

**Análise de uma Classe de Sistemas Não-Lineares Incertos
Mediante Linearização por Realimentação de Estados**

por

Eduardo Rath Rohr

Eng. Eletricista, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (2006)

Submetido ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica
como requisito parcial para obtenção do título de

Mestre em Engenharia

pela

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL

Setembro 2008

© Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul 2008

Assinatura do Autor
Departamento de Engenharia Elétrica
Setembro de 2008

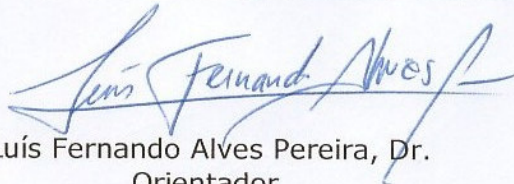
Revisado por
Luís Fernando Alves Pereira, Dr.
Prof. Departamento de Engenharia Elétrica - PUCRS
Orientador da Dissertação

Revisado por
Daniel Ferreira Coutinho, Dr.
Prof. Departamento de Engenharia Elétrica - PUCRS
Co-orientador da Dissertação

**“Análise de uma Classe de Sistemas Não-Lineares
Incertos Mediante Linearização por Realimentação de
Estados”**

EDUARDO RATH ROHR

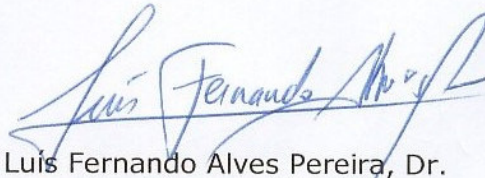
Esta dissertação foi julgada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.



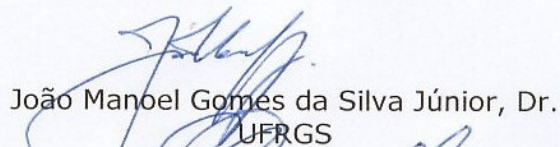
Luís Fernando Alves Pereira, Dr.
Orientador

Rubem Dutra Ribeiro Fagundes, Dr.
Coordenador
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

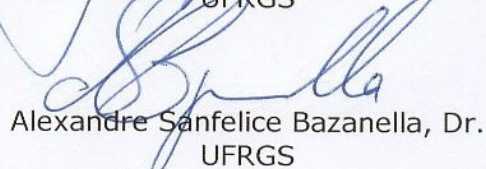
Banca Examinadora:



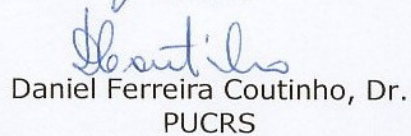
Luís Fernando Alves Pereira, Dr.
Presidente – PUCRS



João Manoel Gomes da Silva Júnior, Dr.
UFRGS



Alexandre Sanfelice Bazanella, Dr.
UFRGS



Daniel Ferreira Coutinho, Dr.
PUCRS

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à minha família, que me deu apoio incondicional durante minha vida de estudante.

Agradeço aos meus professores orientadores Luís Fernando e Daniel Coutinho pela confiança depositada no trabalho e pelo esforço dedicado à esta pesquisa.

Aos amigos Aurélio, Caroline, César, Daniel, Felipe, Júlio, Marcelo, Pablo e Tássio, do Grupo de Automação e Controle de Sistemas, agradeço pelo companheirismo e incentivo.

**Análise de uma Classe de Sistemas Não-Lineares Incertos Mediante
Linearização por Realimentação de Estados**

por

Eduardo Rath Rohr

Submetido ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
em Setembro de 2008, como requisito parcial
para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia

Resumo

Apresenta-se nesta dissertação uma metodologia para análise da estabilidade de uma classe de sistemas não-lineares incertos sujeitos à linearização por realimentação de estados. A classe de sistemas abordada inclui sistemas cujas não-linearidades possam ser escritas nas formas racional e polinomial, bem como não-linearidades do tipo saturação na entrada de controle. A estabilidade é analisada dentro de um espaço limitado de variação paramétrica e o método apresentado proporciona a obtenção de uma estimativa para o domínio de atração do sistema. As condições de estabilidade são escritas em um conjunto finito de restrições matriciais lineares dependentes dos estados e dos parâmetros. Estas restrições são resolvidas numericamente através de *solvers* padrão.

**Analysys of a Class of Uncertain Nonlinear Systems Subject to State
Feedback Linearization**

by

Eduardo Rath Rohr

Submitted to the Graduate Program of Electrical Engineering of
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
on September, 2008, in partial fulfillment of the
requirements for the degree of
Master of Engineering

Abstract

This work presents a methodology for the stability analysis of a class of uncertain nonlinear systems subject to state feedback linearization. The proposed approach allows the analysis of systems whose nonlinearities can be represented in the rational and polynomial forms, as well as saturation in the control input. The stability is analyzed in a bounded set of uncertainties and the proposed method provides an estimate of the domain of attraction of the controlled system. The stability conditions are cast in terms of a finite set of state- and parameter-dependent linear matrix inequalities (LMI), which are numerically solved via standard LMI solvers.

Índice

1	Introdução	1
2	Conceitos Básicos	5
2.1	Linearização por Realimentação de Estados	5
2.2	Método direto de Lyapunov	8
2.2.1	Complemento de Schur	11
2.2.2	Lema de Finsler	12
2.2.3	Procedimento-S	12
2.3	Representações Alternativas	13
2.3.1	Representação Algébrico-Diferencial	13
2.3.2	Mudança de Variáveis	14
3	Sistemas sem Saturação	16
3.1	Análise no Domínio Original	17
3.1.1	Formulação do Problema	17
3.1.2	Análise da Estabilidade	18
3.1.3	Exemplo	23
3.2	Análise no Domínio Linearizado	29
3.2.1	Formulação do Problema	30

3.2.2	Análise da Estabilidade	32
3.2.3	Exemplo – Pêndulo Invertido	36
3.3	Comentários Gerais	41
4	Sistemas Sujeitos à Saturação no Controle	43
4.1	Tratamento da saturação	43
4.2	Análise no Domínio Original	47
4.2.1	Exemplo	51
4.3	Análise no Domínio Linearizado	56
4.3.1	Exemplo	61
4.4	Comentários Gerais	63
5	Conclusões e trabalhos futuros	64
5.1	Conclusão	64
5.2	Trabalhos Futuros	65
	Apêndice	67
A.1	Script MATLAB utilizado no exemplo 4.2.1	68
A.2	Script MATLAB utilizado para gerar curvas de nível	73

Lista de Figuras

3-1	Pêndulo invertido	24
3-2	Domínio de atração e trajetórias de fase.	28
3-3	Domínio de atração e trajetórias de fase no domínio $\theta \times \dot{\theta}$	29
3-4	Domínio de atração e trajetórias de fase.	38
3-5	Domínio de atração e trajetórias de fase no domínio $\theta \times \dot{\theta}$	39
3-6	Simulações com $\delta_1 = 0,104$	40
3-7	Comparação dos Domínios de Atração em $\theta \times \dot{\theta}$	41
4-1	Funções $\text{sat}(u(x))$ e $\psi(u(x))$	45
4-2	Aproximação contínua da função saturação.	46
4-3	Domínio de atração e trajetórias de fase.	55
4-4	Trajetoórias de fase simuladas.	57

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros Nominais do Pêndulo	25
4.1	Incertezas Paramétricas	55

Lista de Símbolos e Abreviações

LMI *Linear Matrix Inequalities* ou desigualdades matriciais lineares;

★ Termos que podem ser deduzidos por simetria;

P' Transposta da matriz P ;

\mathfrak{R}^n Espaço euclidiano de dimensão n ;

$\mathfrak{R}^{n \times m}$ Conjunto de matrizes reais com n linhas e m colunas;

$P > 0$ A matriz P é positiva-definiva;

I Matriz identidade;

$L_f h(\cdot)$ Derivada de Lie de $h(\cdot)$ em relação à f ;

$T(\cdot)$ Difeomorfismo;

x Vetor de estados no domínio original;

\dot{x} Derivada temporal de x ;

z Vetor de estados no domínio linearizado;

ξ Vetor de estados utilizados para linearização entrada-saída;

η Vetor de estados correspondentes à dinâmica zero;

$u(x)$	Sinal de controle;
$y(x)$	Sinal de saída;
n	Ordem de um sistema;
ρ	Grau relativo de um sistema;
π	Vetor que concentra as não-linearidades de um sistema;
w	Vetor que concentra as não-linearidades de uma lei de controle;
B_x	Politopo no espaço de estados no domínio original que contém os estados admissíveis;
B_ξ	Politopo no espaço de estados no domínio linearizado que contém os estados admissíveis;
δ_i	Incerteza paramétrica no <i>i-ésimo</i> parâmetro;
Δ	Politopo no espaço dos parâmetros que contém as incertezas paramétricas;
D	Domínio no espaço de estados;
\mathcal{D}	Domínio de atração no espaço de estados;
\mathcal{V}	Conjunto dos vértices de um politopo;
g	Aceleração gravitacional;
M	Massa na ponta da haste do pêndulo;
l	Comprimento da haste do pêndulo;
K	Coefficiente de atrito entre a haste e o mancal do pêndulo.

Capítulo 1

Introdução

Grande parte dos sistemas físicos pode ser descrita por equações diferenciais não-lineares, o que explica o grande interesse existente nesta área de pesquisa [1, 2]. Ainda, na grande maioria dos casos, estas equações diferenciais não são completamente conhecidas, principalmente no que diz respeito aos seus parâmetros. A preocupação com sistemas incertos deu origem à Teoria de Controle Robusto [3].

Uma abordagem bastante utilizada para o trabalho com sistemas não-lineares é a linearização, o que possibilita a aplicação do amplo conjunto de ferramentas existente para sistemas lineares [4]. A linearização por realimentação de estados baseia-se na construção de uma lei de controle que cancele de forma exata as não-linearidades do sistema, permitindo a imposição de uma nova dinâmica linear [5]. Esta abordagem possui a vantagem de ser válida para grande parte do espaço dos estados, porém para o projeto de tal controlador é condição necessária o conhecimento dos parâmetros e estados do sistema, o que não ocorre na maioria das situações reais. Quando houverem incertezas paramétricas ou de medição, o cancelamento não será exato e o comportamento do sistema irá diferir do desejado, podendo inclusive levar à instabilidade.

A linearização clássica prevê a transformação do sistema não-linear em uma cadeia de integradores na forma Brunovsky, que sabidamente é pouco robusta a incertezas [6]. Uma lineariza-

ção por realimentação de estados menos sensível a variações paramétricas foi proposta por [7]. Nesta abordagem, os autores propõem que a dinâmica não-linear do sistema seja transformada em sua aproximação linear em torno de um ponto através da linearização por realimentação de estados. Alguns trabalhos utilizam mais uma malha de controle para estabilizar e atingir requisitos de desempenho do sistema linearizado. É o caso de [8] que utilizou um controlador McFarlane-Glover H_∞ [9, 10] associado à linearização robusta de [7].

Outro fator que pode degradar consideravelmente o desempenho da linearização exata e até mesmo tornar o sistema instável é a saturação dos atuadores. São poucas as pesquisas que consideram o efeito da saturação de um sistema que utiliza linearização por realimentação de estados, sendo que algumas delas restringem a operação do sistema em uma região no espaço de estados em que o controle não satura. Em [11] os autores propõem a determinação de uma região no espaço de estados na qual a linearização por realimentação de estados não satura os atuadores. Baseados na limitação do sinal de controle para os estados dentro desta região, os autores calculam as trajetórias passíveis de serem implementadas sem que haja saturação. O trabalho de [12] utiliza controle em tempo discreto de sistemas não-lineares incertos sujeitos a incertezas paramétricas e saturação. A cada instante de tempo, a lei de controle linear é recalculada através de um conjunto de *LMI* resolvidas nos vértices das matrizes linearizadas incertas que descrevem o comportamento dinâmico do sistema. Em [13] os autores propõem a obtenção de uma região no espaço de estados dentro da qual os atuadores não saturem através da resolução do valor final da equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi.

Em [14] um controlador baseado em linearização por realimentação de estados aproximada é descrito. Nesta abordagem, os autores propõem um observador com efeito integral para estimar as diferenças geradas por incertezas e saturação. A síntese do controle é feita de maneira probabilística, utilizando algoritmos genéticos.

Recentemente, problemas de análise de sistemas não-lineares têm sido descritos em termos de Desigualdades Matriciais Lineares (*LMI*). As abordagens utilizadas diferem entre si na forma

em que as condições de estabilidade de Lyapunov são escritas em um conjunto de *LMI*. A técnica conhecida como Soma de Quadrados utiliza programação semi-definida para sistemas polinômiais a fim de decompor as desigualdades de Lyapunov em termos de somas de quadrados [15]. Em [16], as condições de estabilidade são descritas em polinômios homogêneos. A representação por frações lineares, utilizada por [17], decompõe o sistema em frações lineares e utiliza uma função de Lyapunov quadrática. A abordagem apresentada em [18][19] é baseada na representação do sistema em termos de equações algébrico-diferenciais e funções de Lyapunov polinomiais. A principal vantagem em expressar a dinâmica de um sistema em decomposições não-lineares é que a estrutura original do sistema é mantida, permitindo a utilização da teoria de controle robusto clássica [20] para controle e filtragem [21], [22].

O objetivo desta dissertação é desenvolver ferramentas para análise de uma classe de sistemas não-lineares incertos submetidos a um controle do tipo linearização por realimentação de estados. A classe de sistemas não-lineares que será abordada inclui sistemas de fase mínima cujas não-linearidades possam ser escritas nas formas racional ou polinomial e ainda sistemas sujeitos à saturação. A análise das propriedades de sistemas não-lineares será feita através do método direto de Lyapunov. A solução numérica das condições geradas por este método será feita por *solvers* projetados para a solução deste tipo de problema.

No capítulo 2 serão apresentados os fundamentos necessários à formalização do problema de controle não-linear. Será apresentada uma breve revisão de linearização por realimentação de estados, seguida de alguns resultados básicos da teoria de Lyapunov, que será utilizada para escrever as condições de estabilidade em termos de desigualdades matriciais lineares.

O capítulo 3 apresenta a análise da estabilidade da classe de sistemas lineares considerada nesta dissertação, sem considerar a restrição de saturação na entrada de controle. As condições de estabilidade são deduzidas tanto para o sistema representado no domínio original do problema, quanto para o domínio linearizado. Por domínio original, entenda-se a representação do sistema nas variáveis em que o problema é formulado. O domínio linearizado é o domínio transformado

pelo difeomorfismo utilizado para a síntese da lei de controle.

No capítulo 4, a análise da estabilidade é estendida para sistemas sujeitos à saturação na entrada de controle. Assim como no capítulo 3, as condições de estabilidade são apresentadas nos domínios original e linearizado.

Conclusões e sugestões para trabalhos futuros são apresentados no capítulo 5.

Com o objetivo de ilustrar a metodologia proposta, a estabilidade do sistema que descreve o comportamento de um pêndulo invertido é analisada nos capítulos 3 e 4. As condições de estabilidade foram escritas utilizando o pacote YALMIP [23] e os problemas de otimização convexo foram resolvidos com os pacotes Sedumi [24] e SDPT-3 [25]. Todos os pacotes mencionados podem ser utilizados na plataforma *MATLAB*. As simulações foram realizadas no Simulink.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Neste capítulo serão apresentadas as principais ferramentas matemáticas que serão utilizadas no desenvolvimento da dissertação.

2.1 Linearização por Realimentação de Estados

A linearização por realimentação de estados baseia-se na transformação algébrica parcial ou total da dinâmica não-linear de um sistema em uma nova dinâmica linear arbitrariamente escolhida.

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.1)$$

$$y = h(x) \quad (2.2)$$

onde $f : D \mapsto \mathfrak{R}^n$, $g : D \mapsto \mathfrak{R}^n$ e $h : D \mapsto \mathfrak{R}$ são funções suaves em um domínio $D \subset \mathfrak{R}^n$.

Antes de apresentar a definição de sistemas linearizáveis por realimentação de estados serão apresentadas as definições de derivada de Lie, grau relativo de um sistema e difeomorfismo.

Definição 1 *Seja $h(x) : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}$ uma função escalar suave e $f(x) : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^n$ um campo*

vetorial suave no \mathbb{R}^n . A derivada de Lie de $h(x)$ em relação a $f(x)$ é uma função escalar definida por (2.3).

$$L_f h(x) \triangleq \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) \quad (2.3)$$

Pode-se definir derivadas de Lie repetidas de forma recursiva, conforme apresentado em (2.4).

$$L_f^i h(x) = L_f(L_f^{i-1} h(x)), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

A seguir, será apresentado o conceito de grau relativo de um sistema.

Definição 2 O grau relativo do sistema (2.1-2.2) é dito ρ , $1 \leq \rho \leq n$, em uma região $D_0 \subset D$ se

$$\begin{aligned} L_g L_f^i h(x) &= 0, & i = 0, 1, \dots, \rho - 2 \\ L_g L_f^{\rho-1} h(x) &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

para todo $x \in D_0$.

Pode-se entender difeomorfismo como uma generalização do conceito de transformação de similaridades para sistemas lineares [4].

Definição 3 [5] Uma função $T(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, definida em uma região D é chamada de difeomorfismo se for suave e sua função inversa $T(\cdot)^{-1}$ existir e também for suave.

Com estas definições pode-se apresentar a definição de sistema linearizável por realimentação de estados.

Definição 4 [2] Um sistema não-linear (2.1) é dito ser linearizável no sentido entrada-estado se existir um difeomorfismo $T : D \mapsto \mathbb{R}^n$ tal que a mudança de variáveis $z = T(x)$ transforma o sistema (2.1) na forma

$$\dot{z} = Az + B\gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad (2.6)$$

com o par (A, B) controlável e $\gamma(x)$ não-singular para todo $x \in D$. Define-se as funções $\gamma : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}$ e $\alpha : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}$.

