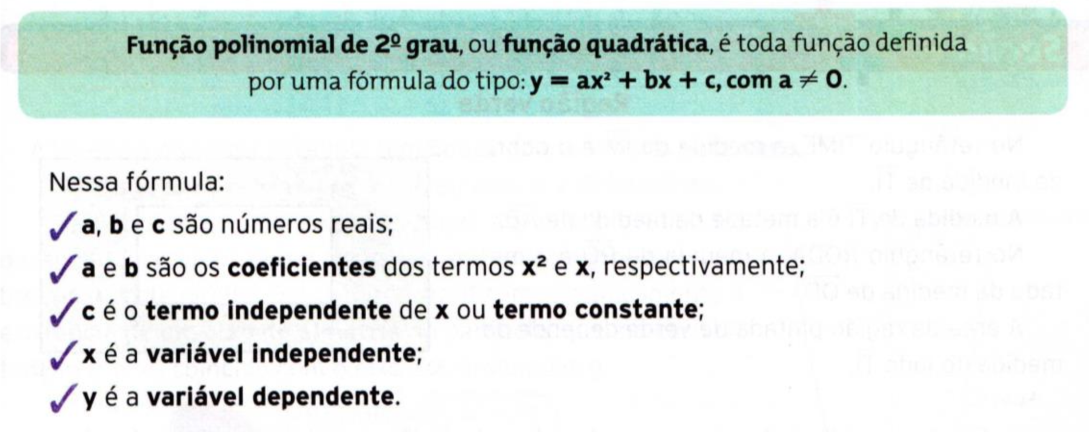
Função afim é toda função que pode ser expressa por uma fórmula do tipo **y = ax + b**, com a ≠ 0.

Figura 49: função afim.
Fonte: MORI; ONAGA, 2012b, p. 215.

Quando o Guia do PNLD de 2014 ressalta, a respeito do conteúdo de funções, como visto anteriormente, que “as discussões sobre o seu domínio não são bem conduzidas”, isso se deve ao fato de que ao partir do exemplo exposto no livro, o domínio fica restrito a "números reais positivos", e como não há qualquer indicação do domínio de uma função afim de um modo geral, este ponto não fica bem esclarecido ao aluno.

A representação gráfica da função afim ocorre por meio de exemplos aplicados, como o que relaciona o valor pago (v) por um curso de computação em relação à quantidade de meses (n) que aluno frequenta a escola, de tal forma que a matrícula é fixa, de R$ 150,00 e a mensalidade é de R$ 150,00, compondo a função expressa por: **v = 200 + 150n**. A notação $f(x)$ ou as notações do tipo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou qualquer referência a conjuntos ou a domínio e imagem de uma função não estão presentes na unidade 8.

Da mesma forma ocorre na unidade 9, referente ao estudo da função quadrática, dividida em quatro capítulos, na sequência: *Função quadrática*, *Representação gráfica de uma função quadrática*, *Estudando parábolas* e *Estudo de sinais*. A definição de *função quadrática* não faz referência a qualquer conjunto numérico como domínio e imagem, como mostra a figura 50.



Função polinomial de 2º grau, ou **função quadrática**, é toda função definida por uma fórmula do tipo: $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, **com** $\mathbf{a \neq 0}$.

Nessa fórmula:

✓ **a**, **b** e **c** são números reais;

✓ **a** e **b** são os **coeficientes** dos termos $\mathbf{x^2}$ e **x**, respectivamente;

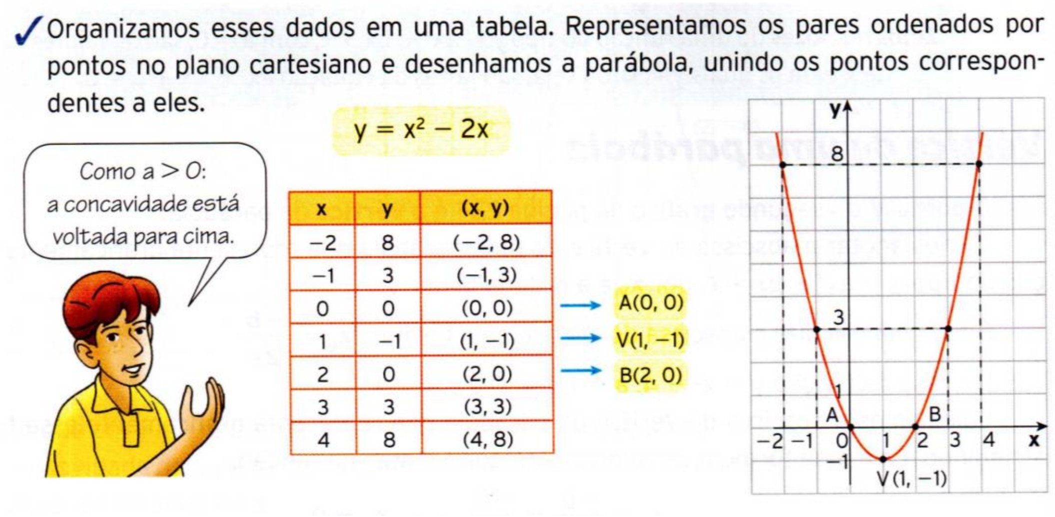
✓ **c** é o **termo independente** de **x** ou **termo constante**;

✓ **x** é a **variável independente**;

✓ **y** é a **variável dependente**.

Figura 50: funções quadráticas.
Fonte: MORI; ONAGA, 2012b, p. 231.

A representação gráfica de uma função quadrática também faz uso de tabelas para organizar os pares ordenados (figura 51).



Organizamos esses dados em uma tabela. Representamos os pares ordenados por pontos no plano cartesiano e desenhamos a parábola, unindo os pontos correspondentes a eles.

$y = x^2 - 2x$

x	y	(x, y)
−2	8	(−2, 8)
−1	3	(−1, 3)
0	0	(0, 0)
1	−1	(1, −1)
2	0	(2, 0)
3	3	(3, 3)
4	8	(4, 8)

Figura 51: gráfico de uma função quadrática.
Fonte: MORI; ONAGA, 2012b, p. 236.

O fato de o conteúdo de funções não apresentar nenhuma relação com conjuntos, seja por diagramas ou flechas ou através de conjuntos numéricos, mostra a não representatividade das propostas do MMM para o conteúdo de funções. Por opção das autoras, como consta no manual do professor, o conteúdo de funções, na coleção *Matemática – Ideias e Desafios*, não proporciona ao aluno a compreensão de função através da notação por conjuntos, pois segundo as autoras, "os conceitos de conjunto-domínio e conjunto-imagem de função como um subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ devem ser abordados em cursos mais avançados" (MORI; ONAGA, 2012a, p. 44).

Para as autoras, "as ideias básicas envolvidas no conteúdo de funções são as de variável, dependência, regularidade e generalização. Os instrumentos utilizados são o plano cartesiano e cálculo algébrico" (p. 45). E, apesar de terem afirmado que era nesse memento, no 9º ano, que os alunos teriam o primeiro contato com as funções, as autoras admitem que "esse estudo relaciona-se com inúmeros outros assuntos desenvolvidos ao longo do período escolar [...]" (p. 45).

Portanto, a notação através de tabelas, equações e gráficos é fortemente explorada no conteúdo de funções, não apresentando, em momento algum, a notação por conjuntos e diagrama de flechas. O conceito de função é desenvolvido intuitivamente, no entanto, a coleção não apresenta, na sequência, uma definição formal para o conceito de função.

A representatividade do conteúdo identificado como o de função na coleção (páginas por conteúdo) é de 40 páginas, concentradas no quarto volume, referente ao 9º ano, representando, aproximadamente, 3,02% da coleção.

5.1.4 Coleção *Matemática – Imenes & Lellis*

A coleção Matemática – Imenes & Lellis, de Luiz Márcio Pereira Imenes e Marcelo Cestari Terra Lellis, disponibiliza ao final de cada volume o *Guia do professor*, que traz a apresentação das obras, de um modo geral, sua estrutura e orientações ao professor, e uma parte específica, diferente para cada volume (ou para cada ano do ensino fundamental), contendo orientações para se trabalhar cada capítulo. Os autores afirmam que a proposta pedagógica da coleção “[...] fundamenta-se nos princípios gerados pela Educação Matemática, que também norteiam os PCNs” (IMENES; LELLIS, 2012a, p. 4).

Quanto ao conteúdo de funções, ao explanar sobre o desenvolvimento dos conteúdos no volume referente ao 9º ano do ensino fundamental, os autores ressaltam que: “No estudo da proporcionalidade (que liga os conteúdos numéricos, algébricos e geométricos), o destaque é sua presença nos vários anos, em particular no 9º ano, quando contribui para estabelecer o conceito de função” (IMENES; LELLIS, 2012a, p. 13). No segundo volume da coleção, referente ao 7º ano, onde é trabalhado o conteúdo referente à proporção, os autores não fazem qualquer referência ao conteúdo de funções propriamente dito, mas apenas afirmam que é possível “generalizar” uma proporcionalidade direta ou indireta, ressaltando que “[...] quando duas grandezas são **diretamente proporcionais**, o valor de uma delas é igual ao valor correspondente da outra multiplicado sempre por um mesmo número” (IMENES; LELLIS, 2012c, p. 150, grifos originais), ou, referente a grandezas inversamente proporcionais, “[...] quando um valor da primeira é multiplicado por um número positivo **n**, o valor correspondente da segunda é dividido por **n** (ou podemos dizer que é multiplicado por **1/n**)” (IMENES; LELLIS, 2012c, p. 163, grifos originais).

Os autores organizam os conteúdos em cinco blocos: Aritmética, Geometria, Medidas, Álgebra, e Estatística. O conteúdo de funções encontra-se no bloco da Álgebra e, de acordo com os autores, ele está presente em todos os anos da seguinte maneira (quadro 4):

Quadro 4: conteúdo de funções na coleção Matemática: Imenes & Lellis.

Conteúdo	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Funções	Uso natural das expressões: depende de, varia com, é função de	Variações direta e inversamente proporcionais	Fórmulas em geral	Funções: tabelas, fórmulas e gráficos cartesianos; função polinomial de 1º grau e a reta; função polinomial de 2º grau e a parábola

Fonte: IMENES; LELLIS, 2012a, p.18.

No manual do professor, os autores afirmam que:

> Nossa abordagem privilegia a ideia de variação – ou de grandezas que variam, uma em dependência da outra – e apoia-se em noções já exploradas na obra (fórmulas, gráficos, proporcionalidade). A ***variação de grandezas*** não é novidade: no volume de 7º ano, a ideia aparece em proporcionalidade no volume de 8º ano, em problemas de Geometria e em questões de Álgebra, como “calcule tal coisa ***em função*** de tal outra”. Neste volume, nos capítulos 8 e 9, a ideia de variação ressurge. Portanto, os alunos que seguem a coleção já acumularam experiência matemática suficiente para aproveitar esse capítulo (IMENES; LELLIS, 2012d, p. 65-66).

No primeiro volume da coleção, referente ao 6º ano, o capítulo 13, intitulado *Generalizações*, traz dez páginas com exemplos e exercícios envolvendo relações entre grandezas (ou variáveis). Um problema bastante explorado no livro trata de cubos enfileirados e da possibilidade de expressar uma *conclusão geral escrita na linguagem matemática*, relacionando a quantidade de cubos enfileirados com o número de faces visíveis (figura 52).

Figura 52: generalizações.
Fonte: IMENES; LELLIS, 2012b, p. 257.

A conclusão geral a que se chega, tal como está exposto no livro, é que o número de faces visíveis (F) é sempre igual ao número de cubos (C) vezes 3, mais 2, ou seja, F = 3.C +2. No Guia do Professor, nas *Orientações para o 6º ano*, em relação ao capítulo 13, os autores comentam: “[...] damos os primeiros passos em direção à **linguagem algébrica** e, em particular, à construção da **ideia de função**” (IMENES; LELLIS, 2012d, p. 69, grifos originais).

Com relação ao exemplo dos cubos e faces, F = 3.C +2, em especial, os autores ressaltam, ainda no Guia do Professor (nas orientações para o 6º ano), que:

> • A fórmula mostra que o número de faces visíveis naquela fileira de cubos depende do (ou "varia com o", "é função do") número de cubos.
> • A letra C representa o número de cubos, que pode ser 1, 2, 3, 4 etc., mas não pode ser 5,2 ou –3. No ensino Médio, esse fato será assim expresso: o **domínio** da função é o conjunto dos números inteiros positivos.
> • A letra F, que representa o número de faces visíveis, pode ser 5, 8, 11, 14, etc., (múltiplos de 3 somados a 2); F não pode ser 10, isto é, naquela organização de cubos não é possível exibir 10 faces. Nos próximos anos, o aluno aprenderá a expressar essa ideia dizendo que, na função em questão, o **conjunto imagem** é: {5, 8, 11, 14, ...}.
> • O gráfico cartesiano dessa função não é uma reta, porque a variável C é discreta, isto é, não é contínua. O gráfico dessa função é constituído por um conjunto de pontos alinhados. (IMENES; LELLIS, 2012d, p. 69).

No quarto volume da coleção, o capítulo 10, intitulado *Funções*, é iniciado retomando-se o *método de localizar pontos no plano cartesiano*, já estudado nos volumes anteriores. Como definido pelos autores anteriormente, a notação do conceito de função se dá através da relação entre duas grandezas, sem se referir a essas grandezas como elementos de dois conjuntos. Os exercícios presentes no capítulo abordam diversas relações consideradas funções como: a distância percorrida por um corpo em queda livre e o tempo de queda, o custo da corrida de táxi em relação aos quilômetros rodados, o número de divisões de um papel quadrado em relação ao número de dobras feitas, entre outros. Após a exploração desses exercícios, o capítulo apresenta o gráfico de uma função como "o retrato da função".

Os autores resumem a construção do gráfico de uma função no plano cartesiano através dos passos: "fórmula → tabela → marcar pontos → unir os pontos", destacando alguns fatos em relação às funções (figura 53).

Na construção de um gráfico, convém lembrar-se dos fatos destacados no quadro a seguir.

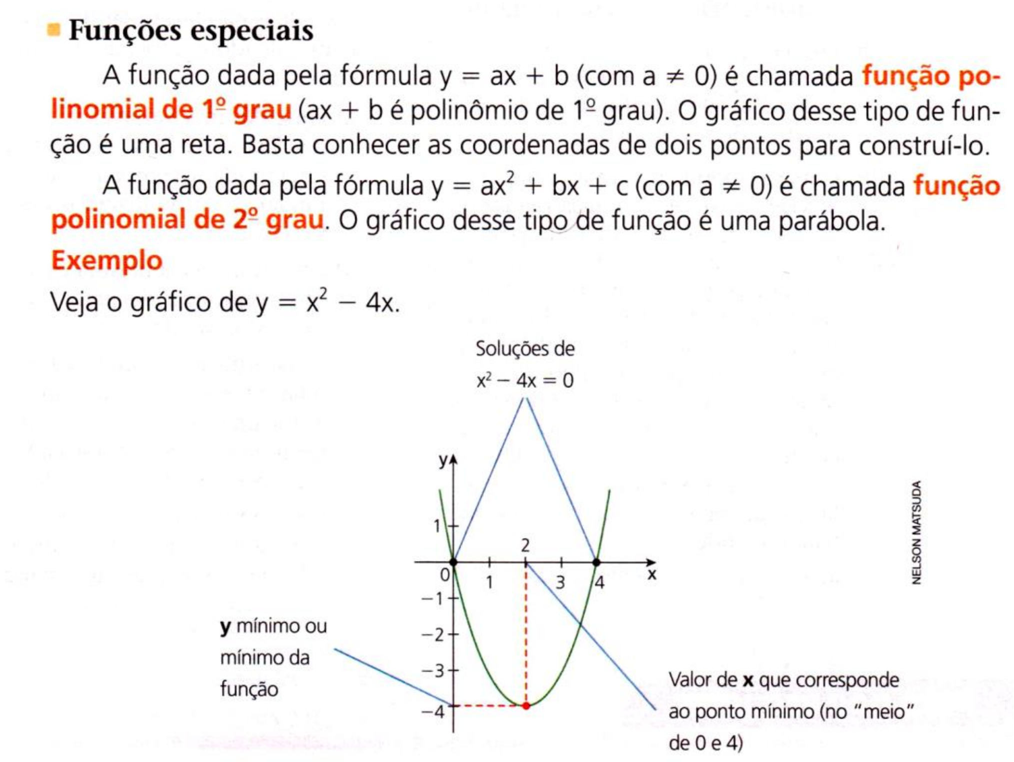
Nas funções em que as variáveis **x** e **y** podem assumir o valor de qualquer número (inteiro, racional etc.), o gráfico:

- é uma reta quando, na fórmula, o valor de **y** é dado por um polinômio de 1º grau em **x** (dizemos que o gráfico representa uma função polinomial de 1º grau ou, resumidamente, que o gráfico representa uma função de 1º grau);
- é uma parábola quando, na fórmula, o valor de **y** é dado por um polinômio de 2º grau em **x** (dizemos que o gráfico representa uma função polinomial de 2º grau ou, resumidamente, que o gráfico representa uma função de 2º grau).

