PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Katya Rizzon

ANÁLISE DA LINGUAGEM MATEMÁTICA RELACIONADA À GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO

Porto Alegre

2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL

FACULDADE DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

KATYA RIZZON

ANÁLISE DA LINGUAGEM MATEMÁTICA RELACIONADA À GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

Porto Alegre

2008

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)

R627a

Rizzon, Katya

Análise da linguagem matemática à geometria analítica do ensino médio. Porto Alegre, 2008.

73 f.

Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - PUCRS, Fac. de Física.

Professor orientador: Dr. Maurivan Güntzel Ramos.

1. Educação - Matemática 2. Geometria analítica – Ensino Médio. I.Título.

CDD: 372.7

516.3

Alessandra Pinto Fagundes
Bibliotecária
CRB10/1244

KATYA RIZZON

ANÁLISE DA LINGUAGEM MATEMÁTICA RELACIONADA À GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação da Faculdade de Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Aprovada em ___ de ___________________ de 2008

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dr. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Profª. Dr. Ruth Portanova

Prof. Dr. Maurivan Güntzel Ramos

Dedico o presente trabalho à minha família, em especial ao meu marido **Jeferson**, que me incentivou e participou do meu crescimento intelectual, e a meus filhos **Tanise** e **José Dinarte**, que me apoiaram com suportes tecnológicos e afetivos e que são a principal razão do meu viver.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus professores, que foram modelos referenciais na minha formação educacional e na prática da sala de aula. Em especial, aos professores do curso de Mestrado, pela dedicação e inspiração para reconstruir minha formação profissional e atualização da minha prática educativa. O encaminhamento das reflexões qualificadas dos temas da educação direcionou-me a novas descobertas sobre os valores da linguagem matemática na aprendizagem da sala de aula.

Ao meu orientador Dr. Maurivan Güntzel Ramos, agradeço de modo especial, pelo incentivo e dedicação, bem como pela compreensão das minhas limitações na construção deste trabalho. Sua competência, seu conhecimento, sua simplicidade e sua objetividade foram fatores que contribuíram para incentivar a conclusão deste trabalho. Os comentários e encaminhamentos críticos sobre este estudo e o compartilhar da sua experiência e seu conhecimento influenciaram significativamente minha maneira de pensar a educação. Assim, devo-lhe todo meu respeito e admiração para sempre. O privilégio de ter realizado este trabalho de investigação na educação matemática é o resultado da dedicação, do empenho e do compartilhar idéias com meu orientador.

Não poderia deixar, também, de agradecer:

– pelo grande incentivo de meu pai, minha mãe, irmãs, cunhados, compadre e comadres que apoiaram este momento de aperfeiçoamento intelectual, com muita paciência e respeito;

– pelo apoio dos colegas de mestrado, que contribuíram nas discussões de temas da educação, durante dois anos. Dois colegas, em especial, destacam-se nesta trajetória: Gláucia, pelo incentivo nos momentos difíceis, e Ambrósio, por acreditar na conclusão deste trabalho.

Da mesma maneira, manifesto profundo agradecimento aos meus coordenadores, que me ouviram, apresentaram sugestões e possibilitaram a coleta dos dados para esta investigação.

Este singelo agradecimento estende-se também aos alunos com os quais tive a grata satisfação de conviver ao longo da minha atividade docente e que influenciaram o caráter epistêmico cunhado em minha investigação sobre a linguagem matemática na sala de aula. Eles propiciaram a aplicação de uma

metodologia que valorizasse a relação horizontal professor–aluno, a partir dos conhecimentos tácitos dos educandos, agregando uma linguagem acessível aos conteúdos matemáticos, a fim de construir e reconstruir o conhecimento científico no processo de aprendizagem.

Muitas outras pessoas poderiam estar aqui relacionadas, por isso, peço perdão a todos aqueles que não foram citados neste singelo espaço.

RESUMO

Este estudo teve como objetivo investigar os conteúdos matemáticos aprendidos pelos alunos de três turmas do 3º ano do Ensino Médio de uma escola particular, da cidade de Porto Alegre/RS, após a realização de uma Unidade de Aprendizagem (UA) sobre geometria analítica. O problema desta pesquisa tem por base a seguinte pergunta: Como os alunos aplicam a linguagem matemática na interpretação de questões sobre geometria analítica em uma escola do ensino médio? Por conseqüência, o objetivo central do trabalho foi identificar e analisar conteúdos matemáticos lembrados e não lembrados pelos alunos após a realização da UA sobre geometria analítica, bem como compreender o modo como aplicam a linguagem matemática na resolução de questões. Para isso, foram analisados os dados coletados por meio de relatórios elaborados pelos alunos sobre a resolução de questões sobre geometria analítica, identificando os conteúdos presentes e comparando-os com os esperados pelo professor. A meta foi desenvolver uma metodologia para o desenvolvimento do conteúdo de geometria analítica, identificando após os conteúdos matemáticos presentes em questões relacionadas ao tema, extraídas de concursos vestibulares. Ao término do trabalho, foi possível identificar que conteúdos estão mais presentes na aprendizagem dos alunos, bem como quais são os mais complexos, principais responsáveis pelas dificuldades de aprendizagem. Foi possível também constatar que, após a UA, os alunos passaram a utilizar linguagem matemática com maior autonomia e com mais significado na resolução de outras questões de conteúdos matemáticos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Geometria Analítica. Conteúdos Matemáticos. Linguagem Matemática.

ABSTRACT

The purpose of this study is to investigate the Mathematical concepts learned by three groups of students attending the 3rd grade in a private high school in Porto Alegre, Rio Grande do Sul, after performing a Learning Unit (LU) about Analytic Geometry. The problem of this research is based on the following question: What are the students' main leaning difficulties in Analytic Geometry related to Mathematics Language? How do the students apply the mathematical language in the interpretation of questions about analytical geometry in a school of the medium teaching? As a result, the main objective of this project was to identify and analyze mathematical concepts that students remind and the ones they don't, after a Learning Unit about Analytic Geometry, in order to understand the main learning difficulties related to Mathematics language applied by students and teachers in class. Then, the collected data were analyzed based on reports written by the students about problem solutions, identifying the present concepts and comparing to the ones expected by the teacher. The aim was to develop a methodological approach to the Analytic Geometry content, identifying after the mathematical concepts presented in questions from College entrance examinations related to the subject. It was possible to identify the most presented concepts in the students learning as well as the most complex ones, the main responsible for learning difficulties. After a Leaning Unit, it was also possible to notice that students started applying Mathematics language with more autonomy and significance to solve other mathematical problems.

Keywords: Mathematical education. Analytical Geometry. Mathematical Concepts. Mathematical Language.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa está relacionada à Educação Matemática e trata sobre os principais problemas de aprendizagem no que tange ao tema geometria analítica, associado à linguagem matemática no Ensino Médio. Os problemas de aprendizagem são analisados a partir de dados coletados durante etapas da Unidade de Aprendizagem (UA) sobre esse tema. São identificados conteúdos matemáticos mais lembrados e os não lembrados pelos alunos comparados aos esperados pelo professor.

O contexto desta pesquisa é uma escola particular de Ensino Médio, do Município de Porto Alegre, no qual estão envolvidos a responsável pela pesquisa e três turmas de 3º ano, totalizando em torno de cem alunos.

Para o desenvolvimento deste trabalho, foram pesquisados autores e estudiosos dos fundamentos teóricos sobre a UA, os conteúdos da geometria analítica, os processos associados à aprendizagem e às dificuldades em relação ao tema referido. O estudo teórico contribuiu para a compreensão do objeto de estudo.

A presente pesquisa está constituída dos seguintes capítulos: o primeiro, “Contextualização e Problematização”, versa sobre breve narrativa e justificativa das observações vivenciadas pelo trabalho docente, a partir da averiguação dos conteúdos matemáticos desenvolvidos na sala de aula e das dificuldades de interpretação e de aplicação em novas situações escolares do Ensino Médio; o segundo, ”Fundamentos Teóricos”, busca dar sustentação à pesquisa; o terceiro, ”Procedimentos Metodológicos”, descreve os procedimentos aplicados para a coleta dos dados, contextualiza o ambiente pesquisado e os sujeitos envolvidos, bem como descreve os momentos de cada etapa da UA desenvolvida com os grupos; o quarto, ”Análise dos Dados”, apresenta o resultado na análise de três questões desenvolvidas pelos alunos; o quinto, ”Considerações Finais”, apresenta respostas ao problema de pesquisa.

Para efetivar a pesquisa, foram desenvolvidas etapas que envolvem a UA sobre geometria analítica em sala de aula e, a partir dessa Unidade, foram coletados dados relativos à aprendizagem dos alunos com base em questões sobre o tema.

Desse modo, a análise dos relatórios dos alunos, organizados em grupos, indicou os principais modos empregados, por meio da linguagem matemática, na interpretação das questões de geometria analítica no Ensino Médio.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO E PROBLEMATIZAÇÃO

Desde muito cedo eu ouvia falar da escola como o meio mais seguro e importante para nos tornarmos cidadãos capazes de participar da sociedade de maneira responsável e autônoma. Foi no ambiente escolar que a inspiração da figura do professor competente, singelo e responsável fez-se modelo do que escolhi seguir. Esse modelo é o referencial maior que caracteriza a escolha da minha caminhada profissional.

Escolher modelos e determinar metas para o futuro é o que todo jovem precisa internalizar, tanto na família quanto no ambiente escolar ao qual pertence e que freqüenta por muitas horas de seu dia-a-dia durante alguns anos da vida. No meu caso, a imagem de professor ideal estava fortemente ligada ao prazer e à dedicação com que explicava os conteúdos, às atitudes docentes e à simplicidade com que se relacionava com seus alunos. Esse modelo de professor, a meu ver, orientava uma organização de estudos e aplicações das aprendizagens em nossa vida futura, pois era responsável por nossa formação naquele momento. Essas orientações motivaram-me para a resolução de problemas, pois, desde aquela época, muitos colegas apresentavam dificuldades nas aprendizagens dos conteúdos de Matemática, disciplina repleta de conteúdos, definições e teoremas, que são aplicáveis em diversas problematizações. Observava a atitude, as linguagens e os procedimentos metodológicos utilizados pelo professor para, posteriormente, repeti-las aos colegas do melhor modo possível. Dessas repetições ou ensaios foi desenhado um perfil de professora de Matemática, que demonstra cada vez mais preocupações com as aprendizagens e não aprendizagens dos alunos. Esses extremos são fontes de motivação e desafio a cada momento em que me encontro em uma sala de aula, pois a relação do professor no processo ensino-aprendizagem, por meio da linguagem falada e escrita, deve ser refletida e repensada. Acredito na existência de uma linguagem matemática com implicações históricas, políticas e afetivas constituídas de maneira clara, consistente e objetiva, capaz de contribuir para a resolução de problemas do cotidiano dos estudantes.

Nesse sentido, a linguagem, como fundamental recurso do professor para interagir com os alunos na sala de aula, é instrumento social de grande relevância no desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem. Desse modo, as definições dos conteúdos matemáticos e o desenvolvimento desses conteúdos necessita ser orientado por meio de uma linguagem e de uma metodologia adequada para que sejam efetivamente aprendidos. O contrário acarreta sérios problemas para os alunos. Refiro-me ao modo de tratamento dos conteúdos de Matemática quando de forma expositiva e acompanhada de uma linguagem excessivamente técnica e formal, descontextualizada e inacessível ao aluno, pela qual o professor apresenta a fórmula e diz como deve ser feito. O que é criticável é o professor que apresenta o exemplo de forma genérica e utiliza variáveis para demonstrar o cálculo, cercando-se de um formalismo exagerado, reforçando o seu poder de centralizador do saber.

Tal situação expõe a possibilidade do surgimento de várias dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos, uma vez que se trabalhou com grupos heterogêneos em sala de aula, tanto em relação à idade cronológica quanto às estruturas mentais que deles se esperavam, nas quais demonstraram que, por vários motivos, não se encontravam preparados para desenvolvê-las.

Presenciei o relato de um colega de Matemática que ministra aulas para um grupo de alunos que se preparavam para o vestibular de 2007 o qual menciono neste texto por ser de interesse para uma reflexão. Mostrando-se envaidecido em ser o centralizador do saber, comentou que um dia entrara na sala de aula de maneira séria e com um livro de Matemática bastante pesado. Abrira o material e indagara os alunos: “Paramos a revisão no momento em que eu comentaria sobre o Teorema de D’Alembert[1]. É isso?”. Recebera a confirmação e seguira sua exposição “séria” e “segura”, ressaltando que, como alunos que já haviam concluído o Ensino Médio, não poderiam ter dúvidas quanto à aplicação desse teorema. Então, questionara os alunos se já seria possível revisar o conteúdo sobre Probabilidade. Relatou que o silêncio respondera por si, começando, assim, a revisão de Probabilidade, pois estava atrasado com a seqüência dos conteúdos propostos.

Com esse exemplo, espero contribuir para a reflexão da atitude do professor como detentor do saber e que está condicionado a reprimir qualquer inspiração de participação ou incentivo à aprendizagem de conteúdos matemáticos – atitude com a qual não compartilho. Por isso, acredito em processo metodológico que oportunize a participação e valorize os conhecimentos empíricos dos alunos, a fim de

[1] Refere-se ao conteúdo “polinômios”.

encaminhá-los para uma aprendizagem significativa, que parta dos conhecimentos prévios em direção a novos conhecimentos, mais complexos.

Assim, os novos conteúdos explorados por meio de explicações são processos de interpretações dos fenômenos, transformados em representações internas. Essas interpretações deveriam ser possivelmente aplicadas em situações relacionadas ao contexto. Quando sofrem rupturas, em algumas das etapas, conduzem o aluno a dificuldades de aprendizagem. Se o processo não é interrompido, oportuniza aprendizagem com significado. Essas rupturas no processo de aprendizagem podem ter relação com a linguagem ou com a atitude inadequada do professor. Isso dificulta a interpretação das mensagens. Nesse caso, o professor não está cumprindo com o seu papel de mediador do processo e não está sendo competente, segundo a definição de Demo (2002)[2].

Para buscar essa competência, tenho procurado momentos de qualificação e buscado observar as dificuldades de cada grupo de trabalho. Essas situações enriquecem a minha vida profissional, explicam o comportamento epistêmico que assumo e confortam a mim e a outros professores que já tenham sido despertados para investigar as dificuldades dos alunos na aprendizagem da Matemática com suas possíveis causas. Essas “reflexões” estão diretamente relacionadas com a sala de aula, pois, de acordo com as minhas observações, os alunos que participam de novas propostas metodológicas demonstram dificuldades menores de aprendizagem, em relação aos alunos que não passaram por essas vivências. O professor, no entanto, deve estar preparado, sentindo-se competente para orientar os alunos por meio de uma linguagem adequada ao contexto, tendo objetivos de trabalhos bem definidos na tentativa de diminuir sua insegurança e a de seus alunos. Isso se dá na interação com o aluno em um ambiente próprio e com uma linguagem acessível ao processo de aprendizagem.

O professor que repensa a sua prática está refletindo sobre o processo de ensino e de aprendizagem. Ele procura pesquisar, reconstruir e organizar os conhecimentos inserindo-os em um contexto, pois o feixe de informações e conhecimentos fragmentados que “transmitimos” pode levar o aluno ao processo de não aprendizagem, uma vez que “[...] os conhecimentos fragmentados só servem

[2] Demo (2002) afirma que o professor competente não é aquele que acredita no conhecimento estocado e centralizado, mas aquele que se envolve em desafios de *saber pensar* e do *aprender a aprender*: “O profissional, portanto, não é aquele que apenas executa sua profissão, mas sobretudo que sabe pensar e refazer sua profissão.” (DEMO, 2002, p. 68)

para usos técnicos”, como afirma Morin (2003, p.17). Não será dessa forma que oportunizaremos o ambiente de repensar e o de *aprender a aprender*. Assim, refletimos, com Morin, que afirma ser necessário “alimentarmos” nossos pensamentos, a fim de participarmos com consciência da vida, do mundo, do nosso saber e de enfrentarmos os desafios que ainda estarão por vir.

Contudo, compreender as implicações históricas, políticas, afetivas e cognitivas da linguagem na interpretação de conteúdos matemáticos aplicados na resolução de questões é o que proponho pesquisar, assumindo o seguinte problema: **Como os alunos aplicam a linguagem matemática na interpretação de questões sobre geometria analítica em uma escola do ensino médio?**

Desse modo, o objetivo central do trabalho é identificar e analisar conteúdos matemáticos lembrados e não lembrados pelos alunos após a realização de uma UA sobre geometria analítica, com vistas a compreender as principais dificuldades de aprendizagem associadas à linguagem matemática empregada pelos alunos em comparação com a do professor.

Os objetivos específicos da investigação são:

- desenvolver uma UA sobre geometria analítica;
- propor aos alunos a análise de problemas matemáticos para identificar conteúdos dessa área;
- averiguar os relatórios dos alunos sobre o trabalho realizado com os problemas matemáticos;
- identificar os conteúdos que são mais lembrados pelos alunos e os que não são lembrados, comparados aos conteúdos esperados pelo professor; e
- analisar os resultados.

O desenvolvimento deste trabalho e as conseqüentes reflexões sobre o tema contribuem para indicar melhorias necessárias em relação ao ensino desse conteúdo de Matemática no Ensino Médio.

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A aprendizagem em Matemática relaciona-se à leitura e à interpretação de conteúdos matemáticos que estão implícitos nos enunciados dos problemas escolares ou de situações do dia-a-dia. A linguagem é, pois, um dos instrumentos que o professor e o aluno utilizam para pesquisar e estabelecer relações entre conteúdos matemáticos e a reconstrução do conhecimento. O conhecimento empírico somado aos conteúdos que são estudados pelo aluno contribui para a interpretação de signos e termos específicos.

Nesse sentido, para Vygotsky (1987, p. 44) "o desenvolvimento do pensamento é determinado pela linguagem, isto é, pelos instrumentos lingüísticos do pensamento e pela experiência sociocultural da criança." O crescimento intelectual depende, pois, do "domínio dos meios sociais do pensamento" que é a linguagem, complementa Vygotsky.