O conceito de sistema linearizável pode ser estendido para o sentido entrada-saída utilizando um difeomorfismo apropriado que permita o controle dos estados ξ influenciados diretamente pelo controle u . Para realizar a linearização entre a entrada u e a saída y , pode-se utilizar a transformação de variáveis $z = T(x)$, com

$$T(x) \triangleq \begin{bmatrix} T_1(x) \\ \text{---} \\ T_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1}h(x) \\ \text{---} \\ \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-\rho}(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \xi \\ \text{---} \\ \eta \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

onde $\phi_1 \dots \phi_{n-\rho}$ são escolhidos tais que $T(x)$ é um difeomorfismo, $D_0 \subset D$ e

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} G(x) = 0, \text{ para } 1 \leq i \leq n - \rho, \forall x \in D_0. \quad (2.8)$$

A mudança de variáveis (2.7) transforma o sistema (2.1-2.2) em

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} = A_C \xi + B_C [\gamma(x)u - \alpha(x)] \\ y = C_c \xi \end{cases} \quad (2.9)$$

onde $\xi \in \mathfrak{R}^\rho$, $\eta \in \mathfrak{R}^{(n-\rho)}$, (A_c, B_c, C_c) é uma representação canônica de uma cadeia de ρ

integradores,

$$f_0(\eta, \xi) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \right|_{x=T^{-1}(\xi)} \quad (2.10)$$

$$\gamma(x) = L_g L_f^{\rho-1} h(x) \quad (2.11)$$

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}. \quad (2.12)$$

As equações (2.10-2.12) estão na forma conhecida como *forma normal* [1]. Esta forma decompõe o sistema (2.1-2.2) em uma parte externa ξ e uma parte interna η . A parte externa é linearizada pela lei de controle

$$u = \alpha(x) + \gamma^{-1}(x)v \quad (2.13)$$

onde v é o sinal que será imposto à derivada de ordem ρ da saída, conforme apresentado em (2.14).

$$\frac{d^\rho y}{dt^\rho} = v \quad (2.14)$$

A parte interna, representada por η , é chamada de *dinâmica zero*. A dinâmica zero pode ser entendida como uma extensão do conceito de zeros de uma função de transferência linear. Um sistema é dito de *fase mínima* se a parte referente à dinâmica zero possuir um ponto de equilíbrio assintoticamente estável dentro do domínio de interesse. Nesta dissertação serão considerados apenas sistemas cuja dinâmica zero é estável.

2.2 Método direto de Lyapunov

O método direto de Lyapunov é baseado na extensão da idéia de que se a energia total de um sistema é continuamente dissipada, então este sistema irá convergir para um ponto de equilíbrio

[2]. Desta forma, pode-se concluir sobre a estabilidade de um sistema através da análise do comportamento de uma função escalar.

O seguinte lema apresenta condições suficientes para mostrar a estabilidade e o domínio de atração de um sistema.

Lema 1 *Considere o sistema (2.1). Suponha que existam escalares positivos ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 e uma função continuamente diferenciável $V : D \mapsto \mathfrak{R}$ que satisfazem as seguintes condições:*

$$\epsilon_1 x'x \leq V(x) \leq \epsilon_2 x'x, \quad \forall x \in D \quad (2.15)$$

$$\dot{V}(x) \leq -\epsilon_3 x'x, \quad \forall x \in D \quad (2.16)$$

$$\mathcal{D} \triangleq \{x : V(x) \leq 1\} \subset D. \quad (2.17)$$

Então $V(x)$ é uma função de Lyapunov em D . Ainda, para todo $x(0) \in \mathcal{D}$ a trajetória de $x(t)$ permanece dentro de D e converge para a origem quando $t \rightarrow \infty$.

Não existe um método sistemático para obtenção de funções de Lyapunov para qualquer tipo de sistema, porém a função quadrática $V(x) = x'Px$, $P = P' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é largamente utilizada, principalmente, no caso de sistemas lineares invariantes no tempo, visto que a função de Lyapunov quadrática é necessária e suficiente para provar a estabilidade. No caso de sistemas incertos e também não-lineares, a função quadrática pode levar a resultados conservadores [26][19]. Entretanto, a função quadrática ainda é bastante utilizada devido a simplicidade na determinação numérica das condições de estabilidade [27].

A seguir será introduzido o conceito de matriz positiva definida.

Definição 5 *Uma matriz quadrada P é dita positiva definida se e somente se*

$$x'Px > 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Se a desigualdade acima admitir $x'Px = 0$, a matriz M é dita positiva semi-definida.

Uma condição necessária para que uma matriz seja positiva definida é que todas suas submatrizes principais também sejam positiva definidas. Isto pode ser facilmente verificado se considerarmos um vetor x com zeros nas linhas que não pertençam à submatriz escolhida.

Uma propriedade útil de matrizes positiva definidas é que todos seus autovalores são positivos.

As seguintes notações serão utilizadas na dissertação:

- $P > 0$:= A matriz P é positiva definida;
- $P \geq 0$:= A matriz P é positiva semi-definida;
- $P < 0$:= A matriz P é negativa definida;
- $P \leq 0$:= A matriz P é negativa semi-definida.

Para exemplificar o uso da definição de matriz positiva e negativa definida na teoria de Lyapunov, considere o exemplo apresentado em (2.18), sendo $x \in \mathfrak{R}^n$ o vetor de estados e $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ uma matriz constante.

$$\dot{x} = Ax \tag{2.18}$$

Para a função de Lyapunov $V(x) = x'Px$, a derivada temporal é dada por

$$\dot{V}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x}. \tag{2.19}$$

Substituindo (2.18) em (2.19), pode-se escrever as condições estabilidade como

$$\begin{aligned} x'Px &> 0 \\ (Ax)'Px + x'PAx &< 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

As condições acima são satisfeitas se e somente se existir uma matriz $P = P' > 0$ tal que

$$A'P + PA < 0. \quad (2.21)$$

Para este exemplo, o sistema (2.18) será estável se e somente se existir uma matriz P que satisfaça (2.21) [4].

A seguir, serão apresentados três resultados que serão utilizados ao longo da dissertação.

2.2.1 Complemento de Schur

Supondo que M e Q são matrizes simétricas e R é uma matriz qualquer, de dimensões apropriadas, as seguintes afirmações são equivalentes [28]:

a) As desigualdades matriciais $Q > 0$ e $M - RQ^{-1}R' > 0$ são satisfeitas.

b) A desigualdade matricial $\begin{bmatrix} M & R \\ R' & Q \end{bmatrix} > 0$ é satisfeita.

Isto pode ser facilmente verificado utilizando os argumentos que seguem. As duas desigualdades presentes em (a) são equivalentes à desigualdade

$$\begin{bmatrix} M - RQ^{-1}R' & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} > 0. \quad (2.22)$$

Multiplicando (2.22) à esquerda e à direita pela matriz não-singular

$$\begin{bmatrix} I & RQ^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

e sua transposta, respectivamente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} I & RQ^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M - RQ^{-1}R' & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ Q^{-1}R' & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & R' \\ R & Q \end{bmatrix} > 0$$

Portanto a desigualdade (b) se verifica se e somente se a afirmação (a) também for verdadeira.

2.2.2 Lema de Finsler

A seguinte versão do Lema de Finsler será útil neste trabalho [29]:

Dadas matrizes $A_i = A'_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $M_i \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$, a desigualdade

$$x'A_ix > 0, \forall x \in \mathfrak{R}^n : M_ix = 0, x \neq 0, i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.23)$$

se verifica se e somente se existir uma matriz $L \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ tal que $A_i + LM_i + M'_iL' > 0$.

2.2.3 Procedimento-S

A técnica conhecida como procedimento-S [20] permite agrupar restrições de desigualdade na forma de desigualdades matriciais lineares. A seguinte versão do procedimento-S se aplica a desigualdades não-estritas.

Sejam F_0, \dots, F_p funções quadráticas na variável $x \in \mathfrak{R}^n$:

$$F_i(x) \triangleq x'Q_ix + 2u'_ix + v_i, \quad i = 0, \dots, p, \quad (2.24)$$

onde $Q_i = Q'_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $u_i \in \mathfrak{R}^n$ e $v_i \in \mathfrak{R}$. Pode-se representar (2.24) de forma equivalente por

$$F_i(x) \triangleq \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Q_i & u_i \\ u'_i & v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 0, \dots, p. \quad (2.25)$$

Será considerada a seguinte condição em F_0, \dots, F_p :

$$F_0(x) \geq 0, \forall x : F_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, p. \quad (2.26)$$

A condição (2.26) será satisfeita se existirem escalares $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$ tais que

$$F_0(x) - \sum_{i=1}^p \tau_i F_i(x) \geq 0, \forall x \in \mathfrak{R}^n.$$

Uma versão semelhante do procedimento-S pode ser aplicada em desigualdades estritas.

2.3 Representações Alternativas

A descrição de um conjunto de condições em termos de desigualdades matriciais lineares, ou *LMI*, como são mais conhecidas, possui a vantagem de possuir métodos numéricos eficientes [20]. Para representar as condições de estabilidade de sistemas não-lineares em termos de desigualdades matriciais lineares, faz-se o uso da representação chamada de *representação algébrico-diferencial* [22], que será apresentada a seguir.

2.3.1 Representação Algébrico-Diferencial

Um sistema dinâmico, cujo ponto de equilíbrio é a origem, que possua não-linearidades dos tipos racional e polinomial, livre de singularidades no domínio x pode ser representado por

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1(x)x + A_2(x)\pi \\ 0 = \Omega_1(x)x + \Omega_2(x)\pi \end{cases} \quad (2.27)$$

onde $\pi \in \mathfrak{R}^{n_\pi}$ concentra os termos não-lineares e as matrizes $A_1(x) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $A_2(x) \in \mathfrak{R}^{n \times n_\pi}$, $\Omega_1 \in \mathfrak{R}^{n_\pi \times n}$ e $\Omega_2 \in \mathfrak{R}^{n_\pi \times n_\pi}$ são afins em x . Para que a representação acima seja bem definida, é necessário que a matriz Ω_2 possua posto completo para todo x pertencente à região de interesse,

de tal forma que o vetor de não-linearidades possa ser representado de forma inequívoca por

$$\pi = -\Omega_2(x)^{-1}(\Omega_1(x)x).$$

Para exemplificar este procedimento, considere o sistema escalar (2.28).

$$\dot{x} = x^2 + \frac{x^3}{1+x^2}. \quad (2.28)$$

Utilizando o vetor auxiliar

$$\pi = \left[\frac{x^2}{1+x^2} \quad \frac{x}{1+x^2} \right]' = \frac{1}{1+x^2} [x^2 \quad x]'$$

pode-se representar o sistema (2.28) na forma (2.27) com as matrizes

$$\begin{aligned} A_1 &= [x] & A_2 &= [x \quad 0] \\ \Omega_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \Omega_2 &= \begin{bmatrix} -1 & x \\ -x & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Com esta representação, é possível definir qualquer sistema racional sem singularidades para todo x de interesse apenas com as matrizes $A_1(x)$, $A_2(x)$, $\Omega_1(x)$ e $\Omega_2(x)$ afins em x [17].

2.3.2 Mudança de Variáveis

Através de uma mudança de variáveis adequada, pode-se representar sistemas com não-linearidades trigonométricas na forma racional, representável por (2.27).

Para a mudança de variáveis $Q : \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$ definida por

$$\theta = Q(q) = 2 \tan^{-1}(q) \quad (2.29)$$

as seguintes relações se verificam:

$$\sin(\theta) = \frac{2q}{1+q^2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1-q^2}{1+q^2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{2q}{1-q^2}$$

O sistema resultante desta transformação de variáveis apresenta apenas não-linearidades polinomiais e racionais, podendo ser representado por (2.27).

Capítulo 3

Sistemas sem Saturação

Neste capítulo serão apresentados dois métodos para análise da estabilidade de uma classe de sistemas não-lineares incertos quando submetidos a um controle do tipo linearização por realimentação de estados.

A seção 3.1 apresenta a análise da estabilidade para um sistema descrito em seu domínio original, isto é, antes de ser transformado pelo difeomorfismo utilizado para a síntese da lei de controle de linearização por realimentação de estados. Neste domínio, o sinal de controle aparece de forma explícita nas condições de estabilidade, o que permite uma futura aplicação na síntese de controle.

Na seção 3.2 a análise da estabilidade será realizada no domínio transformado pelo difeomorfismo utilizado para a síntese da lei de controle. Este domínio será chamado de domínio linearizado, no qual a dinâmica predominante é linear, pois aparecem termos não-lineares que não são completamente cancelados devido às incertezas paramétricas.

A classe de sistemas abordada nesta análise compreende sistemas que possuam não-linearidades que possam ser escritas nas formas racional ou polinomial.

3.1 Análise no Domínio Original

Nesta seção, a análise da estabilidade será desenvolvida no domínio original do problema, permitindo a representação separada do sistema e da lei de controle. Esta abordagem possui a vantagem de não necessitar a substituição da lei de controle no sistema.

3.1.1 Formulação do Problema

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{f}(x, \delta) + \tilde{g}(x, \delta)u(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $x \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados, $\delta \triangleq [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_{n_\delta}]$ é o vetor de incertezas limitado de forma politópica por $\Delta \subset \mathfrak{R}^{n_\delta}$, $u(x) : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}$ é o sinal de controle e $y \in \mathfrak{R}$ é o sinal de saída. Considere que as funções $\tilde{f}(x, \delta) : D \times \Delta \mapsto \mathfrak{R}^n$, $\tilde{g}(x, \delta) : D \times \Delta \mapsto \mathfrak{R}^n$ e $h(x) : D \mapsto \mathfrak{R}$ possuem todas as derivadas parciais definidas e contínuas em um domínio $D \subset \mathfrak{R}^n$ e $\Delta \in \mathfrak{R}^{n_\delta}$. Supondo que $\tilde{f}(x, \delta)$, $\tilde{g}(x, \delta)$ e $h(x)$ são funções racionais nos argumentos e sem singularidades no domínio de interesse, haverá um difeomorfismo $T(x)$ apropriado para obtenção da lei de linearização por realimentação de estados. Ainda, se o sistema for de fase mínima, a dinâmica zero será estável [1].

O sistema (3.1) será representado na forma algébrico-diferencial, conforme apresentado em (3.2).

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1(x, \delta)x + A_2(x, \delta)\pi + A_3(x, \delta)u(x) \\ 0 = \Omega_1(x, \delta)x + \Omega_2(x, \delta)\pi + \Omega_3(x, \delta)u(x) \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $\pi \in \mathfrak{R}^{n_\pi}$ concentra os termos polinomiais de grau maior que 2 e racionais e as funções matriciais $A_1(x, \delta) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $A_2(x, \delta) \in \mathfrak{R}^{n \times n_\pi}$, $A_3(x, \delta) \in \mathfrak{R}^n$, $\Omega_1(x, \delta) \in \mathfrak{R}^{n_\pi \times n}$, $\Omega_2(x, \delta) \in \mathfrak{R}^{n_\pi \times n_\pi}$ e $\Omega_3(x, \delta) \in \mathfrak{R}^{n_\pi}$ são afins em x e δ . Com o objetivo de facilitar a notação, a dependência em x e δ nas matrizes $A_1, A_2, A_3, \Omega_1, \Omega_2$ e Ω_3 será omitida. Para que tal representação seja fiel, é

necessário que a matriz Ω_2 possua posto completo, de tal forma que o vetor de não-linearidades possa ser recuperado por

$$\pi = -\Omega_2^{-1}(\Omega_1 x + \Omega_3 u(x)).$$

Considere uma lei de controle não-linear descrita por

$$\begin{cases} u(x) = B_1(x)x + B_2(x)w \\ 0 = \zeta_1(x)x + \zeta_2(x)w \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $w \in \mathfrak{R}^{n_w}$ concentra os termos polinomiais de grau maior que 2 e racionais e as funções matriciais $B_1(x) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_2(x) \in \mathfrak{R}^{n \times n_w}$, $\zeta_1(x) \in \mathfrak{R}^{n_w \times n}$ e $\zeta_2(x) \in \mathfrak{R}^{n_w \times n_w}$ são afins em x . De forma semelhante à representação algébrico-diferencial, para que o vetor w seja bem definido, é necessário que a matriz ζ_2 possua posto completo, de forma que o vetor w possa ser recuperado por

$$w = -\zeta_2^{-1}(x)(\zeta_1(x)x).$$

Os problemas a serem resolvidos podem ser enunciados como:

Problema 1 *Dado o sistema não-linear (3.1), encontrar uma estimativa para a região \mathcal{D} dado o politopo Δ que contém as incertezas paramétricas.*

Problema 2 *Dado o sistema não-linear (3.1), encontrar o politopo Δ que contém as incertezas para as quais o sistema é estável dada uma região de atração mínima.*

3.1.2 Análise da Estabilidade

A função candidata de Lyapunov a ser utilizada será $V(x) = x'Px$, cuja derivada é $\dot{V}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x}$, que pode ser escrita na forma matricial, de acordo com (3.2), conforme apresentado em (3.4).

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ u \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_1'P + PA_1 & PA_2 & PA_3 \\ A_2'P & 0 & 0 \\ A_3'P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ u \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

A seguir, as condições de estabilidade apresentadas no lema 1 serão escritas na forma de desigualdades matriciais lineares.

A condição

$$\epsilon_1 x'x \leq V(x) \leq \epsilon_2 x'x, \quad \forall x \in D \quad (3.5)$$

pode ser representada por $P > 0$, uma vez que, se $P > 0$, haverá um escalar positivo ϵ_1 suficientemente pequeno tal que $\epsilon_1 x'x \leq x'Px$, por $P > 0$ ser uma desigualdade estrita (não admite a igualdade). Por outro lado, como o vetor x é limitado à região D , sempre haverá um escalar positivo ϵ_2 suficientemente grande tal que $V(x) \leq \epsilon_2 x'x, \forall x \in D$.

Para um escalar ϵ_3 positivo e suficientemente pequeno, a condição

$$\dot{V}(x) \leq -\epsilon_3 x'x, \quad \forall x \in D \quad (3.6)$$

pode ser escrita por $\dot{V}(x) < 0$.