Os gráficos de outras funções polinomiais (de 3º grau em diante) também são curvas (mas não são parábolas).

Figura 53: fatos destacados na construção de um gráfico de uma função.
Fonte: IMENES; LELLIS, 2012e, p. 214.

Essa é a única referência a conjuntos numéricos relacionada ao conteúdo de funções no capítulo 10. A penúltima página desse capítulo (p. 226) traz o subtítulo *Funções especiais*, e apresenta de forma concisa a funções polinomiais de 1º e de 2º graus, sem definir essas funções em qualquer conjunto numérico (figura 54).



Funções especiais

A função dada pela fórmula $y = ax + b$ (com $a \neq 0$) é chamada **função polinomial de 1º grau** ($ax + b$ é polinômio de 1º grau). O gráfico desse tipo de função é uma reta. Basta conhecer as coordenadas de dois pontos para construí-lo.

A função dada pela fórmula $y = ax^2 + bx + c$ (com $a \neq 0$) é chamada **função polinomial de 2º grau**. O gráfico desse tipo de função é uma parábola.

Exemplo

Veja o gráfico de $y = x^2 - 4x$.

Figura 54: funções especiais.
Fonte: IMENES; LELLIS, 2012e, p. 226.

Nas *Orientações para o 9º ano*, presente no Guia do Professor, referente ao capítulo 10, os autores salientam, em relação ao conteúdo de funções, que: "nossa abordagem privilegia a ideia de variação – ou de grandezas que variam, uma em dependência da outra – e apoia-se em noções já exploradas na obra (fórmulas, gráficos e proporcionalidade)" (IMENES; LELLIS, 2012a, p. 65).

Os autores fazem, mais uma vez, referência ao ensino médio ao tratar do conteúdo de funções em sua coleção:

> Embora limitada a noções básicas, a abordagem adotada difere da maioria dos livros didáticos. Enfatizando-se o significado das funções e suas aplicações, isto é, as **dimensões conceitual** e **atitudinal** do conteúdo, reduzindo-se o trabalho técnico, que, em nossa opinião, tem importância apenas no Ensino Médio (IMENES; LELLIS, 2012a, p. 66).

A coleção, no que se refere ao conteúdo de funções propriamente dito, dá ênfase a representações de funções através de fórmulas, tabelas e gráficos, assim com ressaltado pelo Guia do PNLD de 2014, já referido. A opção por não fazer uso de diagramas de flechas ou de dar ênfase aos conjuntos numéricos na definição de funções (como pode ser observado na figura 54) indica a não representatividade às fortes características referentes ao conteúdo de funções no âmbito do MMM, aproximando-se muito mais da ênfase dada no âmbito das reformas Campos e Capanema no que diz respeito à notação, explorando a relação entre grandezas através de tabelas, equações e gráficos. A relação entre o conceito de função e demais conteúdos estudados nos anos anteriores é ressaltada pelas autoras.

Das 1280 páginas dos quatro volumes, ao conteúdo intitulado funções são reservadas 23 páginas, representando 1,78% da coleção.

5.1.5 Coleção *Matemática: teoria e contexto*

A coleção *Matemática: teoria e contexto*, de Marília Ramos Centuríon e José Jakubovic, traz ao final de cada volume o *Manual do Professor*, contendo uma parte que apresenta a coleção de um modo geral, comum a todos os volumes, e outra parte específica aos conteúdos de cada ano. Os autores apresentam a sua obra afirmando que, dentre outras referências, eles se valeram dos pressupostos dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o processo de elaboração da coleção.

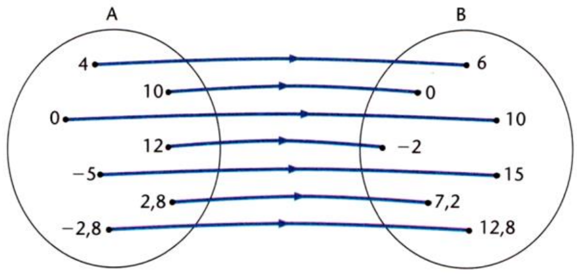
No manual do professor do quarto volume, referente ao 9º ano, ao fazer referência ao capítulo 7 do livro, que trata de funções, Centurión e Jakubovic (2012a, p. 31) afirmam que:

> O capítulo aborda funções de forma original. A apresentação do tema é sucinta, com menos símbolos e regras que o habitual. Em vez da preocupação com notações e uso de terminologias, que tem sido o tratamento mais frequente nessa fase, optamos por enfatizar a ideia de função, suas representações gráficas e algébricas e algumas aplicações.
> Muitas atividades fazem conexões com Grandezas e Medidas e com Geometria, o que ajuda o aluno a dar significado à noção de função e a perceber intuitivamente conceitos como variação de uma função, crescimentos, máximos e mínimos.

Os autores também comentam sobre a relação feita em uma das atividades do capítulo referente a funções, que retoma o Teorema de Pitágoras, instigando os alunos a compreenderem a relação entre a medida da diagonal de um quadrado e a medida do lado de um quadrado como o radical $\sqrt{3}$ sendo o coeficiente de proporcionalidade dessa relação.

Os autores comentam sobre as funções *constante*, *do 1º grau* e *do 2º grau*, e afirmam que seguem as orientações dos PCNs para abordar o conteúdo, que sugere tratar de problemas envolvendo variações de grandezas para desenvolver a noção de função. Portanto, no sétimo capítulo do livro do 9º ano, na parte 1, intitulada *Ideia de função*, o conceito de função é explorado através de uma situação fictícia em uma sala de aula, onde o professor aponta para um aluno e diz um número, e esse aluno, então, deve dizer um número, que somado ao do professor, resulte em 10, montando assim uma tabela que relaciona sete pares de números. Logo na página seguinte, essa relação é representada por um diagrama de flecha (figura 55).

Essa situação também pode ser representada utilizando-se um diagrama:



O diagrama apresenta, no conjunto A, os números ditos pelo professor e, no conjunto B, as respostas dos alunos. Apresenta também como os números de A e de B se associam. Essa associação é uma **função**, e o conjunto A é o **domínio** dessa função.

Figura 55: ideia de função.
Fonte: CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2012b, p. 189.

Os autores dão continuidade ao exemplo mostrando que existe outra maneira de representar uma função, que é descrevendo a *lei de associação* entre os números de A e de B, descrevendo-a na linguagem algébrica. Como segue no livro: chamando de x os elementos de A e de y os elementos de B, temos, $y = 10 - x$. Os autores ainda ressaltam que x é a variável independente e y é a variável dependente e que os valores de x formam o domínio da função, e que a função produz os pares ordenados (x, y), como, por exemplo: (4, 6), (10, 0), (0, 10), entre outros.

Outros exemplos são dados no capítulo, como a função que relaciona o diâmetro da circunferência com o seu comprimento, de modo que $C = d\pi$, ou seja, o comprimento da circunferência é função do seu diâmetro, ou uma lei denotada por $y = \frac{x+3}{x}$, ressaltando que há restrições em seu domínio, sendo esse o conjunto dos números reais sem o zero, usando a simbologia $\mathbb{R}^*$.

A relação entre proporcionalidade e função está em destaque no livro (figura 56).

VOCÊ SABIA ?

Apresentamos leis de associação como C = πd, y = 5x. Toda lei desse tipo indica que uma variável é diretamente proporcional à outra. Isto é, sempre que as variáveis se relacionam por uma lei como y = ax, *y* é diretamente proporcional a *x*. Assim, no primeiro exemplo, concluímos que o perímetro de uma circunferência é diretamente proporcional ao raio dela.

Figura 56: proporcionalidade e função.
Fonte: CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2012b, p. 192.

E uma aplicação dessa relação é dada logo na página seguinte (figura 57), em um exercício que apresenta a relação entre a diagonal e o lado de um quadrado, como comentado no manual do professor.

4. A medida da diagonal *d* de um quadrado é função da medida ℓ do lado.

$d = \ell\sqrt{2}$

a) Qual é a lei de associação dessa função?

b) A medida da diagonal *d* é diretamente proporcional à medida ℓ do lado? Sim

c) Se $\ell = \sqrt{18}$, qual é o valor de *d*? 6

Figura 57: a medida da diagonal de um quadrado é função da medida do lado.
Fonte: CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2012b, p. 193.

O capítulo 7 está dividido em seis partes, no primeiro, como descrito detalhadamente, foi explorada a ideia de função, nas partes seguintes são abordadas, nessa ordem: *Função constante e funções de 1º e 2º graus*, *Gráfico de uma função*, *Gráfico da função constante e da função do 1º grau*, *Gráfico da função do 2º grau* e, por último, *Máximos e mínimos*.

A definição da função do 1º grau é dada através de um exemplo que relaciona o valor a ser pago por uma corrida de táxi com o valor fixo da bandeirada, que é de R$ 3,20 e o adicional de R$ 1,30, por quilômetro rodado (figura 58).

A função dada por **P = 1,30x + 3,20** é chamada de **função polinomial de 1º grau**, porque 1,30x + 3,20 é um polinômio de 1º grau. Para abreviar, vamos chamar de **função de 1º grau** toda função dada por **y = ax + b**, sendo $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Figura 58: definição de uma função polinomial do 1º grau.
Fonte: CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2012b, p. 199.

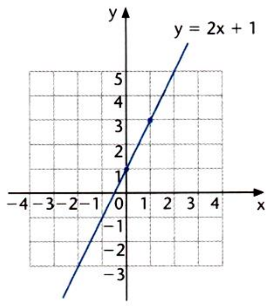
A definição da função do segundo grau ocorre de maneira semelhante. As representações gráficas presentes no livro estão sempre acompanhadas de tabelas e de expressões analíticas (equações), tanto na função constante quanto nas funções de 1º e 2º graus. (figura 59).

O gráfico de uma função de 1º grau, com domínio $\mathbb{R}$, é uma reta.

exemplos

1. Vamos fazer o gráfico da função dada por $y = 2x + 1$, com domínio $\mathbb{R}$. Essa função é de 1º grau. Logo, seu gráfico é uma reta. Basta, então, atribuir dois valores para *x* e calcular os valores de *y*. Aí, marcamos os dois pontos no plano cartesiano e traçamos a reta que passa por eles.

x	y
0	1
1	3



2. Vamos fazer o gráfico da função dada por $y = -x - 2$, com domínio $\mathbb{R}$. Atribuiremos dois valores para *x*. Por exemplo, −2 e 0.

x	y
−2	0
0	−2

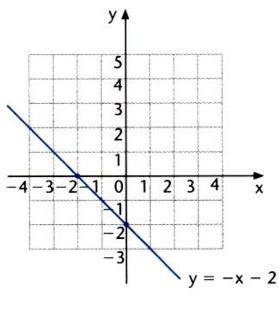


Figura 59: representação gráfica de uma função do 1º grau.
Fonte: CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2012b, p. 208.

O livro explora de maneira intuitiva e bem dinâmica a ideia de função, expondo, através de tabelas, equações e gráficos, diversos exemplos que reconhecem alguns dos demais conteúdos trabalhados em matemática como uma função, mesmo que essas relações não tenham sido trabalhadas paulatinamente durante os demais volumes da coleção.

A notação por meio de conjuntos e diagramas de flechas também está presente no estudo de funções, tanto para desenvolver o conceito de função quanto para defini-la, o que caracteriza um rastro do MMM, advento da entrada dos conjuntos numéricos nas primeiras séries do ensino secundário, como ocorreu na coleção de livros do Osvaldo Sangiorgi, na década de 1960.

Das 1072 páginas da coleção, o espaço reservado às funções ocupa 35 páginas, tendo uma representatividade de 3,26%.

5.1.6 Coleção *Praticando Matemática: edição renovada*

A coleção *Praticando Matemática: edição renovada*, de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, também traz em todos os seus quatro volumes um material reservado ao professor, contendo uma parte geral, de apresentação da coleção, que é comum a todos os volumes, e uma parte específica para cada volume, direcionada aos conteúdos de cada ano.

No *Manual do Professor*, os autores fazem referência a diversas perspectivas metodológicas para o ensino de matemática ao fundamentar a sua coleção, trazendo trechos de artigos que abordam desde a resolução de problemas na ótica de George Polya, o uso da história da matemática em sala de aula, e até questões sobre leitura, escrita e oralidade em matemática. A coleção, segundo os autores, distribui seus conteúdos entre os seguintes temas: Números, Álgebra, Geometria, Medidas, Razões, Porcentagens e Proporcionalidade, Estatística, Funções. É a única das dez coleções analisadas cujos autores dão atenção à função como um tema ou um bloco de conteúdos.

Ao tratar especificamente do tema Funções no Manual do Professor, os autores enfatizam que:

> Desde o 7º ano, e de forma mais especifica no 8º ano, trabalhamos com a observação e generalização de padrões, a relação de interdependência entre grandezas, o reconhecimento do uso de variáveis, a escrita e a aplicação de fórmulas para representar algebricamente a relação entre variáveis.
> O conceito de função, preparado desde os anos anteriores, surge com mais facilidade e é desenvolvido com o título de "Funções" no volume referente ao 9º ano. Procuramos torná-lo menos formal, uma vez que o estudo desse conteúdo é retomado e aprofundado no Ensino Médio. Na Unidade 4, definimos funções, damos noções sobre domínio e imagem, representamos funções por meio de diagramas de flechas. (ANDRINI; VASCONSELLOS, 2012b, p. 12).

Vê-se que os autores exploram a notação de funções por meio de diagramas de flechas e que preparam os alunos desde os anos anteriores, mas sem se referir diretamente ao termo "função", da mesma forma que algumas das coleções selecionadas pelo PNLD analisadas anteriormente. Eles também fazem referência ao aprofundamento do conteúdo de funções no ensino médio como justificativa para uma abordagem menos formal no ensino fundamental acerca desse conteúdo.

A unidade 4 do quarto volume, referente ao 9º ano, intitulada *Funções*, inicia explorando o conceito de função através de um exemplo que relaciona a quantidade de combustível consumida por um automóvel com a distância percorrida, como mostra a figura 60.

1. Conceito de função

A quantidade de combustível consumida por um automóvel é função da distância que ele percorre.

Nessa afirmação e em outras presentes em nosso dia a dia, usamos a expressão "é função de" para mostrar que a quantidade de combustível depende do número de quilômetros rodados pelo automóvel.

Mas o que é função? Já percebemos a ligação entre a palavra **função** e a relação de interdependência entre os valores de grandezas.

Vamos descobrir mais?

Figura 60: conceito de função.
Fonte: ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012b, p. 95.

O exemplo da brincadeira que o professor faz com os alunos é representado primeiramente por uma tabela, onde "[...] cada número *x* dito pelo professor corresponde a *um* único resultado correto *y* para a resposta dos alunos" (ANDRINI, VASCONCELLOS, 2012b,

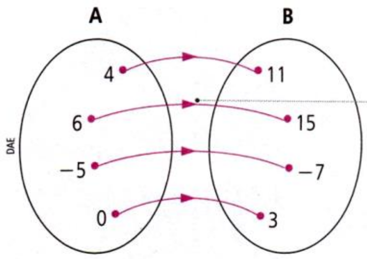
p. 96, grifos originais). Em seguida, a mesma situação leva a notação de digrama de flechas (figura 61).

A fórmula que expressa a relação entre *x* e *y* é $y = 2x + 3$.

Nesse exemplo, dizemos que *y* é **função** de *x*.

A fórmula $y = 2x + 3$ é a **lei de formação** dessa função.

Outro modo de representar essa tabela é por meio de um **diagrama**:



Cada seta associa o número falado pelo professor com a respectiva resposta dos alunos.

Formamos um conjunto A com os números dados pelo professor e um conjunto B com as respostas dos alunos.

Como os conjuntos que relacionamos são A e B, dizemos que essa é uma função de A em B.

Escreve-se: f: A ⟶ B (Lê-se: f é uma função de A em B).

Figura 61: diagrama de flechas.
Fonte: ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012b, p. 96.

Os autores optaram por fazer uso da notação de conjuntos para, em seguida, definir uma função da mesma forma (figura 62).

Para que tenhamos uma função é preciso:

- estabelecer dois conjuntos: um primeiro conjunto, do qual tomaremos os valores de *x*, e um segundo conjunto, no qual encontraremos os valores correspondentes de *y*;
- haver uma relação entre *x* e *y* de forma que a cada *x* tomado no primeiro conjunto corresponda um único *y* no segundo conjunto.

Figura 62: definição de função através de conjuntos.
Fonte: ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012b, p. 97.

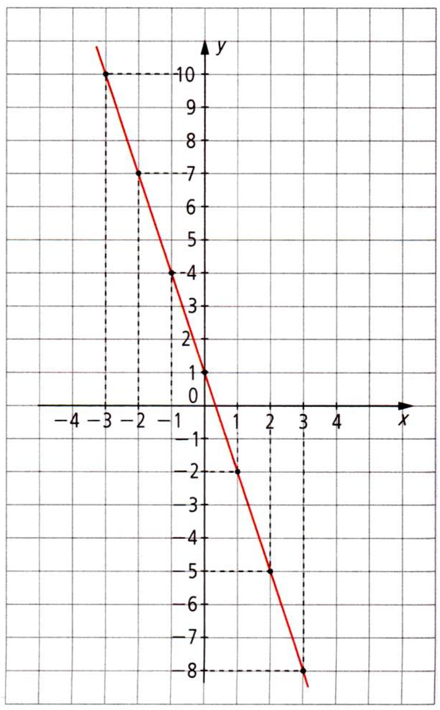
A notação por conjuntos e diagramas de flechas é bastante explorada no primeiro item, que aborda o conceito de função de maneira geral. Já nos itens seguintes essa notação é completamente descartada, mesmo na apresentação do *domínio* e da *imagem* de uma função, onde apenas se faz referência à possibilidade de se definir os números reais como domínio de determinadas funções.