Esse recurso lingüístico é vital para todo o ser humano, pois, desde criança até a idade mais avançada, a linguagem é necessária nas relações. É de se imaginar a relevância da linguagem nos processos educativos. Questionamentos organizados logicamente, por meio de processos comunicativos, em ambientes apropriados, com a mediação adequada do professor favorecem aprendizagens significativas para os alunos.

O principal protagonista do processo de aprendizagem é o próprio aluno, que pensa e é capaz de iniciativas, quando participa integralmente das atividades propostas pelo professor. É importante que este valorize a autonomia dos alunos por meio da ação, da argumentação e da reflexão permanente sobre as aprendizagens.

A UA pode ser entendida como um procedimento metodológico, por meio da pesquisa, que pode ser empregado para o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos, entre os quais os relacionados à geometria analítica. A pesquisa na sala de aula ocorre por meio do questionamento, da reconstrução de argumentos e da comunicação dos novos conteúdos (MORAES et al., 2004). Desse modo, pode-se potencializar a participação do aluno, a fim de problematizar uma situação real, questionar por meio de uma linguagem adequada e encaminhar para a reconstrução dos argumentos matemáticos e de sua comunicação ao grupo. O professor, no entanto, aplica a UA a partir de suas teorias pessoais, que caracterizam a sua ação profissional.

Sendo assim, segundo Bocchese (2002), o modo como o professor realiza seu trabalho, seleciona os conteúdos, desenvolve os procedimentos de ensino e de avaliação tem a ver com seus pressupostos teóricos e metodológicos, embora, muitas vezes, eles não sejam claros para os docentes.

As ações do professor são orientadas por teorias pessoais que se aproximam de modelos metodológicos Esses modelos nem sempre são assumidos pelo professor, pois, em geral, o professor não tem consciência deles. Na medida em que o professor reflete sobre a sua prática, vai tendo essa consciência, e pode-se observar uma evolução de sua prática, de modelos mais simples para mais complexos. Isso ocorre com desde aquele professor que recentemente saiu dos “bancos acadêmicos” até aquele que já repensa seu trabalho e procura outra maneira de contribuir para o processo de aprendizagem.

A seguir, são apresentados os modelos metodológicos, também denominados de didáticos, à luz, principalmente, dos autores Mizukami (1987) e Porlán (1996).

3.1 MODELOS METODOLÓGICOS

Os modelos metodológicos não são meras receitas ou técnicas puras de como desenvolver e mediar os conteúdos. Esses modelos metodológicos integram-se com a história de vida, com as ideologias e as posições epistemológicas dos professores. Refletem a profissionalização e o desenvolvimento de competências docentes. O professor possui o discurso, a linguagem e suas teorias implícitas, que são fatores que influenciam as tendências pedagógicas utilizadas por ele na sala de aula.

3.1.1 Modelo Tradicional

Segundo Mizukami (1987), a abordagem tradicional tem a pretensão de conduzir o aluno ao contato com as grandes realizações da humanidade. Privilegiam-se o especialista e os modelos. Nesse caso, o professor é elemento imprescindível na transmissão de conteúdos, utilizando uma linguagem formal e pouco acessível ao aluno.

O aluno adquire o conhecimento, executa o que lhe é indicado e memoriza definições, enunciados de leis, sínteses e resumos que lhe são oferecidos. A linguagem estimula a repetição das definições memorizadas em aula expositiva e nas demonstrações do professor para os alunos.

Segundo Porlán (1996), o modelo tradicional se caracteriza pela transmissão direta dos conteúdos, explicação do professor, estudo do livro-texto e realização de exercícios. O tempo é determinado, e são utilizados poucos recursos didáticos. A aula é expositiva e dialogada, e a ênfase é dada ao trabalho individual. A linguagem formal é pouco acessível aos alunos. Valoriza a cópia, não fomenta o raciocínio e contempla a reprodução de idéias. Especificamente em Matemática, os alunos utilizam a mecanização, por meio de vários exercícios de sistematização com mesmo nível de compreensão, não possibilitando o desenvolvimento da abstração.

É um modelo pedagógico que fomenta a centralização do saber no professor e de ser o foco do processo ensino-aprendizagem, não se preocupando com a compreensão do aluno. Incentiva a cópia e a repetição dos conteúdos desenvolvidos.

3.1.2 Modelo Comportamentista

Para Mizukami (1987), essa abordagem tem, nos comportamentistas – ou behavioristas – e os positivistas lógicos, considerações na experiência ou a experimentação planejada como a base do conhecimento. Segundo Skinner, idealizador dessa teoria, "é quase impossível ao estudante descobrir por si mesmo qualquer parte substancial da sabedoria de sua cultura" (SKINNER, In Mizukami 1968, p. 110).

Nessa abordagem, a aprendizagem é garantida pela sua programação de objetivos, controle de comportamentos, *feedback* constante, fornecendo elementos que indiquem o domínio de habilidades. Há ênfase na instrução programada, que é passada por meio de unidades de exercícios para o desenvolvimento de habilidades culturais.

Segundo Porlán (1996), que denomina essa metodologia de *modelo tecnológico*, ela se caracteriza pela investigação rígida do método científico empirista. Há seqüência escalonada de atividades, e o tempo é determinado. A linguagem é instrumento de orientação dos passos rígidos para resolver as atividades. Os recursos apresentados são impostos, e não há preocupação com a adequação do conteúdo à realidade dos alunos. Não incentiva a compreensão, pois a linguagem é formal e técnica. Os conteúdos são apresentados, fazendo com que os alunos os decorem. Exigindo a apresentação dos conteúdos, por meio da aula expositiva e com uma linguagem formal e genérica, não se preocupa com a compreensão significativa dos conteúdos e definições explorados.

3.1.3 Modelo Humanista

Mizukami (1987) afirma que a abordagem humanista propõe que o aluno desenvolva seu conhecimento sem intervenções, dando ênfase às relações interpessoais e ao crescimento que delas resulta. A linguagem é acessível, respeitando as experiências dos sujeitos e as relações interpessoais. É centrado no desenvolvimento da personalidade do indivíduo, em seus processos de construção cultural, no qual expressa sua linguagem própria como fator de relação entre aluno e professor. O professor assume a função de facilitador da aprendizagem. Com linguagem adequada e própria para o contexto escolar, incentiva a descoberta de novos conhecimentos. Isso implica aceitar o aluno tal como ele é e compreender os sentimentos que possui. Valoriza a troca de experiências por meio da linguagem contextualizada, favorecendo a aprendizagem significativa.

Porlán (1996), que denomina esse modelo como espontaneísta, afirma que é baseado no erro. Predomina o trabalho em grupo, para estimular a integração de conhecimentos, por meio da linguagem. Não se preocupa com o tempo do aprendizado. Vários recursos são apresentados de forma natural, ou seja, *laissez-faire*. É um modelo em que os educandos ficam muito livres, podendo interagir por meio de diferentes níveis de linguagens para buscar novos saberes. As descobertas são a partir de questões colocadas pelo grupo. E, assim, a linguagem torna-se um dos instrumentos fundamentais para a comunicação entre os integrantes dos grupos e de suas explorações culturais.

3.1.4 Modelo Cognitivista

Segundo Mizukami (1987), a abordagem cognitivista tem como característica fundamental a inteligência que se constrói a partir da troca do aluno com o meio, em um processo ativo. Tem, portanto, como centro, a ação do indivíduo. Assim, destaca-se o fator social ou educativo que constitui uma condição para o desenvolvimento do educando. Essa abordagem vê a linguagem como uma ação utilizada para efetuar as trocas entre os grupos. A linguagem empregada é acessível, pois deve propiciar a troca e incentivar novas ações.

Na abordagem cognitivista, a ênfase é para o conhecimento: tudo o que se aprende é assimilado por uma estrutura já existente e provoca uma reestruturação na aprendizagem.

3.1.5 Modelo Sociocultural

Segundo Mizukami (1987), nessa abordagem, o conhecimento está relacionado ao processo de conscientização, elaborado e criado a partir da mútua relação entre pensamento e prática. Essa abordagem tem o objetivo de provocar e criar condições para que se desenvolva uma atitude de reflexão crítica, compreendida como a ação estimulada por meio de um contexto. No processo, o professor é também aluno; e, por sua vez, o aluno é também professor. A relação professor-aluno é horizontal e não imposta, estando o professor no papel de orientador do processo ensino-aprendizagem. A linguagem é adequada e acessível, a fim de compartilhar experiências e contribuir na compreensão, interpretando a resolução do resultado obtido com a aprendizagem.

Segundo Porlán (1996), esse modelo é chamado de investigativo e se caracteriza pela perspectiva construtivista. As atividades são flexíveis, com mediação planejada, trabalho individual e grupal. Há vários recursos didáticos, muitos dos quais partem dos alunos, pois é incentivada a participação e a discussão em grupo. Esse modelo valoriza o crescimento intelectual de alunos e professores. Incentiva aos alunos que desenvolvam algoritmos próprios, procurando educar de forma humanista e oportunizando um reconstruir expressivo.

O professor contribui, portanto, para o desenvolvimento intelectual do aluno, reestruturando modelos metodológicos que considerem o contexto ao qual esse aluno pertence, seus conhecimentos empíricos e seu interesse pelo conhecimento científico.

3.2 PROCESSO DE APRENDIZAGEM E LINGUAGEM

Os pressupostos teóricos deste estudo em relação ao processo de aprendizagem têm base no pensamento de Vygotsky e colaboradores (1988, 1997), na abordagem sócio-histórica que envolve os seguintes aspectos: mediação, processos elementares e superiores, zona de desenvolvimento proximal e formação de conteúdos.

Segundo Vygotsky (1997), o processo de internalização de significados é mediado, cultural e simbolicamente. Ele conduz à formação de conteúdos de naturezas diferentes daqueles aprendidos na vida cotidiana. Nela, o processo de internalização ocorre em etapas de aprendizagem mediadas por uma linguagem que provoca transformações nos sujeitos.

A mediação interpreta intervenções para auxiliar na aprendizagem, sendo a linguagem um elemento importante nesse processo. Na mediação em sala de aula, o professor utiliza a linguagem como instrumento nas interferências que realiza no grupo de alunos. Essas interferências também estão associadas a modelos metodológicos assumidos, que refletem suas atitudes subjetivas na escolha do conteúdo, nas orientações e no planejamento dos conteúdos a serem trabalhados. La Rosa (2003), no entanto, ressalta que, "para Vygotsky, os seres humanos se relacionam com o mundo por meio de uma relação mediada, e não direta" (LA ROSA, 2003, p.132), dando a entender que, para cada relação estabelecida, há uma ação mediadora.

As relações professor-aluno e aluno-aluno pautam-se por meio das ações, isto é, as mediações do professor são desenvolvidas em processos que instigam o aluno a repensar ou refletir sobre novos conteúdos. Esses processos desenvolvem-se na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que é "a distância entre o nível real (da criança) de desenvolvimento determinado pela resolução de problemas independentemente e o nível de desenvolvimento potencial determinado pela resolução de problemas sob a orientação de adultos ou em colaboração com companheiros mais capacitados” (VYGOTSKY, 1984, p. 97).

Esses estímulos interferem em zonas nas quais são processados e interpretados os conhecimentos. As zonas se desenvolvem por meio da linguagem, em processos culturais e sociais entre as pessoas. Como instrumento, a linguagem estimula positiva ou negativamente o aprendizado do aluno, respectivamente associada ao nível que está sendo utilizada, conforme as palavras de Malta (2004):

> [...] em Matemática, o aprender a ler e se expressar são elementos da zona de desenvolvimento proximal que precede o desenvolvimento real do pensamento e do conhecimento matemático. (MALTA, 2004, p. 49)

Nesse contexto, a escola que se mostra como espaço para integração e desenvolvimento dos estímulos nas zonas de desenvolvimento proximal, por meio da linguagem, integra professor-aluno e aluno-aluno em uma estrutura de respeito e desenvolvimento na busca da significação dos saberes.

A ação do professor, como mediador nos processos elementares e superiores, visa a oportunizar ao aluno situações de aprendizagem. Os processos mentais são elementares quando são controlados pelo meio (atenção involuntária, memória de reconhecimento) e os superiores, quando são resultados das forças sociais (regulação voluntária e processo mental consciente estimulado pelas ações da mediação).

No exercício do *aprender a aprender,* as relações entre professor-aluno e aluno-aluno buscam aprendizagens significativas durante os processos elementares e, principalmente, superiores. “Aprender a aprender envolve a curiosidade, característica que revela uma inteligência aberta à realidade, a qual é inesgotável, seja ela física, biológica ou sóciocultural.” (LA ROSA, 2003, p. 19). Por exemplo, se o aluno reconhece o sistema cartesiano[3] por ações mediadoras, desenvolve o conteúdo matemático de ponto (x, y), que corresponde aos eixos orientados desse plano cartesiano.

As ações mediadoras orientam o processo de aprendizagem. O professor observa os enunciados e interpretações para auxiliar na compreensão dos termos

[3] **Plano Cartesiano** é um sistema composto por um par de retas perpendiculares. A reta horizontal é chamada de eixo x, eixo das abscissas ou Ox. A reta vertical é o eixo y, eixo das ordenadas ou Oy. A origem do sistema cartesiano é o ponto O, que tem abscissa e ordenada zero. Os eixos x e y dividem o plano em quadrantes, no sentido anti-horário. A origem do sistema cartesiano é o ponto O, que tem abscissa e ordenada zero.

matemáticos e nos movimentos seguintes voltados à pesquisa, ao aprender e à aplicação em outras situações. Os avanços em termos de conhecimentos e atitudes, nos processos de comunicação e na capacidade de argumentação, bem como nas relações socioculturais consistem em aprendizagens significativas.

O ambiente escolar onde se desenrola a integração social entre professor-aluno e aluno-aluno, por meio da linguagem, incentiva e motiva as relações interpessoais, buscando o equilíbrio entre a utilização adequada de linguagens e as aprendizagens significativas no contexto escolar. Libâneo (2003) sustenta que os valores éticos e o envolvimento em questões solidárias são fundamentais no ambiente e no currículo escolar: “a escola precisa ajudar os alunos a pensar metodicamente sobre valores, os alunos podem aprender e vivenciar conteúdos morais e modos de agir” (LIBÂNEO, 2003, p. 26).

Para que haja mudanças significativas em termos de aprendizagem, é necessário que o aluno se sinta respeitado no seu ritmo, com vontade e desejo de aprender, pois a aprendizagem só ocorre se o aluno também estiver envolvido com o conhecimento e valorizado em sua atuação.

Oferecer um ambiente com boa iluminação, acomodações e boa ventilação podem também contribuir para uma boa aprendizagem. É importante que os aspectos físico, psíquico, ambiental e social também estejam em equilíbrio para que ocorram aprendizagens significativas, o que, em geral, não se evidencia.

A linguagem, tanto falada quanto escrita, é uma ferramenta imprescindível na relação entre professor e aluno, nas mediações na sala de aula. Vygotsky e colaboradores esclarecem a importância da linguagem como meio de interação:

> Inicialmente, os aspectos motores e verbais do comportamento são misturados. A fala envolve os elementos referenciais, a conversação orientada pelo objeto, as expressões emocionais e outros tipos de fala social. Em virtude de a criança estar cercada de membros mais velhos da família, a fala começa, cada vez mais, a adquirir traços demonstrativos, o que permite que a criança indique o que está fazendo e quais são suas necessidades. Após algum tempo, a criança, fazendo distinções para os outros com auxilio da fala, começa, internamente, a fazer distinções para si mesma. Desta forma, a fala deixa de ser apenas um meio para dirigir o comportamento dos outros e começa a desempenhar a função de autodireção. (VYGOTSKY; LURIA; LEONTIEV, 1988, p. 30)

Há evidências, no modelo metodológico investigativo, segundo Porlán (1996), de que aspectos afetivos permeiam a linguagem, sejam eles positivos ou negativos.

Os sentimentos regulam a espontaneidade da linguagem, pois definem a relação entre o professor-aluno e aluno-aprendizagem.

Assim, a pluralidade de sentimentos faz com que o professor reflita, busque outros processos metodológicos nos quais possam juntos, professor e aluno, "aprender a aprender" em um ambiente que favoreça a pesquisa e todo tipo de mediação por meio da interpretação, leitura e linguagem.

Para Vygotsky (1997), a linguagem falada é a comunicação com o mundo externo, no qual professor e aluno demonstram suas ações e liberam as tensões nas interações sociais. Morin (2001) amplia o espectro da linguagem:

> Polivalente e polifuncional, a linguagem humana exprime, constata, transmite, argumenta, dissimula, proclama, prescreve. Está presente em todas as operações cognitivas, comunicativas, práticas. É necessária à conservação, transmissão e inovações culturais. (MORIN, 2001, p. 197).

Morin (2001) complementa explicando que a linguagem é instrumento essencial de interação social e cultural. Envolve, com responsabilidade e reflexão, tudo que está sendo transmitido, imaginado ou escrito e possui uma força ambígua, pois pode ser compreendida como um estímulo positivo ou negativo durante as intervenções sociais.

A linguagem, quando é empregada no processo ensino-aprendizagem com excessivo formalismo, em um ambiente inadequado, no entendimento de Mazzei (2004), simplesmente reforça o sentimento de acúmulo do saber e estimula negativamente o aluno na sua significação do contexto no qual está inserido. O autor refere que o "uso, por parte dos professores, de uma linguagem que os alunos não compreendem mantém o poder centralizado nas mãos deles, professores" (MAZZEI, 2004, p. 25).

Ser detentor dos saberes não é mais sinônimo de professor competente. É competente o professor que se preocupa com a interpretação do aluno, preparando-o para uma aprendizagem autônoma e significativa. Essa aprendizagem é um processo complexo, porque interfere em concepções que os professores já trazem cristalizados, de acordo com a formação que receberam.

Refletir sobre as próprias competências é romper com o paradigma de que o professor é o detentor dos saberes. Perceber que estamos sempre repensando e reconstruindo o conhecimento e questionando toda a informação é um processo que exige maturidade profissional, pois implica ver cada aluno como sujeito do processo ensino-aprendizagem.

A abordagem de Ramos (2003) acerca do tema contribui para o esclarecimento da atitude epistemológica que o professor precisa assumir no repensar da sua prática na sala de aula.