Para transformar a condição

$$\begin{bmatrix} x \\ \pi \\ u \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_1'P + PA_1 & \star & \star \\ A_2'P & 0 & \star \\ A_3'P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ u \end{bmatrix} < 0 \quad (3.7)$$

em uma desigualdade matricial linear, pode-se acrescentar uma variável livre através do lema de Finsler, apresentado na seção 2.2.2. Desta forma, serão consideradas as relações existentes entre as variáveis que compõem o vetor $\begin{bmatrix} x' & \pi' & u' \end{bmatrix}'$ e que podem ser escritas na forma matricial de

acordo com (3.8).

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & 0 \\ B_1 & 0 & -1 & B_2 \\ \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ u \\ w \end{bmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

Note que para representar as relações existentes entre as variáveis que compõem o vetor $\begin{bmatrix} x & \pi & u \end{bmatrix}'$, é necessário incluir o vetor w .

Desta forma, para que a condição $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in S$ seja satisfeita, é suficiente que (3.9) seja verificada.

$$\begin{bmatrix} A_1'P + PA_1 & * & * & * \\ A_2'P & 0 & * & * \\ A_3'P & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & 0 \\ \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 \\ B_1 & 0 & -1 & B_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_1' & \zeta_1' & B_1' \\ \Omega_2' & 0 & 0 \\ \Omega_3' & 0 & -1 \\ 0 & \zeta_2' & B_2' \end{bmatrix} L' < 0 \quad (3.9)$$

Seja a região $B_x \subset \mathfrak{R}^n$ o politopo de estados admissíveis. A região B_x pode ser representada pelo conjunto de seus vértices, chamados neste trabalho de $\mathcal{V}(B_x)$, ou de forma equivalente, pelo conjunto de hiperplanos que delimitam seu espaço, conforme apresentado em (3.10).

$$B_x \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n : \mathcal{H}'_k x \leq 1, k = 1, 2, \dots, n_f\}. \quad (3.10)$$

onde n_f é o número de hiperplanos de B_x .

Para assegurar que o domínio de atração, dado por

$$\mathcal{D} \triangleq \{x : V(x) \leq 1\} \quad (3.11)$$

esteja limitado à região de estados admissíveis, as seguintes condições são utilizadas.

A condição $\mathcal{D} \subset B_x$ pode ser escrita utilizando uma versão da definição (3.10).

$$2 - \mathcal{H}'_k x - x' \mathcal{H}_k \geq 0, \forall x : V(x) \leq 1 \quad (3.12)$$

A desigualdade $V(x) \leq 1$ pode ser escrita como $x' P x - 1 \leq 0$. Se as condições (3.13) e (3.14) forem satisfeitas,

$$x' P x' - 1 \leq 0 \quad (3.13)$$

$$2 - \mathcal{H}'_k x - x' \mathcal{H}_k + (x' P x' - 1) > 0 \quad (3.14)$$

então $2 - \mathcal{H}'_k x - x' \mathcal{H}_k \geq 0$. A condição (3.14) pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{H}'_k \\ -\mathcal{H}_k & P \end{bmatrix} \geq 0, k = 1, \dots, n_f. \quad (3.15)$$

Nota 1 Utilizando o complemento de Schur, apresentado no capítulo anterior, pode-se mostrar que a omissão do sinal de negativo em (3.15) não altera a desigualdade.

O teorema 1 sumariza condições suficientes para a estabilidade do sistema (3.1).

Teorema 1 Considere o sistema (3.1) representado na forma (3.2). Seja B_x um politopo que contenha a origem. Se existirem matrizes constantes $P = P' > 0$ e F de dimensões apropriadas que satisfazem as desigualdades matriciais lineares (3.9) e (3.15) construídas nos vértices do politopo definido por $\mathcal{V}(B_x \times \Delta)$, então, para todo $x(0) \in \mathcal{D}$ a trajetória $x(t) \in \mathcal{D}$ e se aproxima da origem para $t \rightarrow \infty$.

Prova 1 Se as LMIs (3.9) e (3.15) forem factíveis, por convexidade, também serão verificadas para todo $x \in B_x$ e todo $\delta \in \Delta$. O restante da prova será dividido de acordo com as condições apresentadas no lema 1.

$$P > 0 \rightarrow x' P x > 0 \quad (3.16)$$

Ao multiplicar (3.9) pela esquerda por $[x' \ \pi' \ u' \ w']$ e pela direita por $[x' \ \pi' \ u' \ w']'$, obtém-se

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ u \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_1'P + PA_1 & \star & \star & \star \\ A_2'P & 0 & \star & \star \\ A_3'P & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ u \\ w \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ u \\ w \end{bmatrix}' F \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & 0 \\ \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 \\ B_1 & 0 & -1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ u \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ u \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Omega_1' & \zeta_1' & B_1' \\ \Omega_2' & 0 & 0 \\ \Omega_3' & 0 & -1 \\ 0 & \zeta_2' & B_2' \end{bmatrix} F' \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ u \\ w \end{bmatrix} < 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Como os termos

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & 0 \\ \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 \\ B_1 & 0 & -1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ u \\ w \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ u \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Omega_1' & \zeta_1' & B_1' \\ \Omega_2' & 0 & 0 \\ \Omega_3' & 0 & -1 \\ 0 & \zeta_2' & B_2' \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

resultam em matrizes de zeros, a condição (3.17) se restringe à

$$\begin{bmatrix} x \\ \pi \\ u \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_1'P + PA_1 & \star & \star & \star \\ A_2'P & 0 & \star & \star \\ A_3'P & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ u \\ w \end{bmatrix} < 0 \tag{3.19}$$

que é a representação na forma matricial de $\dot{V}(x) < 0$. De forma semelhante, a condição $\mathcal{D} \subset B_x$ pode ser assegurada através da multiplicação de (3.15) à esquerda por $[1 \ x']$ e à direita

por $[1 \ x']'$, da qual obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{H}'_k \\ -\mathcal{H}_k & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \geq 0, k = 1, \dots, n_f. \quad (3.20)$$

Note que (3.20) equivale à $1 - x' \mathcal{H}_k - \mathcal{H}'_k x + V(x) \geq 0, k = 1, \dots, n_f$. Se $V(x) \leq 1$, então $2 - x' \mathcal{H}_k - \mathcal{H}'_k x \geq 0, k = 1, \dots, n_f$, que é a definição da região B_x , apresentada em (3.12).

O problema 1 – encontrar uma estimativa para o domínio de atração, dado um limite poli-tópico para as incertezas, pode ser resolvido por (3.21).

$$\min \text{trace}(P) \quad \text{s.a.} \quad P > 0, \quad (3.9) \text{ e } (3.15) \quad (3.21)$$

Para resolver o problema 2 – maximizar a região politópica que contém as incertezas dado um domínio de atração mínimo, pode-se realizar uma busca em cada um dos parâmetros incertos.

Pode-se determinar os pontos mínimos nos quais o elipsóide que representa o domínio de atração corta os eixos dos estados estipulando um valor máximo para os valores da diagonal principal da matriz P . Para tal, considere uma região de atração mínima determinada pelos parâmetros $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ de tal forma que

$$\alpha_i \leq x_i^2 |_{x_j=0}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j \neq i.$$

Estas restrições podem ser escritas como $P_{i,i} \leq (\alpha_i)^{-1}, i = 1, \dots, n$.

3.1.3 Exemplo

Para exemplificar a metodologia desenvolvida, considere o exemplo de um pêndulo invertido, apresentado na figura 3-1.

O comportamento dinâmico deste sistema pode ser descrito por (3.22), onde θ é o ângulo de

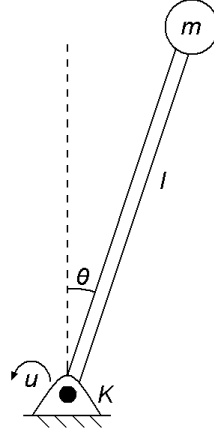


Figura 3-1: Pêndulo invertido

inclinação da haste, g é a aceleração gravitacional, l é o comprimento da haste, M é a massa da esfera e K é o coeficiente de atrito entre o mancal e a haste.

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin(\theta)}{l} - \frac{K \dot{\theta}}{M} + \frac{u}{Ml^2} \quad (3.22)$$

A mudança de variáveis apresentada em (2.29) pode ser utilizada para que a representação do sistema possua apenas não-linearidades racionais, levando à equação (3.23).

$$\ddot{q} = \frac{2q\dot{q}^2}{1+q^2} + \frac{gq}{l} - \frac{K\dot{q}}{M} + \frac{u(1+q^2)}{2Ml^2} \quad (3.23)$$

Definindo $x_1 = q$ e $x_2 = \dot{q}$, o sistema (3.23) pode ser representado na forma de espaço de estados por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{2x_1x_2^2}{1+x_1^2} + \frac{gx_1}{l} - \frac{Kx_2}{M} + \frac{u(1+x_1^2)}{2Ml^2} \\ y &= x_1. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Os parâmetros utilizados são apresentados na tabela 3.1.

Utilizando os procedimentos descritos no capítulo anterior para a síntese da lei de controle de

Tabela 3.1: Parâmetros Nominais do Pêndulo

M	2 kg
l	1 m
g	9,8 m/s ²
K	0,5 N.s/m

linearização por realimentação de estados, verifica-se que o grau relativo coincide com a ordem do sistema, portanto $T(x) = T_1(x)$. O difeomorfismo $T(x)$ obtido por (2.7) é apresentado em (3.25).

$$T(x) = z = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Para análise da robustez serão consideradas incertezas nos parâmetros M e K , de tal forma que o sistema apresente parâmetros $M(1 + \delta_1)$ e $K(1 + \delta_2)$ para a massa e coeficiente de atrito, respectivamente. O sistema incerto será dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{2x_1x_2^2}{1+x_1^2} + \frac{gx_1}{l} - \frac{K(1+\delta_2)x_2}{M(1+\delta_1)} + \frac{u(1+x_1^2)}{2M(1+\delta_1)l^2} \cdot \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

A lei de controle obtida a partir do sistema nominal é apresentada em (3.27).

$$u(x) = \frac{2Ml^2}{(1+x_1^2)} \left((-k_1x_1 - k_2x_2) - \frac{2x_1x_2^2}{1+x_1^2} - \frac{gx_1}{l} + \frac{Kx_2}{M} \right) \quad (3.27)$$

onde k_1 e k_2 determinam a localização dos autovalores do sistema nominal em malha fechada, de acordo com as raízes da equação

$$s_i^n + k_1s_i^{n-1} + \dots + k_{n-1}s + k_n = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.28)$$

O sistema (3.24) pode ser representado na forma algébrico-diferencial pelas matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 0 & \frac{-K(1+\delta_2)}{M} & \frac{1}{2Ml^2} & \frac{x_1}{2Ml^2} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} -1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1+\delta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1+\delta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1+\delta_1) \end{bmatrix}, \quad \Omega_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

com $\pi = \left[\frac{x_1 x_2}{(1+x_1^2)} \quad \frac{x_1}{(1+x_1^2)} \quad \frac{x_1^2}{(1+x_1^2)} \quad \frac{x_2}{(1+\delta_1)} \quad \frac{u}{(1+\delta_1)} \quad \frac{x_1 u}{(1+\delta_1)} \right]'$.

A lei de controle que realiza a linearização por realimentação de estados, apresentada em (3.27) pode ser expressa em termos de soma de quadrados por:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}', \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2Ml^2(k_1 - g/l) \\ 0 \\ 2Ml^2(k_2 + K/M) \\ -4x_2Ml^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}', \quad (3.29)$$

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \zeta_2 = \begin{bmatrix} -1 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

utilizando $w = \left[\frac{x_1}{(1+x_1^2)} \quad \frac{x_1^2}{(1+x_1^2)} \quad \frac{x_2}{(1+x_1^2)} \quad \frac{x_1x_2}{(1+x_1^2)^2} \quad \frac{x_1}{(1+x_1^2)^2} \quad \frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2} \right]'$.

Neste exemplo será considerado o problema de maximizar cada uma das dimensões do polítopo de incertezas Δ dadas as restrições $|\theta(0)| < 2,2143 \text{ rad}$ e $|\dot{\theta}(0)| < 2 \text{ rad/s}$, que quando mapeadas nas variáveis x_1 e x_2 resultam em $|x_1(0)| < 2$ e $|x_2(0)| < 1$. As incertezas máximas para as quais se encontrou solução foram $\delta_1 = 0,084$ e $\delta_2 = 0,99$. Note que para o caso nominal, ou seja $\delta_1 = 0$ e $\delta_2 = 0$, a lei (3.27) estabiliza globalmente o sistema (3.24).

O domínio de atração encontrado é apresentado em (3.30).

$$x : x' \begin{bmatrix} 509 & 265 \\ 265 & 241 \end{bmatrix} x \leq 1 \quad (3.30)$$

A figura 3-2 apresenta o domínio de atração encontrado e diversas trajetórias de fase, cuja condição inicial satisfaz $x'Px = 1$, obtidas através de simulações.

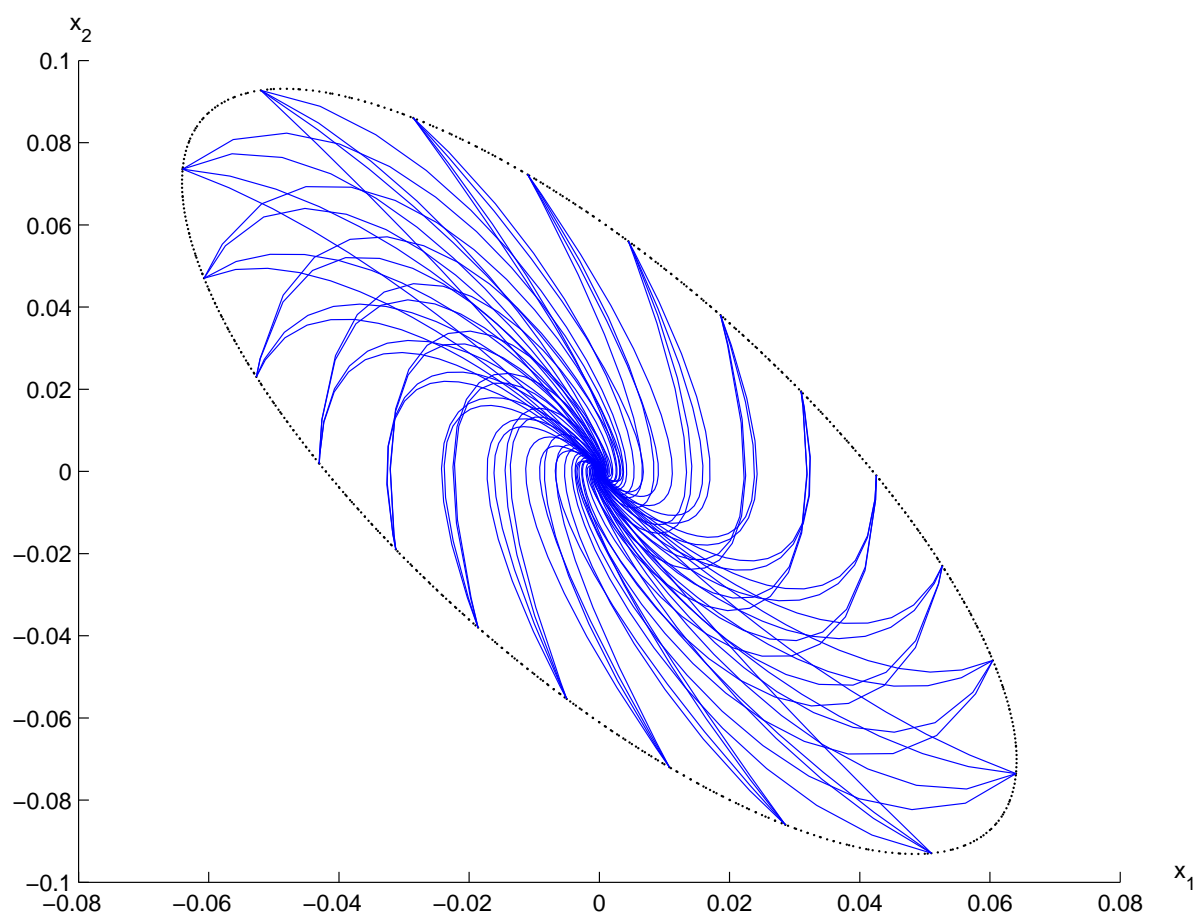


Figura 3-2: Domínio de atração e trajetórias de fase.

Alternativamente, o domínio de atração pode ser representado nas variáveis θ e $\dot{\theta}$, conforme apresentado na figura 3-3.