No item 2, *As funções e suas aplicações*, os autores fazem o uso constante de tabelas para relacionar grandezas e, em algumas vezes, também, a *lei de formação* dessa relação. Nos itens seguintes, 3 e 4, respectivamente, *Da tabela para a lei de formação* e *Interpretando gráficos*, segue o mesmo esquema. No item 5, *Construindo gráficos de funções*, são definidas as funções polinomiais de 1º e 2º graus, apresentando a função através de equações (expressões analíticas), tabelas e gráficos (figura 63).

Como será o gráfico da função dada por $y = -3x + 1$?

Montamos uma tabela atribuindo alguns valores para x, calculamos os valores de y por meio da lei de formação da função e representamos no sistema cartesiano os pares ordenados $(x; y)$ obtidos.

x	$y = -3x + 1$	$(x; y)$
-3	10	$(-3; 10)$
-2	7	$(-2; 7)$
-1	4	$(-1; 4)$
0	1	$(0; 1)$
1	-2	$(1; -2)$
2	-5	$(2; -5)$
3	-8	$(3; -8)$



Os pontos obtidos estão alinhados.

Quanto mais pares ordenados da função representarmos, mais pontos alinhados obteremos.

São infinitos pares ordenados, pois x pode ser qualquer número real.

O gráfico dessa função é uma reta.

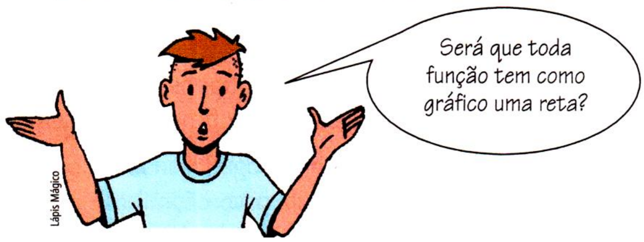


Figura 63: equação (expressão analítica), tabela e gráfico de uma função.
Fonte: ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012b, p. 116.

Em seguida, são definidas as funções polinomiais de 1º e 2º graus:

> Funções cuja lei de formação pode ser escrita na forma $\boldsymbol{y = ax + b}$, sendo a e b números reais e a diferente de zero, têm como gráfico uma **reta**. [...] Essas funções são chamadas **funções polinomiais do 1º grau**, pois encontramos em sua lei de formação um polinômio de 1º grau.
> Funções cuja lei de formação pode ser escrita na forma $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, sendo a, b e c números reais e a diferente de zero, têm como gráfico uma **parábola**. [...] Essas funções são chamadas **funções polinomiais do 2º grau**, pois encontramos em sua lei

> de formação um polinômio de 2º grau. (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012b, p. 118, grifos originais)

Os autores não fizeram nenhuma relação explícita na unidade 4 relacionando o conteúdo de funções com os demais conteúdos explorados nos outros anos, no entanto, apontam a existência dessa relação, como visto. O que chamou a atenção na coleção foi a forte referência à notação de função por conjuntos e diagramas de flechas, mesmo que o autor não tenha abordado em nenhum outro momento na coleção esse tipo de notação. O desenvolvimento do conceito de função ocorre, na coleção, de maneira intuitiva, e a notação de funções, além de diagrama de flechas, explora tabelas, equações e gráficos.

A representatividade do conteúdo dito como função na coleção é de 38 páginas do total de 1152, ou seja, de aproximadamente 3,3%.

5.1.7 Coleção *Projeto Araribá – Matemática*

A coleção *Projeto Araribá – Matemáica* é uma obra coletiva, sendo Fábio Martins de Leonardo o editor responsável. Ao final de cada volume encontra-se um caderno intitulado *Guia e recursos didáticos*, trazendo orientações aos professores, a apresentação e a estruturação da coleção e uma parte específica para cada ano, diferente em cada volume. Os autores iniciam a orientação aos professores ressaltando os objetivos do ensino de matemática a nível fundamental, séries finais, presentes nos PCNs, trazendo, também, itens que abordam algumas metodologias para o ensino de matemática, em particular a resolução de problemas. Quanto à disposição dos conteúdos na coleção, estes estão organizados em quatro temas: Números e operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da informação. Os autores não especificam em qual dos temas o conteúdo de função está presente (EDITORA MODERNA, 2010a).

O conteúdo intitulado funções encontra-se no quarto volume, referente ao 9º ano, na Parte 4, intitulada *Funções*. Essa unidade é apresentada com um texto referente à extração de petróleo da camada do pré-sal, trazendo indagações acerca da quantidade de litros de petróleo extraídos no pré-sal em função do tempo, em dias. A parte 4 é subdividida em unidade 8, *Funções*, unidade 9, *Função afim*, e unidade 10, *Função quadrática*. A unidade 8 inicia com o item intitulado *Ideia de função*, apresentando o conceito de função através da correspondência entre grandezas, como pode ser visto na figura 64.

1. Ideia de função

Analisar como as grandezas se relacionam é uma prática necessária e habitual em diversas atividades, tanto cotidianas quanto econômicas, entre outras.

Veja o exemplo a seguir.

Em determinado período, o valor de referência do barril de petróleo era de US$ 119,22.

De acordo com o preço de um barril, podemos montar a seguinte tabela com o preço do petróleo por número de barris:

Quantidade de barris	1	2	3	4	5
Preço (em US$)	119,22	238,44	357,66	476,88	596,10

Percebemos que cada quantidade de barris determina um único preço. Quando isso ocorre, podemos dizer que o preço é dado em função da quantidade de barris.

Quando há correspondência entre duas grandezas e para cada medida da primeira grandeza ocorre *uma única* medida correspondente da segunda, dizemos que a segunda grandeza é **função** da primeira.

Observando a correspondência entre a quantidade de barris e o preço do barril, qual será o valor de 12 barris de petróleo? E de x barris?

Figura 64: ideia de função.
Fonte: EDITORA MODERNA, 2010b, p. 130.

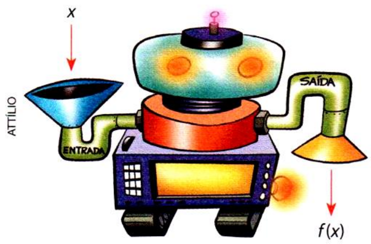
Em seguida os autores definem a lei de formação de uma função, fazendo o uso de outro exemplo, apresentando uma tabela que relaciona o número de lados de um polígono (n) com o perímetro (p) desse polígono, em cm, de forma que, para polígonos regulares de lado igual a 2 cm, $p = 2n$. Através dos dois exemplos dados, o exemplo dos barris de petróleo e o exemplo dos polígonos, os autores definem variável dependente e independente.

No segundo item da unidade 8, intitulada *A notação f(x)*, é dada atenção especial ao valor de uma função, onde os autores ressaltam o uso do conjunto dos números reais para se analisar a relação entre variáveis em uma função (figura 65).

Observação

Muitas situações cotidianas permitem o estudo de funções. No entanto, para analisar como as variáveis se relacionam em uma função e usar números do conjunto dos reais, vamos recorrer a uma situação imaginária. Para isso, imagine um robô que, após receber um número real, realiza sempre a mesma operação com o número inserido e, depois, devolve o resultado correspondente.

x (números inseridos no robô)	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$1,5$
$f(x)$ (números correspondentes)	0	1	2	3	$\frac{7}{2}$	$4,5$



Observando os dados acima, vemos que foram somadas 3 unidades a cada valor de x para obter o valor correspondente a ele, ou seja, $f(x)$. Como o robô realiza sempre a mesma operação para qualquer número real x, temos que a lei dessa função é: $f(x) = x + 3$

Assim, se quisermos saber que valor sairá do robô ao introduzir, por exemplo, o valor $\sqrt{2}$, bastará usar a lei da função:

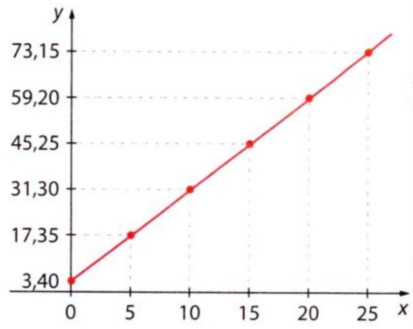
$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 3$$

Figura 65: observação sobre o uso do conjunto dos números reais.
Fonte: EDITORA MODERNA, 2010b, p. 132.

No item 3 da unidade 8, *Representação gráfica de uma função*, os autores, inicialmente, fazem uso apenas de tabelas para definir o gráfico de uma função. Essas tabelas representam situações que envolvem a correspondência entre duas grandezas como: o perímetro do quadrado em função da medida do lado do quadrado; o preço a ser pago em função do número de cópias a serem realizadas em uma loja que trabalha com fotocopiadoras; entre outros. Apenas em um exemplo os autores se valem da lei de formação de uma função para representar o gráfico, sendo x qualquer número real e a função definida por $f(x) = 2x^2$ (EDITORA MODERNA, 2010, p. 135).

Na unidade 9 a *função afim* é definida através de um exemplo envolvendo a quantidade de gasolina em litros e o valor gasto em reais, relacionando a expressão analítica (lei de formação, ou equação, referente à função) com a tabela e com o gráfico que representam essa situação (figura 66).

Quantidade de gasolina (em litro)	Valor gasto (em real)
x	$y = 2{,}79 \cdot x + 3{,}40$
0	3,40
5	17,35
10	31,30
15	45,25
20	59,20
25	73,15



Note que os pontos do gráfico estão alinhados. Como x pode assumir qualquer valor real igual a zero ou maior, até a capacidade máxima do tanque, o gráfico dessa função é uma linha contínua, que começa em (0; 3,40) e se prolonga até o ponto cujo valor de x correspondente à capacidade máxima do tanque. O gráfico dessa função é parte de uma reta.

Note que a lei $y = 2{,}79x + 3{,}40$ é do tipo $y = ax + b$, em que a e b são números reais.

Função afim é toda função cuja lei pode ser escrita na forma $y = ax + b$, em que a e b são números reais e x pode ser qualquer número real.

Figura 66: definição da função afim.
Fonte: EDITORA MODERNA, 2010b, p. 138.

De maneira semelhante é definida, na unidade 9, a *função quadrática*, sendo “toda a função cuja lei pode ser escrita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo a, b e c números reais, com a diferente de zero, e x pode ser qualquer número real” (EDITORA MODERNA, 2010b p. 147). No livro não há nenhuma especificação sobre o fato de que na definição da função afim os autores optaram por usar y como notação de *função de x* e não $f(x)$ como na definição da função quadrática.

No conteúdo de funções da coleção *Projeto Araribá – Matemática*, não é feita, ao menos de maneira explícita, qualquer referência à relação das funções com os demais conteúdos estudados nesse mesmo volume ou em volumes anteriores. Em nenhum momento faz-se referência à notação de funções por meio de conjuntos, que não o conjunto dos números reais. Também não está presente nessa coleção a notação de funções por diagramas de flechas, ou seja, o conceito de função e sua definição se dão por intermédio da relação de correspondência entre duas grandezas, representadas por x e $y = f(x)$.

As características da coleção trazem a não representatividade da notação por conjuntos no conteúdo de funções e também a pouca, ou nenhuma, preocupação em relacionar os diferentes conteúdos matemáticos estudados na própria coleção como o conteúdo de função. Nas *Orientações para o desenvolvimento das partes*, parte específica do 9º ano, presente no guia de recursos didáticos, não há nenhuma informação referente ao conteúdo de funções que não tenha sido explorada na própria Parte 4, apresentando apenas comentários sobre as unidades e itens que a compõem, como, por exemplo, explorar o conceito de função de maneira intuitiva, o que ocorre, de fato, no conteúdo de funções presente nessa coleção.

Das 1152 páginas, 34 páginas são reservadas ao conteúdo de funções, assim identificado pelos autores, representando, aproximadamente 3% de toda a coleção.

5.1.8 Coleção *Projeto Teláris – Matemática*

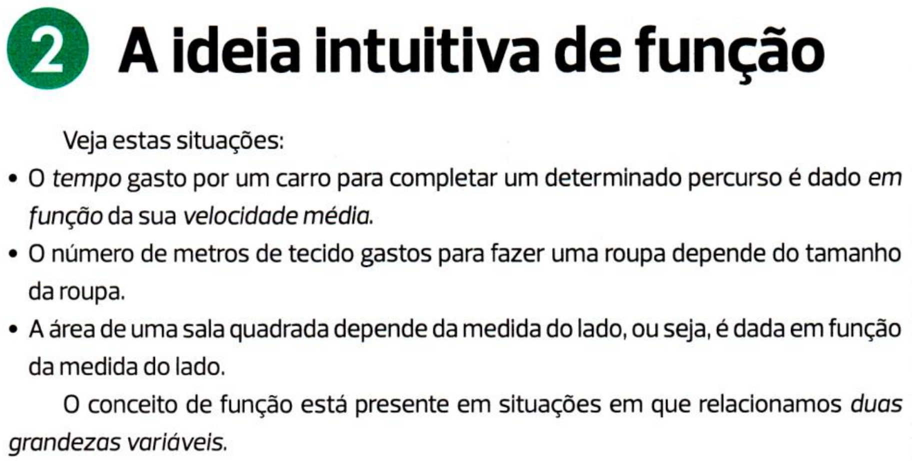
A coleção *Projeto Teláris – Matemática*, de Luiz Roberto Dante, também traz, ao final de cada volume, o manual do professor, no formato semelhante também às demais coleções aqui analisadas, reservando, nesse manual, um espaço específico referente a cada ano, diferente em cada volume. Quanto às referências para a constituição da coleção, o autor aponta a contribuição dos PCNs. Segundo Dante (2013a, p. 5): “[...] esta coleção incorporou muito dos estudos e das pesquisas em Educação Matemática que estão explicitados nos PCNs de Matemática do 6º ao 9º ano”. O autor também ressalta a importância de se trabalhar os *temas transversais* e com a resolução de problemas.

Ao se referir especificamente ao capítulo 3 do livro do 9º ano, *Explorando a ideia de função*, da unidade 2, *Funções e Geometria*, o autor reconhece esse conteúdo como “uma das dimensões da Álgebra”, da mesma forma que os PCNs. Dante (2013a, p. 56-57) ainda adverte que:

> Não pretendemos fazer neste capítulo um estudo completo de funções, pois este é conteúdo específico do Ensino Médio. O objetivo aqui é explorar intuitivamente essa noção – já que é uma das principais ideias da Matemática –, bem como traçar alguns gráficos de funções e interpretá-los.
> Apresentamos também conexão com Geometria e medida, utilizando o cálculo do perímetro de um quadrado, logo no início do capítulo. Com o enfoque em tabelas e gráficos de situações contextualizadas, chegamos aos conceitos de lei da função e variável dependente e independente.

Na introdução do capítulo 3 da unidade 2, o conceito de função é introduzido por meio de um exemplo envolvendo a compra de caixas de suco e o valor a ser pago por essas caixas, onde “o preço a pagar é dado em função da quantidade de caixas de suco adquiridos”. Sendo P o preço a pagar e x a quantidade de caixas de sucos comprados, a R$ 2,80 cada caixa, a função é indicada no livro como $P = 2{,}80x$, também representada por meio de uma tabela e um gráfico.

No segundo item do capítulo 3, é apresentada a *ideia intuitiva de função*, ressaltado a presença do conceito de funções em situações que relacionam grandezas variáveis, conforme a figura 67.



2 A ideia intuitiva de função

Veja estas situações:

- O *tempo* gasto por um carro para completar um determinado percurso é dado *em função* da sua *velocidade média*.
- O número de metros de tecido gastos para fazer uma roupa depende do tamanho da roupa.
- A área de uma sala quadrada depende da medida do lado, ou seja, é dada em função da medida do lado.

O conceito de função está presente em situações em que relacionamos *duas grandezas variáveis*.

Figura 67: ideia intuitiva de função.
Fonte: DANTE, 2013b, p. 72.

O livro apresenta outra situação para explorar o conceito de função e definir a *lei de uma função* e suas variáveis (dependente e independente), que trata da relação entre o lado (l) de um quadrado e seu perímetro (P), dado por: $P = 4l$.

O gráfico de uma função é apresentado, inicialmente, de maneira que se tenha que interpretar situações que definem, no plano cartesiano, curvas e retas, com o crescimento da população brasileira (por milhões de habitantes) em função do tempo (em anos), a relação entre litros e tempo (em minutos) no esvaziamento de um tanque de água. Somente após a análise desses gráficos, que estão acompanhados de questões interpretativas, é que se propõe a construção de gráficos de função, sempre por meio da expressão analítica e de uma tabela (figura 68).