> Quando o sujeito analisa, estuda e pensa, criticamente, sobre o (seu) conhecimento acerca de alguma coisa, no sentido de buscar a consciência de como aquele conhecimento foi e continua sendo constituído, qual a sua validade, qual foi o seu processo histórico, o porquê deste conhecer e outros, este sujeito está fazendo uma reflexão epistemológica e apresenta uma postura epistemológica. (RAMOS, 2003, p. 32)

O professor que assume uma atitude epistemológica em relação ao seu trabalho valoriza a relação professor-aluno e intensifica a idéia de conhecer e qualificar a sua função, buscando o *saber pensar* e o *aprender a aprender*, constantemente. Demo (2002) reforça esse princípio quando afirma tratar-se

> [...] da própria definição de competência, que encontra na capacidade de permanente recuperação seu dinamismo maior e típico. Engloba por isso os desafios do saber pensar e do aprender a aprender. (DEMO, 2002, p. 67).

Então, professor competente utiliza a linguagem como instrumento social e cultural, oportuniza aos alunos o desenvolvimento dos processos internos de organização das funções psíquicas superiores, buscando um nível de abstração e formalismo necessário ao contexto da sala de aula. Isso é bastante evidente quando se trata do estudo em Matemática.

A linguagem matemática tem um formalismo próprio. Os conteúdos matemáticos envolvem signos necessários para a sua compreensão no contexto escolar e social. Malta (2002) propõe o esclarecimento desse processo, expresso a seguir.

> Em Matemática, a capacidade de expressar com clareza o raciocínio é equivalente à capacidade de entender os resultados matemáticos. Em particular, o desenvolvimento da capacidade de expressão do próprio raciocínio promove o desenvolvimento da capacidade de compreensão em Matemática. O desenvolvimento da capacidade de expressão está acoplado ao desenvolvimento da capacidade de leitura, isto é, da capacidade de aquisição de conhecimentos sem intermediários. (MALTA, 2002, p. 216)

Observa-se que sem o desenvolvimento do domínio da linguagem necessária à compreensão de conteúdos abstratos, nos diferentes níveis, dificilmente ocorrerá o desenvolvimento do pensamento matemático. A compreensão dos conteúdos e definições matemáticas precisa extrapolar a sala de aula para expressar a autonomia da linguagem matemática em um universo científico e social. Da mesma forma, a interpretação e a compreensão dos conteúdos básicos são necessários ao desenvolvimento do nível de abstração e a autonomia na aprendizagem.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresento a abordagem metodológica, o contexto e os sujeitos da pesquisa, bem como descrevo a UA desenvolvida e os procedimentos de coleta dos dados.

4.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA DA PESQUISA

A metodologia aplicada para a coleta de dados envolveu o desenvolvimento de uma UA (Unidade de Aprendizagem) sobre o conteúdo de geometria analítica, seguida de análise de questões pelos alunos com a elaboração de relatórios. A análise dos relatórios é o procedimento da investigação que permite apresentar respostas ao problema de pesquisa.

A UA oportuniza e valoriza as relações interpessoais e encaminha o aluno para uma autonomia no processo de aprendizagem. A reestruturação dos modelos metodológicos, adequando-os ao contexto da sala de aula, à proposta da escola e à motivação dos alunos são princípios que norteiam a construção da UA. Adequar uma proposta metodológica ao contexto, caracterizado por constantes mudanças, é assumir um perfil epistemológico, integrando ação, linguagem e ambiente da aprendizagem.

A UA está sendo proposta como forma de pesquisa de conteúdos matemáticos, que visa a estimular o espírito pesquisador do professor e do aluno. Constitui uma proposta que tem a intenção de desacomodar o aluno, pois ele participa como protagonista das atividades. A participação do aluno acontece desde o momento em que é motivado a repensar sobre situações do dia-a-dia, relacionando-as com os conteúdos matemáticos estudados. Quando a relação com esses conteúdos é estabelecida, o aluno necessita das ações mediadoras do professor para ajudá-lo nas atividades que ainda não consegue realizar sozinho. Desse modo, o professor orienta o processo de aprendizagem de maneira flexível, procurando integrar os conhecimentos tácitos dos alunos à pesquisa em sala de aula, contribuindo para a interpretação da linguagem matemática.

Assim, o aluno tem sua participação valorizada pelas ações mediadoras desenvolvidas ao longo da UA, que é um processo de natureza sociocultural, baseado nas proposições de Demo (2002) e de Moraes, Galiazzi e Ramos (2004). Sobre isso, Galiazzi, Garcia e Lindemann (2004) também dispõem:

> Uma UA, embora tenha início, meio e fim, também é uma construção que na recursividade agrega complexidade à sua estrutura, sempre flexível e em questionamento. A cada aula, ou mesmo a cada diálogo, se reestrutura, se amplia, se reduz, se transforma. (GALIAZZI; GARCIA; LINDEMANN, 2004, p. 67-68)

Portanto, como afirmam esses autores, uma UA é uma proposta metodológica que o professor organiza conforme o contexto, envolvendo os alunos, considerando a complexidade do conteúdo de estudo, a linguagem na relação entre os sujeitos participantes e o ambiente e seus condicionantes. Como afirma Albuquerque (2006) em sua dissertação de mestrado, a UA é uma forma de desenvolver no aluno a organização do seu material, questionar propostas, sugerir alternativas, criticar e reconstruir argumentos. Assim, colabora para a construção da autonomia e contribui para a aprendizagem significativa do aluno envolvido nesse processo.

A UA prioriza a linguagem como instrumento mediador do professor nos aspectos históricos, políticos, afetivos e cognitivos, a fim de fortalecer a relação professor-aluno e os conhecimentos científicos.

Neste estudo, a UA desenvolveu-se em quatro etapas, todas no ambiente escolar, com alunos de três turmas do 3º ano do Ensino Médio, instigados a refletirem sobre situações que simulam ações reais do cotidiano, envolvendo a geometria analítica.

Os alunos, organizados em grupos, interpretaram e exploraram cada etapa, lembrando conteúdos já estudados e relacionando-os às situações propostas, construindo novos conteúdos. Esse procedimento de ensino desenvolve a participação, interesse, autonomia e contribuiu para a ressignificação dos conhecimentos científicos dos envolvidos no processo de aprendizagem.

A partir do desenvolvimento da UA, foram coletados dados por meio de relatórios elaborados pelos alunos em pequenos grupos, nos quais eles deveriam identificar conteúdos matemáticos presentes em problemas fornecidos pelo professor, selecionados das provas de vestibulares dos anos de 1998 até 2006 das universidades privadas, estaduais e federais do Estado do Rio Grande do Sul e categorizadas pelos alunos em tópicos de estudos da geometria analítica. Mesmo tendo sido desenvolvidos em aula muitos problemas, para fins desta pesquisa foram selecionadas três questões, cujos relatórios foram analisados, destacando-se os principais conteúdos matemáticos que os alunos lembravam e os que não lembravam comparados aos conteúdos esperados pelo professor. Essa análise é apresentada no próximo capítulo por meio de tabelas e de resoluções extraídas dos relatórios, comparando-se os termos matemáticos identificados pelos grupos de trabalho com aquelas resoluções esperadas pelo professor. Durante a análise dos relatórios, foram destacados os conteúdos matemáticos mais lembrados pelos alunos, após as pesquisas deles quando do estudo do conteúdo de geometria analítica e também foi possível identificar os conteúdos não lembrados. Destaco também, para fins de análise, os conteúdos não esperados pelo professor, durante as interpretações das questões. Entendo por conteúdos não esperados aqueles que não são os mais relevantes ao desenvolvimento e à interpretação das questões, mas que são destacados pelos alunos. Por fim, também foram analisadas as resoluções criativas dos grupos, que envolveram outros conteúdos matemáticos não esperados pelo professor.

4.2 CONTEXTO E SUJEITOS DA PESQUISA

A pesquisa foi desenvolvida com alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola particular de Porto Alegre, RS. A escolha desse grupo deu-se pela preocupação da pesquisadora, de longa data, em observar problemas de aprendizagem relacionados com a linguagem matemática nesse nível de ensino. Esses problemas envolvem estratégias para a aplicação dos conhecimentos prévios (anteriores), que são as teorias pessoais dos alunos, em novas situações-problema e na resolução de questões, pois os alunos que estão concluindo o Ensino Médio necessitam demonstrar seu raciocínio num nível de aplicação com maior complexidade do que já haviam estudado.

A decisão sobre quais seriam os sujeitos desta pesquisa deu-se também pela possibilidade de realização da investigação com os estudantes sob responsabilidade da pesquisadora no semestre em que a mesma foi realizada.

São alunos entre 16 e 18 anos, e o nível de interpretação, de estabelecimento de relações e de aplicação conceitual em questões matemática requer justamente um maior aprofundamento dos conteúdos em relação ao que costumam demonstrar ao comunicarem suas conclusões matemáticas. Além disso, existe a problemática referente à atitude e aos estímulos do professor quanto ao uso de uma linguagem adequada, que também são aspectos que dificultam a significação da aprendizagem dos conteúdos matemáticos. O professor deve preocupar-se em observar cada grupo, em cada contexto, para desenvolver o procedimento metodológico que melhor se adapta ao grupo para favorecer a aprendizagem, assim como elaborar estratégias que valorizem a utilização de uma linguagem matemática adequada, destacando a comunicação na sala de aula. É importante que essa comunicação inclua e desafie constantemente o pensamento do aluno nas diferentes situações apresentadas e encaminhadas para um aprofundamento dos conhecimentos científicos.

Essa complexificação do conhecimento científico ocorre por meio da linguagem, pelas interpretações dos diversos materiais de leitura, manuseio que possam contribuir para o desenvolvimento intelectual e interpretações de signos. Esse aprofundamento interliga a leitura-análise-interpretação, relacionando-as com a ação de aprender a ler e a se expressar.

Tais ações são corroboradas por Heredia, quando afirma não ser

> [...] justo sonegar ao aluno a oportunidade de desenvolver capacidades por falta de informações, a começar pelas explicações da sala de aula que são as mais preciosas, é claro, se aliadas à vontade e ao entusiasmo do mestre. Faz-se necessário o comprometimento da família e um alerta especial à escola, pois será que aquele boletim cheio de notas ou conteúdos altos reflete o verdadeiro conhecimento do educando? Nome e tradição não garantem futuro. (HEREDIA, 2006, p. 15)

O autor reforça a necessidade de oportunizar ao aluno um processo que equilibre o seu interesse e a sua atitude em questionar, em interpretar, em argumentar com fundamento e em aprofundar seu conhecimento empírico, a fim de transformá-lo em científico, por meio de uma linguagem adequada ao contexto familiar, social e escolar. Essa linguagem adequada só terá significação para a aprendizagem do aluno se contribuir no desenvolvimento da capacidade de leitura e de expressão, organizando o próprio raciocínio e a argumentação.

Por essas preocupações, envolvi os alunos das três turmas do 3º ano em uma UA, oportunizando a participação, o interesse e o aprofundamento necessários ao desenvolvimento intelectual desta clientela no contexto escolar.

O contexto da pesquisa é de uma escola privada, confessional católica, que espera que os alunos desejem continuar estudando e participando de maneira responsável e consciente em relação ao seu papel na sociedade, tornando-se capaz de aprender a ser e aprender a conviver, aprender a pensar e aprender a fazer.

Nessa escola, em função de sua proposta pedagógica, busca-se vivenciar o princípio do acolher e ouvir o outro, procurando o despertar para a alegria de aprender e participar, oportunizando vivências fraternas, dentro de um espírito de verdade, justiça e paz, favorecendo a aprendizagem e a formação de pessoas solidárias, responsáveis e comprometidas. Esse cenário contribui para contextualizar o ambiente da coleta dos dados, pois o sentimento, o comprometimento e o respeito que a escola e sua comunidade têm pelo seu aluno também são compartilhados pelo pesquisador e professor titular das turmas do 3º ano do Ensino Médio.

4.3 A UNIDADE DE APRENDIZAGEM (UA)

Este tópico descreve a Unidade de Aprendizagem realizada na investigação. A UA envolveu quatro etapas, relacionadas entre si: etapa exploratória, etapa de organização dos conteúdos, etapa da investigação e comunicação, e etapa da aplicação e de aprofundamentos.

Essas etapas foram organizadas e aplicadas nessa seqüência, pois o grupo do 3º ano do Ensino Médio da escola apresentava dificuldades em relação ao hábito de refletir sobre os conteúdos necessários para resoluções e aplicações dos conteúdos matemáticos, pesquisá-los e repensá-los. A linguagem associada aos termos (signos e símbolos), às características dos processos de resolução de problemas (destacando as hipóteses e a tese) e à interpretação do resultado obtido, precisou ser desenvolvida ao longo do processo. Isso só foi sendo percebido, porém, ao longo do trabalho.

O registro das etapas desenvolvidas deu-se em relatórios dos alunos, destacando os conteúdos matemáticos fundamentais das questões, destacando as hipóteses e teses de cada exercício, a fim de encaminhá-los à interpretação e à significação do conteúdo e dos termos matemáticos envolvidos, para aplicar em outras situações. Os alunos destacaram os conteúdos matemáticos que conheciam. Foi possível também identificar os que não conheciam ou não lembravam. A linguagem matemática aplicada na conceituação dos termos conhecidos e desconhecidos deveria ser empregada corretamente e com adequada formalização pelos grupos.

A atitude do professor no trabalho era de orientação para o uso da linguagem adequada, pois seria preciso atender às necessidades do componente curricular em questão – a Matemática –, e, portanto, fazer uso de seus símbolos e signos corretos.

O grupo já sentia a necessidade de escrever e falar as conceituações apropriadas para serem interpretados corretamente. Para isso, foram utilizados os ambientes da biblioteca e do laboratório de informática. O professor organizou os espaços e orientou os alunos para retomar o foco sobre o que haviam proposto investigar, pois, em pesquisa, são sempre necessárias a disciplina e a organização do ambiente. Assim, ao retornar para sala de aula, cada grupo apresentou a sua listagem com uma linguagem matemática em conformidade com os conteúdos investigados. A comunicação dos resultados, na volta para a sala de aula, atendeu ao que prioriza Moraes, Galiazzi e Ramos (2004).

> É importante que a pesquisa em sala de aula atinja um estágio de comunicar resultados, de compartilhar novas compreensões, de manifestar novo estado do ser, do fazer e do conhecer, o que contribui para a sua validação na comunidade em que esse processo está se dando. (MORAES, GALIAZZI, RAMOS, 2004, p. 19)

Sistematizando o processo de pesquisa, os grupos receberam livros didáticos, provas de concursos e vestibulares de universidades particulares e públicas, analisaram as linguagens utilizadas na escrita das questões, a fim de destacarem e interpretarem os conteúdos matemáticos envolvidos e as hipóteses e teses de cada problema. Categorizaram as questões selecionadas por eles, e cada grupo buscou a solução por meio de cálculos, bem como de interpretações associadas à linguagem usual, descrevendo os processos e realizando os encaminhamentos necessários. O professor mediou e orientou os alunos, usando as linguagens formais dos signos e símbolos matemáticos.

Na seqüência, cada grupo comunicou suas resoluções e interpretações sobre as questões de sua responsabilidade. O conteúdo de geometria analítica foi abordado em sua totalidade, por meio de uma UA. A partir disso, com uma atitude reflexiva e pesquisadora, o professor e os alunos fizeram uma análise do processo.

A seguir, é apresentado o desenvolvimento mais detalhado da UA desenvolvida na pesquisa.

No início do 3º trimestre letivo, desenvolvi a UA, a qual passo a descrever a seguir, apresentando as etapas, os momentos de mediação do professor aos grupos de alunos. Algumas informações complementares são apresentadas por meio dos apêndices A e B.

A primeira etapa da UA pode ser caracterizada como a exploração dos conhecimentos prévios. Ela aborda os conhecimentos empíricos ou tácitos dos alunos, por meio de uma linguagem do senso comum. Ela envolve ainda a distância realizada por eles para chegarem até a escola, a partir de um problema apresentado pelo professor.

Muitas idéias eram expressas, pois a integração dos grupos favorecia, e constrangimentos sobre estar certo ou errado eram pouco evidenciados. Pôde-se observar que o grupo havia sido desacomodado, realmente provocado a refletir sobre uma simples ação do dia-a-dia, mas que encaminharia à exploração da idéia de distância entre dois pontos do conteúdo de geometria analítica e a diferença sobre a trajetória descrita.

Deu-se continuidade às orientações, para que se descrevesse a distância entre esses dois pontos por meio da linguagem matemática, sempre utilizando signos e conteúdos adequados.

Organizados em grupos de no máximo quatro colegas, começaram a discutir as idéias. Com papel na mão, era representada a distância entre os dois pontos utilizando um par ordenado para cada ponto registrado no plano cartesiano.

Alguns questionamentos orientaram a etapa de exploração da distância entre dois pontos. Assim, a linguagem do senso comum, com interferências voltadas para a linguagem matemática, encaminhava os alunos à reconstrução dos conteúdos já conhecidos em níveis anteriores.

Mesmo com essas interferências sobre os conteúdos matemáticos, alguns grupos sentiram a necessidade de pesquisar sobre outros conteúdos matemáticos retomados, encaminhando-se para a segunda etapa – que enfatizava a busca, a investigação, a pesquisa dos conteúdos, teoremas e axiomas matemáticos.

A linguagem na sala de aula é um instrumento importante para o professor, pois, por meio dela, interferimos nos aspectos cognitivos, afetivos e sociais pessoais dos alunos. Esses aspectos influenciam na significação da aprendizagem e oportunizam ao aluno a autonomia em relação ao conhecimento científico. Entende-se autonomia do aluno no processo de aprendizagem como a busca de alternativas além das expectativas do professor e dele próprio.

Ampliamos a problematização, envolvendo pontos não alinhados. Questionamentos a situação apresentada foram encaminhadas aos grupos de alunos. Foram feitos questionamentos sobre a figura formada com os pontos marcados: Qual a classificação da figura quanto aos lados? Qual é o seu perímetro? Qual é a sua área?