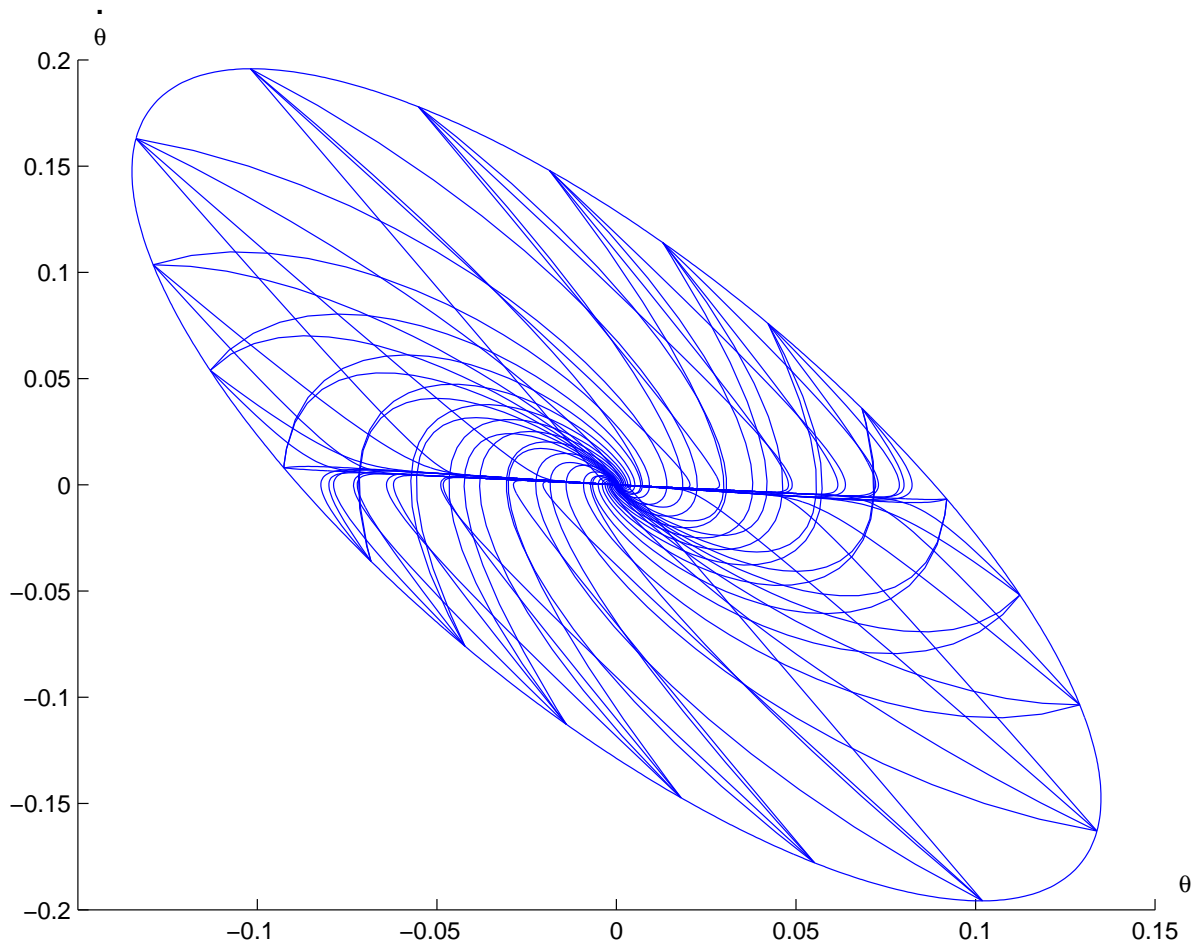


Figura 3-3: Domínio de atração e trajetórias de fase no domínio $\theta \times \dot{\theta}$.

3.2 Análise no Domínio Linearizado

A linearização por realimentação de estados prevê a utilização de um difeomorfismo para transformar o domínio no qual o sistema é representado. O domínio criado por esta transformação será chamado de domínio linearizado.

3.2.1 Formulação do Problema

Considere o seguinte sistema não-linear

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.31)$$

onde $x \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados, $u(x) \in \mathfrak{R}$ é o sinal de controle e $y \in \mathfrak{R}$ é o sinal de saída. Considere que as funções $f(x) : D \mapsto \mathfrak{R}^n$, $g(x) : D \mapsto \mathfrak{R}^n$ e $h(x) : D \mapsto \mathfrak{R}$ possuem todas as derivadas parciais definidas e contínuas em um domínio $D \subset \mathfrak{R}^n$. Considere que o conjunto de estados admissíveis pode ser representado pela região politópica $B_x \in \mathfrak{R}^n$, que contém a origem.

Para a transformação de variáveis $z = [\xi' \ \eta']' = T(x)$, baseada no difeomorfismo $T(x)$ definido em (2.7), o sistema (3.31) pode ser representado por

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} = A_C \xi + B_C [\gamma(x)u(x) + \alpha(x)] \\ y = C_c \xi \end{cases} \quad (3.32)$$

onde $\xi \in \mathfrak{R}^\rho$ e $\eta \in \mathfrak{R}^{n-\rho}$ são os vetores de estados, $\gamma(x)$ e $\alpha(x)$ estão definidas em (2.11 – 2.12),

$$A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Note que o difeomorfismo utilizado, baseado nas derivadas de Lie, preserva a classe de não linearidades polinomiais e racionais.

Será analisada somente a estabilidade da parte externa de (3.32), representada pelo vetor de estados ξ . Caso se verifique que esta parte é assintoticamente estável, pode-se fazer uma análise

separada da estabilidade do sistema autônomo $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$.

Utilizando a lei de controle (3.34), a parte externa de (3.32) pode ser representada por (3.35).

$$u(\xi) = \frac{v(\xi) - \alpha(T^{-1}(x))}{\gamma(T^{-1}(x))} \quad (3.34)$$

$$\dot{\xi} = A_C \xi + B_C v(\xi) \quad (3.35)$$

Será considerado o problema da regulação em torno da origem, portanto a escolha de uma lei de controle linear

$$v(\xi) = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_\rho] \xi \quad (3.36)$$

aloca os autovalores do sistema linearizado nas raízes da equação

$$s_i^\rho + k_1 s_i^{\rho-1} + \dots + k_{\rho-1} s + k_\rho = 0, \quad i = 1, \dots, \rho. \quad (3.37)$$

Considere agora o sistema incerto

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{f}(x, \delta) + \tilde{g}(x, \delta)u(x) \\ y = \tilde{h}(x, \delta) \end{cases} \quad (3.38)$$

onde $\delta \triangleq [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_{n_\delta}]'$ é o vetor de incertezas limitado pelo conjunto politópico $\Delta \subset \mathfrak{R}^{n_\delta}$ e n_δ é o número de parâmetros incertos.

Quando a lei de controle (3.34) é aplicada ao sistema (3.38), o cancelamento das não-linearidades não ocorre de forma exata. O sistema resultante pode ser expresso por

$$\dot{\xi} = \hat{f}(\xi, \delta). \quad (3.39)$$

Seja a região $B_\xi \subset T_1(x)$, $x \in B_x$ a aproximação politópica da transformação da região

de estados admissíveis B_x pelo difeomorfismo $T_1(x)$, definido em (2.7). A região B_ξ pode ser representada pelo conjunto de seus vértices, chamados neste trabalho de $\mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi)$, ou de forma equivalente, pelo conjunto de hiperplanos que delimitam seu espaço, conforme apresentado em (3.40).

$$B_\xi \triangleq \{\xi \in \mathfrak{R}^\rho : \mathcal{H}'_k \xi \leq 1, k = 1, 2, \dots, n_f\}. \quad (3.40)$$

onde n_f é o número de hiperplanos de B_ξ .

Define-se a seguir a região $\mathcal{D}_\xi \subset \mathfrak{R}^\rho$ como sendo o conjunto de condições iniciais para as quais o sistema (3.39) apresenta comportamento estável.

3.2.2 Análise da Estabilidade

Nesta seção serão desenvolvidas condições suficientes para a estabilidade do sistema não-linear incerto (3.39). As condições de estabilidade serão apresentadas na forma de desigualdades matriciais lineares. Para a análise da estabilidade será utilizado o resultado da teoria de Lyapunov apresentado no lema 1.

Considere a seguinte representação algébrico-diferencial do sistema (3.39):

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= A_1(\xi, \delta)\xi + A_2(\xi, \delta)\pi \\ 0 &= \Omega_1(\xi, \delta)\xi + \Omega_2(\xi, \delta)\pi \end{cases} \quad (3.41)$$

Será considerada a função de Lyapunov quadrática $V(\xi) = \xi' P \xi$, onde $P = P' \in \mathfrak{R}^{\rho \times \rho}$ é uma matriz constante. A derivada temporal de $V(\xi)$ pode ser expressa por (3.42).

$$\dot{V}(\xi) = \dot{\xi}' P \xi + \xi' P \dot{\xi} \quad (3.42)$$

Pode-se representar a derivada temporal da função de Lyapunov (3.42) na forma matricial substituindo o termo $\dot{\xi}$ de acordo com a primeira linha de (3.41).

$$\dot{V}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_1(\xi, \delta)'P + PA_1(\xi, \delta) & PA_2(\xi, \delta) \\ A_2(\xi, \delta)'P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

A seguir, as condições de estabilidade apresentadas no lema 1 serão escritas na forma de desigualdades matriciais lineares.

A condição (2.15) pode ser representada por $P > 0$, uma vez que sempre haverá um escalar positivo ϵ_1 suficientemente pequeno e um escalar positivo ϵ_2 suficientemente grande.

Para um escalar positivo ϵ_3 suficientemente pequeno, pode-se escrever a condição (2.16) como $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

A condição $\dot{V}(\xi) < 0$ pode ser representada na forma (3.44), porém esta representação não considera as relações existentes entre os vetores ξ e π , expressas na segunda linha de (3.41), portanto não representa bem a condição 3.6.

$$\begin{bmatrix} A_1(\xi, \delta)'P + PA_1(\xi, \delta) & PA_2(\xi, \delta) \\ A_2(\xi, \delta)'P & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.44)$$

Para resolver este problema, pode-se utilizar o lema de Finsler apresentado no capítulo anterior. Para melhor representar a condição $\dot{V}(\xi) < 0$ será introduzida a matriz de variáveis livres F , de dimensões adequadas. Desta forma, a desigualdade $\dot{V}(\xi) < 0$ pode ser representada por (3.45).

$$\begin{bmatrix} A_1(\xi, \delta)'P + PA_1(\xi, \delta) & PA_2(\xi, \delta) \\ A_2(\xi, \delta)'P & 0 \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} \Omega_1(\xi, \delta) & \Omega_2(\xi, \delta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_1(\xi, \delta)' \\ \Omega_2(\xi, \delta)' \end{bmatrix} F' < 0 \quad (3.45)$$

A inclusão da matriz F não afeta a desigualdade (3.44) para os vetores de interesse, que possuem a forma $[\xi' \ \pi']'$. Isto pode ser facilmente verificado realizando o produto entre as matrizes

$$\begin{bmatrix} \Omega_1(\xi, \delta) & \Omega_2(\xi, \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix} = 0. \quad (3.46)$$

A condição $\mathcal{D} \subset B_x$ pode ser escrita no domínio linearizado por $\mathcal{D}_\xi \subset B_\xi$.

A região \mathcal{D}_ξ será definida como

$$\mathcal{D}_\xi \triangleq \{\xi : V(\xi) \leq 1\} \quad (3.47)$$

A condição $\mathcal{D}_\xi \subset B_\xi$, que assegura que o domínio de atração está dentro da região politópica que descreve os estados linearizados admissíveis, pode ser escrita utilizando uma versão da definição (3.40).

$$2 - \mathcal{H}'_k \xi - \xi' \mathcal{H}_k \geq 0, \quad \forall \xi : V(\xi) \leq 1 \quad (3.48)$$

A desigualdade $V(\xi) \leq 1$ pode ser escrita como $\xi' P \xi - 1 \leq 0$. Se as condições (3.49) e (3.50) forem satisfeitas,

$$\xi' P \xi' - 1 \leq 0 \quad (3.49)$$

$$2 - \mathcal{H}'_k \xi - \xi' \mathcal{H}_k + (\xi' P \xi' - 1) > 0 \quad (3.50)$$

então $2 - \mathcal{H}'_k \xi - \xi' \mathcal{H}_k \geq 0$. A condição (3.50) pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{H}'_k \\ -\mathcal{H}_k & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad k = 1, \dots, n_f. \quad (3.51)$$

O teorema 2 resume condições suficientes para a estabilidade do sistema (3.39).

Teorema 2 *Considere o sistema (3.39) representado na forma (3.41). Seja B_ξ um politopo que contenha a origem. Se existirem matrizes constantes $P = P' > 0$ e F de dimensões apropriadas que satisfazem as desigualdades matriciais lineares (3.45) e (3.51) construídas nos vértices do politopo definido por $\mathcal{V}(B_\xi \times \Delta)$, então, para todo $\xi(0) \in \mathcal{D}_\xi$ a trajetória $\xi(t) \in \mathcal{D}_\xi$ e se aproxima*

da origem para $t \rightarrow \infty$.

Prova 2 Se as LMIs (3.45) e (3.51) forem factíveis, por convexidade, também serão verificadas para todo $\xi \in B_\xi$ e todo $\delta \in \Delta$. O restante da prova será dividido de acordo com as condições apresentadas no lema 1.

$$P > 0 \rightarrow \xi' P \xi > 0 \quad (3.52)$$

Ao multiplicar (3.45) pela esquerda por $[\xi' \ \pi']$ e pela direita por $[\xi' \ \pi']'$, obtém-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_1(\xi, \delta)'P + PA_1(\xi, \delta) & PA_2(\xi, \delta) \\ A_2(\xi, \delta)'P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix}' F \begin{bmatrix} \Omega_1(\xi, \delta) & \Omega_2(\xi, \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Omega_1(\xi, \delta)' \\ \Omega_2(\xi, \delta)' \end{bmatrix} F' \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Como os termos

$$\begin{bmatrix} \Omega_1(\xi, \delta) & \Omega_2(\xi, \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Omega_1(\xi, \delta)' \\ \Omega_2(\xi, \delta)' \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

resultam em matrizes de zeros, a condição (3.53) se restringe à

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_1(\xi, \delta)'P + PA_1(\xi, \delta) & PA_2(\xi, \delta) \\ A_2(\xi, \delta)'P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix} < 0 \quad (3.55)$$

que é a representação na forma matricial de $\dot{V}(\xi) < 0$. De forma semelhante, a condição $\mathcal{D}_\xi \subset B_\xi$ pode ser assegurada através da multiplicação de (3.51) à esquerda por $[1 \ \xi']$ e à direita por $[1 \ \xi']'$, da qual obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \xi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{H}'_k \\ -\mathcal{H}_k & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \end{bmatrix} \geq 0, k = 1, \dots, n_f. \quad (3.56)$$

Note que (3.56) equivale à $1 - \xi' \mathcal{H}_k - \mathcal{H}'_k \xi + V(\xi) \geq 0, k = 1, \dots, n_f$. Se $V(\xi) \leq 1$, então $2 - \xi' \mathcal{H}_k - \mathcal{H}'_k \xi \geq 0, k = 1, \dots, n_f$, que é a definição da região B_ξ , apresentada em (3.48).

Note que como a análise da estabilidade foi feita no domínio linearizado, é necessário transformar a estimativa do domínio de atração \mathcal{D}_ξ obtido em uma estimativa do domínio de atração no domínio original do problema. Isto pode ser feito através de (3.57).

$$\mathcal{D} = \{x : \xi' P \xi \leq 1, \xi = T^{-1}(x)\} \quad (3.57)$$

3.2.3 Exemplo – Pêndulo Invertido

Com o objetivo de permitir a comparação dos resultados, será utilizado o exemplo do pêndulo invertido apresentado na seção anterior. No domínio linearizado, o sistema (3.26) é expresso por

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{2\xi_1 \xi_2^2}{1+\xi_1^2} + \frac{g\xi_1}{l} - \frac{K(1+\delta_2)\xi_2}{M(1+\delta_1)} + \frac{u(1+\xi_1^2)}{2M(1+\delta_1)l^2}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Substituindo a lei de controle (3.27) em (3.58), obtém-se o sistema (3.59), cuja estabilidade será analisada.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{v}{1+\delta_1} + \frac{2\xi_1 \xi_2^2 \delta_1}{(1+\xi_1^2)(1+\delta_1)} + \frac{g\xi_1 \delta_1}{l(1+\delta_1)} - \frac{K\xi_2 \delta_2}{M(1+\delta_1)} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Pode-se representar o sistema (3.59) na forma algébrico diferencial por (3.60).

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 + \frac{g\delta_1}{l} & k_2 - \frac{K\delta_2}{M} & 2\delta_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\xi_1}{1+\delta_1} \\ \frac{\xi_2}{1+\delta_1} \\ \frac{\xi_1\xi_2^2}{(1+\xi_1^2)(1+\delta_1)} \\ \frac{\xi_1\xi_2}{1+\xi_1^2} \\ \frac{\xi_1}{1+\xi_1^2} \\ \frac{\xi_1^2}{1+\xi_1^2} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} -(1+\delta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+\delta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\delta_1) & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\xi_1}{1+\delta_1} \\ \frac{\xi_2}{1+\delta_1} \\ \frac{\xi_1\xi_2^2}{(1+\xi_1^2)(1+\delta_1)} \\ \frac{\xi_1\xi_2}{1+\xi_1^2} \\ \frac{\xi_1}{1+\xi_1^2} \\ \frac{\xi_1^2}{1+\xi_1^2} \end{bmatrix}$$

Utilizando as mesmas incertezas obtidas no exemplo da seção anterior, isto é

$$|\delta_1| \leq 0,084$$

$$|\delta_2| \leq 0,99$$

o domínio de atração obtido foi

$$\mathcal{D}_\xi = \left\{ \xi : \xi' \begin{bmatrix} 0,8060 & 0,4045 \\ 0,4045 & 1,2030 \end{bmatrix} \xi \leq 1 \right\}.$$

Para mostrar que o sistema apresenta comportamento estável dentro do domínio de atração obtido, para o sistema incerto, foram realizadas diversas simulações com condições iniciais sobre a borda do domínio de atração obtido e parâmetros variando nos vértices de Δ . A figura 3-4

mostra o domínio de atração obtido em uma linha pontilhada, enquanto que as trajetórias de fase obtidas estão em linhas contínuas.