Vamos construir o gráfico da função dada pela fórmula $y = 2x + 1$, com **x** real.

Como **x** varia no conjunto dos números reais, escolhemos alguns valores arbitrários para **x** e obtemos os valores correspondentes para **y**.

x	**y = 2x + 1**	**(x, y)**
−2	−3	(−2, −3)
−1	−1	(−1, −1)
0	1	(0, 1)
1	3	(1, 3)
2	5	(2, 5)

O gráfico é o conjunto de todos os pontos correspondentes aos pares ordenados (x, y) com **x** real e $y = 2x + 1$, o que nos dá a *reta* da figura abaixo.

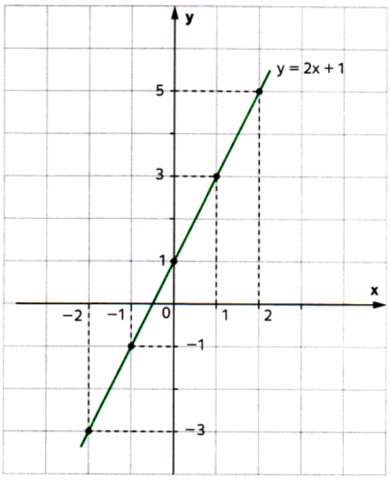


Figura 68: gráfico de uma função.
Fonte: DANTE, 2013b, p. 76.

A única referência a conjuntos, de um modo geral, no segundo item do capítulo 3, presente na notação de uma função, foi a indicação “com ***x*** real”, como mostrou a figura 68.

No item 3 do mesmo capítulo, o conceito de *função afim* é explorado através de um exemplo que descreve o salário de um vendedor, que é composto de uma parte fixa e outra variável (por comissões), seguida da definição: “chamamos de *função afim* toda a função cuja lei de formação pode ser indicada por ***y = ax + b***, com ***a*** e ***b*** reais.” (DANTE, 2013b, p.83, grifos originais).

São tratados também os casos particulares da *função afim*: a *função linear*, do tipo $y = ax$, com $a \neq 0$, e a *função identidade*, $y = x$. Em destaque, o autor faz referência à relação entre uma função linear e a proporcionalidade (figura 69).

Função linear e proporcionalidade

Considere esta situação:

Um automóvel faz um percurso com velocidade média de 80 km/h.

$y = 80x$

- Escreva a fórmula que indica o número **y** de quilômetros percorridos em função do número **x** de horas.
- Construa em seu caderno uma tabela relacionando **x** e **y** para os seguintes valores: $x = 3$; $x = \frac{1}{2}$; $x = 3{,}5$; $x = 0{,}25$ e $x = 2\frac{1}{2}$.
- Faça um gráfico para **x** real e $x \geqslant 0$.

x	3	$\frac{1}{2}$	3,5	0,25	$2\frac{1}{2}$
y	240	40	280	20	200

*Veja o gráfico no **Manual do Professor**.*

Essa situação mostra-nos um exemplo de função na qual os valores de **x** (tempo) e os correspondentes de **y** (distância) são diretamente proporcionais.

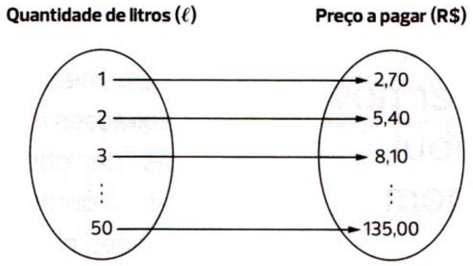
Figura 69: função Linear e Proporcionalidade.
Fonte: DANTE, 2013b, p. 89.

O quarto item do capítulo 3 traz a conceituação e definição da função quadrática, o estudo dos zeros da função e do vértice da parábola, explorando diferentes situações através da expressão analítica, tabela e gráfico. E no quinto item desse mesmo capítulo são exploradas algumas situações que envolvem funções, como a graduação de termômetros e a conversão de escalas termométricas (Celsius e Fahrenheit).

O autor não optou pela notação de funções através de conjuntos e diagramas de flechas, pois o conteúdo de funções apresenta-se na obra por meio da relação entre grandezas em situações diversificadas, como o guia do PNLD de 2014 havia comentado. No manual do professor, ao tratar dos “avanços conquistados pela Educação Matemática” levados em conta na elaboração da coleção, o autor se vale do conceito de função para exemplificar suas colocações, afirmando que, segundos esses “avanços”, para que o aluno aprenda Matemática atribuindo significado, é fundamental “trabalhar as ideias, os conceitos matemáticos intuitivamente, antes da simbologia, antes da linguagem matemática” (DANTE, 2012a, p. 11).

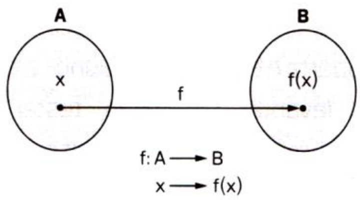
No exemplo dado pelo autor, é proposta uma situação que relaciona a quantidade de litros de gasolina e o preço a ser pago, e o autor sugere ao professor fazer uso da notação de diagramas de flechas, como mostra na figura 70, sendo a única abordagem referente à função com essa notação em toda a coleção.

"Considere a quantidade de litros de gasolina e o respectivo preço a pagar:



O preço a pagar é dado *em função* da quantidade de litros que se coloca no tanque de um veículo, ou seja, o preço a pagar *depende* do número de litros comprados".

Depois desse trabalho intuitivo calcado na elaboração de conceitos é que, pouco a pouco, vamos introduzindo a linguagem matemática:



"A cada x de A corresponde um único f(x) de B, levado pela função f."

Figura 70: trabalho intuitivo sobre o conceito de função.
Fonte: DANTE, 2013b, p. 89.

A relação do conceito de função com outros conteúdos matemáticos não é apontada explicitamente pelo autor. A exploração do conteúdo de função e sua conceituação ocorrem de maneira intuitiva, usando tabelas, equações e gráficos como notação, no entanto, não há uma definição formal para função.

A representatividade do conteúdo intitulado função na coleção é de 37 páginas, presente no quarto volume, referente ao 9º ano, de um total de 1248 páginas, ou seja, aproximadamente 2,96%.

5.1.9 Coleção *Projeto Velear – Matemática*

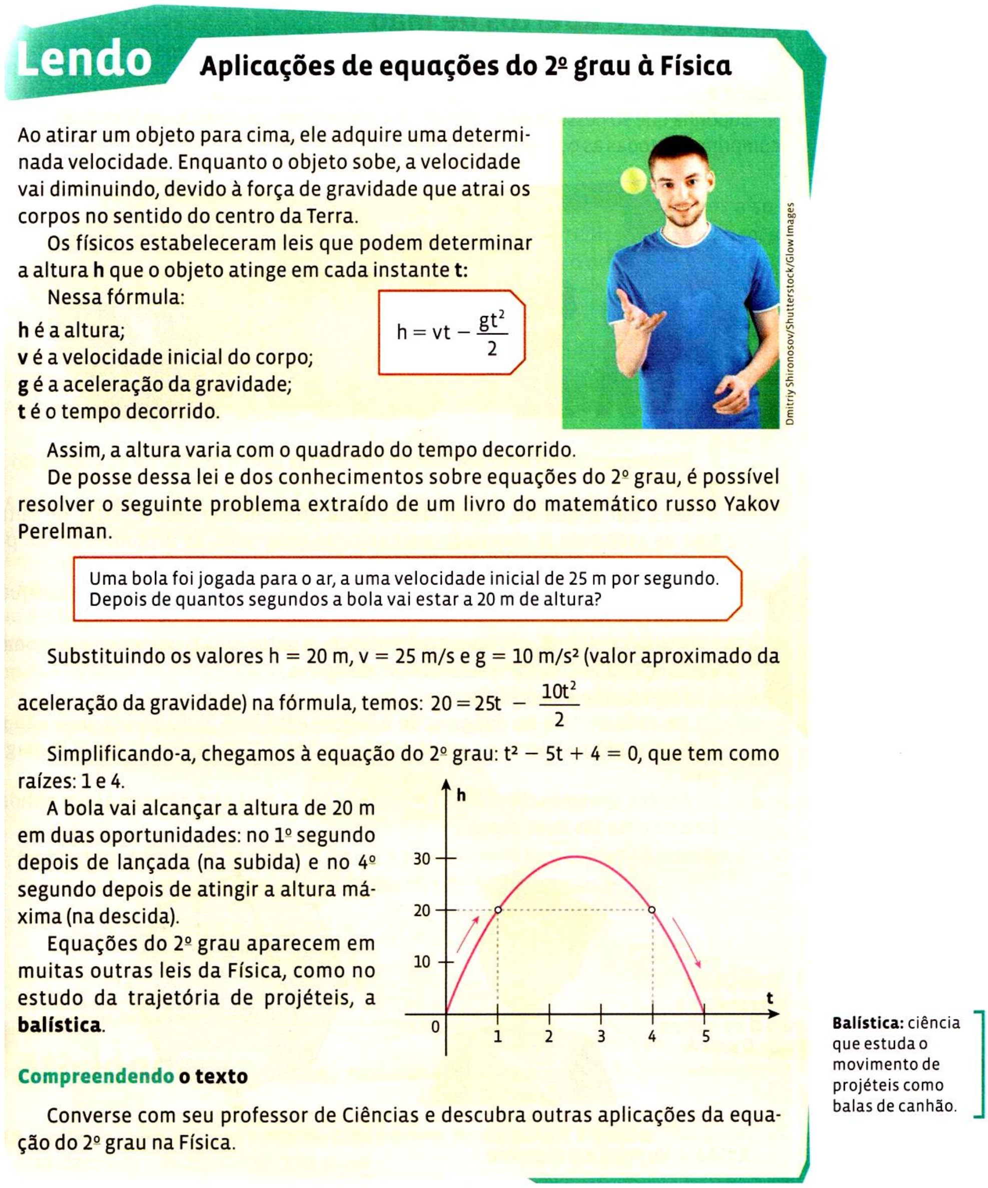
A coleção *Projeto Velear – Matemática*, de Antônio Lopes (Bigode), segue os mesmos moldes das coleções analisadas anteriormente, ou seja, traz ao final de cada volume o manual do professor, contendo uma parte geral, comum a todos os volumes, e uma parte diferente para cada volume, referente a cada um dos quatro anos finais do ensino fundamental.

No *Manual do Professor*, o autor aponta como *fontes de inspirações* de sua coleção uma lista como mais de cinquenta autores que publicam na área da educação em geral e da educação matemática, entre eles Euclides Roxo e Mello e Souza, autores dos livros didáticos das décadas de 1930-40, anteriormente analisados.

A distribuição dos conteúdos nos quatro volumes da coleção está organizada em sete temas: Pensamento numérico, Pensamento geométrico, espacial e métrico, Representação e localização, Medidas, Pensamento proporcional, Ideias da Álgebra, Pensamento estatístico e probabilístico. O conteúdo de funções está associado ao tema Ideias de Álgebra. O autor afirma estar de acordo com as diferentes concepções de álgebra de Zalman Usiskin, enquadrando o conteúdo de funções na concepção *Álgebra como estudo de relações entre grandezas* (LOPES, 2013a, p. 23).

O conteúdo de funções está presente na unidade 3, *Variação e funções*, do quarto volume, referente ao 9º ano, da coleção. O capítulo 7, primeiro capítulo da unidade 3, inicia a exploração de problemas envolvendo equações do 2º grau. A relação entre variáveis está em destaque nas situações-problema propostas pelo autor, seja na resolução de equações do 2º grau através da soma e do produto das raízes, dentro da geometria, na apresentação de fórmulas para o cálculo da área de figuras planas ou na relação da matemática com as ciências, como na figura 71, onde o autor afirma que, no movimento de uma bola arremessada, a "altura varia em relação ao quadrado do tempo decorrido".

.



Lendo **Aplicações de equações do 2º grau à Física**

Ao atirar um objeto para cima, ele adquire uma determinada velocidade. Enquanto o objeto sobe, a velocidade vai diminuindo, devido à força de gravidade que atrai os corpos no sentido do centro da Terra.

Os físicos estabeleceram leis que podem determinar a altura **h** que o objeto atinge em cada instante **t**:

$$h = vt - \frac{gt^2}{2}$$

Nessa fórmula:

h é a altura;
v é a velocidade inicial do corpo;
g é a aceleração da gravidade;
t é o tempo decorrido.

Dmitriy Shironosov/Shutterstock/Glow Images

Assim, a altura varia com o quadrado do tempo decorrido.

De posse dessa lei e dos conhecimentos sobre equações do 2º grau, é possível resolver o seguinte problema extraído de um livro do matemático russo Yakov Perelman.

Uma bola foi jogada para o ar, a uma velocidade inicial de 25 m por segundo. Depois de quantos segundos a bola vai estar a 20 m de altura?

Substituindo os valores h = 20 m, v = 25 m/s e g = 10 m/s² (valor aproximado da aceleração da gravidade) na fórmula, temos: $20 = 25t - \frac{10t^2}{2}$

Simplificando-a, chegamos à equação do 2º grau: $t^2 - 5t + 4 = 0$, que tem como raízes: 1 e 4.

A bola vai alcançar a altura de 20 m em duas oportunidades: no 1º segundo depois de lançada (na subida) e no 4º segundo depois de atingir a altura máxima (na descida).

Equações do 2º grau aparecem em muitas outras leis da Física, como no estudo da trajetória de projéteis, a **balística**.

Balística: ciência que estuda o movimento de projéteis como balas de canhão.

Compreendendo o texto

Converse com seu professor de Ciências e descubra outras aplicações da equação do 2º grau na Física.

Figura 71: relação entre variáveis na aplicação de uma equação do 2º grau.
Fonte: LOPES, 2013b, p. 159.

Aprofundando-se mais na relação entre duas grandezas, o capítulo 8, intitulado *Introdução às funções*, traz um estudo exploratório envolvendo, no primeiro item, *Modelos matemáticos: fórmulas, tabelas e gráficos*. Alguns exemplos de situações em que duas grandezas se relacionam são discutidos através da representação gráfica, de tabelas ou por meio de fórmulas, como o gráfico do clima de uma cidade durante um ano ou o cálculo de área de figuras planas. Em algumas dessas situações, o autor apresenta aos alunos a relação entre tabelas e fórmulas na descrição de um mesmo fenômeno.

No manual do professor, o autor afirma que:

> Neste capítulo introduzimos a noção de função de modo intuitivo para, gradativamente, chegar a um tratamento formal.
> A ideia-chave é a relação de dependência entre grandezas que variam, e em muitos casos tal relação pode ser modelada por meio de uma lei expressa na forma algébrica ou gráfica (LOPES, 2013a, 57).

O autor ainda afirma que explora dois tipos de esquemas no capítulo (esquema 2):

Relação → Fórmula → Tabela → Gráfico

Relação → Tabela → Fórmula → Gráfico

Esquema 2: relação.
Fonte: LOPES, 2013a, p.57

No item seguinte, *Análise de gráficos: um estudo matemático*, do capítulo 8, o autor dá ênfase à compreensão da relação entre variáveis através da representação gráfica, ressaltando a importância desse significado para o conteúdo de funções (figura 72).

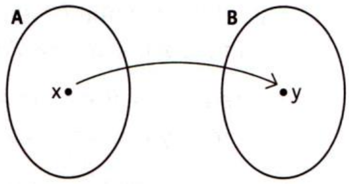
Figura 72: análise de gráficos.
Fonte: LOPES, 2013b, p. 173.

No manual do professor, o autor afirma que “somente depois de oferecer aos alunos a oportunidade de exercitar o seu pensamento funcional é que iniciamos um tratamento formal de funções” (LOPES, 2013a, p.58). Portanto, somente após explorar a análise de gráficos através de mais alguns exemplos envolvendo a relação de dependência entre duas grandezas é que, no item intitulado *Função: primeiras ideias*, é conceituada e definida uma função. Através de uma situação que envolve as grandezas tempo e distância, em que um menino, “João”, vai à escola, o autor ressalta que “[...] o tempo e a distância percorrida variam e mantêm entre si uma relação de dependência: para cada valor de tempo, no intervalo entre 7h e 7h e 30min, corresponde um único valor correspondente à distância percorrida, entre 0m e 450m” (p. 175).

Junto ao exemplo é apresentado um gráfico da situação e logo após a definição de função por meio de conjuntos e de um diagrama de flecha, como na figura 73.

Chama-se função de um conjunto **A** em um conjunto **B**, conhecidos, qualquer relação entre esses conjuntos que faça corresponder a cada elemento de **A** um único elemento de **B**.

Uma função de **A** em **B** pode ser representada por um diagrama de flechas como o seguinte:



Neste diagrama, **x** representa um elemento de **A** (conjunto de partida) e **y** representa um elemento de **B** (conjunto de chegada).

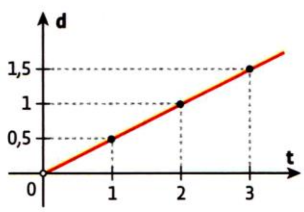
Figura 73: definição de função.
Fonte: LOPES, 2013b, p. 175.