Estabeleceu-se um profundo silêncio na sala de aula. Alguns grupos sentiram a necessidade de pesquisar sobre os termos utilizados pelo professor, pois a classificação quanto aos lados envolve conteúdos sobre triângulo, triângulo eqüilátero, isósceles e escaleno. A definição de perímetro, que é conteúdo desenvolvido desde as séries iniciais, também precisou ser pesquisada. Mas a investigação da área do triângulo oportunizou o repensar sobre muitos outros conteúdos matemáticos estudados. A pesquisa sobre a área do triângulo indicou alguns destaques sobre as dimensões, como a base e a altura, e as áreas referentes aos triângulos eqüilátero, retângulo e isósceles. Os alunos encontraram diversos problemas que envolviam área de triângulo, mas com informações diferentes. Os alunos foram, então, orientados a observar a figura descrita no plano cartesiano com pontos indicados e, assim, deveriam determinar um triângulo retângulo e, em outro plano, por meio de outros pontos, um triângulo eqüilátero, pois, assim, as dimensões da base e da altura seriam identificadas com o auxílio dos eixos coordenados. Ao final, foi possível determinar a área de cada triângulo.

Como conseqüência dessa exploração, foi calculado o determinante envolvendo os três vértices que formam cada triângulo. Os alunos observaram que a resposta correspondia ao dobro do valor encontrado anteriormente e ficaram atentos ao sinal, pois estavam calculando a área. Perceberam que é possível determinar a área de um triângulo, quando indicados seus vértices, utilizando o cálculo do determinante, conforme exemplo constante nos apêndices A e B. Todos os grupos retomaram o seu triângulo, e foi possível completar o valor correspondente à área do triângulo que cada grupo possuía.

O momento da comunicação dos resultados, das sistematizações e das interpretações de questões foi realizado, para aplicarem os conteúdos já analisados nas situações-problema encaminhadas em aula aos alunos.

Na seqüência, foi apresentado um móbile formado por triângulos suspensos e equilibrados. Foi sugerido que cada grupo observasse o objeto e descrevesse os conteúdos matemáticos envolvidos nos triângulos. Os grupos explicaram que cada lado do triângulo foi dividido em duas partes do mesmo tamanho e que o encontro das três marcas que partiam do vértice até o meio do lado oposto era o ponto de equilíbrio do triângulo. Quando, no entanto, os grupos retomaram os conteúdos matemáticos, utilizando uma linguagem mais adequada, descreveram como ponto médio aquele referente ao meio do lado do triângulo; as marcas que partiam do vértice ao ponto médio do lado oposto, como mediana; e o ponto de equilíbrio do triângulo, como ponto gravitacional ou baricentro.

Outros desafios foram apresentados para os grupos, a fim de reverem e aprofundarem os conteúdos a partir de novas abordagens, tais como condição de alinhamento e equação da reta geral, reduzida e seus termos matemáticos. Interpretar o termo de abscissa e ordenada e associar às referências sobre cada eixo eram ações fundamentais para a comunicação oral e escrita da continuidade do conteúdo de geometria analítica.

A comunicação escrita envolveu a demonstração dos conteúdos já retomados da simulação dos três pontos que determinavam um triângulo para contrapor à situação do alinhamento dos pontos. Os alunos concluíram que não havia área entre esses pontos, sendo o determinante nulo.

A apresentação de listas de exercícios para sistematizar os conhecimentos reconstruídos foi o procedimento realizado com os grupos. Assim, foram retomados os conteúdos de funções polinomiais do primeiro grau, sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis, coeficiente angular e linear, valores da tangente do ângulo de inclinação da reta com o eixo das abscissas e transformações de radianos em graus.

Os alunos, ao receberem as listas de exercícios, eram orientados sobre o tempo e o local de pesquisa, que se restringia ao contexto escolar, isto é, à sala de aula, à biblioteca, ao laboratório de informática e às dependências da escola para estudos em grupo, pois, só assim, o professor conseguiria mediar e encaminhar os problemas que surgissem.

Cada grupo assumiu a responsabilidade pela comunicação de resultados de uma questão, escolhida por meio de sorteio, pois todos os grupos deveriam responder a todas elas. Assim, cada grupo poderia participar e expressar contribuições pertinentes durante as apresentações das questões.

Nas apresentações, cada grupo deveria comunicar corretamente o enunciado da questão; a interpretação, destacando a hipótese e a tese; e a resolução da questão, por meio da linguagem matemática adequada escrita e falada.

Na interpretação, os alunos deveriam destacar os conteúdos matemáticos já conhecidos e os que precisaram ser pesquisados.

Complementos sobre os conteúdos matemáticos que não eram lembrados pelos alunos, e outros não abordados, foram retomados durante cada apresentação. As interseções de conteúdos e complementos aos argumentos que foram expressos na demonstração da resolução, e as que o professor sentiu necessidade de acrescentar durante as apresentações, foram recebidas com atenção pelos alunos. Esses complementos foram necessários para tornar mais claras as hipóteses e teses associadas às questões. As atitudes de comprometimento dos grupos e o nível de linguagem utilizado nas comunicações possibilitaram ao professor propor o desafio, que consistiu em categorizar as questões dos últimos vestibulares (de universidades estaduais e federais e faculdades particulares) envolvendo novas abordagens sobre o conteúdo de geometria analítica. As novas abordagens envolveram a posição entre duas retas, o estudo do ângulo formado por duas retas, a distância entre ponto e reta, equação da circunferência e posições entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências no plano cartesiano.

Desse modo, ocorreu o desenvolvimento e aplicação da UA. Essa etapa do procedimento metodológico encaminhou a solução da questão de pesquisa sobre os principais problemas de aprendizagem em geometria analítica relacionados à linguagem matemática no Ensino Médio.

4.4 DIFICULDADES NA UNIDADE DE APRENDIZAGEM

Algumas dificuldades no processo de desenvolvimento da UA foram observadas e contornadas a fim de encaminhar todos os grupos à identificação dos conteúdos matemáticos nas questões de geometria analítica. O propósito era reconstruir esses conteúdos por meio de uma linguagem adequada.

Os obstáculos que o professor observou nos grupos de alunos foram de caráter afetivo e cognitivo. O caráter afetivo corresponde à motivação de alguns alunos frente ao desafio de desacomodar o aluno, passando de uma atitude passiva para uma atitude participante e autônoma em relação à sua aprendizagem. A passividade foi uma dificuldade a ser superada ao longo do ano letivo, pois, somente no terceiro trimestre, houve participação mais expressiva dos grupos de alunos. Essa passividade é resultado de vários anos de práticas pedagógicas bastante próximas de modelos metodológicos que colocam o aluno como ouvinte, e o professor no papel de comunicador de informações e de resultados prontos e verificados. Daquele modelo que valoriza a cópia, não estimula o raciocínio e contempla a reprodução de idéias, como afirma Mizukami (1987) no modelo metodológico tradicional. Porlán (1996), em relação ao modelo tradicional, também afirma que a linguagem utilizada pelo professor é formal e pouco acessível ao aluno. Desse modo, a passividade de alguns alunos permaneceu ao longo do trimestre da coleta de dados e desenvolvimento da UA, pois expressavam idéias como "Agora no último ano, por que mudar?" ou "Diz como se faz e qual a fórmula é bem mais fácil do que pesquisar e remexer em conteúdos matemáticos anteriores".

Foi difícil estimular e desacomodar esses grupos. Encontrar argumentos que provocassem motivações para uma reflexão acerca de conteúdos matemáticos foi um desafio para o professor. O argumento que parecia realmente estimular e motivar a participação no desenvolvimento da UA foi o de não precisar decorar relações algébricas – fórmulas. Nos processos avaliativos da escola, os alunos não receberiam os formulários, bem como em outras seleções que fossem questionados sobre esses conteúdos de geometria analítica. Assim, a passividade passou a ser comportamento antigo, e a participação nas atividades de pesquisa para relacionar a geometria com as relações algébricas ganhou espaço, mas, mesmo assim, os alunos ainda não demonstravam autonomia na busca de conteúdos matemáticos anteriores.

A pesquisa dos conteúdos prévios para interpretar as questões indicadas foi outro caráter de dificuldade observada pelo professor em termos cognitivos. A atitude dos alunos era bastante influenciada pelo modelo metodológico tradicional, no qual estão fortemente presentes o pensamento mecânico e a memorização, dificultando o desenvolvimento da abstração.

Alguns alunos sentiam-se perdidos, pois não sabiam por onde começar. A falta de conteúdos prévios para interpretarem as questões foi fator de dificuldade, como, por exemplo, não saber o que era par ordenado ou que os eixos do plano cartesiano são orientados (x e y), o que denunciava a falta de conteúdos básicos para interpretarem as questões. Além disso, não relacionavam a álgebra aplicada com a figura geométrica descrita. Pôde-se perceber também que não entendiam como poderiam estudar os conteúdos matemáticos sem que tivessem que memorizá-los, decorá-los, gravá-los mecanicamente. Diante desse cenário, desenvolvi com os alunos outras atividades e uma UA paralela sobre os conteúdos anteriores e de orientações de como estudar matemática, o que ocorreu concomitantemente ao desenvolvimento da UA de geometria analítica. As mediações foram realizadas durante as aulas e por *e-mail*, a para que conseguissem acompanhar as interpretações e as comunicações dos grupos de colegas. Alguns alunos resistiram e, somente após algumas avaliações, integraram-se aos desenvolvimentos das unidades.

Essa dificuldade de integração dos conteúdos, principalmente em relação à UA de geometria analítica, também é uma dificuldade de natureza cognitiva. Ela pode envolver falta de maturidade em assumir a atitude de estudante pesquisador e autônomo da sua aprendizagem, mas pode apontar apenas para o fato de alguns alunos não demonstrarem nível de abstração das relações matemáticas já abordadas. A dificuldade de abstração foi observada quando alguns alunos que estavam engajados no processo, participando das pesquisas e contribuindo nos resultados interpretados das questões, ainda assim, não relacionavam as estruturas algébricas já conhecidas com as situações descritas. Esse desafio foi encaminhado pelo professor com a intenção de respeitar e buscar valorizar as contribuições e as inteligências de cada aluno.

As dificuldades em relação à liberdade que os alunos sentiram foram contornadas com os encaminhamentos da comunicação que cada grupo realizou aos colegas sobre o tema estudado. De acordo com o plano pedagógico da escola, a avaliação do conteúdo de geometria analítica seria elaborada com a participação dos alunos. Após cada comunicação, os grupos eram solicitados a responder os conteúdos matemáticos abordados na apresentação, pois assim caracterizou-se a avaliação dos grupos no decorrer da UA, o que – vale ressaltar – não foi objeto da coleta de dados da pesquisa.

A partir do desenvolvimento da UA descrita, foram coletados os dados, cujo processo é relatado a seguir.

4.5 ROCEDIMENTOS DE COLETA DE DADOS

Os dados foram coletados a partir da realização de uma UA sobre geometria analítica. Após a UA, os alunos analisaram três questões de provas de concursos vestibulares de universidades do Rio Grande do Sul. A partir disso, deveriam elaborar um relatório com suas resoluções.

O desenvolvimento da UA e a coleta dos dados ocorreram durante o mês de setembro de 2007, em cinco períodos semanais, totalizando 20 períodos de aulas. Foram também realizados encontros extras em horários de livre escolha pelos alunos. Nesses encontros, os alunos puderam discutir e aprofundar conteúdos sobre o tema.

A UA possibilitou a reconstrução de conteúdos matemáticos relevantes por parte dos alunos. Para analisar essa reconstrução foram observadas e analisadas pelo professor as situações nas quais cada grupo de alunos empregou linguagem matemática específica para a sua interpretação e para expressar a resolução das questões por meio da fala e da escrita. Portanto, o modelo predominante na UA desenvolvida é o sociocultural, conforme Mizukami (1987), evidenciado pela ênfase dada à valorização do contexto e da linguagem, e pela participação dos alunos e do professor e ainda pelo desenvolvimento do senso crítico e da autonomia. Para as coletas dos dados, foram apresentadas aos alunos três questões de recentes provas de concursos vestibulares. Eles as classificaram de acordo com categorias propostas pelo professor, tais como a posição entre duas retas, o estudo do ângulo formado por duas retas, a distância entre ponto e reta, equação da circunferência e posições entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências no plano cartesiano.

Foi necessário encaminhar os alunos a uma pesquisa sobre essas categorias para que compreendessem os significados dos conteúdos implicados. Ao final, os grupos tinham que apresentar uma comunicação sobre as categorias pesquisadas e o resultado da classificação das questões propostas para análise.

Assim, integram a coleta de dados da pesquisa os registros dos conteúdos matemáticos identificados na interpretação das questões pelos alunos em relação aos resultados da categoria sobre **equação da circunferência**. Optei por essa categoria em função da relevância do tema em geometria analítica, que tem por objetivo conciliar os fatos geométricos com as relações algébricas. A relação da álgebra com a geometria possibilita estudar de modo sistemático as figuras geométricas e, assim, interpretar geometricamente as relações algébricas que foram identificadas pelos grupos de alunos. Por isso, o professor necessita observar o nível de compreensão que os alunos desenvolvem e relacionam aos conteúdos matemáticos básicos já explorados e desenvolvidos que fundamentam as interpretações das questões da categoria selecionada.

As questões envolviam conteúdos a serem identificados, relacionando, assim, o contexto geométrico com as relações algébricas estruturadas com a linguagem matemática adequada. As relações matemáticas estruturadas envolviam os conteúdos já desenvolvidos, necessários para as interpretações e significação da situação descrita geometricamente. Dessa maneira, esperava-se que os alunos interpretassem os conteúdos matemáticos básicos para a construção e reconstrução de conteúdos explorados na categoria sobre a equação da circunferência.

Os conteúdos esperados pelo professor tiveram por base as definições usuais dos livros didáticos mais utilizados nas escolas particulares de Porto Alegre. As definições relacionam-se à interpretação gráfica que envolve os conteúdos de sistema cartesiano, par ordenado, eixos orientados, origem, quadrantes e as bissetrizes. O sistema cartesiano descreve o sistema de coordenadas ortogonais com eixos orientados (x e y), no qual cada ponto corresponde um par ordenado (x, y) de números reais. Os eixos orientados (x e y) dispostos ortogonalmente dão origem ao plano em quatro partes, as quais se denominam de quadrantes. Estes são numerados no sentido anti-horário; e os eixos orientados das abscissas (x) e das ordenadas (y) têm sua intersecção a origem (O) do sistema de coordenadas. A reta que divide ao meio os quadrantes ímpares é chamada de primeira bissetriz, e a que divide ao meio os quadrantes pares de segunda bissetriz.

A análise dos relatórios permite identificar outros conteúdos apresentados pelos alunos, como os destacados a seguir:

> [...] dados dois pontos distintos do plano cartesiano, chama-se *distância* entre eles a medida do segmento de reta que tem os dois pontos por extremidades.
>
> [...] é única a reta que passa por dois pontos distintos no plano cartesiano. A notação da equação da reta reduzida que utilizamos foi $y = ax + b$, na qual *a* e *b* são números reais.
>
> [...] *a* representa a tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo das abscissas, no seu sentido positivo. *a* é denominado coeficiente angular (ou declividade, inclinação) da reta.
>
> "[...] *b* representa a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas e é denominado de coeficiente linear.
>
> [...] x e y são coordenadas de um ponto genérico da reta, são variáveis que representam qualquer número real que pertença à reta.
>
> [...] duas retas são paralelas quando possuem coeficiente angular e formam com o eixo das abscissas ângulos congruentes.
>
> [...] duas retas são concorrentes quando possuem coeficientes angulares e esses são diferentes.
>
> [...] duas retas são perpendiculares quando possuem coeficientes angulares e um coeficiente é o oposto do inverso do outro, isto é, o produto entre eles é igual ao oposto do número real um.
>
> [...] a equação reduzida da circunferência ou a equação normal da circunferência ou simplesmente equação da circunferência é determinada por um ponto fixo referente ao centro. Os pontos que possuem a mesma distância desse ponto fixo é denominado de raio. Assim a distância entre dois pontos seja o ponto fixo (centro) e um dos pontos que possua a mesma distância desse ponto fixo forma uma igualdade que denominamos de equação.

Essas definições fundamentam os conteúdos matemáticos envolvidos nas questões sobre a equação da circunferência. São definições que orientam a interpretação do aluno, de modo consensual, em relação ao significado dos conteúdos explorados nas três questões descritas na análise de dados. Além disso, essas definições orientam o olhar do professor quando da análise dos relatórios referentes aos conteúdos identificados pelos grupos em relação às interpretações dos conteúdos esperadas pelo professor. Essa informação foi obtida por meio de entrevistas informais e conversas com colegas que lecionam em escolas de diferentes realidades e situações em diversos bairros da cidade de Porto Alegre

Cabe destacar que, nas três turmas, os alunos foram organizados em grupos de três ou quatro alunos, originando os 25 grupos. Em relação à categoria sobre a equação da circunferência, foram desenvolvidas 62 questões, com esses grupos de alunos. Na seqüência, foram analisadas, como exemplo, três questões que envolviam interpretações relevantes para a categoria, as quais abrangiam conteúdos esperados e não esperados pelo professor. Alguns conteúdos matemáticos, que foram identificados pelos alunos e esperados pelo professor, foram fundamentais para a significação do conteúdo de geometria analítica e a relação algébrica envolvida no contexto.

5 ANÁLISE DOS DADOS COLETADOS

Foram analisados os conteúdos mais lembrados e os não lembrados pelos alunos das três turmas, organizados em 25 pequenos grupos. Ressalta-se que os conteúdos lembrados pelos alunos são os utilizados, com adequação, na solução do problema. Os conteúdos não lembrados pelos alunos são os já estudados em anos anteriores, mas não aplicados no desenvolvimento da solução ao problema, mesmo sendo necessários.

Os conteúdos lembrados foram comparados aos conteúdos esperados pelo professor, que haviam sido anotados previamente, ou seja, hipóteses que integram os objetivos deste trabalho, explicitados na análise de cada questão estudada. Buscando contribuir para a interpretação dos dados, são apresentadas tabelas no decorrer deste capítulo. Assim, procuro responder à problemática da pesquisa que envolve as principais dificuldades de aprendizagem em geometria analítica, relacionados à linguagem matemática no Ensino Médio, envolvendo a leitura e a interpretação de conteúdos matemáticos já estudados. Malta (2002) explica que o aluno não é alfabetizado em Matemática se não consegue realizar a leitura e a interpretação da linguagem simbólica adequada nas situações propostas. Lidar com os termos científicos é uma das dificuldades dos alunos. Dessa maneira, é papel do professor propor metodologias para orientar seus alunos a enfrentar as dificuldades relacionadas aos símbolos e signos dos conteúdos matemáticos. O professor que reconhece e valoriza as diferentes linguagens presentes na sala de aula encaminha seus alunos a estabelecerem relações entre a linguagem do cotidiano e a linguagem científica.