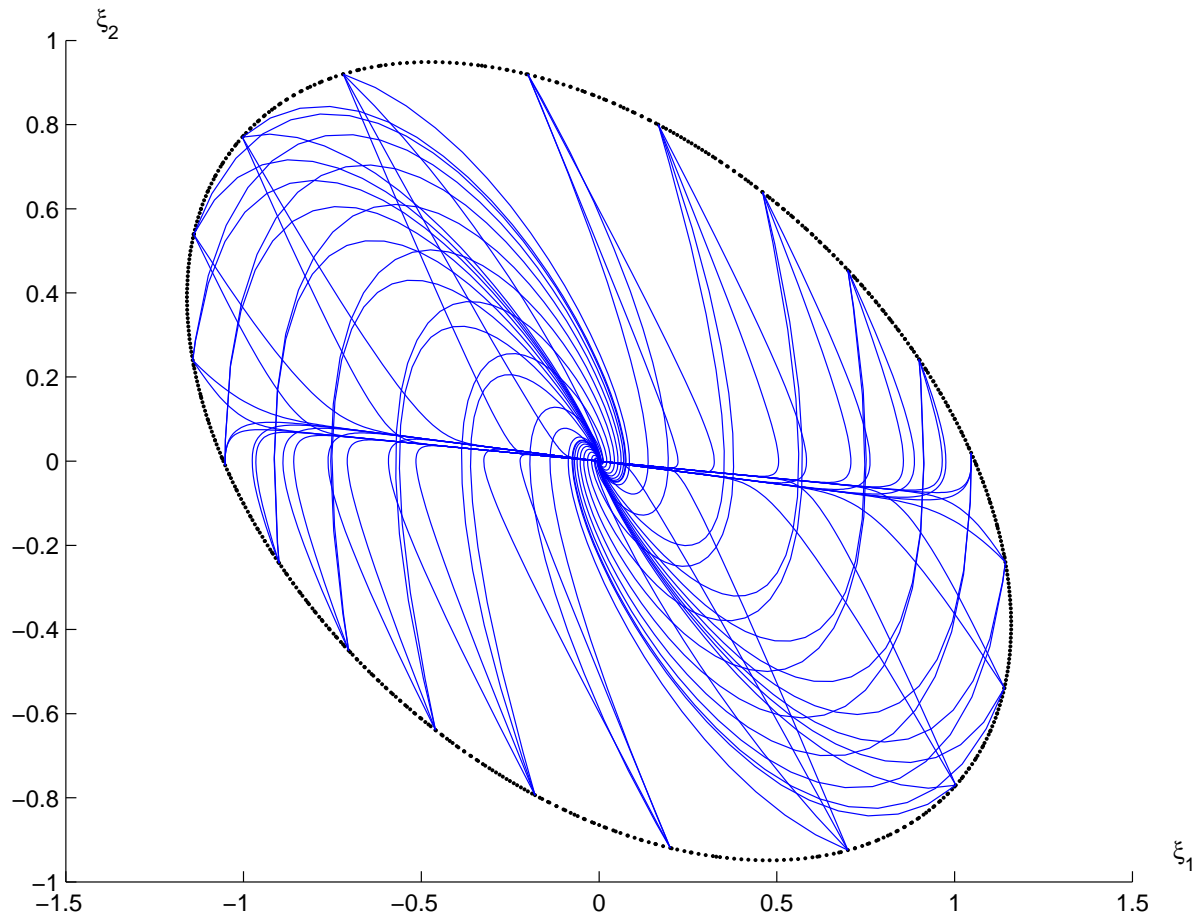
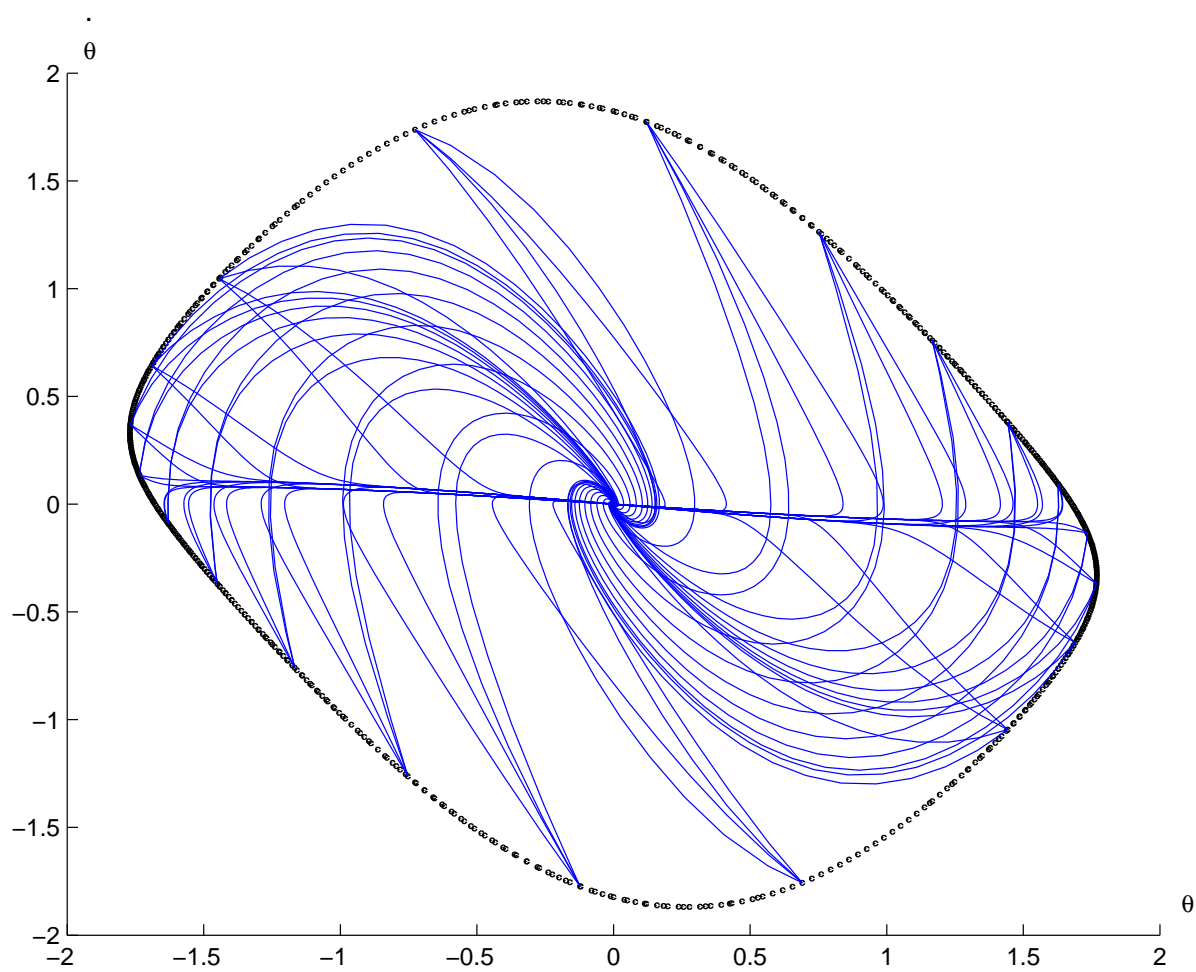
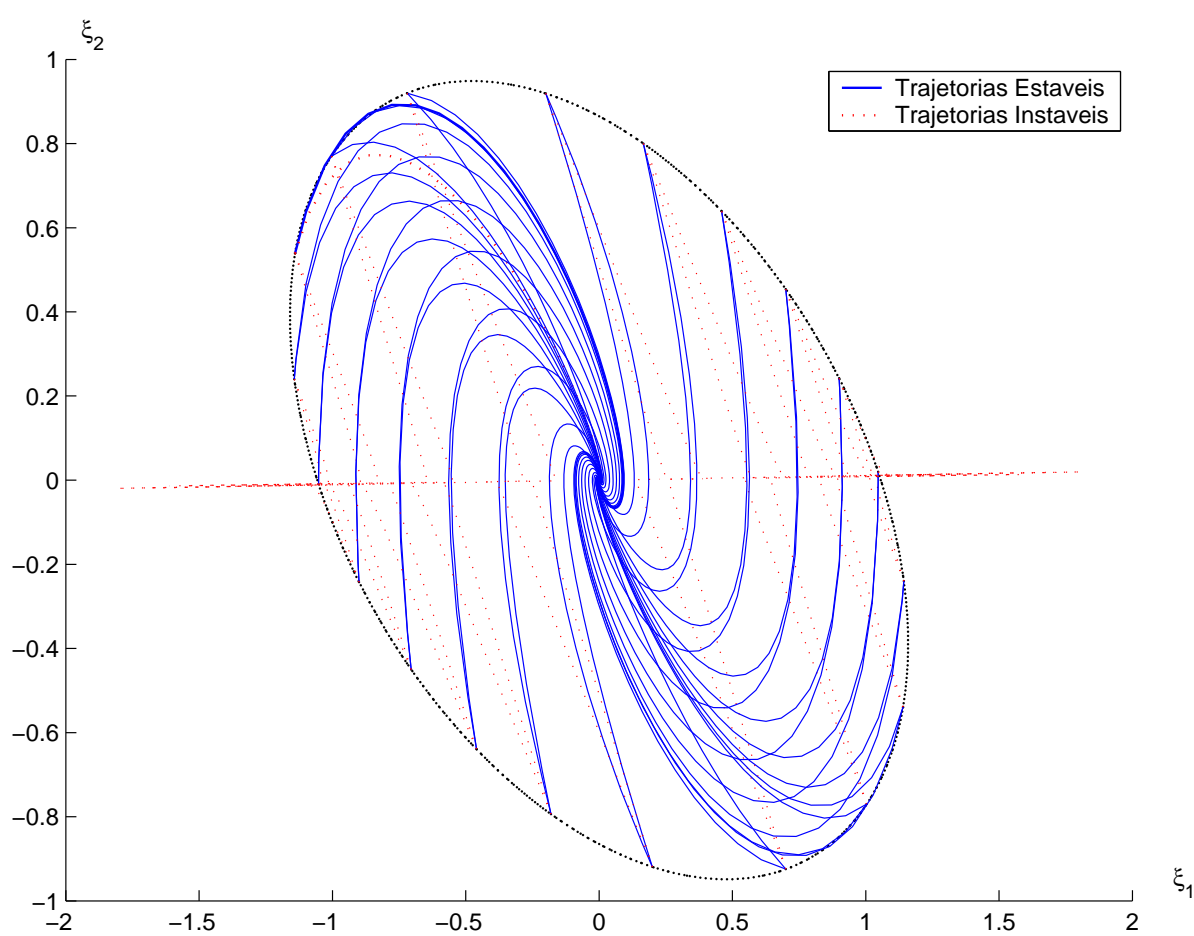


Figura 3-4: Domínio de atração e trajetórias de fase.

Alternativamente, o domínio de atração pode ser representado nas variáveis θ e $\dot{\theta}$, conforme apresentado na figura 3-5.

Para verificar o conservadorismo da solução encontrada, foram realizadas diversas simulações aumentando gradualmente a incerteza δ_1 , relacionada à massa da esfera. Para $\delta_1 = 0,104$ o sistema (3.26) apresenta comportamento instável para algumas condições iniciais pertencentes à borda da região \mathcal{D}_ξ , conforme apresentado na figura 3-6. Uma condição inicial que apresentou comportamento instável, por exemplo, é $\xi_1 = -1,14$, $\xi_2 = 0,54$.

Figura 3-5: Domínio de atração e trajetórias de fase no domínio $\theta \times \dot{\theta}$.

Figura 3-6: Simulações com $\delta_1 = 0,104$.

A figura 3-7 apresenta os domínios de atração obtidos utilizando os dois métodos apresentados.

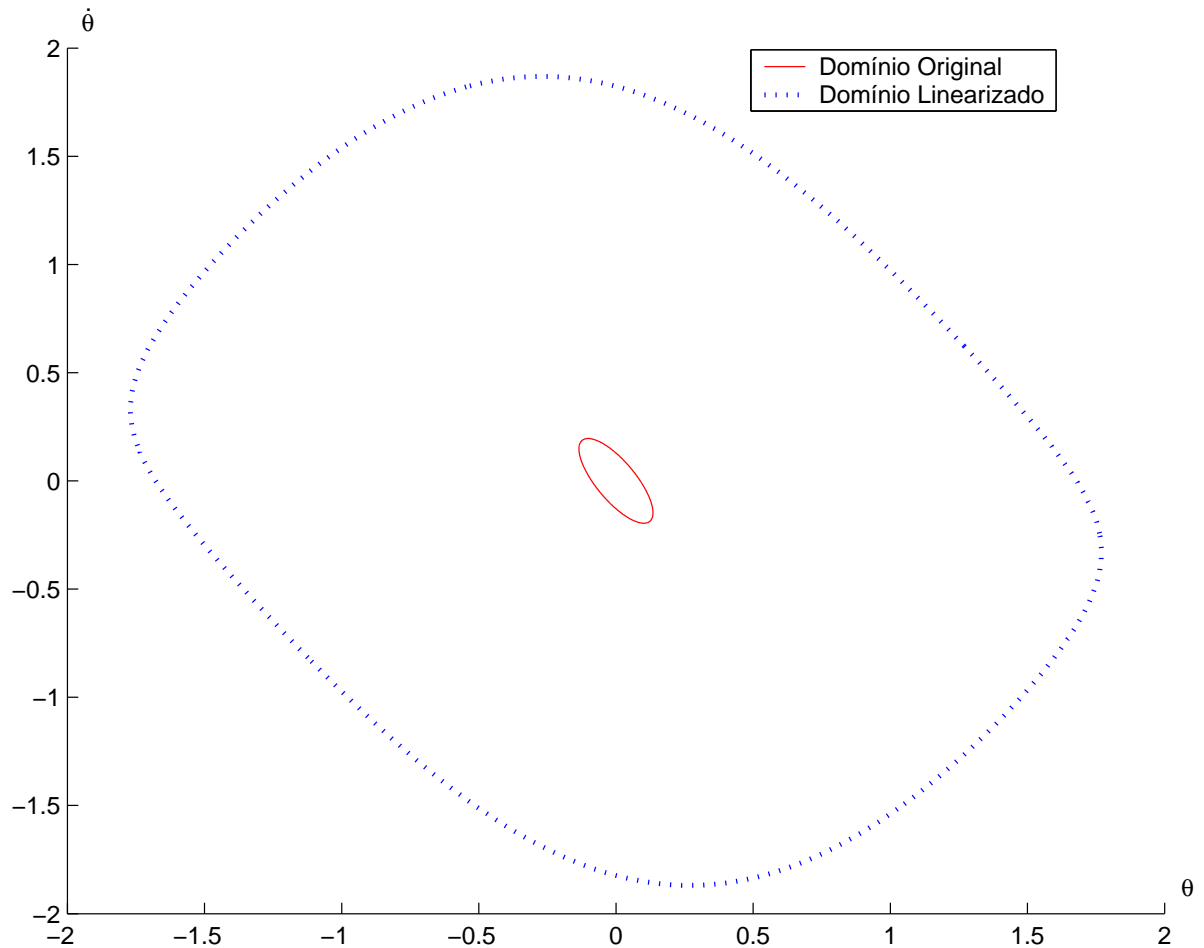


Figura 3-7: Comparação dos Domínios de Atração em $\theta \times \dot{\theta}$.

3.3 Comentários Gerais

Neste capítulo foram apresentadas duas formas de analisar a estabilidade de um sistema não-linear incerto submetido a um controle do tipo linearização por realimentação de estados.

A análise no domínio linearizado mostrou-se menos conservativa, pois o domínio de atração obtido foi maior para as mesmas variações paramétricas, como pode ser observado na figura 3-7.

Por outro lado, a representação no domínio original possui a vantagem de que a lei de controle é representada separadamente, permitindo a síntese do controle em trabalhos futuros.

A metodologia apresentada permite analisar a estabilidade de sistemas que possuam não-linearidades que possam ser escritas nas formas racional ou polinomial, que utilizando as relações apresentadas em (2.29) são estendidos para classes de sistemas com não-linearidades trigonométricas.

Capítulo 4

Sistemas Sujeitos à Saturação no Controle

Neste capítulo serão apresentados dois métodos para análise de uma classe de sistemas não-lineares quando submetidos a um controle do tipo linearização por realimentação de estados, sujeitos à saturação na entrada de controle. A classe de sistemas abordada compreende sistemas que possuam não-linearidades que possam ser escritas nas formas racional ou polinomial.

Os resultados apresentados neste capítulo foram inspirados em [30], no qual os autores utilizam uma condição de setor modificada, proposta originalmente em [31].

4.1 Tratamento da saturação

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{f}(x, \delta) + \tilde{g}(x, \delta) \text{sat}(u(x)) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $x \in D \subseteq \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados, $\delta \in \Delta \subset \mathfrak{R}^{n_\delta}$ é o vetor de incertezas, $u(x) \in \mathfrak{R}$ é o sinal de controle e $y \in \mathfrak{R}$ é o sinal de saída. Considere que as funções $\tilde{f}(x, \delta) : D \times \Delta \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $\tilde{g}(x, \delta) : D \times \Delta \rightarrow \mathfrak{R}^n$ e $h(x) : D \rightarrow \mathfrak{R}$ possuem todas as derivadas parciais definidas e contínuas

em um domínio $D \subseteq \mathfrak{R}^n$ e $\Delta \subset \mathfrak{R}^{n_\delta}$.

Supondo que $\tilde{f}(x, \delta)$, $\tilde{g}(x, \delta)$ e $h(x)$ são funções racionais nos argumentos e sem singularidades no domínio de interesse, haverá um difeomorfismo $T(x)$ apropriado para obtenção da lei de linearização por realimentação de estados. Ainda, se o sistema for de fase mínima, a dinâmica zero será estável [1].

A função $sat(u(x))$ é definida por

$$sat(u(x)) = \begin{cases} -1, & u(x) < -1 \\ u(x), & -1 \leq u(x) \leq 1 \\ 1, & u(x) > 1. \end{cases}$$

A função saturação pode ser modelada de forma equivalente utilizando a função tipo zona morta $\psi(u(x))$ dada por

$$\psi(u(x)) = \begin{cases} u(x) + 1, & u(x) < -1 \\ 0, & -1 \leq u(x) \leq 1 \\ u(x) - 1, & u(x) > 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

de forma que

$$sat(u(x)) = u(x) - \psi(u(x)). \quad (4.3)$$

A figura 4.1 considera $u(x) = \text{sign}(x)x^2$, ilustrando o comportamento das funções $sat(u)$ e $\psi(u)$.

Com o objetivo de simplificar a notação, a função $\psi(u(x))$ será representada no restante desta dissertação apenas como ψ , assim como a função $u(x)$ será representada por u .

Utilizando a definição da função $sat(u)$ apresentada em (4.3), pode-se escrever o sistema (4.1) conforme apresentado em (4.4).