O capítulo 8 também apresenta noções de *intervalos* e salienta a diferença entre grandezas *discretas* e *contínuas*. Na forma de um “recado”, o autor destaca no mesmo capítulo, referente ao “conjunto de partida” das funções, que “nas atividades deste livro, sempre que não houver referência específica, o universo considerado é o conjunto dos reais” (LOPES, 2013b, p. 181).

No capítulo 9, são definidas as funções polinomiais de 1º e de 2º grau, fazendo-se uso de fórmulas, tabelas e gráficos, e expondo a definição, no caso da função afim, na forma de um resumo das relações estabelecidas nos exemplo, como mostra a figura 74.

- Distância percorrida por um móvel com velocidade constante $v = 0{,}5$ km/h em função do tempo **t**.

$d = 0{,}5t$



Resumindo:

A expressão algébrica de uma **função afim** é do tipo $y = ax + b$, com $a \neq 0$. Se **x** varia no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, seu gráfico é uma reta.

Na função $y = ax + b$:

- **a** é chamado **coeficiente angular** da função; $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;
- **b** é chamado **coeficiente linear** da função; $b \in \mathbb{R}$.

Figura 74: definição da uma função afim.
Fonte: LOPES, 2013b, p. 187.

Antes ainda de explorar a função quadrática, é abordada ligeiramente a representação gráfica de inequações do 1º grau e, ao final, são abordadas aplicações e modelagens envolvendo funções quadráticas, como problemas de máximos e mínimos.

O conteúdo de funções na coleção, de um modo geral, apresentou todas as transvariações do conteúdo de funções decorrentes das reformas curriculares, definindo função através da teoria dos conjuntos. De maneira implícita, como ocorreu em algumas das coleções já analisadas nesse capítulo, certas relações sugerem que o conceito de função vem se desenvolvendo desde os volumes anteriores. No manual do professor, o autor refere-se ao conteúdo de funções ainda como um dos quatro campos definidos por ele que compõem a *álgebra e o pensamento algébrico da coleção*, como no quadro 5, abaixo:

Quadro 5: a álgebra e o pensamento algébrico na coleção *Projeto Velear – Matemática*.

	6º ano	**7º ano**	**8º ano**	**9º ano**
Funções	Múltiplos e regularidades.	Fórmulas básicas de geometria e fórmulas de conversão.	Sistemas de equações (interpretação geométrica).	Funções polinomiais, função afim, função quadrática e modelos.

Fonte: LOPES, 2013a, p.24.

A representatividade do conteúdo intitulado *função* nesta coleção, que tem 1064 páginas, é de 64 páginas, ou seja, de aproximadamente 6,02%.

5.1.10 Coleção *Vontade de Saber Matemática*

A décima e última coleção selecionada pelo PNLD de 2014 a ser analisada, *Vontade de Saber Matemática*, de Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro, não é diferente das outras coleções quanto ao manual do professor. Nesse manual, os autores, ao tratar das orientações didáticas e metodológicas, apontam a importância de atingir os objetivos para o ensino fundamental sugeridos pelos PCNs e organizam os conteúdos presentes na coleção em quatro eixos: Números e operações, Espaço e forma, Grandezas e medidas e Tratamento da informação. O conteúdo de funções não está explicitado em nenhum dos quatro eixos, mesmo que o manual deixe a entender que tal conteúdo se dará no âmbito das *Grandezas e medidas* (SOUZA; PATARO, 2012a).

O conteúdo de funções está localizado no capítulo 5 do quarto volume da coleção, livro referente ao 9º ano, e é iniciado com um texto referente à criptografia, de caráter exploratório, sem se referir ao termo “função”. O texto traz um exemplo de criptografia onde “cada letra do alfabeto é associada a um único outro caracter”, de modo que seja possível codificar uma mensagem e, de posse da relação entre cada par de letras (da chave), decodificá-la.

A noção de função é apresentada na página seguinte, através de uma ligeira nota histórica sobre o seu conceito, como mostra a figura 75.

A noção de função

Quando relacionamos grandezas variáveis, estamos tratando, em geral, do conceito de **função**, muito utilizado na Matemática e em outros ramos da Ciência.

Esse conceito sofreu no decorrer da história grande evolução. A ideia que temos atualmente de função está diretamente relacionada à teoria dos conjuntos, desenvolvida principalmente a partir do século XIX.

Nesse processo, diversos matemáticos contribuíram significativamente, como Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Isaac Newton (1642-1727), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Fourier (1768-1830), entre outros.

Louis Leopold Boilly. Séc. XIX. Gravura. Coleção particular

Joseph Fourier.

Charles Robert Leslie. Séc. XIX. Gravura. Coleção particular

Isaac Newton.

Função

Acredita-se que o termo função tenha sido introduzido na Matemática por Leibniz em 1694, porém com uma conotação diferente da utilizada atualmente.

Autor desconhecido. Séc. XVIII. Gravura.

Gottfried Wilhelm Leibniz.

Veja algumas situações do cotidiano em que as funções estão presentes.

O valor da fatura de telefone é calculado em função do consumo no mês.

R$ 93,50

Photodisc/Getty Images

A comissão de um vendedor é dada em função do quanto ele vende em determinado período.

Photodisc/Getty Images

O tempo de uma viagem está em função da velocidade praticada no trajeto.

Digital Vision/Getty Images

Relembre aos alunos o que são grandezas, conteúdo estudado no capítulo 7 do volume de 7º ano desta coleção.

Figura 75: a noção de função.
Fonte: SOUZA; PATARO, 2012b, p. 84.

Na nota histórica, os autores já adiantam que “a ideia de função atualmente está diretamente relacionada à teoria dos conjuntos”. Após apresentar alguns exemplos de relações entre duas grandezas por meio de tabelas e fórmulas, como a relação da quantidade de aparelhos de televisão (x) com o tempo decorrido (y), é apresentado o termo $f(x)$, indicado como uma contribuição de Leonhard Euler. Os autores também identificam a variável x como independente e variável y, ou $f(x)$, como dependente, salientando que “Na notação $f(x)$ (lê-se ***f*** de ***x***) podemos utilizar qualquer letra para indicar a função, porém é mais comum usar ***f***, ***g*** e ***h***. No caso da variável independente, também podemos usar qualquer letra, mas a letra ***x*** é mais comum" (SOUZA; PATARO, 2012, p. 85).

Os autores fazem uso de diagramas de flechas para representar uma função, assim como a referência ao conjunto dos números reais como valor de *x*, mas, no entanto, não a definem matematicamente através da relação entre dois conjuntos, apenas representam uma relação, como mostra a figura 76.

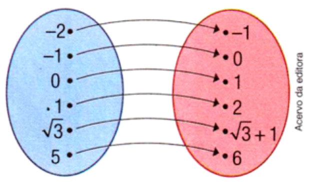
Representação de uma função por meio de diagramas

Considerando uma função **f** qualquer, podemos atribuir valores para **x** e, dessa forma, obter os valores correspondentes para $f(x)$. Veja no quadro como as variáveis de certa função **f** se relacionam.

x	−2	−1	0	1	$\sqrt{3}$	5
f(x)	−1	0	1	2	$\sqrt{3}+1$	6

Observando o quadro, podemos notar que os valores da 2ª linha são obtidos ao acrescentar uma unidade aos valores correspondentes da 1ª linha. Assim, a lei de formação dessa função é $f(x) = x + 1$.

Podemos representar a correspondência das variáveis dessa função por meio do seguinte **diagrama**.



No quadro, assim como no diagrama, estão representadas as correspondências de alguns valores atribuídos às variáveis. No entanto, poderíamos atribuir qualquer valor real para x na função f.

Figura 76: representação de uma função por meio de diagramas.
Fonte: SOUZA; PATARO, 2012b, p.86

O próximo item após *A noção de função* é o item intitulado *Representação gráfica de uma função*, onde, após uma rápida retomada do plano cartesiano, junto a uma nota histórica sobre René Descartes, são exploradas tabelas e gráficos de funções. Nos itens seguintes são apresentadas as funções afim e quadrática e suas especificidades. A definição da função afim é apresentada em destaque (figura 77), assim como a definição da função quadrática.

Função afim

capítulo 5

Funções

Carlos e sua família vão sair de férias e para isso decidiram alugar um quarto em uma pousada na Praia da Lagoinha, no Ceará. O aluguel corresponde a uma parte fixa de R$ 45,00, referente à taxa de limpeza, mais R$ 190,00 por dia.

Para calcular o valor do aluguel, podemos escrever uma fórmula. Para isso, chamamos de $y = f(x)$ o valor do aluguel e de **x** o número de dias de hospedagem.

$$f(x) = 190x + 45$$

Dessa maneira, $f(x) = 190x + 45$ é a lei de formação da função que expressa o valor do aluguel de acordo com o número **x** de dias. Essa função é denominada **função afim**.

Se considerarmos $x = 7$ (7 diárias), podemos, por meio da função, calcular o valor do aluguel.

$$f(7) = 190 \cdot 7 + 45 = 1375$$

Portanto, o valor do aluguel para 7 dias de hospedagem é R$ 1375,00.

Praia da Lagoinha

Localizada no município de Paraipaba, a 106 quilômetros de Fortaleza, Lagoinha é um dos cartões-postais do Ceará. Nessa praia, os turistas encontram vários atrativos, como quedas-d'água, um mirante, de onde é possível ter uma vista panorâmica da encosta, muito vento, que é ideal para os esportes a vela, e artesanatos.

Dorival Moreira/Pulsar

Praia da Lagoinha, Paraipaba (CE).

*Chamamos de **função afim** toda função do tipo $f(x) = ax + b$, em que:*
- ***a** é o coeficiente real de **x**, com $a \neq 0$.*
- ***b** é um coeficiente real, também chamado **termo independente**.*

Veja outros exemplos de funções afins.

- $g(x) = -x + 9$
  $a = -1$ e $b = 9$
- $h(x) = 7x$
  $a = 7$ e $b = 0$

Figura 77: função afim.
Fonte: SOUZA; PATARO, 2012b, p.93.

No terceiro volume da coleção, referente ao 8º ano, no conteúdo de equações e sistema de equações do 1ª grau com duas incógnitas a construção de tabelas e gráficos é bastante trabalhada, assim como a manipulação do software GeoGebra para resolver geometricamente um sistema de equações. A manipulação do mesmo software é indicada também no capítulo referente a funções, no volume do 9º ano, no espaço reservado do livro chamado *Acessando tecnologias*, como mostra a figura 78.

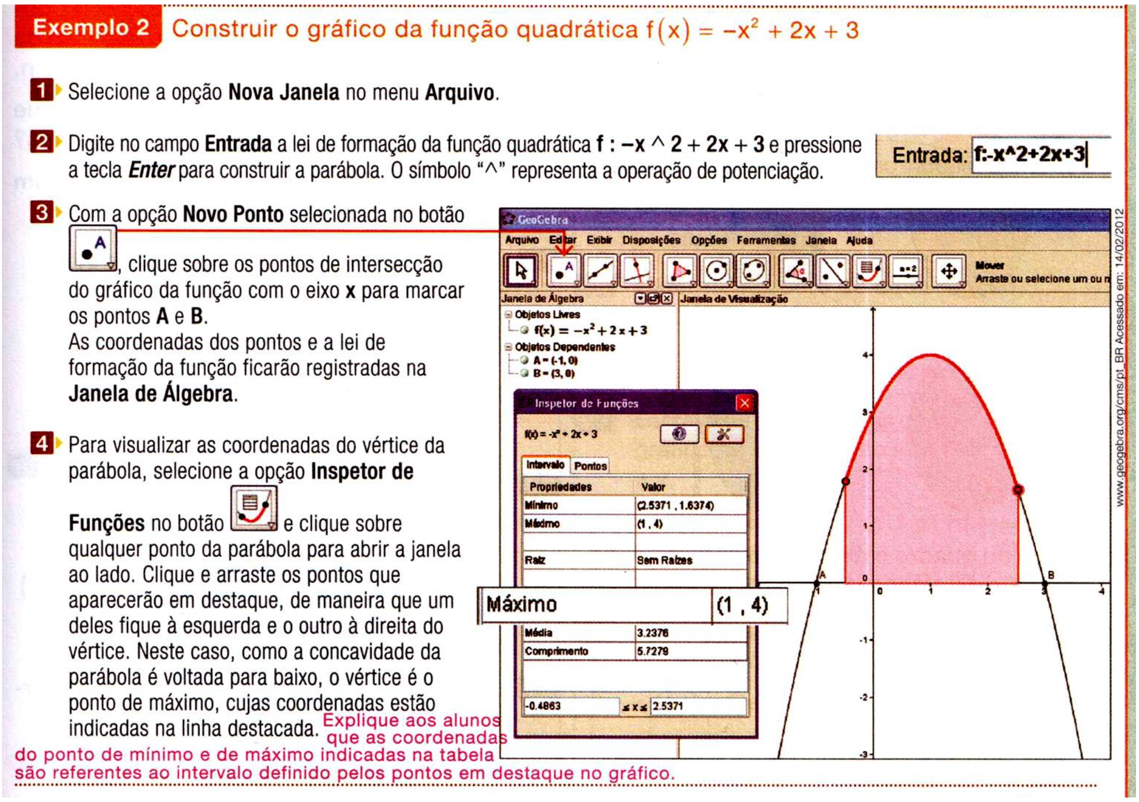


Figura 78: uso do software GeoGebra para estudar funções.
Fonte: SOUZA; PATARO, 2012b, p.117.

O conteúdo de funções na coleção *Vontade de saber Matemática* explora o conceito de função de maneira intuitiva, dando ênfase à análise de gráficos de funções, fazendo pouca relação do conteúdo de funções com os demais conteúdos matemáticos explorados a nível fundamental, não apontando explicitamente essa relação. A apropriação do diagrama de flechas para representar uma função está presente apenas no item referente à noção de função, e em alguns exercícios no mesmo item e na revisão final do capítulo. Ao definir função, o autor fez uso tanto da relação entre variáveis e sua lei de correspondência como através da teoria dos conjuntos.

A representatividade do conteúdo identificado como funções na coleção é de 42 páginas das 1264 dos quatro volumes, ou seja, aproximadamente 3,32%.

5.2 PANORAMA GERAL DAS COLEÇÕES DO PNLD DE 2014: DOS MOVIMENTOS DE REFORMA AOS LIVROS DIDÁTICOS ATUAIS

Conforme os indicadores apresentados em 5.1, segue abaixo, de maneira sistemática, o quadro referente às superposições decorrentes dos movimentos de reforma e suas relações com o conteúdo de funções nas coleções de livros de matemática atuais analisadas (quadro 6):

Quadro 6: superposições decorrentes dos movimentos de reforma no conteúdo de funções nos livros indicados pelo PNLD – 2014.

	(i) Notação para conceituar função		(ii) Definição de uma função		(iii) Quanto ao método	(iv) O conteúdo de função no contexto da coleção	
	(A) Tabelas, equações (expressão analítica, lei de formação) e gráficos	**(B) Conjuntos e diagramas de flechas**	**(C) Grandezas que variam de acordo com certa relação de interdependência (lei de correspondência)**	**(D) Dados conjuntos A e B, uma função é certa relação que associa a cada elemento do primeiro conjunto um único do segundo**	**(E) O conceito de função é desenvolvido de maneira intuitiva**	**(F) Aponta a relação do conceito de função com os demais conteúdos desenvolvidos na coleção**	**(G) Páginas por conteúdo**
Descobrindo e Aplicando a Matemática	+	-	-	++	++	+	**3,01%**
Matemática – Bianchini	++	-	++	-	++	-	**3,05%**
Matemática – Ideias e Desafios	++	-	-	-	++	+	**3,02%**
Matemática – Imenes & Lellis	++	-	-	-	++	++	**1,78%**
Matemática: teoria e contexto	++	++	-	++	++	-	**3,26%**
Praticando Matemática: edição renovada	++	++	-	++	++	+	**3,30%**
Projeto Araribá – Matemática	++	-	++	-	++	-	**3,00%**
Projeto Teláris – Matemática	++	-	-	-	++	-	**2,96%**
Projeto Velear – Matemática	++	++	-	++	++	+	**6,02%**
Vontade de Saber Matemática	++	++	+	+	++	-	**3,32%**

Fonte: O autor.

Fica constatada a sobreposição das mudanças decorrentes dos movimentos de reforma referente ao conteúdo de funções introduzido atualmente, no 9º do ensino fundamental. No entanto, como visto na história do ensino secundário brasileiro, ao conteúdo de funções foram agregados elementos ao mesmo tempo em que outros foram deixados para trás, mas nenhuma reforma se sobrepôs completamente à anterior.

Sendo assim, através dos livros didáticos analisados nessa tese, é possível afirmar que o conteúdo de funções neles expresso teve por finalidade atender às demandas exigidas pela disciplina escolar de matemática, norteada por interesses, ideologias e determinações, cada qual em sua época e contexto, resultando em um constante alinhamento entre os objetivos do conteúdo de funções em cada espaço de tempo na história e a proposta de cada uma das coleções.