A seguir, é apresentada a análise em relação a três questões escolhidas para essa discussão. Os temas referem-se à identificação da equação da circunferência, interpretando cada termo do desenvolvimento da equação normal da circunferência, na leitura desta no sistema cartesiano. Além disso, a leitura de temas dos conteúdos abordados anteriormente, como distância entre dois pontos, equação da reta, entre outros, também é necessária na categoria sobre a equação da circunferência.

5.1 ANÁLISE DA PRIMEIRA QUESTÃO

A primeira questão selecionada foi a seguinte:

1. A equação da circunferência representada pelo gráfico é

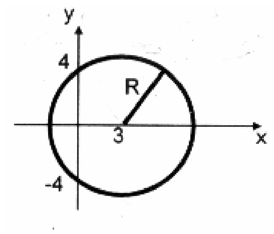
(A) $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$

(B) $x^2 + y^2 - 3x = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$

(D) $x^2 + y^2 + 4 = 0$

(E) $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$



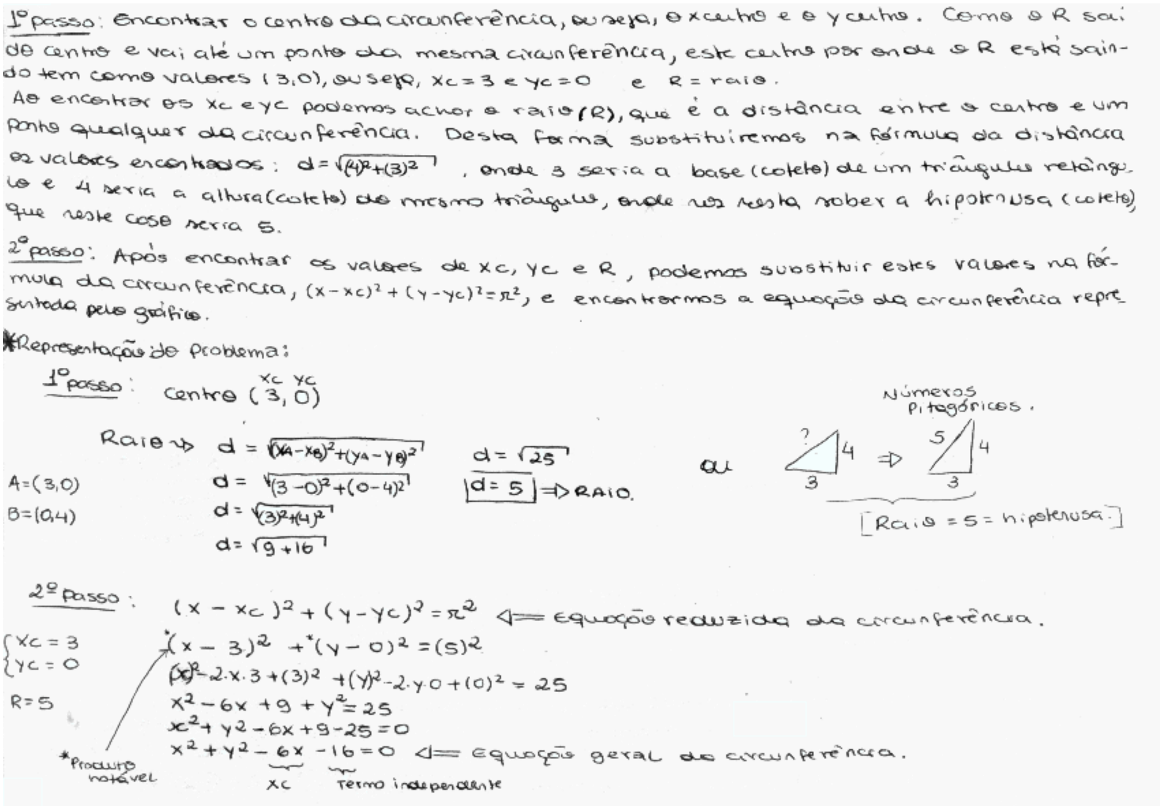
A questão acima estimula a interpretação gráfica, pois, a partir da circunferência descrita no plano cartesiano, o aluno tem a possibilidade de interpretar os conteúdos fundamentais para demonstrar a tese do problema. Os conteúdos que são interpretados, por meio da figura descrita, são o par ordenado que corresponda ao centro da circunferência e a distância do centro a um ponto qualquer pertencente à circunferência, que define o raio. A interpretação gráfica, na análise da questão, refere-se à identificação dos eixos coordenados com os pontos correspondentes e à identificação algébrica do esboço gráfico da questão. Espera-se que o aluno, quando identifica o esboço de uma circunferência no sistema cartesiano, localize o ponto, por meio de seu par ordenado, que representa o centro, compreendendo as devidas características. As características estão associadas à localização, pois, como o centro da circunferência está localizado no eixo das abscissas, esse par ordenado tem valor nulo para a ordenada. Portanto, a equação da circunferência não possui o termo cuja parte literal é a variável y, no desenvolvimento. Assim, já poderia ser descartada a alternativa (C), pois sua equação apresenta este termo ($x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$). O centro, no entanto, possui a abscissa e com a mesma interpretação do desenvolvimento da questão a equação da circunferência deve apresentar o termo com a parte literal com a variável x. Como a alternativa (D) não apresenta nem com y e nem com x, pois algebricamente não representa uma equação da circunferência centralizada na origem e raio negativo, a alternativa não é plausível. Portanto, das alternativas restantes, e apenas com referência à interpretação do par ordenado que represente o centro da circunferência descrita no plano cartesiano da questão, o termo que deve acompanhar a variável x é (-6). Logo, a única que descreve esse termo é a alternativa (E) $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$.

Além disso, espera-se que o aluno não se deixe envolver com a representação do raio dado pela questão, mas o interprete, entendendo que raio é a distância do centro a qualquer ponto pertencente à circunferência, descrita no plano cartesiano, sendo preciso identificar os pontos nos quais a circunferência intercepta o eixo das ordenadas. Como o par ordenado sob o eixo das ordenadas possui a coordenada das abscissas nula, interpretamos que o raio descrito é a hipotenusa do triângulo formado com o eixo das ordenadas, que registra o ponto de abscissa nula e ordenada quatro. O centro localiza-se no eixo das abscissas, isto é, descreve o par ordenado de abscissa três e ordenado nula, que forma um triângulo retângulo.

O triângulo retângulo formado pelo raio e pelos eixos possui dimensões três e quatro para os catetos que, conseqüentemente e pelo teorema de Pitágoras, gera o raio (hipotenusa) igual a cinco. Na equação correta, descrita pelas alternativas, o termo independente que se refere ao total entre os termos semelhantes é a soma dos quadrados das coordenadas do centro diminuindo o quadrado do raio. Portanto, após esses dados da interpretação gráfica, depreende-se que a equação correta descrita é da alternativa (E).

Entre as resoluções apresentadas pelos alunos, destaco a de um grupo (Figura 1) que apresentou os conteúdos, a interpretação e a resolução da questão como se conversasse com alguém, relatando cada passo do seu pensamento. É possível perceber que a linguagem é considerada tanto como um sistema para fazer significações quanto ferramenta essencial envolvida no processo de construção e organização do processo de aprendizagem.

Assim, como afirma Demo (2002), o exercício de *aprender a aprender* encaminha o aluno para a autonomia no processo de aprendizagem, por meio de exercícios que não centralizam saberes em apenas um foco do conteúdo ou de uma pessoa, mas que valorizam a experiência, a interpretação e as relações estabelecidas entre os conteúdos explorados e a linguagem matemática adequada.



1º passo: Encontrar o centro da circunferência, ou seja, o x centro e o y centro. Como o R sai do centro e vai até um ponto da mesma circunferência, este centro por onde o R está saindo tem como valores (3,0), ou seja, xc = 3 e yc = 0 e R = raio.
Ao encontrar os xc e yc podemos achar o raio (R), que é a distância entre o centro e um ponto qualquer da circunferência. Desta forma substituiremos na fórmula da distância os valores encontrados: $d=\sqrt{(4)^2+(3)^2}$, onde 3 seria a base (cateto) de um triângulo retângulo e 4 seria a altura (cateto) do mesmo triângulo, onde nos resta saber a hipotenusa (cateto) que neste caso seria 5.
2º passo: Após encontrar os valores de xc, yc e R, podemos substituir estes valores na fórmula da circunferência, $(x-xc)^2+(y-yc)^2=r^2$, e encontrarmos a equação da circunferência representada pelo gráfico.

*Representação do problema:

1º passo: Centro $(\overset{xc}{3}, \overset{yc}{0})$

Raio ⇒ $d = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$

A=(3,0) $d = \sqrt{(3-0)^2+(0-4)^2}$

B=(0,4) $d = \sqrt{(3)^2+(4)^2}$

$d = \sqrt{9+16}$

$d = \sqrt{25}$

$\boxed{d = 5}$ ⇒ RAIO.

ou

Números Pitagóricos.

? 4 3 ⇒ 5 4 3

[Raio = 5 = hipotenusa.]

2º passo: $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2$ ⇐ Equação reduzida da circunferência.

$\begin{cases} xc = 3 \\ yc = 0 \end{cases}$

R=5

$^*(x-3)^2 + ^*(y-0)^2 = (5)^2$

$(x)^2-2\cdot x\cdot 3+(3)^2+(y)^2-2\cdot y\cdot 0+(0)^2 = 25$

$x^2-6x+9+y^2=25$

$x^2+y^2-6x+9-25=0$

$x^2+y^2\underbrace{-6x}_{xc}\underbrace{-16}_{\text{Termo independente}}=0$ ⇐ Equação geral da circunferência.

*Produto notável

Figura 1. Resolução da questão 1 apresentada por um dos grupos.

Na resolução da primeira questão, o referido grupo relata todos os passos que realizou para interpretar e apresentar a tese da questão. Utiliza uma linguagem matemática adequada para os conteúdos destacados na hipótese da questão e demonstra relacionar os conteúdos anteriores para apresentar a tese. Como Machado e Bicudo (2006) referem, existem conteúdos matemáticos que necessitam de uma escrita bem elaborada para terem significados ao contexto empregado.

No primeiro passo, é apresentada a interpretação gráfica, isto é, a leitura dos conteúdos envolvidos no gráfico descrito na hipótese. O plano cartesiano é descrito, abordando o centro como sendo um par ordenado. Não é destacada a importância de esse centro pertencer ao eixo das abscissas, o que é relevante na visão do professor. No entanto, são localizadas e interpretadas as coordenadas do centro e do raio, e elas são ainda relacionadas com os lados de um triângulo retângulo. O Teorema de Pitágoras é utilizado em relação à distância entre o centro e o ponto que pertence à circunferência e é determinada a medida do raio demonstrando o triângulo retângulo por meio dos números pitagóricos. Assim, é concluído o primeiro passo, determinando o centro da circunferência e o raio.

No segundo passo, o grupo apresenta um problema de linguagem matemática, referindo-se à “fórmula da circunferência” e escrevendo, na mesma frase, a equação da circunferência analiticamente, a fim de substituir os valores correspondentes do centro e raio. A dificuldade que se pode destacar é a falta da distinção entre o conceito de circunferência e o de equação da circunferência.

Observe-se que o grupo identifica e aplica o conteúdo de produto notável no desenvolvimento da equação de circunferência, destaca o termo que se refere à abscissa do centro, mas não faz comentários sobre a falta do termo da equação que deveria estar acompanhando a variável y. Destaca também o termo independente, mas não o ressalta, usando-o apenas como decorrência da simplificação de termos semelhantes.

Além dessa análise de um dos grupos em relação à primeira questão, que demonstra aplicação de conteúdos de que se lembram e de conteúdos que foram pesquisados na UA desenvolvida em sala de aula, apresento uma tabela com os principais conteúdos identificados pelos 25 grupos ao interpretarem a primeira questão da categoria, referente à equação da circunferência, bem como os conteúdos esperados pelo professor na aprendizagem dos alunos após a realização da UA.

Tabela 1 - Conteúdos identificados pelos grupos

Conteúdos esperados	Número de grupos que identificaram os conteúdos	% dos grupos que identificaram os conteúdos
Interpretação Gráfica	23	92
Eixos coordenados	14	56
Par ordenado	25	100
Ponto a que pertence	12	48
Ponto no eixo das abscissas	17	68
Ponto no eixo das ordenadas	17	68
Origem	1	4
Teorema de Pitágoras	22	88
Distância entre dois pontos	22	88
Equação da Circunferência	23	92
Centro	25	100
Termo com a x	16	64
Termo com a y	16	64
Raio	12	48
Termo independente	12	48

Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

Os dados da tabela 1 mostram os conteúdos matemáticos que os grupos indicaram na resolução da primeira questão. Destaca-se que esses dados foram extraídos dos relatórios elaborados pelos 25 grupos, nos quais apresentam a interpretação do problema e a tese para a sua solução. Os conteúdos esperados pelo professor são citados na primeira coluna da tabela. Na segunda coluna, são apresentadas as freqüências dos números de grupos que identificaram cada um dos conteúdos esperados e, na terceira coluna, são apresentados os porcentuais relativos à segunda coluna, para o total de 25 grupos que resolveram a questão.

A identificação dos conteúdos relativos à interpretação gráfica envolve a interpretação dos eixos coordenados, o par ordenado, o ponto pertencente à equação descrita no sistema cartesiano, o ponto sobre os eixos das abscissas e das ordenadas, bem como a identificação da origem. Esses conteúdos matemáticos foram identificados de modo satisfatório, pois apresentaram um índice percentual alto. São conteúdos já estudados pelos alunos em situações vivenciadas em anos anteriores. No Ensino Fundamental, utilizam o conteúdo de par ordenado para representar a solução de sistemas de equações de 1º grau com duas variáveis. Os alunos também já construíram o espaço orientado do sistema cartesiano, no qual exploraram o conteúdo de função do 1º grau e, desse modo, utilizam os conteúdos sobre os pontos nos eixos coordenados, ressaltando suas características. Cabe lembrar que essas são características fundamentais para a formalização referente aos pontos pertencentes aos eixos do sistema cartesiano. A leitura e a interpretação das hipóteses encontram-se no esboço gráfico apresentado. O percentual sobre a identificação pelos grupos do par ordenado é de 100%, pois, muito provavelmente, esse conteúdo já foi estudado nos anos anteriores. Os conteúdos sobre os pontos nos eixos coordenados foram identificados em 68% dos grupos, o que demonstra os aspectos relevantes da identificação dos dados que a figura descreve na questão. Mas, além da identificação desse conteúdo, 48% dos grupos relacionaram esses pontos com pontos que pertencem à equação da circunferência, tornando possível interpretá-lo e relacioná-lo à medida do raio, identificada por 48% dos grupos. A relação desses pontos com a medida do raio é referida por 88% dos grupos, que o determinam por meio do teorema de Pitágoras e, do mesmo modo, utilizam a relação algébrica da distância entre dois pontos para defini-lo.

A equação da circunferência, tese da questão, é identificada com o porcentual expressivo de 92% dos grupos, quando o tópico relaciona um dos pares ordenados como o centro, identificado por todos os grupos. No entanto, é baixo o percentual de grupos que não identificam os termos com as variáveis x e y (64%) no desenvolvimento da equação da circunferência. Uma das explicações para o fato de esse percentual ser baixo são as dificuldades apresentadas pelos alunos ao relacionar cada termo da equação normal da circunferência com as alternativas descritas na questão. Também é baixo o percentual de identificação do termo independente (48%). Ele parece também ser reflexo da falta de domínio dos conteúdos na interpretação sobre os termos do desenvolvimento da equação da circunferência e as alternativas apresentadas.

Portanto, na análise da primeira questão, pôde-se identificar que, em geral, os alunos lembram de conteúdos estudados na UA, mas alguns deixam a desejar.

Na tabela 2, são apresentados conteúdos lembrados durante o desenvolvimento da tese da questão como o produto notável e redução de termos semelhantes, que não eram esperados pelo professor, pois sua compreensão já deveria ser decorrência de um conteúdo mais amplo presente na demonstração da tese da questão. Foram, no entanto, lembrados por alguns grupos os conteúdos apresentados a seguir.

Tabela 2 - Conteúdos identificados pelos grupos, mas não esperados pelo professor

Conteúdos não esperados	Número de grupos que identificaram os conteúdos	% dos grupos que identificaram os conteúdos
Produto Notável	5	20
Redução de termos semelhantes	8	32

Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

No desenvolvimento da UA, um dos grupos responsabilizou-se pela comunicação aos demais colegas da turma dos conteúdos matemáticos identificados na primeira questão. Durante essa apresentação, foram permitidas interferências de outros grupos para que os demais colegas pudessem expressar as diferentes interpretações das hipóteses e comprovações da tese. O professor orientou as discussões, resgatando os significados de cada conteúdo expresso no sistema cartesiano e promoveu a leitura das alternativas propostas para a demonstração da tese. Os grupos retomavam os conteúdos e complementavam suas anotações, para identificar os conteúdos em outras situações. Como enfatiza Demo (2002), quando o professor e o aluno são envolvidos no contexto da pesquisa, segue uma parceria de trabalho ativo, participativo, produtivo e reconstrutivo do processo de aprendizagem, no qual o aluno demonstra autonomia.