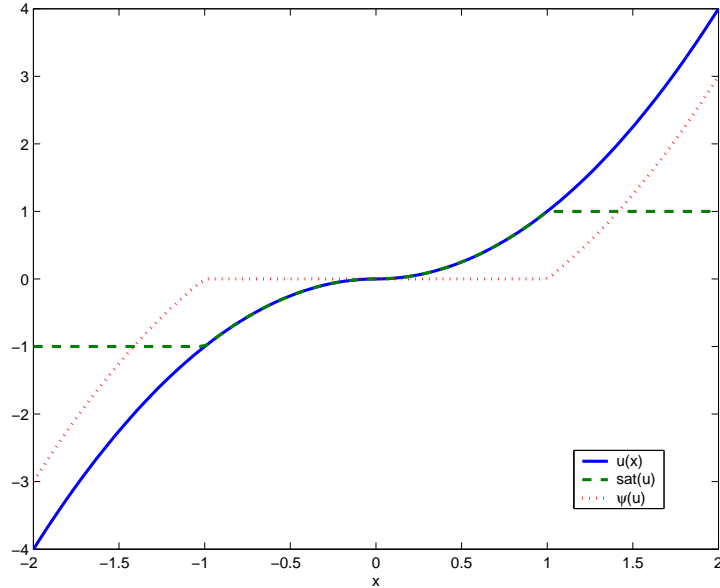


Figura 4-1: Funções $\text{sat}(u(x))$ e $\psi(u(x))$.

$$\dot{x} = \tilde{f}(x, \delta) + \tilde{g}(x, \delta)(u - \psi) \quad (4.4)$$

Para o tratamento da função não-linear descontínua ψ será utilizada uma função contínua $G(x) : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}$ que obedece a relação $G(x)\psi \geq 0$ para todo x pertencente a uma região $S \subset \mathfrak{R}^n$ dada por

$$S \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n : |G(x)| \geq |\psi|\}. \quad (4.5)$$

Como $G(x)$ é um limitante superior de ψ , a dinâmica do sistema (4.4) pode ser aproximada pela dinâmica de um sistema que apresente apenas não-linearidades suaves, conforme apresentado em (4.6).

$$\dot{x} = \tilde{f}(x, \delta) + \tilde{g}(x, \delta)(u - G(x)) \quad (4.6)$$

Note que o termo $u - G(x)$ é mais restritivo do que $\text{sat}(u)$ dentro da região S , conforme ilustrado na figura 4.2, portanto a estabilidade de (4.6) implica na estabilidade de (4.1). A

figura 4.2 foi obtida para o caso particular $u(x) = x$ e $G(x) = 0,7x$.

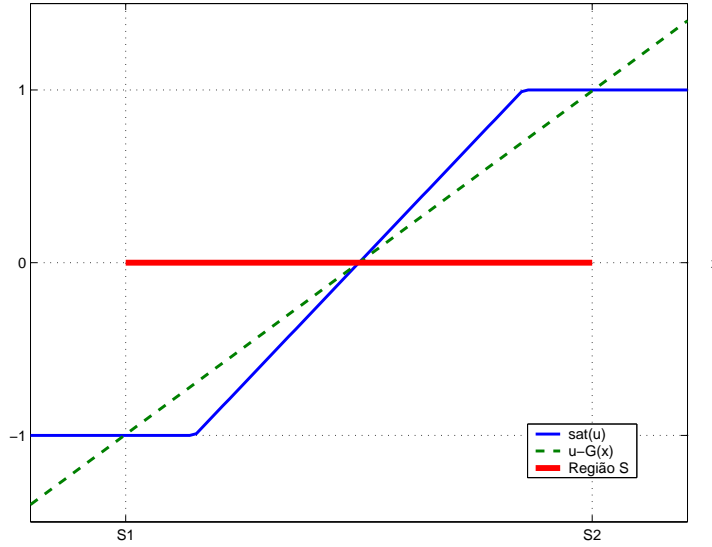


Figura 4-2: Aproximação contínua da função saturação.

O lema 2 apresenta uma relação que ocorre quando $x \in S$ e que será utilizada no desenvolvimento das condições de estabilidade.

Lema 2 *Se $x \in S$, então a seguinte relação se verifica para qualquer escalar positivo μ :*

$$\psi\mu(\psi - G(x)) \leq 0 \quad (4.7)$$

Prova 3 *Se $x \in S$, então $|\psi| \leq |G(x)|$. Multiplicado os dois lados da desigualdade por $\mu\psi$, obtém-se $\mu\psi|\psi| \leq \mu\psi|G(x)|$. O sinal de módulo pode ser omitido pois tanto ψ^2 quanto $\psi G(x)$ são positivos. Rearranjando a condição $\mu\psi^2 \leq \mu G(x)\psi$, obtém-se $\psi\mu(\psi - G(x)) \leq 0$.*

Nas seções que seguem a função $G(x)$ será composta por

$$G(x) = G_1(x)x + G_2(x)w$$

onde $x \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados, $w \in \mathfrak{R}^{n_w}$ é o vetor de não-linearidades utilizado para

representar a lei de controle apresentada em (4.9) e $G_1(x) \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$ e $G_2(x) \in \mathfrak{R}^{1 \times n_w}$ são vetores afins em x .

4.2 Análise no Domínio Original

Para considerar a função ψ , modifica-se a representação algébrica apresentada em (3.2) [30]. Assim, o sistema (4.1) será representado na forma algébrico-diferencial, conforme (4.8).

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1(x, \delta)x + A_2(x, \delta)\pi + A_3(x, \delta)\psi + A_4(x, \delta)u \\ 0 = \Omega_1(x, \delta)x + \Omega_2(x, \delta)\pi + \Omega_3(x, \delta)\psi + \Omega_4(x, \delta)u \end{cases} \quad (4.8)$$

onde $\pi \in \mathfrak{R}^{n_\pi}$ concentra os termos não-lineares e as matrizes $A_1(x, \delta) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $A_2(x, \delta) \in \mathfrak{R}^{n \times n_\pi}$, $A_3(x, \delta) \in \mathfrak{R}^n$, $A_4(x, \delta) \in \mathfrak{R}^n$, $\Omega_1(x, \delta) \in \mathfrak{R}^{n_\pi \times n}$, $\Omega_2(x, \delta) \in \mathfrak{R}^{n_\pi \times n_\pi}$, $\Omega_3(x, \delta) \in \mathfrak{R}^{n_\pi}$ e $\Omega_4(x, \delta) \in \mathfrak{R}^{n_\pi}$ são afins em x e δ . Com o objetivo de facilitar a notação, a dependência em x e δ nas matrizes $A_1, \dots, A_4, \Omega_1, \dots, \Omega_4$ será omitida. Para que tal representação seja fiel, é necessário que a matriz Ω_2 possua posto completo, de tal forma que o campo vetorial original possa ser recuperado com

$$\pi = -\Omega_2^{-1}(\Omega_1 x + \Omega_3 \psi + \Omega_4 u).$$

Considere a lei de controle não-linear descrita por (3.3) e rerepresentada em (4.9).

$$\begin{cases} u(x) = B_1(x)x + B_2(x)w \\ 0 = \zeta_1(x)x + \zeta_2(x)w \end{cases} \quad (4.9)$$

A função candidata de Lyapunov será $V(x) = x'Px$, cuja derivada é $\dot{V}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x}$, que pode ser escrita na forma matricial, utilizando a descrição do sistema expressa em (4.8) conforme apresentado em (4.10).

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ \psi \\ u \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_1'P + PA_1 & \star & \star & \star \\ A_2'P & 0 & \star & \star \\ A_3'P & 0 & 0 & \star \\ A_4'P & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ \psi \\ u \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

A seguir, as condições de estabilidade descritas no lema 1, apresentado na seção 2.2, serão escritas na forma de desigualdades matriciais lineares.

A condição (2.15) pode ser representada por $P > 0$, uma vez que sempre haverá um escalar positivo ϵ_1 suficientemente pequeno e um escalar positivo ϵ_2 suficientemente grande.

Também, para um escalar positivo ϵ_3 positivo e suficientemente pequeno, pode-se escrever a condição (2.16) como $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

Suponha que $\mathcal{D} \subset S$. Desta forma,

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \in S \rightarrow \dot{V}(x) < 0, \forall x \in \mathcal{D}.$$

Utilizando o lema 2, pode-se somar o termo $-\mu\psi^2 + \mu\psi G(x)$ à $\dot{V}(x)$ sem alterar a desigualdade $\dot{V}(x) < 0$, pelos mesmos argumentos utilizados para obter a condição (3.51).

Aplicando o procedimento-S, apresentado no capítulo 2, obtêm-se

$$\begin{bmatrix} x \\ \pi \\ \psi \\ u \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_1'P + PA_1 & \star & \star & \star & \star \\ A_2'P & 0 & \star & \star & \star \\ A_3'P + \mu G_1 & 0 & -2\mu & \star & \star \\ A_4'P & 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & \mu G_2' & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ \psi \\ u \\ w \end{bmatrix} < 0. \quad (4.11)$$

A condição acima deve ser satisfeita para todo $\begin{bmatrix} x' & \pi' & \psi & u & w' \end{bmatrix}'$ tal que

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 & 0 \\ \zeta_1 & 0 & 0 & 0 & \zeta_2 \\ B_1 & 0 & 0 & -1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ \psi \\ u \\ w \end{bmatrix} = 0. \quad (4.12)$$

Nota 2 Caso existam termos idênticos ou semelhantes nos vetores π e w , pode-se acrescentar linhas na matriz apresentada em (4.12) que expressem estas relações.

Utilizando o lema de Finsler, para que a condição $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in S$ seja satisfeita é suficiente que (4.13) seja verificada.

$$\begin{bmatrix} A_1'P + PA_1 & \star & \star & \star & \star \\ A_2'P & 0 & \star & \star & \star \\ A_3'P + \mu G_1 & 0 & -2\mu & \star & \star \\ A_4'P & 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & \mu G_2' & 0 & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 & 0 \\ \zeta_1 & 0 & 0 & 0 & \zeta_2 \\ B_1 & 0 & 0 & -1 & B_2 \end{bmatrix} + \star < 0 \quad (4.13)$$

Utilizando os resultados do lema 2 e a definição de ψ dada em (4.2), a condição $\mathcal{D} \subset S$ pode ser expressa por

$$\left. \begin{array}{l} 1 - u + G(x) \geq 0, \\ 1 + u - G(x) \geq 0, \end{array} \right\} \forall x : V \leq 1 \quad (4.14)$$

Aplicando o Procedimento-S, obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1 & \star & \star \\ B'_1 - G'_1 & P & \star \\ B'_2 - G'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ w \end{bmatrix} \geq 0$$

(4.15)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1 & \star & \star \\ G'_1 - B'_1 & P & \star \\ G'_2 - B'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ w \end{bmatrix} \geq 0$$

Utilizando o lema de Finsler, pode-se adicionar uma matriz de variáveis livres. Desta forma a condição $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ pode ser escrita pelas seguintes *LMI*:

$$\begin{bmatrix} 1 & \star & \star \\ B'_1 - G'_1 & P & \star \\ B'_2 - G'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + M_1 \begin{bmatrix} x & -I & 0 \\ 0 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{bmatrix} + \star \geq 0$$

(4.16)

$$\begin{bmatrix} 1 & \star & \star \\ G'_1 - B'_1 & P & \star \\ G'_2 - B'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + M_2 \begin{bmatrix} x & -I & 0 \\ 0 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{bmatrix} + \star \geq 0$$

Finalmente, a condição $\mathcal{D} \subset B_x$, que assegura que o domínio de atração está dentro da região politópica que descreve os estados admissíveis, pode ser escrita utilizando uma versão da definição (3.40).

$$2 - \mathcal{H}'_k x - x' \mathcal{H}_k \geq 0, \quad \forall x : V(x) \leq 1 \quad (4.17)$$

A desigualdade $V(x) \leq 1$ pode ser escrita como $x' P x - 1 \leq 0$ e portanto a condição (3.48) como

$$1 + x' P x - \mathcal{H}'_k x - x' \mathcal{H}_k \geq 0 \quad (4.18)$$

que equivale à

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{H}'_k \\ -\mathcal{H}_k & P \end{bmatrix} \geq 0, k = 1, \dots, n_f. \quad (4.19)$$

O teorema 3 sumariza condições suficientes para a estabilidade do sistema (4.1), quando submetido a uma lei de controle do tipo apresentado em (4.9).

Teorema 3 *Considere o sistema (4.1) representado na forma (4.8) e submetido à lei de controle (4.9) com matrizes $B_1(x)$, $B_2(x)$, $\zeta_1(x)$ e $\zeta_2(x)$ definidas a priori. Seja B_x um dado politopo no espaço de estados que contenha a origem. Seja Δ um dado politopo no espaço de parâmetros. Seja μ um dado escalar positivo. Se existirem matrizes constantes $P = P' > 0$, L , M_1 e M_2 e matrizes G_1 e G_2 afins em x de dimensões apropriadas que satisfazem as desigualdades matriciais lineares (4.13), (4.16) e (4.19) construídas nos vértices de $B_x \times \Delta$, então, para todo $x(0) \in \mathcal{D}$ a trajetória $x(t) \in \mathcal{D}$ e se aproxima da origem para $t \rightarrow \infty$.*

Prova 4 *Se as LMI (4.13), (4.16) e (4.19) forem factíveis, por convexidade, também serão verificadas para todo $x \in B_x$ e todo $\delta \in \Delta$. O restante da prova está distribuído ao longo do desenvolvimento das condições LMI.*

Nota 3 *Note que a condição (4.13) apresenta o produto de μ pelas variáveis livres G_1 e G_2 . Para que esta condição seja LMI, pode-se realizar uma busca linear em μ .*

Nota 4 *Para análise da estabilidade em torno da origem basta resolver as condições (4.13), (4.16) e (4.19) como um problema de factibilidade, porém para obter uma estimativa do domínio de atração, pode-se utilizar como função objetivo a minimização do traço (soma dos elementos da diagonal principal) da matriz P , que define a região D .*

4.2.1 Exemplo

Para exemplificar a metodologia proposta, considere o exemplo de um pêndulo invertido apresentado no capítulo anterior, acrescido da saturação no controle. Este sistema pode ser

descrito em variáveis de estado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{2x_1x_2^2}{1+x_1^2} + \frac{gx_1}{l} - \frac{Kx_2}{M} + \frac{(u-\psi)(1+x_1^2)}{2Ml^2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde x_1 representa o ângulo θ entre a haste e o eixo vertical e x_2 representa a velocidade angular da haste. Lembre que, de acordo com (4.3), $(u - \psi) = \text{sat}(u)$

O sistema (4.20) pode ser representado de forma equivalente por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(x, \delta) & A_2(x, \delta) & A_3(x, \delta) & A_4(x, \delta) \\ \Omega_1(x, \delta) & \Omega_2(x, \delta) & \Omega_3(x, \delta) & \Omega_4(x, \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \\ \psi \\ u \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

com $\pi = \left[\frac{x_1x_2}{(1+x_1^2)} \quad \frac{x_1}{(1+x_1^2)} \quad \frac{x_1^2}{(1+x_1^2)} \quad \frac{x_2}{(1+\delta_1)} \quad \frac{u}{(1+\delta_1)} \quad \frac{x_1u}{(1+\delta_1)} \quad \frac{\psi}{(1+\delta_1)} \quad \frac{x_1\psi}{(1+\delta_1)} \right]'$ e as seguintes matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 0 & \frac{-K(1+\delta_2)}{M} & \frac{1}{(2Ml^2)} & \frac{x_1}{(2Ml^2)} & \frac{-1}{(2Ml^2)} & \frac{-x_1}{(2Ml^2)} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad \Omega_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} -1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1 + \delta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \delta_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \delta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \delta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \delta_1) \end{bmatrix}.$$

Tomando como saída o estado x_1 , a lei de controle que lineariza o sistema nominal é apresentada em (4.22).

$$u = \frac{2Ml^2}{(1 + x_1^2)} \left(v - \frac{2x_1x_2^2}{1 + x_1^2} - \frac{gx_1}{l} + \frac{Kx_2}{M} \right) \quad (4.22)$$

Utilizando $v = k_1x_1 + k_2x_2$, para o caso nominal e considerando um domínio que não sature o controle, o comportamento do sistema (4.20) é dado por (4.23).

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} x \quad (4.23)$$

A lei de controle apresentada em (4.22) pode ser expressa em termos de soma de quadrados de acordo com

$$\begin{cases} u = B_1(x)x + B_2(x)w \\ 0 = \zeta_1(x)x + \zeta_2(x)w \end{cases} \quad (4.24)$$

com $w = \left[\frac{x_1}{(1+x_1^2)} \quad \frac{x_1^2}{(1+x_1^2)} \quad \frac{x_2}{(1+x_1^2)} \quad \frac{x_1 x_2}{(1+x_1^2)^2} \quad \frac{x_1}{(1+x_1^2)^2} \quad \frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2} \right]'$ e as matrizes

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}', \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2Ml^2(k_1 - g/l) \\ 0 \\ 2Ml^2(k_2 + K/M) \\ -4x_2Ml^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}', \quad (4.25)$$

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \zeta_2 = \begin{bmatrix} -1 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

Os parâmetros utilizados foram os mesmos apresentados na tabela 3.1. Os ganhos utilizados foram $k_1 = -1$ e $k_2 = -2$.

Para uma limitação no controle em $1N.m$ e para as incertezas apresentadas na tabela 4.1, o domínio de atração encontrado resolvendo as *LMI* mencionadas no teorema 3 é determinado por (4.26) e apresentado na figura 4-3.