Através da ousadia em renovar o ensino de matemática presente nas coleções *Curso de Matemática Elementar*, de Euclides Roxo, e *Matemática: Curso Moderno*, de Osvaldo Sangiorgi, foram agregados certos elementos ao conteúdo de funções que resistiram ao tempo, estando ainda presentes nos livros didáticos indicados pelo PNLD de 2014. A sobreposição desses elementos pôde ser confirmada pela semelhança na metodologia, na organização e na apresentação do ensino de função entre as coleções mais antigas e as diferentes coleções atuais. A semelhança aqui evidenciada remete, inevitavelmente, aos estudos desenvolvidos por André Chervel (1990), ao tratar de um fenômeno intitulado por ele de *vulgata*, que para o autor:

> Em cada época, o ensino dispensado pelos professores é, grosso modo, idêntico, para a mesma disciplina e para o mesmo nível. Todos os manuais ou quase todos dizem a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do *corpus* de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados ou os tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas (CHERVEL, 1990, p. 203).

Chervel (1990, p. 204) afirma que, mesmo que uma nova vulgata comece a se estabelecer, os elementos antigos "ainda continua lá", ao mesmo tempo em que o novo se instaura, pois são períodos onde "o antigo e o novo coabitam, em proporções variáveis", mas que, aos poucos, "um manual mais audacioso, ou mais sistemático, ou mais simples do que os outros, destaca-se do conjunto, fixa os 'novos métodos', ganha gradualmente os setores mais recuados do território, e se impõe". Para Valente (2008a), é pertinente se perguntar

> [...] em que medida o aparecimento de uma nova proposta — apresentada num manual audacioso e inédito — foi capaz de fertilizar produções didáticas posteriores e de ser apropriada por elas, a ponto de converter-se numa *nova vulgata* que, em certa medida, poderá atestar o sucesso da nova proposta contida no manual transformador (VALENTE, 2008a, p. 142).

Pois, para o mesmo autor, "[...] a história da educação matemática se liga diretamente às transformações das vulgatas. Investigar como ocorreram essas transformações implicará investigar a própria história da educação matemática. (VALENTE, 2008a, p. 142)

Não só pela ousadia, mas também pela subordinação em relação a novas determinações curriculares foi possível identificar alguns elementos relacionados ao conteúdo de funções que resistiram ao tempo, como a redução do espaço referente a esse conteúdo nos livros didáticos editados após a Reforma Capanema, obedecendo às disposições do currículo vigente.

No entanto esta tese não teve como objetivo o estudo de *vulgatas*, mas sim identificar os elementos referentes ao conteúdo de funções que se somaram ou deixaram de fazer parte no decorrer das reformas, atestando que, atualmente, esse conteúdo é constituído por uma sobreposição desses elementos. É importante ressaltar que o fato de que determinados elementos presentes nas coleções editadas no âmbito das reformas curriculares das décadas de 1930 e 1940 e do MMM estejam ainda presentes nas coleções editadas atualmente não significa que essa relação tenha ocorrido de maneira direta ou em "referência de", pois os rastros dos movimentos também estão presentes nas orientações curriculares atuais, como nos PCNs e na bibliografia contemporânea, a exemplo, a ênfase na exploração intuitiva do conceito de função, como visto em 6.1.

O quadro 6 mostra que alguns dos elementos idealizados por Euclides Roxo ainda podem ser identificados, como caráter unificador do conceito de função, pois em **(i) Notação para conceituar função**, item A, o uso de tabelas, equações (expressão analítica, lei de formação) e gráficos é comum a todas as coleções, tendo uma forte incidência em 9 das 10 coleções. A relação entre a aritmética (por meio de tabelas), a álgebra (por meio das equações) e a geometria (através da representação gráfica de uma função) na expressão da dependência entre duas grandezas foi o marco da unificação das matemáticas no ideário de Euclides Roxo.

Quanto ao desenvolvimento da ideia de funcionalidade como ideia central do ensino, essa não se sustentou, tendo apenas alguns indicativos de que o conceito de função é abordado nos anos anteriores ao 9º ano, ou seja, nas coleções atuais analisadas, o conceito de função e/ou a sua definição são apresentados somente no 9º ano.

Mas, de certa forma, se a introdução precoce do conceito de função era o âmago do moderno movimento de reforma de Felix Klein e, consequentemente, de Euclides Roxo, ainda é possível encontrar esse rastro em algumas coleções atuais, porém, não tão precocemente, explicitamente, ou incisivamente, e nem tão paulatinamente como sugeria a reforma de 1930, como mostra o quadro 6, conforme **(iv) O conteúdo de função no contexto da coleção:** (F) *Aponta a relação do conceito de função com os demais conteúdos desenvolvidos na coleção*. Pois essa relação deixa-se perceber claramente nas palavras dos autores em cinco das dez coleções, já citadas e referidas anteriormente, como mostra o quadro 7:

Quadro 7: ideia de funcionalidade desenvolvida paulatinamente segundo os autores das coleções dos livros indicados pelo PNLD - 2014

Descobrindo e Aplicando a Matemática	"[...] vocês já viram anteriormente como definir quando duas grandezas são diretamente proporcionais [...]", ao se referir ao estudo de Razões, proporções e regra de três, explorados no 7º ano da coleção.

Matemática – Ideias e Desafios	“Esse estudo relaciona-se com inúmeros outros assuntos desenvolvidos ao longo do período escolar [...]”.
Matemática – Imenes & Lellis	“[...] apoia-se em noções já exploradas na obra (fórmulas, gráficos, proporcionalidade)”. Ainda segundo os autores, o conceito de função é explorado, indiretamente, durante a coleção da seguinte maneira: 6º ano, Uso natural das expressões: depende de, varia com, é função de; 7º ano, Variações direta e inversamente proporcionais; 8º ano, Fórmulas em geral; 9º ano, Funções: tabelas, fórmulas e gráficos cartesianos; função polinomial de 1º grau e a reta; função polinomial de 2º grau e a parábola.
Praticando Matemática: edição renovada	“O conceito de função, preparado desde os anos anteriores, surge com mais facilidade e é desenvolvido com o título de “Funções” no volume referente ao 9º ano”.
Projeto Velear – Matemática	Ainda segundo o autor o conceito de função é explorado, indiretamente, durante a coleção da seguinte maneira: 6º ano, Múltiplos e regularidades; 7º ano, Fórmulas básicas de geometria e fórmulas de conversão; 8º ano, Sistemas de equações (interpretação geométrica); 9º ano: Funções polinomiais, função afim, função quadrática e modelos.

Fonte: O autor.

Quanto à metodologia usada para explorar o conceito de funções nos livros selecionados pelo PNLD de 2014, conforme **(iii) Quanto ao método:** (E) *O conceito de função é desenvolvido de maneira intuitiva*, esta se apresenta fortemente em todas as coleções. Rastro presente, no escopo dessa tese, e desde a década de 1930.

Além das determinações acerca do conteúdo de funções com o advento da Reforma Capanema terem embargado, ao menos normativamente, o desenvolvimento do conceito de função desde as séries iniciais do ensino secundário e seu caráter axial, um dos motivos que levou a introdução precoce do estudo de funções a não ter se fixado precocemente no currículo brasileiro, ao menos de maneira evidente, segundo Braga (2006, p. 147), foi o fato de que a maneira como essa iniciativa ocorreu “[...] configura-se apenas como uma metodologia, não tem vínculo explícito a algum conteúdo, já que, por princípio, está relacionado a praticamente todos”.

Pelo fato de que o desenvolvimento da relação funcional desde as séries iniciais do ensino fundamental é uma metodologia, fica a cargo do professor, e nesse caso do autor da coleção de livros didáticos de matemática, optar por desenvolver ou não o conceito de função durante o 6º, 7º e 8º anos do ensino fundamental. Por outro lado, como visto em 6.1, os PCNs sugerem a não formalização do conceito antes do ensino médio, o que pode ter influenciado diretamente para a não adesão explícita dessa metodologia nas coleções que apontaram a relação desse conceito como relacionado a determinados conteúdos estudados nos anos anteriores.

Em decorrência do conteúdo de funções ter sido excluído nominalmente do programa do curso ginasial com o advento da Reforma Capanema, deixando a cargo do professor ou autor do livro didático a exploração ou não desse conteúdo, resultou para a coleção *Matemática Ginasial*, de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza, como constatado no quarto capítulo desta tese, em uma representatividade muito reduzida desse conteúdo, encontrando-se apenas da página 11 até a página 29 do quarto volume da coleção, sendo que toda a coleção tem 1254 páginas, o que resulta em, aproximadamente, 1,51% de toda a coleção.

Essa redução no espaço reservado ao conteúdo de funções no ensino secundário se deve também à compreensão desse conteúdo como uma dimensão da álgebra. No entanto, conforme as orientações do Novíssimo Programa do Ensino Secundário estabelecidas na Reforma Campos, o conteúdo de álgebra também apresenta a sua dimensão funcional, como exposto no item "d)" do programa:

> A álgebra deve mostrar-se como uma linguagem simbólica eminentemente apta a exprimir, de maneira concisa, relações entre grandezas. Assim, é de se adotar, logo de início, o uso da fórmula, a que se chegará naturalmente pelo estudo das regras de avaliação de áreas e volumes, ou pelos problemas de juros e desconto comercial, podendo-se mesmo alargar a exemplificação com outras fórmulas obtidas de formulários técnicos. A fórmula será considerada sob aspectos da construção, significação, uso e relação entre grandezas, a saber: a) como linguagem concisa; b) como regra abreviada de cálculo; c) como uma solução geral e d) como expressão da dependência de uma variável em relação à outra (BRASIL, [1942b]).

A diferença, porém, é que, após o programa explanar sobre os três ramos da matemática – Item I, aritmética, Item II, geometria e Item III, álgebra (BRASIL [1942b]) –, é dada atenção especial ao conteúdo de função, de forma que "a noção de função constituirá a ideia coordenadora do ensino".

O programa do ensino secundário estabelecido como a Reforma Capanema, apesar de não fazer referência ao conteúdo de funções, como visto em 4.4, organizou o conteúdo de equações, tabelas e gráficos na última série do curso ginasial como um subconjunto do estudo da álgebra. Ainda assim, no programa dos cursos clássico e científico da Reforma Capanema o conteúdo de funções aparece explicitamente dentro do estudo de álgebra:

> 1ª Série
>
> Álgebra

> Unidade I. Os polinômios: 1- Operações algébricas sobre polinômios. 2 – Teoria da divisão de polinômios. 3 - Divisão de um polinômio inteiro em x por x ± a regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini.
> Unidade II. O trinômio do 2º grau: 1 - Decomposição em fatores do 1º grau; sinais do trinômio; desigualdades do 2º grau. 2 - Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2º grau; representação gráfica (DASSIE, 2001, p. 141).

Como visto no capítulo 5 desta tese, algumas instruções acerca do ensino secundário estabelecidas no final da década de 1950, emanadas em Royaumont e Dubrovnik, elevavam a álgebra a um novo status, dando ênfase à unidade da matemática através do estudo de álgebra com a ideia de "fusão" entre a "aritmética e a álgebra" e a "geometria e a álgebra" (GUIMARÃES, 2007), outro motivo que corrobora para a sobreposição do conteúdo da álgebra sobre o conteúdo de funções.

Na coleção *Matemática: Curso Moderno*, de Osvaldo Sangiorgi, com o conteúdo de funções consolidado no quarto ano ginasial, como sugerem os *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Ginásio e para o Colégio*, estabelecidos na década de 1960, são reservadas 73 páginas das 1203, o que representa, aproximadamente, 6,07% da coleção. Sendo a média de representatividade do conceito de funções nas coleções do PNLD de 2014, como consta no quadro 6, em **(iv) O conteúdo de função no contexto da coleção**: (G) *Páginas por conteúdo*, de, aproximadamente, 3,28%. E a coleção que reserva menor espaço ao conteúdo de funções é a coleção *Matemática – Imenes & Lellis*, aproximadamente 1,78%, e a coleção que reserva maior espaço ao conteúdo de funções é a coleção *Projeto Velear – Matemática*, aproximadamente 6,02%.

Das dez coleções analisadas, em seis foram identificados elementos acerca do conteúdo de funções que se constituíram no âmbito do MMM, reconhecidos pela exploração do conceito de função e/ou sua definição através de conjuntos e diagramas de flechas, como indicado no quadro 6, em **(i) Notação para conceituar função:** (B) *Conjuntos e diagramas de flechas*. A "ênfase ao simbolismo e à Teoria dos Conjuntos", segundo Macedo (2007), é uma das características comuns na apresentação dos conteúdos dos livros didáticos editados no âmbito do MMM. E como foi visto, em algumas das coleções atuais de livros didáticos de matemática a teoria dos conjuntos ainda está incorporada ao conteúdo de funções.

Em relação aos exercícios propostos para conteúdo de funções presentes nas coleções, se deu ênfase àqueles que trouxeram elementos em especial referentes à conceituação, à notação de funções ou a relação explícita com algum conteúdo matemático desenvolvido em anos anteriores ao 9º ano, pois os exercícios são bastante similares em uma mesma coleção e entre coleções diferentes, envolvendo, na sua maioria, situações fictícias dentro de um contexto cotidiano, científico ou próprio da matemática em que há relação entre grandezas ou variáveis.

Devido ao fato de que as coleções atuais apresentam uma sobreposição das representações e notações acerca do conteúdo de funções (grandezas, variáveis, equações, tabelas, gráficos, diagramas) decorrentes dos movimentos de reforma, os exercícios acabam, também, tendo a mesma notação. A única coleção que mostrou uma alternativa realmente diferente de exercitar o conteúdo de função foi a coleção *Vontade de Saber Matemática*, que apresenta o uso do software GeoGebra para explorar as particularidades de cada tipo de função.

Quanto à definição de função, em **(ii)**, itens (C) e (D) do quadro 6, os autores se dividiram em suas referências, entre a definição através de grandezas que variam de acordo com certa relação de interdependência (lei de correspondência) ou através de conjuntos, como uma certa relação que associa a cada elemento de um determinado conjunto a outro, sendo ainda que as coleções *Matemática: Ideias e desafios, Matemática – Imenes & Lellis* e *Projeto Teláris – Matemática* não apresentam um definição formal de função, novamente, como indicam os PCNs: "a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio (BRASIL, 1998, p. 51).

Por fim, constatou-se que os elementos agregados ao conteúdo de funções no decorrer de sua história no ensino brasileiro, decorrentes dos movimentos de reforma, e que se mostram presentes ainda hoje, se constituíram em diferentes épocas, em diferentes contextos, com objetivos e interesses distintos, alguns de maneira menos expressiva e significativa que outros. Essa constatação indica que quando o tema é função matemática no ensino secundário brasileiro o seu conteúdo carrega em si elementos que são resultado de determinações do passado. Os rastros dos movimentos de reforma presentes no conteúdo de funções acabaram se configurando como um legado para o ensino de matemática.

Encerrada, por ora, essa discussão, com bases no que se analisou e avaliou, põe-se em questão, para outro espaço que não mais o das páginas dessa tese, a seguinte reflexão: os elementos que constituem hoje o conteúdo de funções, pontualmente identificados aqui nessa tese como demandas ou determinações do passado, podem ser revisitados atualmente sob dois aspectos, o primeiro é sobre a possibilidade de alguns desses elementos já terem perdido o significado no ensino diante do contexto social e tecnológico contemporâneo e o segundo é sobre a possibilidade de alguns desses elementos terem um maior significado nesse mesmo contexto, atualmente. E nesse ponto, dá-se atenção especial à linguagem para denotar o conteúdo de funções em decorrência da teoria dos conjuntos.

Nesse sentido, é pertinente discutir o futuro do conteúdo de funções no ensino fundamental e também as questões referentes à linguagem empregada em suas representações e definições. Talvez o MMM tenha se antecipado, ou tenha sido mal compreendido diante de sua visão longitudinal a respeito de qual deveria ser a linguagem matemática apropriada para o futuro da disciplina e, consequentemente, dos estudantes.

Se o objetivo do ensino secundário for o de oferecer ao aluno, desde cedo, a possibilidade de ler e compreender a matemática que o cerca atualmente, esta no domínio da *informação*, sob o universo da programação, dos algoritmos, das estruturas, das relações, da matemática discreta – que sequer faz parte do ensino básico – qual deve ser a imagem do conteúdo de funções nas próximas décadas? Qual linguagem deve ser comum ao aluno quando esse se referir ao conteúdo de funções?

Talvez não seja preciso pensar em novas possibilidades para o conteúdo de funções, mas apenas recorrer à sua história e resgatar, através dos rastros deixados em seu processo de constituição no ensino brasileiro, elementos que, no contexto atual, poderiam dar novo fôlego a esse conteúdo. É nesse sentido que se retoma uma colocação feita na introdução dessa tese, pois ter amarrado o conteúdo de funções à sua história no ensino brasileiro serviu para desprendê-lo no presente, no sentido de libertá-lo de seu contexto intencional, atrelado a determinações do passado, e a ponto de medir a possibilidade de revigorar esses elementos no presente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Resgatar um pouco da história do conteúdo de funções no ensino secundário brasileiro foi uma experiência um tanto especial pelo fato de que esse tema é objeto de meu trabalho na escola pública onde leciono, atendendo o ensino fundamental, séries finais, e na instituição de ensino superior, onde sou docente do curso de Matemática, Licenciatura. Funções "é um conteúdo a ser dado" todo o ano letivo. O termo "função", na matemática, é escrito ao quadro e explorado com adolescentes que estão cursando o 9º ano do ensino fundamental e, também, o ensino médio; é tema de um artigo a ser lido e debatido nas disciplinas cursadas nos cursos de matemática; é rapidamente revisado nas primeiras aulas de cálculo; é uma aplicação, um grupo de permutações, nas aulas de álgebra.