5.2 ANÁLISE DA SEGUNDA QUESTÃO

A segunda questão selecionada foi a seguinte:

2. A equação da reta que passa pelo centro da circunferência $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ e é paralela à reta x - y = 0 é

(A) 4x – 6y = 0
(B) 2x – 3y +6 = 0
(C) 3x – 2y +6 = 0
(D) x – y + 5 = 0
(E) 4x + 6y = 0

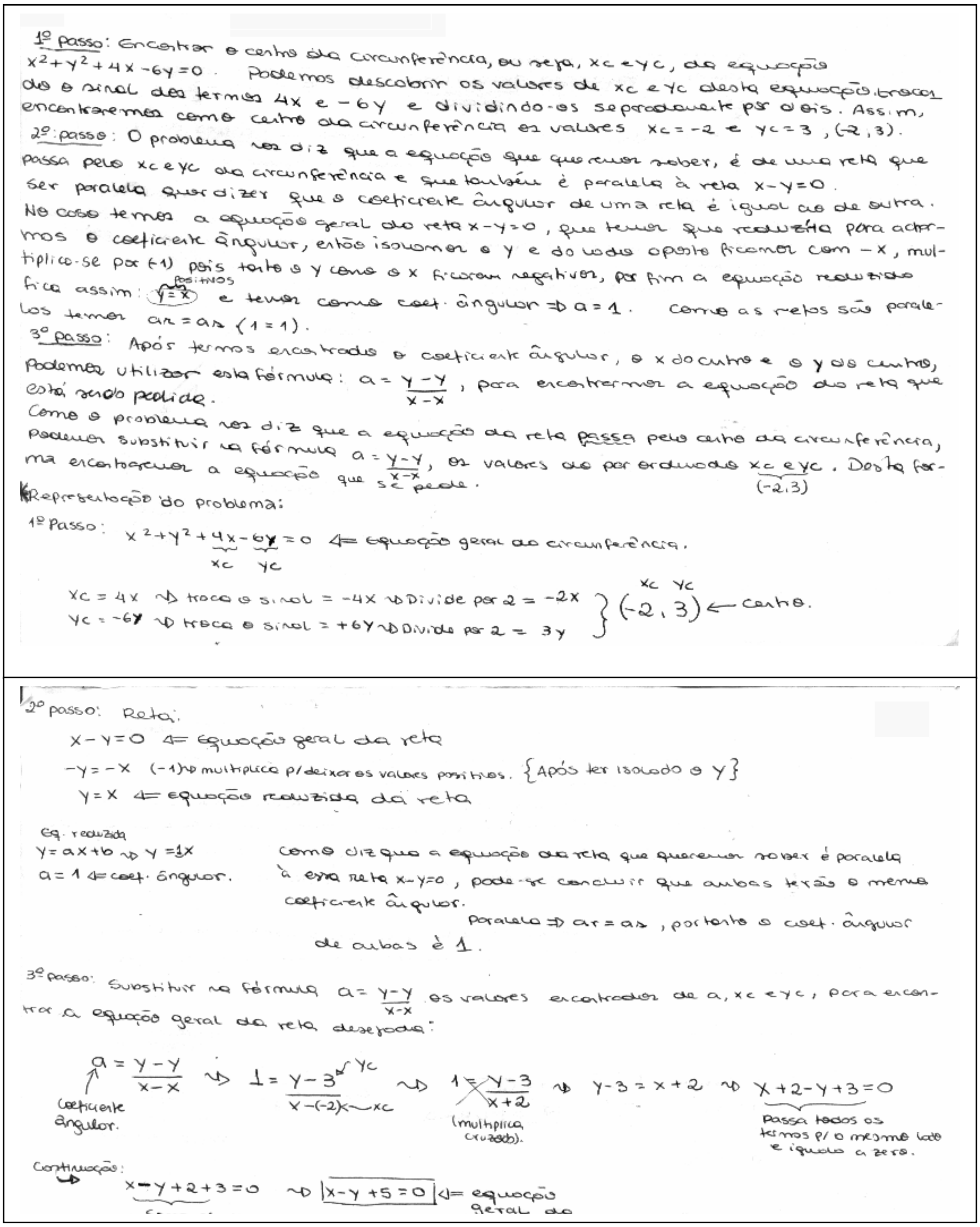
A segunda questão estimula a atenção e a concentração do aluno, pois a linguagem matemática implícita nas hipóteses da questão é fundamental para a interpretação e o encaminhamento da tese. A linguagem matemática implícita nas hipóteses, como se refere Machado e Bicudo (2006), é um elo no processo de interpretação, necessitando-se da assistência da codificação dos termos para que compreendamos sua forma e seus conteúdos.

A questão oferece como hipótese a equação da circunferência, na qual o aluno precisa interpretar, a partir dos termos da equação, o par ordenado que corresponda ao centro. Outra hipótese é a equação geral da reta, que o aluno precisa apresentar na forma reduzida, para identificar o coeficiente angular e linear. Esses conteúdos são importantes para interpretar as hipóteses e, dessa maneira, apresentar a tese. Nessa pergunta sobre a equação geral da reta que passa pelo centro, o par ordenado correspondente ao centro pertence a uma das retas apresentadas nas alternativas ou, simplesmente, o ponto (o centro) pertence à reta em questão. Além disso, a reta deve ser paralela, isto é, ter o mesmo coeficiente angular que a reta geral dada na hipótese.

Portanto, nessa questão os grupos precisavam identificar conteúdos que não são referências diretas da categoria da equação da circunferência. As hipóteses encaminham os alunos a buscar conteúdos anteriores e a interpretar de modo significativo cada termo da equação normal da circunferência, a fim de relacioná-los e não comprometer a tese. Em um caso como esse, é importante que os alunos relacionem o coeficiente angular identificado na equação reduzida da reta com a inclinação (declividade) da reta em relação ao eixo das abscissas, isto é, o ângulo, que a reta forma com o eixo das abscissas no sentido anti-horário, é interpretado como a razão entre os catetos oposto e adjacente. Assim, para apresentar a tese da questão pela identificação do coeficiente angular como a razão entre os catetos que são interpretados com a aplicação do centro da equação da circunferência, esse significado é necessário e não se trata de uma simples aplicação de resultados algébricos prontos, por meio de fórmulas.

A seguir, são apresentados os conteúdos indicados por um dos grupos para a segunda questão, para que se possa compreender o modo usado para descrever as hipóteses e as interpretações dos conteúdos matemáticos. Esse grupo descreveu três passos e, após, representou o problema de maneira sintética, apresentando mais linhas de cálculos e reduzindo a linguagem do senso comum para explicar a resolução da questão. Assim, identificou os conteúdos, justificou-os como passos da resolução, mas não apresentou o conteúdo matemático do termo ou o motivo pelo qual aplicou os procedimentos algébricos.

Esse grupo, em especial, conseguiu transpor um obstáculo da linguagem, pois, para esses conteúdos terem sentido, é importante que sejam identificados e interpretados com significados na linguagem comum, conforme Machado e Bicudo (2006). A linguagem comum foi utilizada como uma descrição do seu pensamento, relacionado com o contexto da questão proposta.



1º passo: Encontrar o centro da circunferência, ou seja, xc e yc, da equação $x^2+y^2+4x-6y=0$. Podemos descobrir os valores de xc e yc desta equação trocando o sinal dos termos 4x e −6y e dividindo-os separadamente por dois. Assim, encontraremos como centro da circunferência os valores xc = −2 e yc = 3, (−2, 3).

2º passo: O problema nos diz que a equação que queremos saber, é de uma reta que passa pelo xc e yc da circunferência e que também é paralela à reta $x-y=0$. Ser paralela quer dizer que o coeficiente ângular de uma reta é igual ao de outra. No caso temos a equação geral da reta $x-y=0$, que temos que reduzi-la para acharmos o coeficiente ângular, então isolamos o y e do lado oposto ficamos com −x, multiplica-se por (−1) pois tanto o y como o x ficaram negativos, por fim a equação reduzida fica assim: $\overset{\text{positivos}}{y=x}$ e temos como coef. ângular ⇒ a = 1. Como as retas são paralelos temos ar = as (1 = 1).

3º passo: Após termos encontrado o coeficiente ângular, o x do centro e o y do centro, podemos utilizar esta fórmula: $a=\frac{y-y}{x-x}$, para encontrarmos a equação da reta que está sendo pedida.

Como o problema nos diz que a equação da reta passa pelo centro da circunferência, podemos substituir na fórmula $a=\frac{y-y}{x-x}$, os valores ao por encontrado $\underbrace{xc\ e\ yc}_{(-2,3)}$. Desta forma encontraremos a equação que se pede.

Representação do problema:

1º Passo: $x^2+y^2+\underbrace{4x}_{xc}-\underbrace{6y}_{yc}=0$ ⇐ equação geral da circunferência.

xc = 4x ⇒ troca o sinal = −4x ⇒ Divide por 2 = −2x
yc = −6y ⇒ troca o sinal = +6y ⇒ Divide por 2 = 3y
} $\overset{xc\ \ yc}{(-2,3)}$ ← centro.

2º passo: Reta:

$x-y=0$ ⇐ equação geral da reta

$-y=-x$ (−1) ⇒ multiplica p/ deixar os valores positivos. {Após ter isolado o y}

$y=x$ ⇐ equação reduzida da reta

Eq. reduzida
$y=ax+b$ ⇒ $y=1x$
$a=1$ ⇐ coef. ângular.

Como diz que a equação da reta que queremos saber é paralela à esta reta $x-y=0$, pode-se concluir que ambas terão o mesmo coeficiente ângular.

Paralela ⇒ ar = as, portanto o coef. ângular de ambas é 1.

3º passo: Substituir na fórmula $a=\frac{y-y}{x-x}$ os valores encontrados de a, xc e yc, para encontrar a equação geral da reta desejada:

$a=\frac{y-y}{x-x}$ ⇒ $1=\frac{y-3}{x-(-2)}$ ⇒ $1=\frac{y-3}{x+2}$ ⇒ $y-3=x+2$ ⇒ $x+2-y+3=0$

Coeficiente ângular.

yc

xc

(multiplica cruzado).

Passa todos os termos p/ o mesmo lado e iguala a zero.

Continuação: ⇒ $x-y+2+3=0$ ⇒ $\boxed{x-y+5=0}$ ⇐ equação geral da

Figura 2. Relatório de um dos grupos para a segunda questão.

Após a leitura da descrição referente à segunda questão pelo grupo, passo a analisar a descrição dos passos da resolução.

O relatório revela que o grupo apresenta dificuldades em relação à aplicação de conteúdos matemáticos em situações posteriores, pois as descrições e a identificação dos termos matemáticos da questão, desenvolvidos pelos alunos do grupo, não apresentam justificativa em relação ao conteúdo matemático e são apresentados apenas na forma algébrica. Desse modo, conforme Machado e Bicudo (2006, p. 113), “a escrita expõe a Matemática para o sujeito e, por meio dela, ele se expõe para a comunidade”. Como o grupo não compreendeu os conteúdos matemáticos e as estratégias possíveis para as interpretações referentes às hipóteses, descreve relações algébricas que fundamentam suas linhas de raciocínio, mas não enriquecem o processo de aprendizagem significativa.

A tabela 3 apresenta os conteúdos identificados pelos grupos na resolução da segunda questão, em comparação com os conteúdos esperados pelo professor após o desenvolvimento da UA.

Tabela 3 - Conteúdos identificados pelos grupos em relação aos esperados pelo professor

Conteúdos esperados	Número de grupos que identificaram os conteúdos	% dos grupos que identificaram os conteúdos
Equação Geral da reta	20	80
Equação reduzida da reta	23	92
Coeficiente angular	25	100
Inclinação	0	0
Coeficiente linear	10	40
Coef. ang = $tg\alpha = \frac{cateto \quad oposto}{cateto \quad adjacente}$	0	0
Ponto que pertence à reta	23	92
Retas paralelas	18	72
Equação da Circunferência	25	100
Centro	25	100
Termo com x	25	100
Termo com y	25	100
Raio	2	8
Termo independente	0	0

Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

A tabela 3 mostra os conteúdos matemáticos que os grupos identificaram na resolução da segunda questão. Esses conteúdos são citados nos relatórios dos grupos. Pela análise da tabela 3, pode-se verificar que o conteúdo de coeficiente angular foi identificado por todos os grupos, Na resolução dessa questão, no entanto, nenhum dos grupos relacionou esse conteúdo com o ângulo de inclinação que essa reta faz com o eixo das abscissas no sentido anti-horário e, conseqüentemente, sobre o coeficiente angular ser o valor da tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo das abscissas. Também não foi relacionado o conteúdo com o coeficiente angular, que é a razão da distância entre os valores das ordenadas dos pontos e a distância dos valores das abscissas desses pontos (0%). Esses pontos determinam geometricamente os lados do triângulo retângulo formado com os eixos e o ponto referente ao centro da equação da circunferência. Essas interpretações e relações sobre o coeficiente angular com os termos indicados nas hipóteses reúnem significados que contribuem para a reflexão dos professores e para conduzir estratégias matemáticas de aplicações.

O ponto que corresponde ao centro da equação da circunferência foi conteúdo identificado por todos os grupos, mas é apresentado como um ponto que é determinado por um procedimento algébrico, por meio dos termos com a variável x e, o outro, com a variável y, ambos identificados por todos os grupos. A equação da circunferência também foi identificada pelos grupos na sua totalidade. A interpretação dos termos da circunferência não foi destaque dos grupos nas informações referentes ao raio (identificado por 8% dos grupos), pois, como a tese prioriza o centro, foram deixadas de lado as contribuições de que o raio e o termo independente (esse não são identificados por nenhum grupo) poderiam encaminhar para a tese. Essas contribuições nas interpretações dos dados das hipóteses e nos desenvolvimentos são abandonadas ou esquecidas pelos alunos. Assim, parecem mostrar que os conteúdos ainda não foram internalizados para serem processados e aplicados em outras situações matemáticas.

O conteúdo da equação geral da reta foi identificado por 80% dos grupos, e o da equação reduzida da reta, por 92% dos grupos, indicando informações compreendidas pelos alunos que auxiliam na demonstração da tese. O auxílio que a equação reduzida da reta indica é plenamente interpretado pelos grupos, pois o coeficiente angular é identificado por todos os grupos, sendo identificados por grande parte dos grupos também o conteúdo de paralelismo entre retas (72% dos grupos). Entretanto, o conteúdo de coeficiente linear foi pouco indicado (40% dos grupos), mostrando a pouca importância para a tese. Os grupos apontam ter significado a testagem referente ao ponto que pertence à reta (92% dos grupos), o que influenciou a baixa freqüência no conteúdo de paralelismo.

Outros conteúdos não eram esperados pelo professor na resolução da segunda questão, mas foram indicados pelos grupos, conforme a tabela 4.

Tabela 4 - Conteúdos identificados pelos grupos e não esperados pelo professor

Conteúdos não esperados	Número de grupos que identificaram os conteúdos	% dos grupos que identificaram os conteúdos
Sistema cartesiano	2	8
Quadrantes do sistema cartesiano	2	8
Origem	10	40
Bissetriz	1	4

Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

Esses conteúdos não eram esperados pelo professor. No entanto, são conteúdos que contribuem na significação dos conteúdos matemáticos pelos alunos, pois os grupos que os identificaram apresentaram a interpretação geométrica dos dados da hipótese da questão. Os grupos esboçaram a reta ($x - y = 0$), passando pela origem (40% dos grupos) e como bissetriz (4% dos grupos) dos quadrantes ímpares do sistema cartesiano (8% dos grupos). Destaca-se que essas demonstrações, mesmo sendo relevantes, não foram concluídas pelos grupos.

No caso dessa questão, a representação da reta que passa pela origem (coeficiente linear nulo) e que divide em partes de mesma medida os quadrantes ímpares foi sugerida por meio de uma intervenção oral do professor durante a apresentação do grupo aos colegas. Assim, aproveitando o que os grupos haviam apresentado em seus relatórios sobre o coeficiente angular e a relação algébrica aplicada na demonstração da tese, os alunos foram orientados na busca de significados sobre os conteúdos e a visualização das hipóteses. Pode-se perceber que, pelos conteúdos matemáticos representados no sistema cartesiano, a tese é comprovada sem aplicações algébricas, isto é, sem as fórmulas descritas nos relatórios.

Por isso, o papel do professor como mediador no processo de aprendizagem é o de observar e orientar os alunos para o uso de uma linguagem matemática adequada e com significado para a reconstrução dos conhecimentos científicos explorados na sala de aula, como indica Vygotsky ao descrever o papel do professor na sua teoria.

5.3 ANÁLISE DA TERCEIRA QUESTÃO

A terceira questão é a seguinte:

> 3. Os pontos em que a reta 3x + 2y + 12 = 0 intercepta a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x + 6y = 0$ determinam um segmento de comprimento igual a
>
> (A) $2\sqrt{5}$
> (B) $2\sqrt{13}$
> (C) $5\sqrt{2}$
> (D) $5\sqrt{13}$
> (E) $13\sqrt{2}$

Na terceira questão, a leitura dos conteúdos e a representação gráfica que a hipótese sugere são importantes para a interpretação da linguagem matemática envolvida. O enunciado da questão descreve uma equação geral de uma reta, que é interpretada na forma reduzida para destacar o coeficiente angular (define a inclinação ou declividade da reta) e o coeficiente linear (define o ponto que a reta intercepta o eixo das ordenadas). É importante representar essa reta no sistema cartesiano, pois a resolução da questão exige o comprimento do segmento que essa reta determina ao passar pela circunferência. Essa circunferência é representada pela equação informada no enunciado, sendo que, a partir dela, podemos destacar o ponto que corresponde ao centro. Pode-se verificar que o centro é um ponto que pertence às extremidades do segmento e está alinhado a elas. Essas extremidades são os pares ordenados que definem o ponto que a reta dada na hipótese intercepta o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas. E o comprimento do segmento é, simplesmente, o diâmetro da circunferência dada na hipótese. A interpretação dessa questão é também fundamentada pela representação no sistema cartesiano, que encaminha a significação dos conteúdos da hipótese para a comprovação da tese.

Para auxiliar na análise dessa questão, são apresentadas duas soluções. Uma trata da identificação dos conteúdos matemáticos e da interpretação desses conteúdos no sistema cartesiano. A outra apresenta a interpretação envolvendo conteúdos não esperados pelo professor. Nesta, para a identificação dos conteúdos matemáticos, foi utilizado o sistema de equações, envolvendo a interpretação de ponto de intersecção para responder sobre o comprimento do segmento determinado pela reta ao interseccionar a circunferência.

O primeiro grupo descreve as hipóteses representando-as geometricamente.