Tabela 4.1: Incertezas Paramétricas

δ_1	0,01
δ_2	0,99

$$\mathcal{D} = \left\{ x : x' \begin{bmatrix} 1591 & 503,7 \\ 503,7 & 352,9 \end{bmatrix} x \leq 1 \right\}. \quad (4.26)$$

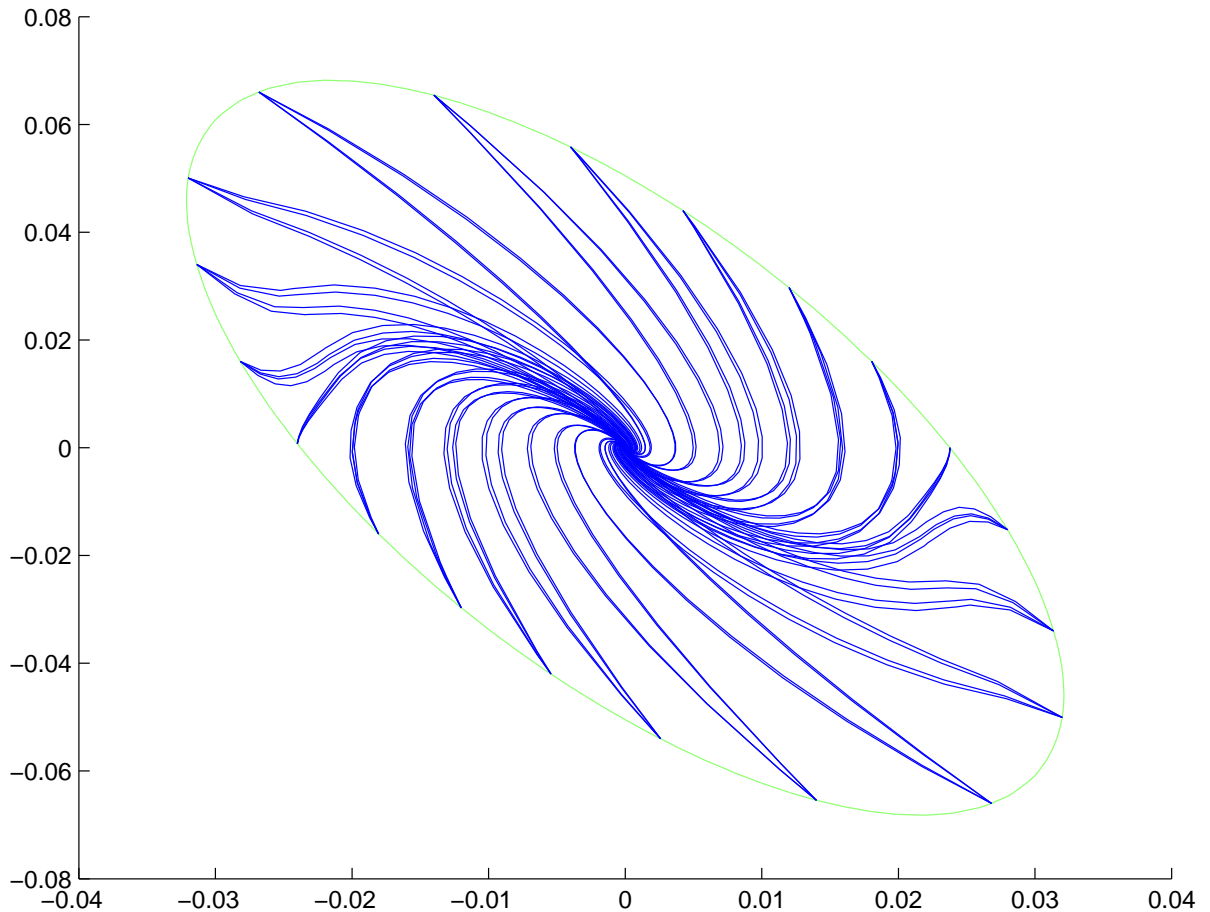


Figura 4-3: Domínio de atração e trajetórias de fase.

Como objetivo de analisar o conservadorismo da resposta obtida, foi feita uma análise analítica da estabilidade do pêndulo invertido. Para $\dot{\theta} = 0$, pode-se calcular a inclinação da haste cujo torque gerado pela aceleração gravitacional tem o mesmo módulo do torque máximo, conforme

apresentado em (4.27).

$$\theta_{\max} = \sin^{-1} \left(\frac{u_{\max}}{Mg(1 + \delta_1)} \right) \quad (4.27)$$

Para os parâmetros apresentados na tabela 3.1, obtém-se $\theta_{\max} = 0,0505$ rad, que aplicando a transformação de variáveis $x_1 = \tan(\theta/2)$ resulta em $x_1^{\max} = 0,0253$. Pode-se calcular analiticamente o elemento P_{11} da matriz P , tendo em vista (4.28).

$$\begin{bmatrix} x_1^{\max} \\ 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{\max} \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad (4.28)$$

Foi obtido $P_{11} = 1565$, que mostra que o parâmetro $P_{11}^{LMI} = 1591$ obtido através da solução das *LMI* é bastante próximo do parâmetro ótimo.

Ainda, para analisar o conservadorismo da resposta obtida foram realizadas diversas simulações utilizando condições iniciais fora do domínio de atração obtido. A figura 4-4 mostra em linhas contínuas as trajetórias de fase que convergiram para a origem e em linhas tracejadas as trajetórias nas quais o sistema apresentou comportamento divergente. Os círculos representam as condições iniciais utilizadas na simulação. Para melhorar a visualização, foram apresentadas apenas as trajetórias de fase referentes ao conjunto de incertezas que ficaram mais distantes da origem ao fim da simulação.

4.3 Análise no Domínio Linearizado

Uma maneira alternativa de analisar a estabilidade consiste em substituir a lei de controle utilizada nas equações que descrevem o comportamento dinâmico do sistema e analisar o sistema resultante. Substituindo a definição de saturação apresentada em (4.3) no sistema (4.1), obtém-se

$$\dot{x} = \tilde{f}(x, \delta) + \tilde{g}(x, \delta)u + \tilde{g}(x, \delta)\psi \quad (4.29)$$

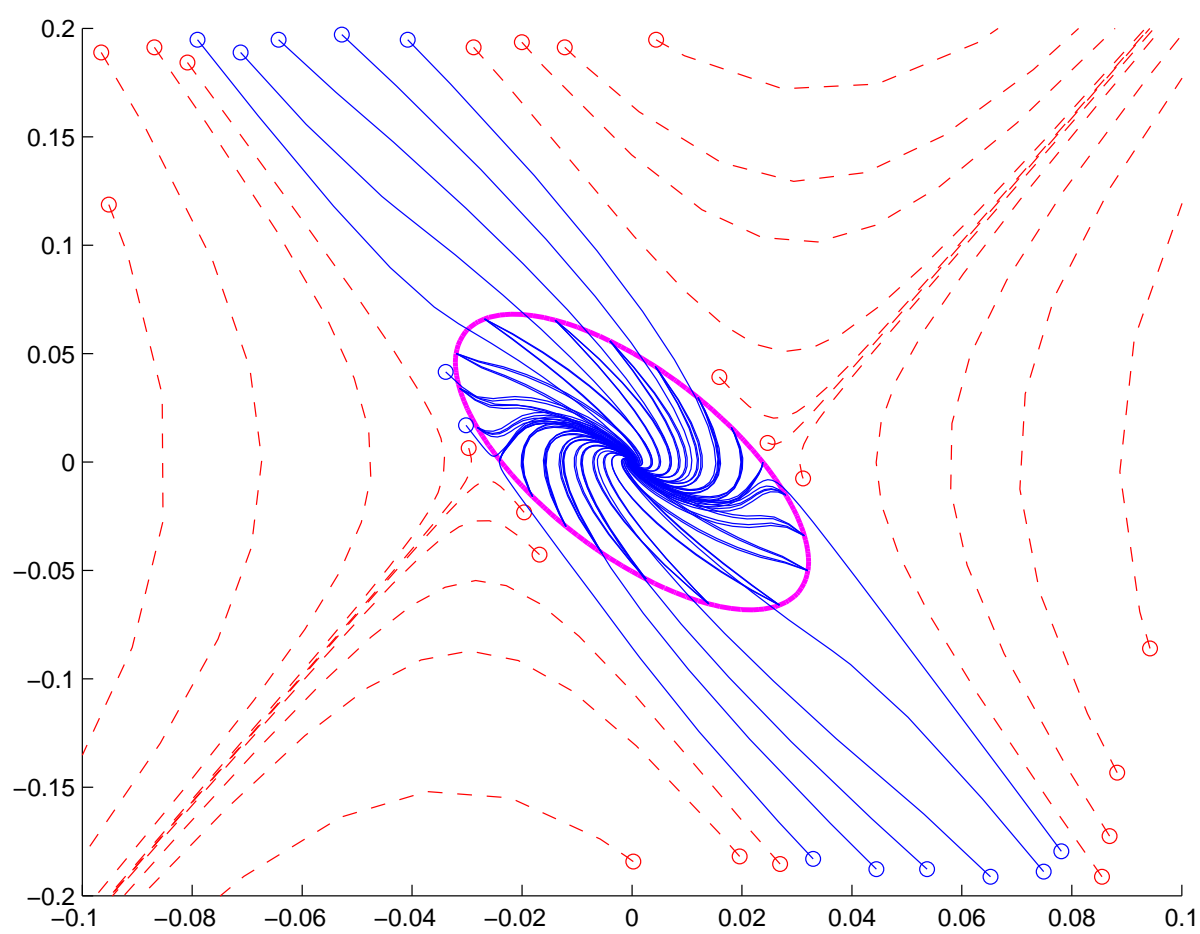


Figura 4-4: Trajetórias de fase simuladas.

Pode-se agrupar os termos $\tilde{f}(x, \delta)$ e $\tilde{g}(x, \delta)u$ como sendo $\tilde{f}_{mf}(x, \delta)$. Desta forma, pode-se escrever o sistema (4.1) como

$$\dot{x} = \tilde{f}_{mf}(x, \delta) + \tilde{g}(x, \delta)\psi \quad (4.30)$$

Utilizando o difeomorfismo $\xi = T_1(x)$, definido em (2.7), pode-se escrever o sistema (4.30) através de (4.31).

$$\dot{\xi} = \tilde{f}_{mf}(\xi, \delta) + \tilde{g}(\xi, \delta)\psi \quad (4.31)$$

O sistema (4.31) será representado na forma algébrico-diferencial, conforme apresentado em (4.32).

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_1(\xi, \delta)\xi + A_2(\xi, \delta)\pi + A_3(\xi, \delta)\psi \\ 0 = \Omega_1(\xi, \delta)\xi + \Omega_2(\xi, \delta)\pi + \Omega_3(\xi, \delta)\psi \end{cases} \quad (4.32)$$

onde $\pi \in \mathfrak{R}^{n_\pi}$ concentra os termos não-lineares e as matrizes $A_1(\xi, \delta) \in \mathfrak{R}^{\rho \times \rho}$, $A_2(\xi, \delta) \in \mathfrak{R}^{\rho \times n_\pi}$, $A_3(\xi, \delta) \in \mathfrak{R}^\rho$, $\Omega_1(\xi, \delta) \in \mathfrak{R}^{n_\pi \times \rho}$, $\Omega_2(\xi, \delta) \in \mathfrak{R}^{n_\pi \times n_\pi}$ e $\Omega_3(\xi, \delta) \in \mathfrak{R}^{n_\pi}$ são afins em ξ e δ . Com o objetivo de facilitar a notação, a dependência em ξ e δ nas matrizes $A_1, A_2, A_3, \Omega_1, \Omega_2$ e Ω_3 será omitida. Para que tal representação seja fiel, é necessário que a matriz Ω_2 possua posto completo, de tal forma que o vetor de não-linearidades pode ser recuperado por

$$\pi = -\Omega_2^{-1}(\Omega_1\xi + \Omega_3\psi).$$

Considere a representação da lei de controle apresentada em (4.9).

Da mesma forma que na seção anterior, a função candidata de Lyapunov será $V(\xi) = \xi'P\xi$, cuja derivada é $\dot{V}(\xi) = \dot{\xi}'P\xi + \xi'P\dot{\xi}$, que pode ser escrita na forma matricial, utilizando a descrição do sistema expressa em (4.32) conforme apresentado em (4.33).

$$\dot{V}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \\ \psi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_1'P + PA_1 & \star & \star \\ A_2'P & 0 & \star \\ A_3'P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \\ \psi \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

A seguir, as condições de estabilidade apresentadas no lema 1 serão escritas na forma de desigualdades matriciais lineares.

A condição (2.15) pode ser representada por $P > 0$, uma vez que sempre haverá um escalar positivo ϵ_1 suficientemente pequeno e um escalar positivo ϵ_2 suficientemente grande.

Para um escalar positivo ϵ_3 suficientemente pequeno, pode-se escrever a condição (2.16) como $\dot{V}(\xi) < 0, \forall \xi \in \mathcal{D}$.

Suponha que $\mathcal{D} \subset S$. Desta forma,

$$\dot{V}(\xi) < 0, \forall \xi \in S \rightarrow \dot{V}(\xi) < 0, \forall \xi \in \mathcal{D}.$$

Utilizando o lema 2, pode-se somar o termo $-\mu\psi^2 + \mu\psi G(\xi)$ à $\dot{V}(\xi)$ sem alterar a desigualdade $\dot{V}(\xi) < 0$.

Aplicando o Procedimento-S, apresentado no capítulo 2, obtêm-se

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \pi \\ \psi \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_1'P + PA_1 & \star & \star & \star \\ A_2'P & 0 & \star & \star \\ A_3'P + \mu G_1 & 0 & -2\mu & \star \\ 0 & 0 & \mu G_2' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \\ \psi \\ w \end{bmatrix} < 0 \quad (4.34)$$

A condição

$$\begin{bmatrix} A_1'P + PA_1 & \star & \star & \star \\ A_2'P & 0 & \star & \star \\ A_3'P + \mu G_1 & 0 & -2\mu & \star \\ 0 & 0 & \mu G_2' & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.35)$$

não representa bem a desigualdade (4.34), pois não considera as relações existentes entre as variáveis que compõem o vetor $[\xi' \ \pi' \ \psi' \ w']'$ e que podem ser escritas na forma matricial de acordo com (4.36).

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & 0 \\ \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \\ \psi \\ w \end{bmatrix} = 0 \quad (4.36)$$

Caso existam termos idênticos ou semelhantes nos vetores π e w , pode-se acrescentar linhas na matriz apresentada em (4.36) que expressem estas relações. Desta forma, para que a condição $\dot{V}(\xi) < 0, \forall \xi \in S$ seja satisfeita, é suficiente que (4.37) seja verificada.

$$\begin{bmatrix} A_1'P + PA_1 & \star & \star & \star \\ A_2'P & 0 & \star & \star \\ A_3'P + \mu G_1 & 0 & -2\mu & \star \\ 0 & 0 & \mu G_2' & 0 \end{bmatrix} + \\ +L \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & 0 \\ \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 \end{bmatrix} + \star < 0 \quad (4.37)$$

A condição $\mathcal{D} \subset S$ não é alterada e pode ser representada conforme apresentado em (4.16). Da mesma forma, a condição $\mathcal{D} \subset B_\xi$, que assegura que o domínio de atração está dentro da região politópica que descreve os estados admissíveis, pode ser escrita utilizando (4.19).

O teorema 4 sumariza condições suficientes para a estabilidade do sistema (4.29), quando submetido a uma lei de controle do tipo apresentado em (4.9).

Teorema 4 *Considere o sistema (4.29) representado na forma (4.32) e submetido à lei de controle (4.9) com matrizes $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$, $\zeta_1(\xi)$ e $\zeta_2(\xi)$ definidas a priori. Seja B_ξ um dado politopo que contenha a origem. Seja Δ um dado politopo no espaço de parâmetros. Seja μ um dado escalar positivo. Se existirem matrizes constantes $P = P' > 0$, L , M_1 e M_2 e matrizes G_1 e G_2 afins em ξ de dimensões apropriadas que satisfazem as desigualdades matriciais lineares (4.37), (4.16) e (4.19) construídas nos vértices de $B_\xi \times B_\Delta$, então, para todo $\xi(0) \in \mathcal{D}$ a trajetória $\xi(t) \in \mathcal{D}$ e se aproxima da origem para $t \rightarrow \infty$.*

Prova 5 *Se as LMI (4.37), (4.16) e (4.19) forem factíveis, por convexidade, também serão verificadas para todo $\xi \in B_\xi$. O restante da prova está distribuído ao longo do desenvolvimento das condições LMI.*

4.3.1 Exemplo

Para exemplificar a metodologia proposta, considere o exemplo de um pêndulo invertido apresentado na seção anterior. Substituindo a lei de controle apresentada em (4.22) no sistema (4.20) e fazendo a mudança de variáveis $\xi = T_1(x)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{v}{1+\delta_1} + \frac{2\xi_1\xi_2^2\delta_1}{(1+\xi_1^2)(1+\delta_1)} + \frac{g\xi_1\delta_1}{l(1+\delta_1)} - \frac{K\xi_2\delta_2}{M(1+\delta_1)} - \frac{(1+\xi_1^2)}{2Ml^2(1+\delta_1)}\psi. \end{aligned} \quad (4.38)$$

O sistema (4.38) pode ser representado de forma equivalente por (4.32) com

$$\pi = \left[\begin{array}{cccccccc} \frac{\xi_1}{1+\delta_1} & \frac{\xi_2}{1+\delta_1} & \frac{\xi_1\xi_2^2}{(1+\xi_1^2)(1+\delta_1)} & \frac{\xi_1\xi_2}{1+\xi_1^2} & \frac{\xi_1}{1+\xi_1^2} & \frac{\xi_1^2}{1+\xi_1^2} & \frac{\psi}{(1+\delta_1)} & \frac{\xi_1\psi}{(1+\delta_1)} \end{array} \right]'$$

e as seguintes matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 + \frac{g\delta_1}{l} & k_2 - \frac{K\delta_2}{M} & 2\delta_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2Mt^2} & -\frac{\xi_1}{2Mt^2} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} -(1 + \delta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 + \delta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + \delta_1) & \xi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \delta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A representação da lei de controle é a mesma do exemplo anterior, apresentada em (4.24).