O conceito de função parece estar sempre aberto a novas experiências e àqueles que se arriscam a usá-lo menos preocupados com o que ele possa significar, pois a própria palavra "função", como Paul Karlson disse, ainda não está "amestrada e assenhoreada, e nós mesmos podemos escolher a ela o conceito que a ela quisermos associar". Como vimos, construção do conceito de função, até a sua definição mais formal na álgebra moderna, foi erguida tijolo por tijolo, onde, aos poucos, os matemáticos foram empilhando cada um dos seus elementos, e somente no século XIX, com os estudos de álgebra em ascensão, é que foi lhe assentado o alicerce.

Sem a intenção de esgotar os aspectos que tornam interessante a história do conceito de função, tão interessante e admirável é "deixar-se tropeçar" na história do conteúdo de funções no ensino secundário brasileiro e perceber que, uma vez em busca de referências sobre sua constituição no ensino, essas se entrecruzam com as referências da constituição da própria disciplina de matemática no Brasil.

Tendo como cenário o ensino secundário brasileiro, palco de sucessivas reformas em sua história, vimos que no início do século XX o conceito de função foi uma bandeira para a modernização do ensino de matemática. Embebido das ideias de Felix Klein, Euclides Roxo audaciosamente "modernizou", aos "seus moldes", o ensino de matemática, trazendo como âmago da reforma a entrada do conceito de função desde as primeiras séries do ensino secundário.

Mais do que um conteúdo a ser somado ao ensino de matemática, o conteúdo de funções foi a "ideia coordenadora do ensino", e simbolizou a constituição da própria disciplina no ensino brasileiro, que só foi possível através de seu conceito agregador, unificando a aritmética, a álgebra e a geometria. Um tanto emblemática é a apresentação do conteúdo de funções na coleção de livros didáticos de matemática *Curso de Matemática Elementar*, de Euclides Roxo, ao fazer uso de uma tabela, de uma equação e de um gráfico no plano cartesiano para exprimir uma mesma relação entre duas grandezas. Característica que se mostrou indispensável para o conteúdo de funções desde então.

Por outro lado, a ideia de funcionalidade e a precocidade com que o conteúdo de funções apresentava-se no ensino secundário logo foram alvo de críticas, e foi justamente nos diálogos à margem da Reforma Capanema, em 1942, que Euclides Roxo e o Padre Arlindo Vieira digladiaram-se, cada um em defesa de seu programa para o ensino de matemática em nível secundário. O Ministro Gustavo Capanema, à mercê das ambições de seus maiores, estendeu a mão à "vontade da Igreja", e vimos o conteúdo de funções, por determinação de Arlindo Vieira, passar de ator principal do ensino secundário para um possível coadjuvante, perdido em algumas páginas de livros didáticos de matemática na última série do curso ginasial – assim se a vontade do autor o fosse, pois este conteúdo não constava mais no programa do ginasial.

E apesar da unificação das matemáticas ter sido estabelecida na reforma anterior, sob o título de "matemática", a separação dos ramos da matemática ainda mostrava-se evidente nos programas em 1942. Pois, a partir da Reforma Capanema, uma vez o conceito de função não sendo mais uma "ideia coordenadora do ensino", as fronteiras entre a aritmética, a álgebra e a geometria voltaram a se fortificar, e o conteúdo de funções passou a ser "mais um conteúdo" presente no programa de matemática, a compor os estudos de álgebra no curso colegial.

Mas bastou uma nova movimentação em prol da modernização do ensino de matemática no Brasil, esta em meados da segunda metade do século XX, para que o conteúdo de funções viesse a ser requisitado para os programas do curso ginasial. As propostas de modernização do ensino de matemática no âmbito do MMM traziam uma nova linguagem para esta ciência, dotada de uma forte notação simbólica, tão necessária para descrever perfeitamente os *conjuntos*, as *relações* e as *estruturas*. O conteúdo de funções no ensino secundário, agora estabelecido no curso ginasial, foi restituído sob essa nova linguagem e teve, pela primeira vez, aquele alicerce que só a álgebra moderna poderia lhe garantir, ampliando, assim, o seu conceito.

A coleção de livros didáticos *Matemática: Curso Moderno*, de Osvaldo Sangiorgi se empenhou ao representar as implicações em se tratar da matemática sob essa nova linguagem. Proposta essa que se desenhou desde os primeiros Congressos Nacionais de Ensino da Matemática realizados no Brasil. A semente de um currículo moderno havia sido plantada no II Congresso por Osvaldo Sangiorgi, a ser colhida no IV Congresso, através do programa apresentado, em 1962, pelo Grupo de Estudos em Educação Matemática (GEEM), liderado pelo próprio Osvaldo Sangiorgi. Como vimos, o "Moderno Programa" para o ensino de matemática, além de ter figurado o conteúdo de funções na última série do curso ginasial, garantiu-lhe continuidade no curso colegial a partir da primeira série. Basta recorrer às páginas dos livros didáticos de matemática atuais para o ensino médio para verificar que esta relação ainda permanece.

Como o objetivo primordial dessa tese foi o de identificar “o que ficou”, atualmente, de todas essas transações relacionadas ao conteúdo de funções no Brasil, desse “vai e vem” das séries iniciais para as séries finais do secundário, da nova notação dada a esse conteúdo com o advento da matemática moderna, tomou-se como objeto as coleções de livros didáticos de matemática que corresponderam às demandas das reformas. Mas, é evidente que o conteúdo de funções não se esgota nos livros didáticos, porém, é através desses materiais que o aluno tem o seu primeiro contato com conceito de função, e esse primeiro contato, como vimos, ocorre, atualmente, em nível fundamental. Os livros didáticos, portanto, trazem um recorte fundamentalmente significativo para o conteúdo de funções e os principais fatores que significaram esse conteúdo no currículo da disciplina foram delineados pontualmente nessa tese.

À luz do ideário sobre o ensino de matemática de cada época, baseado nos primeiros programas brasileiros para disciplina de matemática e também nos anais dos primeiros congressos voltados ao ensino de matemática no Brasil, fundamentado em pesquisas, artigos, dissertações, teses e nos atuais parâmetros curriculares para a disciplina, buscou-se verificar as condições de possibilidade da adesão ou não adesão de determinados elementos referentes ao conteúdo de funções no currículo da disciplina e, consequentemente, nos livros didáticos. E se os elementos que caracterizam os movimentos de reforma no conteúdo de funções, como o seu espaço no currículo da disciplina, sua apresentação, notação, conceituação e definição, “são da maneira como são” ou “estão da maneira como estão” nos livros didáticos atuais, estes guardam significado na história do ensino secundário brasileiro e especificamente no ensino de matemática.

A condição primeira que possibilitou ao conteúdo de funções fazer parte do ensino brasileiro atualmente foi a determinação de Euclides Roxo em implantar no Brasil as ideias de Felix Klein acerca da modernização do ensino de matemática, o que só foi possível devido ao papel que Euclides Roxo representava no Colégio Pedro II. Esses, entre outros elementos, compuseram o universo de possibilidades que deu significado e espaço ao conteúdo de funções nas primeiras séries do ensino secundário.

Da mesma forma ocorreu no âmbito do MMM, pois os aspectos ligados à teoria dos conjuntos e à concepção de unidade através do conceito de estrutura, principalmente os aspectos ligados à modernização da linguagem, só puderam ser concebidos em um programa para o ensino de matemática à luz do ideário da época, que tinha como objetivo aproximar a matemática escolar dos recentes desenvolvimentos no campo da álgebra. Se, por um lado, os Bourbaki reconstruíram o edifício da matemática, Piaget deu subsídios teóricos para que essa reconstrução pudesse ser desenvolvida desde as primeiras séries na escola. E, como vimos, Osvaldo Sangiorgi teve participação efetiva na elaboração do programa que visava, dentre outros fins, atribuir nova perspectiva à linguagem matemática, agregando ao conteúdo de funções, consequentemente, a notação através de conjuntos.

Recorrendo-se às coleções de livros didáticos de matemática atuais para o ensino fundamental (séries finas), conclui-se que o conteúdo de funções carrega rastros, agora evidentes, dos movimentos de reforma, e que esses rastros constituem os elementos fundamentais para conceituar e definir função matemática. Portanto, o livro didático acabou sendo a porta de entrada para se "vasculhar" a história do ensino de matemática no Brasil. Os capítulos desta tese que se detiveram a analisar livros didáticos tiveram como foco a apresentação do conteúdo de funções no que se refere à sua notação, terminologia, ferramentas metodológicas e disposição dentro da coleção em relação aos demais conteúdos matemáticos, permitindo, ao final, alcançar o objetivo proposto.

Devido ao escopo do estudo, muitas relações referentes ao ensino de matemática, ao conteúdo de funções e ao livro didático tangenciaram as colocações feitas nessa tese, deixando de ser aprofundadas ou mesmo mencionadas. Fatores ligados à formatação dos livros didáticos, por exemplo, mesmo que esses pudessem de alguma forma influenciar na apresentação do conteúdo de funções, não foram aqui explorados. Esta seria, ao entendimento do estudo realizado, outra dimensão de relações, fugindo, assim, ao domínio do escopo que se propôs.

Para se ter uma ideia dessa dimensão, na década de 1970, é possível constatar uma grande tendência formatadora nos livros didáticos em geral, que envolve uma notável mudança na produção desses livros, tornando-os materiais descartáveis (OLIVEIRA, 1983), e, no caso da matemática, reservava-se espaço para resolver os exercícios no próprio livro, impossibilitando o seu uso contínuo nas escolas. Condição essa que pode ser compreendida como uma tendência pedagógica ou, talvez mais, uma exigência do mercado, mas que com o advento do PNLD foi extinta, pois as coleções distribuídas pelo programa, como vimos, têm duração mínima de três anos. É comum encontrar nas coleções atuais lembretes do tipo "faça em seu caderno". De qualquer forma, os livros que tiveram sua primeira edição entre as décadas de 1970 e 1990 não foram objeto de análise nessa tese pelo fato de não atenderam ao escopo do estudo.

Não só questões ligadas à formatação dos livros didáticos analisados, mas tantos outros assuntos que tangenciaram os elementos envolvidos nesse estudo poderiam ser amplamente explorados. Ao final, percebeu-se que a maior dificuldade na realização dessa tese foi abdicar das tantas outras relações e evidências que permearam o conteúdo de funções durante o seu desenvolvimento. Ter selecionado os elementos que deveriam ser mais explorados e aqueles que deveriam ser deixados de lado para compor o corpo lógico e argumentativo que possibilitou concluir a tese configurou-se como o maior desafio durante a sua realização.

Foi preciso ter cuidado para não ocupar o leitor como assuntos que, por mais que fossem interessantes e próximos ao contexto do tema, pudessem não contribuir de forma objetiva para o estudo. A relação da álgebra com o conceito de função nos programas e livros didáticos, por exemplo, é um aspecto que deve ser mais bem explorado, mas que foge ao alcance dessa tese, e que as explanações aqui feitas sirvam com um indício para novos estudos, pois nesse texto elas tiveram um significado específico e pontual, referente ao espaço do conteúdo de funções no ensino secundário.

As questões envolvendo metodologia para o ensino de matemática nos diferentes espaços históricos discutidos na tese também não foram aprofundadas. Isso ocorreu pelo fato de que as possibilidades de se discutir sobre esse aspecto, em especial, no caso do conteúdo de funções, seriam limitadas nas páginas dos livros didáticos, pois ficam a cargo muito mais da atitude do professor em sala de aula do que na apresentação dos conteúdos em si. As colocações feitas nessa tese que dizem respeito à metodologia empregada no conteúdo de funções, assim sendo, não ultrapassaram as páginas dos livros analisados, tendo em vista apenas alguns apontamentos objetivos com base nos programas da disciplina. As questões que envolvem os métodos de ensino para a disciplina de matemática estão ligadas à própria construção dos conceitos matemáticos, quando esses se dão de maneira puramente axiomática, dedutiva ou intuitivamente e a questões menos específicas como a abordagem heurística ou por experimentação, que carregam seus fundamentos no escolanovismo.

Por fim, esta tese contribui para o campo de conhecimento do ensino de matemática especificamente e para o campo de conhecimento da educação de um modo geral por ter discorrido sobre o conteúdo de funções, organizando-o em seu espaço histórico, permitindo ao professor de matemática ou estudioso interessado no tema ter uma referência concisa sobre esse objeto de estudo, sobre os desígnios desse conhecimento dentro da disciplina no ensino de matemática e as condições que o levaram a se apresentar da maneira como os livros didáticos atuais o apresentam.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. Manual do Professor. In: **Praticando Matemática**: edição renovada. 9º ano. 3º edição. São Paulo: Editora do Brasil, 2012ba.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática**: edição renovada. 9º ano. 3º edição. São Paulo: Editora do Brasil, 2012b.

ARELARO, L. R. G. Resistência e Submissão: a Reforma Educacional na Década de 1990. In: Nora Krawczyk; Maria Malta Campos; Sérgio Haddad. (Org.). **O Cenário Educacional Latino-americano no Limiar do Século XXI - Reformas em Debates**. 1 ed. São Paulo: Editora Autores Associados, 2000, v. Vol. I, p. 95-116.

BARBOSA, Edson Pereira. O conceito de função como unificador da Matemática Elementar no Brasil: da Reforma Francisco Campos aos PCN. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, I; ENCONTRO REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII; ENCONTRO REGIONAL DE ENSINO DE FÍSICA, III, 2008, Ijuí/RS. **Anais...**: I CNEM, VIII EREM e III ENEF. Ijuí/RS: Unijuí, 2008. v. único. p. 1-11.

BIANCHINI, Edwaldo. Suplemento com orientações para o professor. In: **Matemática – Bianchini**. 9º ano do ensino fundamental. 7ª edição. São Paulo: Moderna, 2011a.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática – Bianchini**. 8º ano do ensino fundamental. 7ª edição. São Paulo: Moderna, 2011b.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática – Bianchini**. 9º ano do ensino fundamental. 7ª edição. São Paulo: Moderna, 2011c.

BOMENY, Helena Maria Bousquet. **Os Intelectuais da Educação**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed, 2001.

BOYER, Carl B. **Tópicos de História da Matemática para o uso em sala de aula**: cálculo. São Paulo: Atual, 1992.

BRAGA, Ciro. **O processo inicial de disciplinarização de função na matemática do ensino secundário brasileiro**. 2003. 177f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - CCET, PUC, São Paulo, 2003.

BRAGA, Ciro. **Função: A alma do ensino de Matemática**. 1ª Edição. São Paulo: Annablume, 2006.

BRASIL. **Decreto n.º 19.890**, de 18 de abril de 1931. Dispõe sobre a organização do ensino secundário. Rio de Janeiro, 18 de abril de 1931, 110º da Independência e 43º da República. Disponível em: <http://presrepublica.jusbrasil.com.br/legislacao/116725/decreto-19890-31>. Acesso em: jan. 2013.

BRASIL. **Novíssimo Programa do Ensino Secundário, nos termos do art. 10 do decreto n. 19.890 de 18 de abril de 1931**. Rio de Janeiro, 1931b. *In*: VALENTE, W. R. A matemática do ginásio: livros didáticos e as reformas Campos e Capanema. São Paulo: GHEMAT-FAPESP, 2005a. 1 CDROM.

BRASIL. Decreto-Lei n. 4.244 – de 9 de abril de 1942. **Lei Orgânica do Ensino Secundário**. Rio de Janeiro, 04 de abril de 1942a, art. 180 da Constituição.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura. **Lei Orgânica do Ensino Secundário e Legislação Complementar**. 1942b. *In*: VALENTE, W. R. A matemática do ginásio: livros didáticos e as reformas Campos e Capanema. São Paulo: GHEMAT-FAPESP, 2005a. 1 CDROM.

BRASIL. Lei nº 11.274, de 6 de fevereiro de 2006. **Altera a redação dos arts. 29, 30, 32 e 87 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, ...** Brasília, 6 de fevereiro de 2006; 185º da Independência e 118º da República.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Lei de Diretrizes e Bases**. Brasília, 20 de dezembro de 1996, 185º da Independência e 108º da República.

BRASIL, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE): **Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) - Histórico**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?Itemid=668id=12391option=com_contentview=article>. Acesso em: jul, 2013a.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura. **PNLD**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?Itemid=668id=12391option=com_contentview=article>. Acesso em: jul, 2013b.

BÚRIGO, E. Z. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil**: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. 1989. 285 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre-RS, 1989.

BÚRIGO, E. Z. Tradições Modernas: reconfigurações da matemática escolar nos anos 1960. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 23, nº 35B, p. 277-300, abril 2010.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Livraria Sá da Costa Editora: ed., Lisboa, 1951.