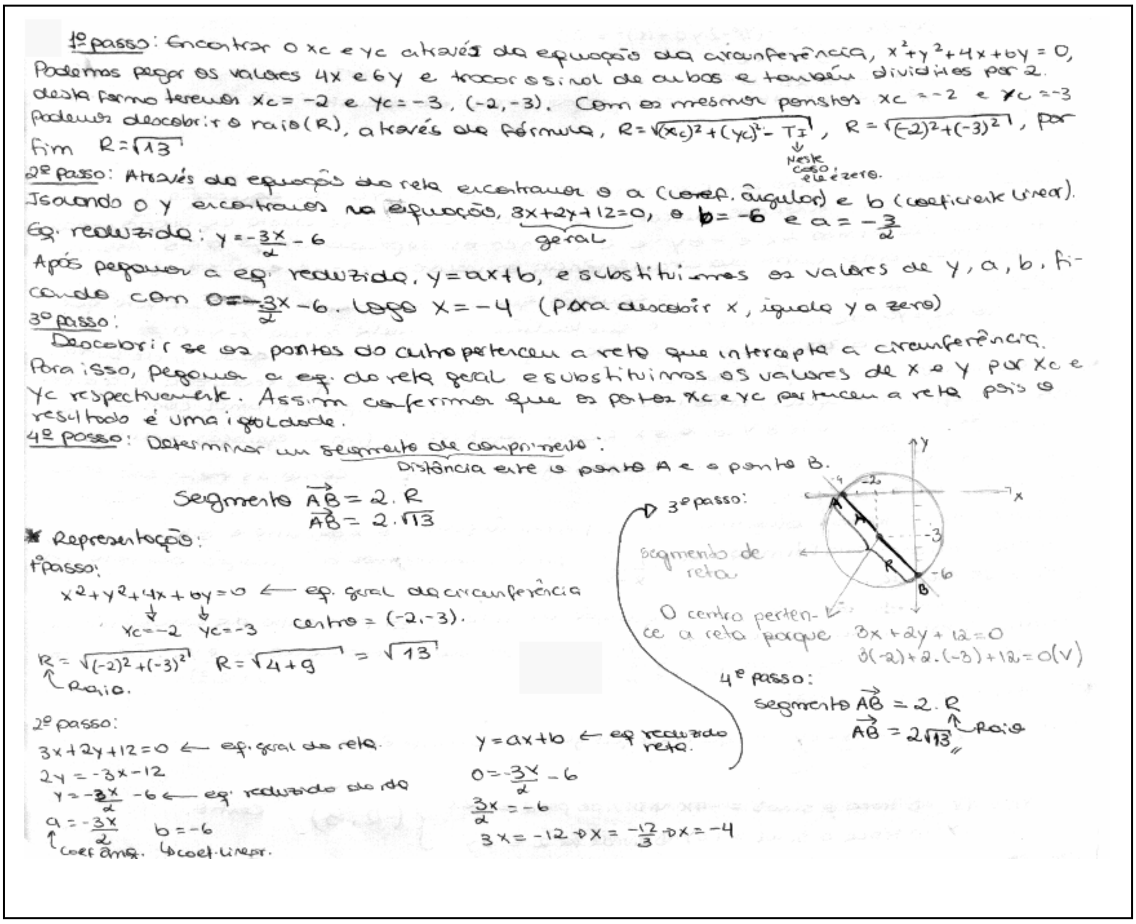

1º passo: Encontrar o xc e yc através da equação da circunferência, $x^2+y^2+4x+6y=0$, Podemos pegar os valores 4x e 6y e trocar o sinal de ambos e também dividi-los por 2. desta forma teremos xc = -2 e yc = -3, (-2, -3). Com os mesmos pensamentos xc = -2 e yc = -3 podemos descobrir o raio (R), através da fórmula, $R=\sqrt{(x_c)^2+(y_c)^2-TI}$, $R=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}$, por fim $R=\sqrt{13}$
Neste caso ele é zero.
2º passo: Através da equação da reta encontramos o a (coef. angular) e b (coeficiente linear). Isolando o y encontramos na equação, $\underbrace{3x+2y+12=0}_{geral}$, o b = -6 e $a=-\frac{3}{2}$
Eq. reduzida: $y=-\frac{3x}{2}-6$
Após pegarmos a eq. reduzida, y = ax + b, e substituímos os valores de y, a, b, ficando com $0=-\frac{3}{2}x-6$. Logo x = -4 (para descobrir x, iguala y a zero)
3º passo:
Descobrir se os pontos do centro pertencem a reta que intercepta a circunferência. Para isso, pegamos a eq. da reta geral e substituímos os valores de x e y por xc e yc respectivamente. Assim confirmamos que os pontos xc e yc pertencem a reta pois o resultado é uma igualdade.
4º passo: Determinar um segmento de comprimento:
Distância entre o ponto A e o ponto B.
Segmento $\overrightarrow{AB}=2.R$
$\overrightarrow{AB}=2.\sqrt{13}$
* Representação:
1º passo:
$x^2+y^2+4x+6y=0$ ← eq. geral da circunferência
xc = -2   yc = -3   centro = (-2, -3).
$R=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}$ $R=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$
Raio.
2º passo:
$3x+2y+12=0$ ← eq. geral da reta.
$2y=-3x-12$
$y=-\frac{3x}{2}-6$ ← eq. reduzida da reta
$a=-\frac{3x}{2}$ $b=-6$
coef. ang.   coef. linear.
$y=ax+b$ ← eq. reduzida reta.
$0=-\frac{3x}{2}-6$
$\frac{3x}{2}=-6$
$3x=-12 \Rightarrow x=\frac{-12}{3} \Rightarrow x=-4$
3º passo:
segmento de reta
O centro pertence a reta porque $3x+2y+12=0$
$3(-2)+2.(-3)+12=0$ (V)
4º passo:
Segmento $\overrightarrow{AB}=2.R$
$\overrightarrow{AB}=2\sqrt{13}$ Raio

Figura 3. Relatório de um dos grupos para a terceira questão.

Nesses passos do relatório, o grupo apresenta os conteúdos relacionados às hipóteses da questão. Sobre a equação da circunferência, são identificados os termos com as variáveis x e y, para determinar as coordenadas do centro por um procedimento algébrico.

É apresentada, ainda, a aplicação de outro resultado algébrico para determinar o raio. O grupo não justificou, por meio de uma linguagem matemática adequada e escrita, as relações algébricas. Justificou, entretanto, os conteúdos identificados na hipótese quando comunicou aos demais colegas as suas conclusões, e, quando da demonstração da tese no instante de representar graficamente no sistema cartesiano as hipóteses e demonstrar a tese, o que só foi constatado após serem feitas as intervenções do professor. O professor orientou os alunos no sentido de lerem e de relacionarem ao sistema cartesiano os dados apresentados no enunciado. A partir daí, os alunos puderam relacionar que o diâmetro correspondia à tese, isto é, ao comprimento do segmento da intersecção da reta com a circunferência. O grupo complementou, durante a comunicação, que o centro era um ponto que pertencia à reta. Apresentou os dois pontos, que são as extremidades do segmento, bem como os pontos de intersecção com os eixos coordenados.

Esses conteúdos são apresentados na tabela 5.

Tabela 5 - Conteúdos identificados pelos grupos em relação aos esperados pelo professor.

Conteúdos esperados pelo professor	Número de grupos que identificaram os conteúdos	% dos grupos que identificaram os conteúdos
Equação Geral da reta	24	96
Equação reduzida da reta	23	92
Coeficiente angular	25	100
Inclinação	0	0
Coeficiente linear	25	100
Coef. ang = $tg\alpha = \dfrac{cateto \quad oposto}{cateto \quad adjacente}$	0	0
Ponto que pertence à reta	22	88
Ponto que pertence ao eixo das abscissas	20	80
Ponto que pertence ao eixo das ordenadas	20	80
Segmento	25	100
Equação da Circunferência	25	100
Centro	25	100
Termo com x	25	100
Termo com y	25	100
Raio	18	72
Teorema de Pitágoras	2	8
Distância entre dois pontos	6	24
Termo independente	1	4

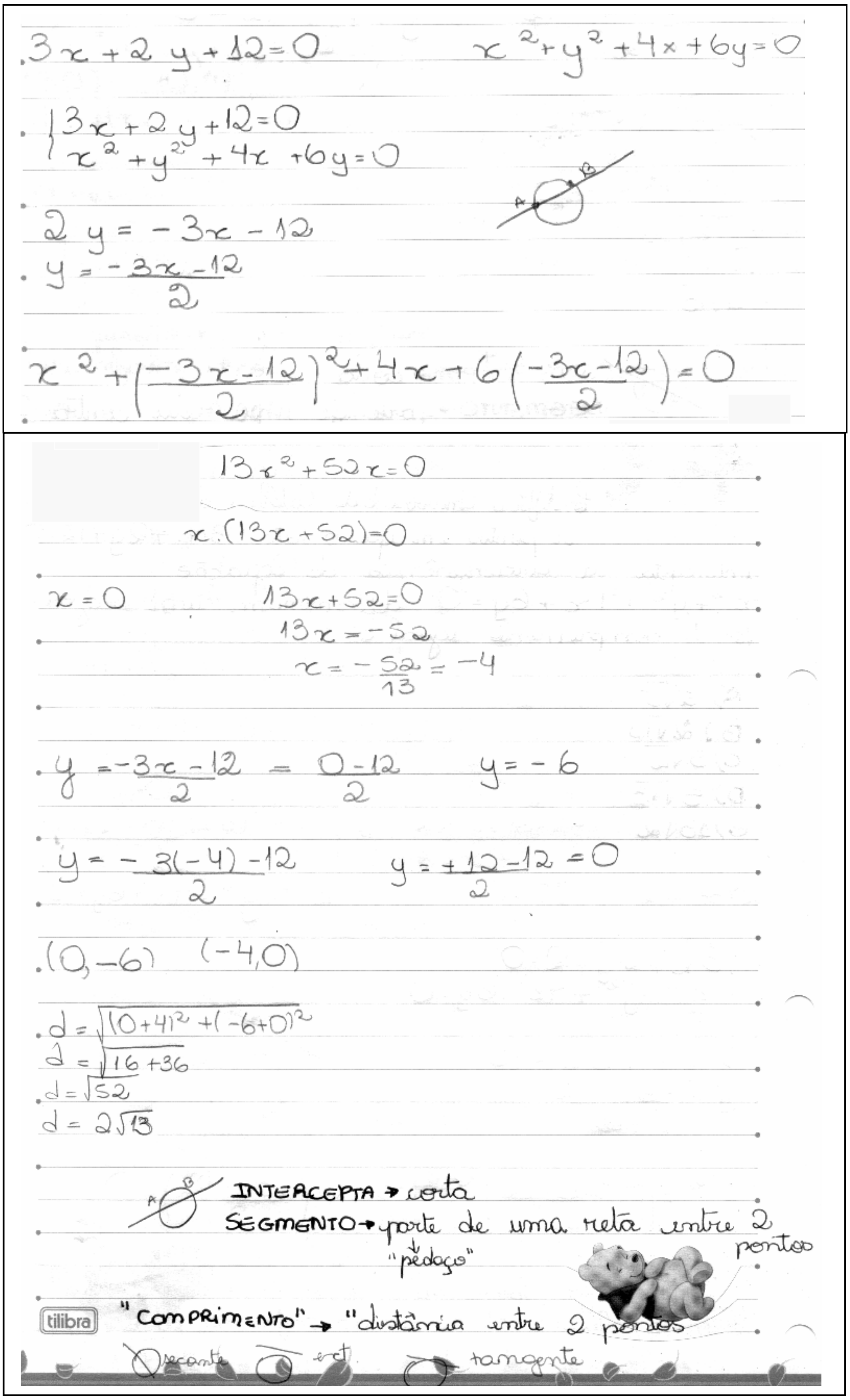
Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

A tabela 5 mostra a comparação, objetivamente, entre a identificação de conteúdos matemáticos pelos grupos e os esperados pelo professor, quando refletiram sobre essa questão. Os grupos apresentaram um percentual de 100% na identificação dos conteúdos que envolvem diretamente as hipóteses e a demonstração da tese. O conteúdo da *equação geral da reta* foi identificado nos relatórios de 96% dos grupos. A *equação reduzida da reta* também foi bem identificada por um número próximo de grupos (92%). Os conteúdos de coeficiente angular e *coeficiente linear* foram identificados por todos os grupos, que se mostraram capazes de ler e interpretar a questão. No entanto, o *coeficiente angular* em suas outras representações e relações com *a inclinação* (declividade) e *a tangente* não faz parte das resoluções de nenhum dos 25 grupos, indicando dificuldades desses alunos na aprendizagem de tais conteúdos. Os conteúdos relacionados a conhecimentos prévios esperados apresentam excelente identificação pelos grupos, como, por exemplo, *segmento* (100% dos grupos). Esse conteúdo foi identificado com significado para os alunos, pois os grupos, além de definirem o conteúdo, também o representaram geometricamente. A *equação da circunferência* também foi identificada com segurança por todos os grupos, bem como seus termos, o centro. Este também foi identificado por meio de relações algébricas, e não com os fundamentos do produto notável. Os termos do desenvolvimento da *equação normal da circunferência* com as variáveis x e y, aplicados com propriedade, como extremos do segmento, foram identificados em todos os relatórios. O *raio* foi identificado em relatórios de grande parte dos grupos (72%), mas a relação feita por meio da relação algébrica com o termo independente pode ser identificada em apenas 4% dos grupos; o Teorema de Pitágoras, em 8% dos grupos; e a relação algébrica da distância entre dois pontos, em 24% dos grupos, o que não era fundamental para a tese.

A verificação sobre os pontos que pertencem à reta, relacionando-os ao centro, foi identificada em 88% dos relatórios; e os pontos dos eixos coordenados, como extremos do segmento, em 80% dos relatórios dos grupos. No entanto, os grupos poderiam ter acrescentado nos argumentos sobre o ponto referente ao centro o fato de ele pertencer a essa reta, considerando que a reta referida no enunciado da questão possuía declividade decrescente. Assim, não haveria necessidade de constar o conteúdo sobre o raio, pois as extremidades do segmento, isto é, os pontos que pertence à reta com os eixos coordenados foram identificados por 80% dos grupos. Esse segmento, que é a tese da questão, apresenta-se como hipotenusa de um triângulo retângulo, se tais dados forem registrados no sistema cartesiano, sendo os eixos coordenados os seus catetos. A aplicação do Teorema de Pitágoras, indicado na resolução de 8% dos relatórios também apresenta a tese. Porém, percebe-se que os alunos ainda preferem modelos algébricos prontos, selecionados durante as pesquisas.

Na segunda solução, um dos grupos encaminhou a interpretação da questão por meio do conteúdo do ponto de intersecção, apresentando a tese e a identificação dos conteúdos da hipótese, utilizando o conteúdo de sistema de equações com duas variáveis. A aplicação desse conteúdo surpreendeu e valorizou a discussão de como são importantes os conteúdos que aprendemos anteriormente, para aplicá-los quando necessário.

A figura 4 representa a resolução da terceira questão, por meio do sistema de equações, no método de substituição, utilizado por um grupo. No desenvolvimento do sistema, os valores das abscissas dos pontos de intersecção ou das extremidades do segmento, que determinaram as raízes por fatoração do termo comum foi descrito e salientado pelo grupo e pelo professor no momento da comunicação para o restante da turma.



$3x + 2y + 12 = 0 \qquad x^2 + y^2 + 4x + 6y = 0$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 12 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + 6y = 0 \end{cases}$$

$2y = -3x - 12$

$y = \frac{-3x - 12}{2}$

$x^2 + \left(\frac{-3x - 12}{2}\right)^2 + 4x + 6\left(\frac{-3x - 12}{2}\right) = 0$

$13x^2 + 52x = 0$

$x.(13x + 52) = 0$

$x = 0 \qquad 13x + 52 = 0$

$13x = -52$

$x = -\frac{52}{13} = -4$

$y = \frac{-3x - 12}{2} = \frac{0 - 12}{2} \qquad y = -6$

$y = -\frac{3(-4) - 12}{2} \qquad y = \frac{+12 - 12}{2} = 0$

$(0, -6) \quad (-4, 0)$

$d = \sqrt{(0+4)^2 + (-6+0)^2}$

$d = \sqrt{16 + 36}$

$d = \sqrt{52}$

$d = 2\sqrt{13}$

INTERCEPTA → corta

SEGMENTO → parte de uma reta entre 2 pontos

"pedaço"

"COMPRIMENTO" → "distância entre 2 pontos"

secante ext. tangente

Figura 4. Equações em que se utiliza o método da substituição, elaborado pelos alunos.

O relatório apresenta o sistema de equações utilizando o método de substituição. No desenvolvimento do sistema, os valores das abscissas dos pontos de intersecção ou das extremidades do segmento são as raízes de uma equação do segundo grau incompleta. Através dele, os alunos conseguiram determinar as raízes por fatoração do termo comum. Na segunda equação, os alunos substituíram os valores correspondentes das abscissas, determinando as ordenadas, identificando, assim, os pontos de intersecção da reta com a circunferência. Tendo os pontos das extremidades, por meio da distância entre dois pontos, apenas o conteúdo algébrico, não utilizaram a representação no plano cartesiano, respondendo ao enunciado da questão.

No final do relatório, o grupo apresenta graficamente a interpretação sobre as posições entre uma reta e a circunferência, envolvendo o conteúdo de reta secante, reta tangente e reta externa a uma circunferência.

A tabela 6, apresentada abaixo, mostra os conteúdos matemáticos que os grupos empregaram em seus relatórios e que surpreenderam o professor.

Tabela 6 - Conteúdos identificados pelos grupos e não esperados pelo professor

Conteúdos não esperados	Número de grupos que identificaram os conteúdos	% dos grupos que identificaram os conteúdos
Sistema de equações	2	8
Equação do 2º grau	2	8
Fatoração: termo comum em evidência	1	4
Fórmula de Bhaskara	1	4
Diâmetro	1	4

Fonte: Dados obtidos na pesquisa.