Para as mesmas condições de parâmetros, incertezas e saturação apresentadas no exemplo da seção anterior, o domínio de atração obtido é apresentado em (4.39).

$$\mathcal{D} = \left\{ x : x' \begin{bmatrix} 1591 & 503,5 \\ 503,5 & 352,0 \end{bmatrix} x \leq 1 \right\} \quad (4.39)$$

Percebe-se que o domínio de atração obtido é muito semelhante ao obtido na seção anterior, apresentado em (4.26), pois a estimativa em (4.26) já é próxima da maior estimativa que pode ser obtida com uma função de Lyapunov quadrática.

4.4 Comentários Gerais

Foram apresentados neste capítulo dois métodos para análise da estabilidade da classe de sistemas não-lineares proposta, sujeitos à saturação. Observou-se que os dois métodos apresentam resultados muito semelhantes para o exemplo estudado. Entretanto, utilizando diferentes valores para saturação e politopo de estados admissíveis, o método que analisa a estabilidade do sistema no domínio linearizado apresentou melhores resultados. Por exemplo, para saturação de $10N.m$ e admitindo $|x_1| \leq 1$ e $|x_2| \leq 1$, o problema de otimização obtido pelo método apresentado na seção 4.2 se mostrou ineficaz para os *solvers* utilizados. Este efeito pode ser explicado pelos argumentos que seguem. Para um sistema predominantemente linear, apenas com os termos não-lineares referentes às incertezas, uma função de Lyapunov quadrática apresenta resultados adequados para análise de estabilidade. Este é o caso de um sistema linearizado por realimentação de estados, onde as não-linearidades remanescentes estão associadas às incertezas. Para um sistema com não-linearidades mais complexas, os resultados obtidos com funções de Lyapunov quadráticas são em geral mais conservadores.

A vantagem da abordagem na qual o sinal de controle aparece de forma explícita está relacionada à possibilidade de projeto da lei de controle da dinâmica linear após a linearização por realimentação de estados.

Capítulo 5

Conclusões e trabalhos futuros

Neste capítulo serão apresentadas as conclusões da dissertação, bem como serão levantadas algumas possibilidades de continuidade do trabalho.

5.1 Conclusão

Apresentou-se nesta dissertação de mestrado uma metodologia para análise de uma classe de sistemas não-lineares submetidos a um controle do tipo linearização por realimentação de estados para regulação do sistema em torno da origem. A classe de sistemas abordados inclui os sistemas cujas não-linearidades possam ser escritas na forma racional ou polinomial. Mostrou-se que através de uma mudança de variáveis adequada, não-linearidades trigonométricas também podem ser abordadas.

Para ilustrar os métodos desenvolvidos foi utilizado o exemplo de um pêndulo invertido. Para verificar a validade dos resultados apresentados foram realizadas diversas simulações no software MATLAB/Simulink. As simulações apresentadas no capítulo 3 mostraram que, para o exemplo proposto, é possível obter uma estimativa pouco conservadora do intervalo de variação paramétrica admissível na qual a estabilidade do sistema seja assegurada. Ainda com este exemplo, para simulações com condições iniciais próximas à borda do domínio de atração

demonstram que a estimativa obtida é pouco conservadora.

No capítulo 4, a análise foi estendida para sistemas sujeitos à saturação na entrada de controle. Foram apresentados os resultados obtidos para análise no domínio original e linearizado do mesmo sistema exemplo. Para o exemplo apresentado, os dois métodos mostraram resultados muito semelhantes, embora a análise no domínio linearizado tenha se mostrado mais adequada para outros exemplos. A metodologia proposta permite a representação do domínio de atração estimado como uma curva de nível da função de Lyapunov. Para a função de Lyapunov quadrática utilizada, o domínio de atração obtido possui a forma elipsoidal. Na figura 4-4 pode-se ter uma idéia do domínio de atração real do pêndulo invertido sujeito à saturação. Baseado neste domínio de atração obtido através de diversas simulações, verifica-se que a elipsóide obtida que delimita o domínio de atração é contida no domínio de atração real e fica próxima de seu limite, indicando um resultado pouco conservativo. A análise no domínio original possibilita o projeto da lei de controle da dinâmica linear resultante, pois o controle aparece explicitamente, o que não ocorre no domínio linearizado.

5.2 Trabalhos Futuros

Esta dissertação apresentou uma abordagem inicial para análise da estabilidade de uma classe de sistemas não-lineares incertos. A metodologia apresentada pode ser estendida para abordar diversos outros problemas, tanto de análise de estabilidade como de síntese de controladores. O problema do controle de sistemas multivariáveis também pode ser estudado.

Para que a análise de estabilidade se mostre menos conservativa, pode-se utilizar funções de Lyapunov mais complexas, permitindo o aumento da estimativa do domínio de atração. Outros pontos a serem abordados são o seguimento de referência e rejeição a perturbações.

No que diz respeito à síntese de controladores, pode-se formular o problema de forma a determinar a posição ótima dos autovalores do sistema linearizado segundo critérios como maxi-

mização do domínio de atração, maximização do politopo dos estados admissíveis, minimização do esforço de controle, entre outros. Embora a análise nesta dissertação tenha sido realizada considerando a linearização por realimentação de estados, a metodologia apresentada pode ser utilizada em outras leis de controle que possam ser escritas como soma de quadrados. Desta forma, pode-se estudar a síntese dos parâmetros ótimos de uma lei de controle, dada sua estrutura.

Apêndice

A.1 Script MATLAB utilizado no exemplo 4.2.1

```

% Script MATLAB para obter uma estimativa do dominio de atração do
% sistema que representa um pendulo invertido, utilizando o parser Yalmip.
%
%Para obter uma copia deste script, envie um e-mail para o autor.
%Eduardo Rath Rohr - edurohr@gmail.com

clear all

%parametros do pendulo
g=9.8; %aceleracao gravitacional
l=1;   %comprimento da haste
M=2;   %massa da esfera
K=.5;  %coeficiente de atrito

k1=-1; % > ganhos que definem a localizacao dos autovalores em m.f.
k2=-2; % /

delta1=0.01; %incerteza na massa
delta2=.99;  %incerteza no coeficiente de atrito

x1=.05;      %limite do angulo
x2=.1;      %limite da derivada do angulo

n=2;         %ordem do sistema
np=8;        %tamanho do vetor de nao-linearidades utilizado no sistema
nw=6;        %tamanho do vetor de nao-linearidades utilizado no controle

mu=30;       %variavel que escalona o controle

%Variaveis livres:
P=sdpvar(2);
F=sdpvar(18,17,'full');

G10=sdpvar(1,n);
G11=sdpvar(1,n);

```

```

G12=sdpvar(1,n);

G20=sdpvar(1,nw);
G21=sdpvar(1,nw);
G22=sdpvar(1,nw);

M1=sdpvar(9,8);
M2=sdpvar(9,8);

h1=[ 1/x1  0]';  %retas que limitam Bx
h2=[-1/x1  0]';
h3=[ 0  1/x2]';
h4=[ 0 -1/x2]';

X=[ -x1 -x2;      %vertices de Bx
   -x1  x2;
    x1 -x2;
    x1  x2];

D=[ -delta1  -delta2;   %vertices de Delta
   -delta1   delta2;
    delta1  -delta2;
    delta1   delta2];

%Condicoes LMI
LMI=set(P>0);

for i=1:4      %varredura nos vertices dos estados
    for j=1:4  %varredura os vertices dos parametros

        de=[D(j,1) D(j,2)]';

        d1=de(1);
        d2=de(2);

```



```

x=[X(i,1) X(i,2)]';

x1=x(1);
x2=x(2);

Xx=[x1;x2];

G1= G10 + G11*x1 + G12*x2;
G2= G20 + G21*x1 + G22*x2;

%Matrizes que definem o sistema e a lei de controle:
B1=[0 0];

B2=[2*M*1^2*(k1-g/l) 0 2*M*1^2*(k2+K/M) -x2*4*M*1^2 0 0];

Z1=[ 1 0;
     0 0;
     0 1;
     0 0;
     0 0;
     0 0];

Z2=[ -1 -x1 0 0 0 0 ;
     x1 -1 0 0 0 0 ;
     0 -x2 -1 0 0 0 ;
     0 0 0 -1 x2 0 ;
     1 0 0 0 -1 -x1 ;
     0 0 0 0 x1 -1 ];

Omega1=[0 0;
        1 0;
        0 0;
        0 1;
        0 0;
        0 0;
        0 0;
        0 0;
        0 0];

```

```

Omega2=[-1      x2      0      0      0      0      0      0      ;
         0      -1      -x1     0      0      0      0      0      ;
         0      x1      -1      0      0      0      0      0      ;
         0      0      0      -(1+d1) 0      0      0      0      ;
         0      0      0      0      -(1+d1) 0      0      0      ;
         0      0      0      0      0      -(1+d1) 0      0      ;
         0      0      0      0      0      0      -(1+d1) 0      ;
         0      0      0      0      0      0      0      -(1+d1)];

Omega3=[0 0 0 0 0 0 1 x1]';

Omega4=[0 0 0 0 1 x1 0 0]';

A1=[0      1;
     g/l 0];

A2=[0      0      0      0      0      0      0      0      ;
     2*x2   0      0      -K*(1+d2)/M  1/(2*M*1^2) x1/(2*M*1^2)  -1/(2*M*1^2)  -x1/(2*M*1^2) ];

A3=[0;
     0];

A4=[0;
     0];

D1=[0 1 0 0 0 0 0 0;
     0 0 1 0 0 0 0 0];

D2=[-1 0 0 0 0 0;
     0 -1 0 0 0 0];

%Condicao D C S

Aux1=[ x      -eye(n,n)  zeros(n,nw);
       zeros(nw,1)  Z1      Z2];

```

```

Ex2=[ 1      B1-G1      B2-G2;
      B1'-G1' P      zeros(n,nw);
      B2'-G2' zeros(nw,n) zeros(nw,nw)];

LMI=LMI+set((Ex2+M1*Aux1+Aux1'*M1')>0);

Ex2=[ 1      -B1+G1      -B2+G2;
      -B1'+G1' P      zeros(n,nw);
      -B2'+G2' zeros(nw,n) zeros(nw,nw)];

LMI=LMI+set((Ex2+M2*Aux1+Aux1'*M2')>0);

%Condicao dV/dt < 0

Aux2=[ Omega1      Omega2      Omega3      Omega4      zeros(np,nw);
      Z1      zeros(nw,np) zeros(nw,1) zeros(nw,1) Z2;
      B1      zeros(1,np) 0      -1      B2;
      zeros(2,2) D1      zeros(2,1) zeros(2,1) D2];

Ex3=[A1'*P+P*A1 P*A2      P*A3+mu*G1' P*A4 zeros(n,nw);
      A2'*P      zeros(np,np) zeros(np,1) zeros(np,1) zeros(np,nw);
      A3'*P+mu*G1 zeros(1,np) -2*mu      zeros(1,1) mu*G2;
      A4'*P      zeros(1,np) zeros(1,1) zeros(1,1) zeros(1,nw);
      zeros(nw,n) zeros(nw,np) mu*G2'      zeros(nw,1) zeros(nw,nw)];

LMI=LMI+set((Ex3+F*Aux2+Aux2'*F')<0);

end

end

% CONDICAO D C Bx
Aux2=[ 1 h1';
      h1 P];

LMI=LMI+set(Aux2>=0);

```

```

Aux2=[ 1 h2';
       h2 P];

LMI=LMI+set(Aux2>=0);

Aux2=[ 1 h3';
       h3 P];

LMI=LMI+set(Aux2>=0);

Aux2=[ 1 h4';
       h4 P];

LMI=LMI+set(Aux2>=0);

result=solvesdp(LMI,trace(P),sdpsettings('solver','sdpt3'))

P=double(P)

```

A.2 Script MATLAB utilizado para gerar curvas de nível

```

% Script MATLAB para desenhar o dominio de atração e as trajetorias de fase
%
% Parametros de entrada:
% P - matriz que determina o dominio de atracao, segundo  $x'Px \leq 1$ 
% D - matriz que contem os vertices do politopo de estados admissiveis
%
% O arquivo de simulacao pendulo.mdl deve conter as equacoes do sistema e
% do controle. As condicoes iniciais da simulacao sao [x1_ini x2_ini]' e os
% parametros sao [d1 d2]'. As trajetorias de fase sao armazenadas na
% variavel x1x2.
%
%Para obter uma copia deste script, envie um e-mail para o autor.
%Eduardo Rath Rohr - edurohr@gmail.com

```

```

function desenha_apend(P,D)

figure;      %cria uma nova figura
hold on;    %permite a sobreposicao de curvas
limx1=1;    % limite de x1
limx2=1;    % limite de x2
pontos=20;  % nro de pontos

%grid para encontrar a curva de nivel
[x1 x2]=meshgrid(-limx1:limx1/100:limx1, -limx2:limx2/100:limx2);

%calculo e plot da curva de nivel V(x) = 1
x1x2=contour(x1,x2,lyap(x1,x2,P), [0 1]);
%a funcao lyap(x1,x2,P) retorna [x1 x2]'P[x1 x2]

tam=x1x2(2,1);      %obtem o tamanho da simulacao
passo=tam/(pontos); %calcula um intervalo na curva de nivel
for i=1:pontos      %gera os pontos para simulacao
    x1(i)=x1x2(1,floor(2+(i-1)*passo));
    x2(i)=x1x2(2,floor(2+(i-1)*passo));
end

for i=1:pontos      %varre os pontos iniciais de simulacao
    for (k=1:4)    %varre as incertezas
        d1=D(k,1);
        d2=D(k,2);
        x1_ini=x1(i);
        x2_ini=x2(i) ;
        assignin('base','d1',d1);      %passa variaveis para o ambiente do matlab
        assignin('base','d2',d2);
        assignin('base','x1_ini',x1_ini);
        assignin('base','x2_ini',x2_ini);
        sim('pendulo');                %chama a simulacao
        plot(x1x2(:,2),x1x2(:,3));      %plota a trajetoria
        hold on
    end
end
end

```

Referências

- [1] H.K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice Hall Upper Saddle River, 2002.
- [2] J.J.E. Slotine and W. Li. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall Englewood Cliffs, 1991.
- [3] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and optimal control*. Prentice Hall Upper Saddle River, 1996.
- [4] C.T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Saunders College Publishing Philadelphia, 1984.
- [5] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer, 1995.
- [6] G. Strang. *Linear Algebra and its Applications*. 1988.
- [7] H. Guillard and H. Bourles. Robust feedback linearization. *Proc. 14 th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, 2000.
- [8] A.L.D. Franco, H. Bourles, E.R. De Pieri, and H. Guillard. Robust nonlinear control associating robust feedback linearization and H_∞ control. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 51(7):1200–1207, 2006.
- [9] K. Glover and D. McFarlane. Robust stabilization of normalized coprime factor plant-descriptions with H_∞ -bounded uncertainty. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 34(8):821–830, 1989.

- [10] D. McFarlane, K. Glover, B.H.P. Res, and V. Clayton. A loop-shaping design procedure using H_∞ synthesis. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 37(6):759–769, 1992.
- [11] G.J. Pappas, J. Lygeros, and D.N. Godbole. Stabilization and tracking of feedback linearizable systems under input constraints. *Proceedings 34 the IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 596–601, 1995.
- [12] W.K. Son, J.Y. Choi, and O.K. Kwon. Robust control of feedback linearizable system with the parameter uncertainty and input constraint. *SICE 2001. Proceedings of the 40th SICE Annual Conference. International Session Papers*, pages 407–411, 2001.
- [13] M. Oishi, I. Mitchell, C. Tomlin, and P. Saint-Pierre. Computing Viable Sets and Reachable Sets to Design Feedback Linearizing Control Laws Under Saturation. *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, pages 3801–3807, 2006.
- [14] S. Wenxiao, L. Donghai, X. Yali, et al. Approximate feedback linearization control of nonlinear system with parameter uncertainties and input constraints. *IEEE International Conference on Control and Automation, Guangzhou, China*, 2007.
- [15] A. Papachristodoulou and S. Prajna. Analysis of non-polynomial systems using the sum of squares decomposition. *Positive Polynomials in Control*, Springer-Verlag, 2004.
- [16] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Robust analysis of LFR systems through homogeneous polynomial Lyapunov functions. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 49(7):1211–1215, 2004.
- [17] L. El Ghaoui and G. Scorletti. Control of rational systems using Linear-Fractional Representations and Linear Matrix Inequalities. *Automatica*, 32(9):1273–1284, 1996.
- [18] A. Trofino. Robust stability and domain of attraction of uncertain nonlinear systems. *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000*, 5, 2000.

- [19] D.F. Coutinho and M. Fu. Guaranteed cost control of uncertain nonlinear systems via polynomial lyapunov functions. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 47(9):1575–1580, 2002.
- [20] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial Mathematics, 1994.
- [21] D.F. Coutinho, K.A. Barbosa, A. Trofino, and C.E. de Souza. Linear H_∞ Filter Design for a Class of Uncertain Nonlinear Systems. *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, pages 380–385, 2003.
- [22] D.F. Coutinho, M. Fu, A. Trofino, and P. Danes. L 2-Gain analysis and control of uncertain nonlinear systems with bounded disturbance inputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(1):88–110, 2008.
- [23] J. Lofberg. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, pages 284–289, 2004.
- [24] J.F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11(1):625–653, 1999.
- [25] K. C. Toh, M. J. Todd, and R. Tutuncu. SDPT3—a Matlab software package for semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 11(12):545–581, 1999.
- [26] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 41(3):436–442, 1996.
- [27] E. J. Davison and E. M. Kurak. A computational method for determining quadratic lyapunov functions for non-linear systems. *Automatica*, 7(5):627–636, 1971.

- [28] G.E. Dullerud and F. Paganini. *A course in robust control theory*. Springer New York, 2000.
- [29] M.C. de Oliveira and R.E. Skelton. On stability tests for linear systems. *Proceedings of the 15th IFAC World Congress*, pages 3021–3026, 2002.
- [30] D. F. Coutinho and J. M. G. da Silva. Estimating the Region of Attraction of Nonlinear Control Systems with Saturating Actuators. *American Control Conference*, pages 4715–4720, 2007.
- [31] J.M.G. da Silva Jr. and S. Tarbouriech. Anti-windup design with guaranteed regions of stability: An lmi-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1):106–111, 2005.