CARUSO, Marcelo. ¿Una nave sin puerto definitivo? Antecedentes tendencias e interpretaciones alrededor del movimiento de la Escuela Nueva? In: PINEAU, P., DUSSEL, I. Y CARUSO, M., **La escuela como máquina de educar**. Buenos Aires, Paidós, 2011.

CARVALHO, J. B. P. Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino de Matemática In: VALENTE, Wagner R. (org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil**. Brasília: Editora UnB, 2004, p. 85-149.

CATUNDA, Omar. Os conceitos fundamentais de matemática: conjuntos e estruturas. In: **G.E.E.M. Matemática moderna para o ensino secundário**. Série Professor n° 1, 2ª ed. São Paulo, GEEM, 1965, p.67-86.

CENTURIÓN, Marília; JAKUBOVIC, José. Manual do professor. In: **Matemática: teoria e contexto**. 9º ano. 1ª edição. São Paulo: Saraiva, 2012a.

CENTURIÓN, Marília; JAKUBOVIC, José. **Matemática: teoria e contexto**. 9º ano. 1ª edição. São Paulo: Saraiva, 2012b.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *In*: **Teoria & Educação**, n. 2, 1990.

CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA NO CURSO SECUNDÁRIO, 1., 1955, Salvador. **Anais...** Salvador: Universidade da Bahia, 1957.

CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 2., 1957, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1959a.
CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 3, 1959, Rio de Janeiro. **Anais do III CBEM**. CADES/MEC, Rio de Janeiro 1959b.

CORRY, L. **Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures**. Base, Birkhäuser, 2004.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Uma História Concisa da Matemática no Brasil**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

DANTE, Luiz Roberto. Manual do Professor. *In*: **Projeto Teláris – Matemática**. 9º ano. 1º Ed, 2º impressão. São Paulo: Ática 2013a.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris – Matemática**. 9º ano. 1º Ed, 2º impressão. São Paulo: Ática 2013b.

DASSIE, B. A. **Matemática do curso secundário na reforma Gustavo Capanema**. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: Dep. de Matemática, PUC, RJ, 2001.

DASSIE, B. A. **Euclides Roxo e a constituição da educação matemática no Brasil**. Tese de Doutorado. Rio de Janeiro: Dep. de Educação, PUC, RJ, 2008.

EDITORA MODERNA. Guias e recursos didáticos. In: **Projeto Araribá**. Matemática/Obra Coletiva. 3º edição. São Paulo: Moderna, 2010a.

EDITORA MODERNA. **Projeto Araribá**. Matemática/Obra Coletiva. 3º edição. São Paulo: Moderna, 2010b.

FIORENTINI, Dario.; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

G.E.E.M. **Matemática moderna para o ensino secundário**. Série Professor n° 1, 2ª ed. São Paulo, GEEM, 1965.

GUIMARÃES, H. M. Por uma Matemática nova nas escolas secundárias: perspectivas e orientações curriculares da Matemática Moderna. *In*: MATOS, J. M. e VALENTE, W. R. (org.)

A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos, p. 21-45. S. Paulo: PMMPB, 2007.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo Cestari Terra. Guia do professor. *In*: **Matemática**: Imenes & Lellis. 9º ano. 2º edição. São Paulo: Moderna, 2012a.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo Cestari Terra. **Matemática**: Imenes & Lellis. 6º ano. 2º edição. São Paulo: Moderna, 2012b.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo Cestari Terra. **Matemática**: Imenes & Lellis. 7º ano. 2º edição. São Paulo: Moderna, 2012c.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo Cestari Terra. Guia do professor. *In*: **Matemática**: Imenes & Lellis. 6º ano. 2º edição. São Paulo: Moderna, 2012d.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo Cestari Terra. **Matemática**: Imenes & Lellis. 9º ano. 2º edição. São Paulo: Moderna, 2012e.

KARLSON, Paul. **A magia dos números**. Rio de Janeiro: Ed. Globo, 1961.

LIMA, Eliene Barbosa, DIAS, André Luís Mattedi. **O curso de Análise Matemática de Omar Catunda**: uma forma peculiar de apropriação da análise matemática moderna. Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência (Cessou em 2007. Cont. ISSN 1983-4713 Revista Brasileira de História da Ciência). , v.3(2), p.211 - 230, 2010.

LOPES, Antônio. Manual do Professor. *In*: **Projeto Velear – Matemática**. 9º ano. 1º Ed. São Paulo: Scipione, 2013a.

LOPES, Antônio. **Projeto Velear – Matemática**. 9º ano. 1º Ed. São Paulo: Scipione, 2013b.

LAUDARES, João Bosco. **O conceito e a definição em matemática**: aprendizagem e compreensão. *In*: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba: XI ENEM, 2013.

MACEDO, Rodrigo Sanchez. A teoria dos conjuntos no MMM. *In*: MATOS, J. M. e VALENTE, W. R. (org.) **A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal:** primeiros estudos, p. 230-232. S. Paulo: PMMPB.

MAZZIEIRO, de Alceu dos Santos; MACHADO, Paulo Antônio Fonseca. Manual do Professor. In: **Descobrindo e Aplicando a Matemática**: 9º ano. 1ª edição. Belo Horizonte: Dimensões, 2012a.

MAZZIEIRO, de Alceu dos Santos; MACHADO, Paulo Antônio Fonseca. **Descobrindo e Aplicando a Matemática: 9º ano**. 1ª edição. Belo Horizonte: Dimensões, 2012b.

MELLO, Guiomar Namo de. **Educação escolar brasileira**: o que trouxemos do século XX?. Porto Alegre: Artmed, 2004. 213p.

MENDONÇA, Maria do Carmo Domite; OLIVEIRA, Paulo César. Da educação matemática: funções no centro das atenções. In: **Educação e Matemática**. Nº 54, setembro/outubro, 1999, p. 37-42.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Edital de convocação 06/2011 – CGPLI**. Brasília: Ministério da Educação, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2001.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Guia de livros didáticos: PNLD 2014: matemática**. – Brasília: Ministério da Educação, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2013. 104 p. :il.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Manual do professor. In: **Matemática – Ideias e Desafios**. 9º ano. 17ª edição. São Paulo: Saraiva, 2012a.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática – Ideias e Desafios**. 9º ano. 17ª edição. São Paulo: Saraiva, 2012b.

NUNES, C. **O "velho" e "bom" ensino secundário**: momentos decisivos. In: *Revista Brasileira de Educação*, No. 14. São Paulo: Anped, mai-ago, 2000, p. 35-60.

PIAGET, J. Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence. In: **CIEAEM, L'Enseignement des mathématiques**. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé, p. 11- 34, 1955.

PIRES, C. M. C. **Currículos de Matemática**: Da Organização Linear à Idéia de Rede. São Paulo: FTD, 2000.

PIRES, Rute da Cunha. **A Presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo**. 2006. Tese (Doutorado em História da Ciência) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

REVUZ, André. (1980). **Matemática Moderna Matemática Viva**, 3ª edição, Livros Horizonte: Lisboa.
ROXO, Euclides; THIRÉ, Cecil; SOUZA, Mello e. **Matemática Ginasial**. 2ª série. 4ª edição. São Paulo: Livraria Francisco Alves, 1944.

ROXO, Euclides; THIRÉ, Cecil; SOUZA, Mello e. **Matemática Ginasial**. 1ª série. 8ª edição. São Paulo: Livraria Francisco Alves, 1945a.

ROXO, Euclides; THIRÉ, Cecil; SOUZA, Mello e. **Matemática Ginasial**. 3ª série. 2ª edição. São Paulo: Livraria Francisco Alves, 1945b.

ROXO, Euclides; THIRÉ, Cecil; SOUZA, Mello e. **Matemática Ginasial**. 4ª série. 2ª edição. São Paulo: Livraria Francisco Alves, 1945c.

SANGIORGI, Osvaldo. Introdução da Matemática Moderna no Ensino Secundário. In: **G.E.E.M. Matemática moderna para o ensino secundário**. Série Professor n° 1, 2ª ed. São Paulo, GEEM, p.1-14, 1965.

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática: Curso Moderno**. Para os ginásios. Vol. 1. São Paulo: Companhia editora Nacional. 1968a.

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática: Curso Moderno**. Para os ginásios. Vol. 2. São Paulo: Companhia editora Nacional. 1968b.

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática: Curso Moderno**. Para os ginásios. Vol. 3. São Paulo: Companhia editora Nacional. 1968c.

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática: Curso Moderno**. Para os ginásios. Vol. 4. São Paulo: Companhia editora Nacional. 1968d.

SCHUBRING, G. O primeiro movimento internacional de reforma curricular em matemática e o papel da Alemanha. In: VALENTE, Wagner R. (org**.). Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil**. Brasília: Editora UnB, 2004, p. 11-43.

SCHWARTZMAN, Simon, Os desafios da Educação no Brasil. In: BROCk, Colin; SCHWARTZMAN, Simon (Org.). **Os desafios da educação no Brasil**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2005. p. 09-51.

SOUZA, Rosa Fátima de. **História da organização do trabalho escolar e do currículo no século XX**: ensino primário e secundário no Brasil. São Paulo, Cortez, 2008.

SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patrícia Rosana Moreno. Orientações para o professor. *In:* **Vontade de saber Matemática**. 9º ano. 2ª Ed. São Paulo: FTD, 2012a.

SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patrícia Rosana Moreno. **Vontade de saber Matemática**. 9º ano. 2ª Ed. São Paulo: FTD, 2012b.

SOUZA, Juliana Alves de. **Equações e expressões algébricas para o ensino fundamental:** um olhar sobre alguns cursos de licenciatura em matemática. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande – MS**:** 2013.

THIRÉ, Cecil; SOUZA, Mello. **Matemática**. 2º ano. 4º edição. São Paula: Livraria Francisco Alves, 1935.

THIRÉ, Cecil; SOUZA, Mello. **Matemática**. 1º ano. 9º edição. São Paula: Livraria Francisco Alves, 1936.

USISKIN, Zalman. **Conceptions of School Algebra and Uses of Variables**. *In*: Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications, editado por Barbara Moses, pp. 7–13. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1999.

VALENTE, W. R. **Educação Matemática e Política**: a escolarização do conceito de função no Brasil. Educação Matemática em Revista, São Paulo, ano 9, v. 12, n.1, p. 16-20, 2002.

VALENTE, W. R. Euclides Roxo e o movimento internacional de modernização da matemática escolar. In: VALENTE, Wagner R. (org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil**. Brasília: Editora UnB, p. 45-83, 2004.

VALENTE, W. R. **A matemática do ginásio**: livros didáticos e as reformas Campos e Capanema. São Paulo: GHEMAT-FAPESP, 2005a. 1 CDROM.

VALENTE, W. R. **Livros didáticos de matemática e as reformas Campos e Capanema**. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática..., Recife: UFRPE, 2005b.

VALENTE, W. R. **Livro didático e educação matemática**: uma história inseparável. Zetetike (UNICAMP), v. 16, p. 149-171, 2008a.

VALENTE, W. R. **Livros didáticos de matemática para o colégio no Brasil, 1930-1950**. VII Congresso Luso-Brasileiro de História da Educação. Junho 2008, Porto: Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação (Universidade do Porto), 2008b.

VALENTE, W. R. O Movimento da Matemática Moderna: suas estratégias no Brasil e em Portugal. *In*: BÚRIGO, Elizabete Zardo, FISCHER, Maria Cecília Bueno, SANTOS, Mônica Bertoni dos (orgs.). **A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal:** Novos Estudos. Porto Alegre: Redes Editora, 2008c.

VALENTE, W. R. **Osvaldo Sangiorgi, um *best-seller*.** *In*: VALENTE, W. R. (org.). Osvaldo Sangiorgi – um professor moderno**.** São Paulo: Editora Annablume/CNPq/GHEMAT, 2008d.

VALENTE, W. R. **Osvaldo Sangiorgi**: um *best seller* para o ginásio, um fracasso editorial no colégio. Anais do VII Seminário Temático "A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal". Florianópolis, UFSC, 2009.

YOUSCHKEVITCH, A. P. **The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century**. Archive for History of Exact Sciences, vol. 1, p. 37-85, 1976.

ZUFFI, E. M. **Alguns Aspectos do Desenvolvimento Histórico do Conceito de Função**. Educação Matemática em Revista (São Paulo), São Paulo, v. Ano 8, n. 9, p. 10-16, 2001.

ANEXOS

ANEXO A – ÍNDICE DO PRIMEIRO VOLUME DO LIVRO MATEMÁTICA, DE CECIL THIRÉ E MELLO E SOUZA.

ÍNDICE

ANEXO B – ÍNDICE DO SEGUNDO VOLUME DO LIVRO MATEMÁTICA, DE CECIL THIRÉ E MELLO E SOUZA.

ÍNDICE GERAL

N. 2.660 — Officinas Graphicas da Livraria Francisco Alves

ANEXO C – ÍNDICE DO PRIMEIRO VOLUME DO LIVRO MATEMÁTICA: CURSO MODERNO, DE OSVALDO SANGIORGI.

Índice da matéria

1

3

Índice da matéria

1

3

2

4

ANEXO D – PROGRAMA PARA UM CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA.

PROGRAMA
para um
CURSO MODERNO
de
MATEMÁTICA

*(Para os cursos ginasiais)**

Os seguintes assuntos, para serem desenvolvidos na Primeira Série dos Ginásios, são distribuídos nos seguintes itens:

1. noções de conjunto; operações com conjuntos; relações;
2. número natural; numerais de um número — sistemas de numeração — bases;
3. operações (operações inversas) com os números naturais — propriedades estruturais;
4. divisibilidade — múltiplos e divisores; números primos; fatoração completa;
5. conjunto dos números racionais; números fracionários — operações (operações inversas); propriedades estruturais;
6. estudo intuitivo das principais figuras geométricas planas e espaciais — sistemas de medidas: decimal e não-decimais.

Tais itens, explicados neste Volume 1, fazem parte da programação dos *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios*, ratificados no 5.º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, promovido pelo GEEM de São Paulo (janeiro de 1966, São José dos Campos — SP), bem como seguem as sugestões para o *Desenvolvimento da Matemática para a Primeira Série Ginasial*, publicadas pelo Departamento de Educação do Estado de São Paulo (D. O. de 19-1-65) e, de um modo geral, atendem às *Recomendações sôbre Currículos para o Ensino Médio* da Segunda Conferência Interamericana de Educação Matemática (dezembro de 1966, Lima, Peru).

(*) Designação genérica do 1.º ciclo dos cursos médios, compreendendo os Ginásios, os Ginásios Modernos, os Ginásios Experimentais, os Ginásios Vocacionais, os Ginásios Industriais, os Ginásios Comerciais e os Ginásios Pluricurriculares.

ANEXO E – ÍNDICE DO SEGUNDO VOLUME DO LIVRO MATEMÁTICA: CURSO MODERNO, DE OSVALDO SANGIORGI.

índice

CAPÍTULO um

CAPÍTULO dois

CAPÍTULO três

CAPÍTULO quatro

ANEXO F – ÍNDICE DO TERCEIRO VOLUME DO LIVRO MATEMÁTICA: CURSO MODERNO, DE OSVALDO SANGIORGI.

índice

CAPÍTULO 3

Estudo das figuras geométricas

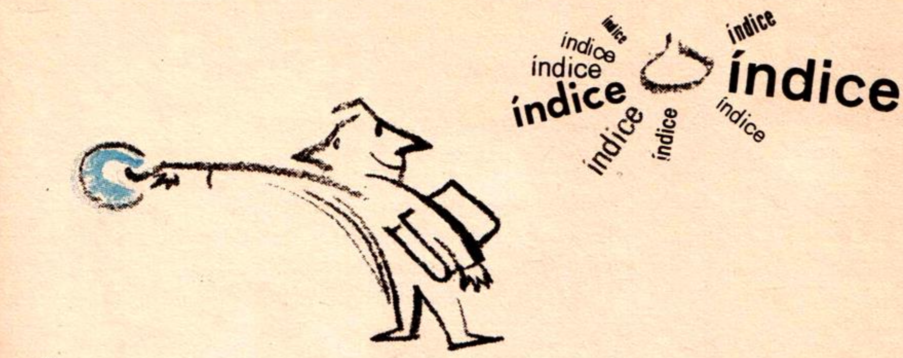
CAPÍTULO 4

Estudo dos polígonos e da circunferência

APÊNDICE

Transformações geométricas planas

ANEXO G – ÍNDICE DO QUARTO VOLUME DO LIVRO MATEMÁTICA: CURSO MODERNO, DE OSVALDO SANGIORGI.



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

O353c Ogliari, Lucas Nunes
O conteúdo de funções na escola : rastros dos movimentos de reforma nos livros didáticos de matemática do ensino fundamental / Lucas Nunes Ogliari. – Porto Alegre, 2014.
189 f. : il.

Tese (Doutorado em Educação) – Fac. de Educação - PUCRS.
Orientação: Prof. Dr. Marcos Villela Pereira.

1. Educação. 2. Matemática – Ensino Médio. 3. Livros Didáticos – Avaliação. 4. Matemática - Ensino – História. 5. Matemática – Ensino Fundamental. I. Pereira, Marcos Villela. II. Título.

CDD 372.7

Ficha Catalográfica elaborada por
Vanessa Pinent
CRB 10/1297