Os conteúdos destacados nas tabelas 1, 3 e 5 eram esperados pelo professor, pois foram tratados no desenvolver do conteúdo de geometria analítica durante a pesquisa e categorização de questões retiradas de provas de concurso vestibular. As tabelas foram organizadas para oportunizar uma visão objetiva dos conteúdos lembrados pelos alunos no desenvolvimento e na interpretação das questões selecionadas na categorização. Esses conteúdos foram comparados àqueles esperados pelo professor. Portanto, pretendeu-se com essa análise identificar os conteúdos mais lembrados, mas também os não lembrados na interpretação da hipótese e na demonstração da solução da questão pelos grupos, envolvendo a linguagem matemática adequada na escrita dos relatórios. A análise sobre cada uma das questões demonstra como são importantes os conteúdos matemáticos necessários à interpretação das situações-problema, expressos por uma linguagem adequada. Os conteúdos esperados pelo professor foram baseados em autores de livros didáticos utilizados por muitos dos professores das escolas particulares de Porto Alegre/RS.

Algumas resoluções foram desenvolvidas por meio de conteúdos não esperados pelo professor e foram apresentadas nas tabelas 2, 4 e 6. As tabelas e as análises dos relatórios direcionaram o professor para orientar e discutir com os alunos o fato de identificarem conteúdos, mas não aplicarem como estratégias com significado próprio. Os conteúdos nos relatórios foram citados e identificados, mas não justificados com a significação adequada à linguagem matemática de alunos que estão concluindo o Ensino Médio e conhecem, ou deveriam conhecer, conteúdos matemáticos que justifiquem a interpretação dos identificados. Por isso, o processo de leitura-análise-interpretação de conteúdos matemáticos consiste em um conjunto de ações para identificar conteúdos matemáticos, por meio do ato de ler e de expressar o raciocínio lógico-matemático, buscando interpretar as questões matemáticas.

Portanto, se alunos executarem somente uma ação, conseguirão interpretar de modo efetivo os problemas e construir significados em relação aos conteúdos matemáticos identificados nas questões? Se exercitarem a habilidade da pesquisa no dia-a-dia, conseguirão aplicar estratégias de resoluções com aplicações de conteúdos não esperados pelo professor? O espírito pesquisador auxilia os alunos a relacionarem conteúdos matemáticos? Esses foram alguns dos questionamentos, acerca dos quais, após a análise dos dados coletados no desenvolvimento da UA sobre o conteúdo de geometria analítica, creio ter conseguido refletir. Assim, penso ter podido encaminhar algumas respostas, o que me permitiu dar continuidade à reconstrução epistemológica da minha prática profissional na sala de aula e apresentar situações para a reflexão de outros docentes sobre o foco deste estudo, no qual a linguagem matemática é o centro.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Unidade de Aprendizagem é um é um modo de organizar o ensino que tem por finalidade oportunizar ao aluno, e também ao professor, o “aprender a aprender”. Esse modo de organização curricular tem por base a pesquisa e valoriza a linguagem e os processos de comunicação, como a fala, a leitura e a escrita. Por isso, empregar a UA como um modo de contribuir para a aprendizagem de geometria analítica pelos alunos foi um dos objetivos deste trabalho. Além disso, foi intenção proporcionar um espaço ao professor para refletir sobre o seu trabalho, reconsiderando-o e, principalmente, desenvolvendo uma atitude de repensar o modo como os alunos aprendem os conteúdos matemáticos de geometria analítica, identificando as dificuldades que os alunos apresentam nesse processo.

A pesquisa desenvolveu-se na sala de aula pela mediação do professor e pela interação entre o conhecimento cotidiano e o conhecimento científico.

Quando a aprendizagem se desenvolve desse modo compartilhado, é possível observar que o conhecimento reconstruído pelos alunos torna-se mais consistente, mais complexo, mais científico, mais duradouro. Além disso, o aluno torna-se mais capaz de interpretar o problema proposto e aplicar os conhecimentos reconstruídos em novas situações-problema. A vivência com a UA contribui para a mudança na concepção do que seja ser professor, pois se opõe à atitude de “dar aula”, que não considera a alternativa de tornar o aluno protagonista do processo de aprendizagem. A UA torna o aluno mais participativo, pois promove a relação interpessoal na sala de aula. A “mudança” metodológica desacomoda o aluno e o professor no sentido de uma construção dos conteúdos e conhecimentos matemáticos mais consistentes, qualificada e contextualizada.

Portanto, com esse trabalho pretendi colaborar com o processo de reflexão por parte dos professores que ainda questionam a falta de interesse dos alunos em suas aulas, desenvolvida através de metodologias tradicionais. Ressalto, assim, a proposta da UA como uma metodologia sociocultural, baseada em Mizukami (1987), ou investigativa, conforme designação de Porlán (1996), que valoriza a ação coletiva, a pesquisa e o desenvolvimento da autonomia do aluno em relação à aprendizagem.

No desenvolvimento da pesquisa foram analisados relatórios com a resolução dos alunos para três questões sobre geometria analítica, com objetivo de identificar conteúdos matemáticos lembrados e não lembrados em relação aos conteúdos esperados pelo professor. Foi possível também identificar conteúdos e soluções não previstas pelo professor, mostrando a capacidade de alguns alunos de criar soluções novas para os problemas propostos. Esse exercício favorece a interpretação e a aplicação de soluções em outras situações.

Os conteúdos mais lembrados pelos grupos foram: a equação da circunferência; o centro; os termos do desenvolvimento da equação normal da circunferência, com a variável x e o termo com a variável y; o ponto que pertence à equação analítica e aos eixos coordenados; o par ordenado; e a equação reduzida da reta que destacava os coeficientes angular e linear. Os menos lembrados foram: o raio da circunferência; o termo independente da equação normal da circunferência; a inclinação (declividade); o coeficiente angular interpretado como a tangente do ângulo correspondente ou razão entre os catetos oposto e adjacente; e o conteúdo do par ordenado correspondente à origem. Isso mostra a importância de buscar modos de trabalhar mais intensamente esses conteúdos menos lembrados.

Também é preciso trabalhar na escola com situações do cotidiano, da realidade e das relações interpessoais. É necessário ouvir os alunos, deixando que expressem suas experiências e seus conhecimentos sobre os assuntos propostos, pois, partir do conhecimento tácito dos alunos possibilita o surgimento de estratégias para o desenvolvimento de aprendizagens significativas e duradouras.

Após a análise dos relatórios, foi possível perceber nos argumentos utilizados pelo corpo discente o uso da linguagem matemática com mais significado. Dessa maneira os alunos demonstraram maior compreensão com a linguagem formal da matemática para a linguagem natural que interpreta e comunica as estratégias de resolução da situação-problema apresentada. Por isso, é importante que o professor assuma, em sua prática na sala de aula, uma atitude de repensar permanentemente seus procedimentos de ensino, procurando estar atento à forma como o aluno interpreta e expressa sua aprendizagem. Dito de outro modo é importante que o professor tome consciência do papel da linguagem na aprendizagem dos alunos.

Percebeu-se que o respeito ao ritmo de cada aluno para a compreensão de conteúdos de diferentes níveis de complexidade e aplicação dos conteúdos matemáticos em resoluções é algo que necessita ser observado e valorizado pelo professor no dia-a-dia do ano letivo. Desta maneira, fica evidente que o professor pode oportunizar caminhos mais produtivos e agradáveis para a reconstrução de saberes matemáticos no tempo em que o aluno se envolve com os conteúdos da disciplina. Além disso, o professor pode contribuir para a qualificação da relação professor-aluno-aprendizagem em sala de aula.

Este estudo não pretende esgotar as discussões sobre aprendizagem em relação ao tema geometria analítica e sobre a Unidade de Aprendizagem como ferramenta metodológica de ensino. Muito menos, sobre o papel da linguagem na reconstrução do conhecimento e na constituição do sujeito. Constitui-se, pois, em mais uma contribuição para a reflexão dos educadores que se sentem insatisfeitos com a aprendizagem seus alunos. A atitude de “aprender a aprender” é intrínseca à atividade docente, pois os professores necessitam sempre estar redimensionando e qualificando o seu trabalho.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Fernanda Medeiros de. **Unidade de Aprendizagem**: uma alternativa para professores e alunos conviverem melhor. Porto Alegre: PUCRS – Faculdade de Física (Dissertação de Mestrado), 2006.

ANTUNES, Celso. **Vygotsky,quem diria?!** Em minha sala de aula. 3. ed. Petrópolis,RJ: Vozes, 2002.

BECKER, Fernando. **A epistemologia do professor**. 10. ed. Petropólis, RJ: Vozes, 1993.

BOCCHESE, Jocelyne da Cunha. O professor e a construção de competências. ENRICONE, Délcia (Org.). **Ser professor**. 2. ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

DEMO, Pedro. **Educar pela Pesquisa**. 5. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2002.

______. **Pesquisa e construção do conhecimento**. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 2002.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. 6. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

GALIAZZI, Maria do Carmo; GARCIA, Fabianne Ávila; LINDEMANN, Renata Hernandez. Construindo Caleidoscópio**:** organizando unidades de aprendizagem. **In:** MORAES, Roque; MANCUSO, Ronaldo (Org.). **Educação em Ciências.** **I**juí: Editora Unijuí, 2004.

HEREDIA, Carlos Alberto Vianna. **Zero Hora:** E a matemática, como vai? Porto Alegre, 13, janeiro, 2006. p. 15.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: ciência e aplicações. São Paulo: Atual. 2001. v. 3.

JABLONSKI, Eduardo. **Zero Hora:** indisciplina em Pauta. Porto Alegre, 21, maio, 2007. p. 13.

JAPIASSÚ, Hilton e MARCONDES, Danilo. **Dicionário Básico de Filosofia**. 3. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1996.

LA ROSA, Jorge. **Psicologia e Educação:** o significado do aprender. 7.ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2003.

LIBÂNEO, José Carlos. A escola que sonhamos é aquela que assegura a todos a formação cultural e científica para a vida pessoal, profissional e cidadã. In: Costa, Maria V. (Org.). **A escola tem futuro?** Rio de Janeiro: DP & A, 2003, v. 1, p. 23-52.

MACHADO, Antônio Pádua; BICUDO, Maria Aparecida Viggini. Significados da escrita da Matemática. **In:** MENEGHETTI, Renata Cristina Geromel (Org). Educação Matemática: vivências refletidas. São Paulo, SP: CENTAURO, 2006.

MALTA, Iaci. Linguagem, Leitura e Matemática. In: CURY, Helena Noronha (Org.). **Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores:** reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 41-62.

MAZZEI, Luiz Davi. **Dificuldades de Ensino e de Aprendizagem do Conhecimento Matemático:** analisando a linguagem empregada por professores e alunos. Porto Alegre: PUCRS (Dissertação de Mestrado), 2004.

MORAES, Roque; LIMA, Valderez Marina do Rosário (Orgs.). **Pesquisa em sala de aula:** tendências para a educação em novos tempos. 2. ed. Porto Alegre, RS: EDIPUCRS, 2004. p. 27.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo; RAMOS, Maurivan Güntzel. Pesquisa em sala de aula: fundamentos e pressupostos. **In:** MORAES, Roque; Valderez Marina do Rosário Lima (Orgs.). **Pesquisa em sala de aula:** tendências para a educação em novos tempos. 2. ed. Porto Alegre, RS: EDIPUCRS, 2004. p. 9-24.

MORIN, Edgar. **Cabeça Bem-Feita:** repensar a reforma, repensar o pensamento. 8. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2003.

______. **O Método 4. As idéias:** habitat, vida, costumes, organização. 2. ed. Porto Alegre: Sulina, 2001.

MORTIMER, Eduardo Fleury. **Linguagem e Formação de Conteúdos no Ensino de Ciências**. Belo Horizonte: Ed. UFMG, 2000.

MOYSÉS, Lúcia. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

MIZUKAMI, Maria da Graça Nicoletti. **As abordagens do processo:** temas básicos de educação e ensino. São Paulo: EPU - Editora Pedagógica e Universitária, 1987.

PORLÁN, Rafael; RIVIERO, Ana. **El conocimiento de los professores**. Madrid: Sevilla, 1996.

RAMOS, Maurivan Güntzel. Epistemologia e ensino de Ciências: compreensão e perspectivas. In: MORAES, Roque (Org.) Construtivismo e ensino de ciências: reflexões epistemológicas e metodológicas. 2. Ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2003. p. 13-36.

______. Educar pela pesquisa é educar para a argumentação. **In:** MORAES, Roque; Valderez Marina do Rosário Lima (Orgs.). **Pesquisa em sala de aula:** tendências para a educação em novos tempos. 2. ed. Porto Alegre, RS: EDIPUCRS, 2004. p.25-50.

REGO, Teresa Cristina. **Vygotsky**: uma perspectiva histórico-cultural da educação. 15. ed. Petrópolis,RJ: Vozes, 2003.

SPINK, Mary Jane. **Linguagem e Produção de Sentidos no Cotidiano**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

TOLDO, Cláudia Stumpf. **Questões de Lingüística**. Passo Fundo: UPF, 2003.

VIVEIRO, Tânia Cristina Neto G.; CORRÊA, Marlene Lima Pires. **Minimanual Compacto de Matemática**: teoria e prática ensino médio. São Paulo: RIDEEL, 1999.

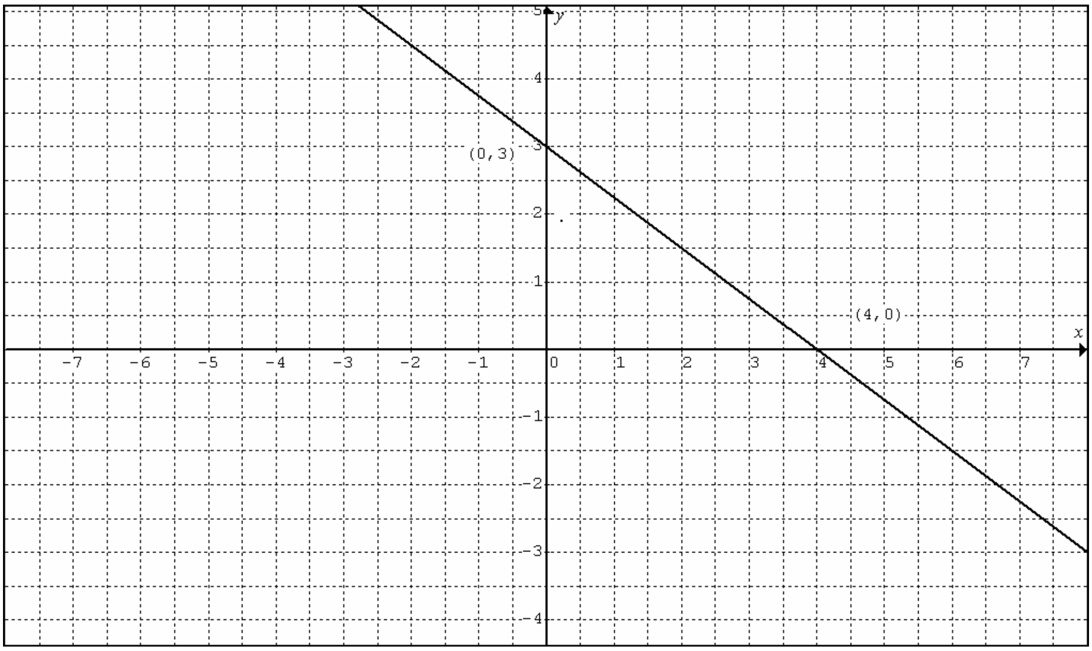
VYGOTSKY, Lev Semenovich, Alexander Romanovich Luria, Alex N. Leontiev. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: EDUSP, 1988.

______. **Pensamento e Linguagem**. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1997.

______. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

APÊNDICES

APÊNDICE A - I ÁREA DO TRIÂNGULO

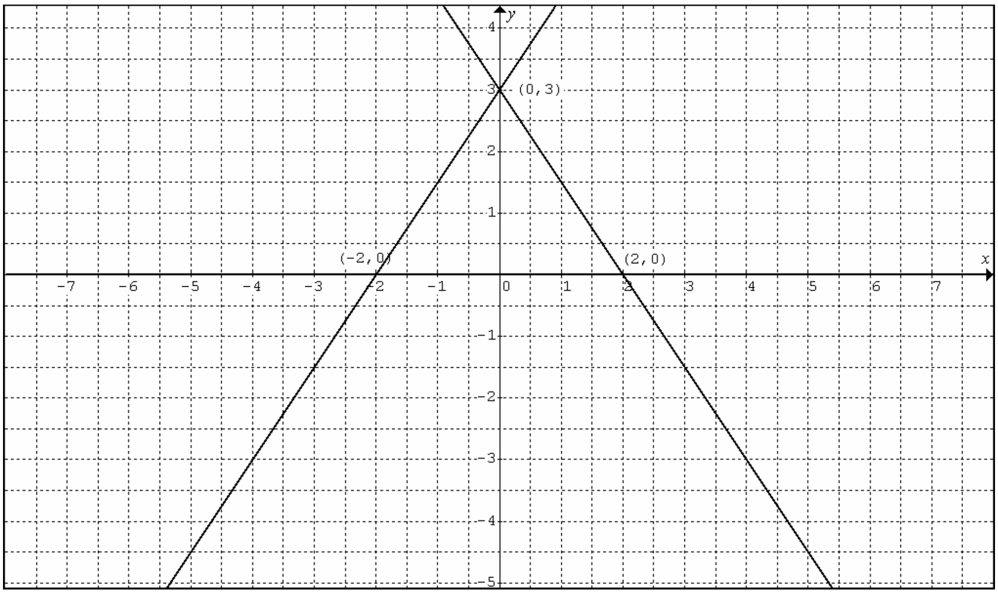


$$A = \frac{bxh}{2} \quad \therefore \quad A = \frac{4x3}{2} = \frac{12}{2} = 6\ u.a \quad ou \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0+12+0)-(0+0+0) = 12$$

Dobro do valor da área do triângulo

$$\therefore \quad A = \frac{1}{2}|\det| = \frac{1}{2}.|12| = \frac{12}{2} = 6\ u.a$$

APÊNDICE B - II ÁREA DO TRIÂNGULO



$$A = \frac{bxh}{2} \quad \therefore \quad A = \frac{4x3}{2} = \frac{12}{2} = 6\ u.a \quad ou \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-6+0+0)-(6+0+0) = -12$$

Dobro do valor da área do triângulo

$$\therefore \quad A = \frac{1}{2}|\det| = \frac{1}{2}.|-12| = \frac{12}{2} = 6\ u.a$$