

ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

RAFAEL WINÍCIUS DA SILVA BUENO

**A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE INTEGRAL: UMA VIAGEM PELOS TRÊS MUNDOS DA
MATEMÁTICA**

Porto Alegre
2021

PÓS-GRADUAÇÃO - *STRICTO SENSU*



Pontifícia Universidade Católica
do Rio Grande do Sul

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA**

RAFAEL WINÍCIUS DA SILVA BUENO

**A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE INTEGRAL: UMA VIAGEM PELOS TRÊS
MUNDOS DA MATEMÁTICA**

Porto Alegre

2021

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

RAFAEL WINÍCIUS DA SILVA BUENO

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE INTEGRAL: UMA VIAGEM PELOS TRÊS
MUNDOS DA MATEMÁTICA

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor, pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof. Dr. Lori Viali

Porto Alegre

2021

DEDICATÓRIA

Para Maura e Sofia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, inicialmente, aos meus pais, Jorge e Maura, que, desde meus tenros anos, sempre procuraram evidenciar a importância da educação para o desenvolvimento dos seres humanos. Essa visão fez com que eu percebesse a relevância do estudo para a minha evolução gradual e que assumisse, por meio da docência, a responsabilidade de buscar levar essa ideia aos meus alunos.

À minha filha, Sofia, que é uma fonte enorme de orgulho, felicidade e inspiração que acaba por encher meu espírito de energia, traduzida em motivação para que eu busque ser uma pessoa e um professor cada vez melhor.

Às minhas irmãs, Andreia e Marisa, com quem sempre contei como fonte de apoio, emocional e intelectual, capaz de renovar minhas percepções sobre as mais diversas ideias e redobrar minha constante busca por qualificação.

Ao meu orientador, Professor Lori Viali, que me guiou nesta jornada de estudos, trazendo sempre inestimáveis contribuições para a construção dessa pesquisa e, também, para a minha atuação docente. Ademais, constitui-se em um grande exemplo de pesquisador e uma referência de profissional no âmbito da Educação Matemática atual.

Às Professoras Cláudia Lisete Oliveira Groenwald, Elisabete Zardo Búrigo e ao Professor Diego Lieban por sua disponibilidade em participar dessa inconfundível etapa na minha formação acadêmica e pelas valiosas contribuições dadas.

Aos Professores do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul pelos ensinamentos e experiências divididos ao longo do curso. Em especial aos Professores Valderéz Marina do Rosário Lima e João Batista Siqueira Harres, com quem mais tive contato nesses últimos anos e que acabaram me auxiliando, de diversas formas, ao longo de inúmeras trocas de ideias sobre pesquisa, epistemologia e educação.

Armadas com as técnicas do Cálculo,
sucessivas gerações desenvolveram
ferramentas, previamente inconcebíveis, que
possibilitaram a criação de padrões de
comunicação através de satélites, a viagem
tripulada até a lua e o envio de sondas até os
confins do sistema solar.

David Tall

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Método de Arquimedes para o cálculo do volume da esfera	27
Figura 2 - Método de Cavalieri para o cálculo do volume da pirâmide	36
Figura 3 - René Descartes	45
Figura 4 - Método de Barrow para o problema da tangente	48
Figura 5 - Isaac Newton	52
Figura 6 - Exemplo elaborado por Newton em <i>De analysi</i>	53
Figura 7 - Gottfried W. Leibniz.....	56
Figura 8 - A ideia de Leibniz para a integral	58
Figura 9 - Leonhard Euler.....	70
Figura 10 - Augustin Louis Cauchy.....	79
Figura 11 - Esquema inicial para as três formas de conhecimento em Matemática.....	85
Figura 12 - Exemplo do Mundo Conceitual Corporificado	86
Figura 13 - Interação entre os Três Mundos da Matemática	88
Figura 14 - Afinal, o que é uma tangente?.....	99
Figura 15 - A estrutura conceitual do Cálculo e da Análise Matemática	100
Figura 16 - Codificação dos trabalhos analisados	104
Figura 17 - Categorização dos trabalhos analisados	104
Figura 18 - Distribuição Relativa das Pesquisas Quanto ao Curso Foco	105
Figura 19 - Pesquisas em Função do Conceito Matemático Estudado	107
Figura 20 - Os três momentos da ATD	114
Figura 21 - Primeiro exemplo para a construção da área abaixo de uma curva	120
Figura 22 - Aumento do número de retângulos para o cálculo do limite	121
Figura 23 - Generalização para o cálculo do limite	122
Figura 24 - Generalização da altura dos retângulos para o cálculo do limite	123
Figura 25 - Exemplo para o cálculo da distância percorrida	124
Figura 26 - Relação das áreas dos retângulos com a distância percorrida	125
Figura 27 - Exercício 14	129
Figura 28 - Exercícios 19 a 21	130

Figura 29 - Exercício 25	131
Figura 30 - Exercício 27	132
Figura 31 - Exemplo de cálculo de $A(x)$ com uso de Geometria elementar	135
Figura 32 - Exemplo de exercício de compreensão	137
Figura 33 - Orientações gerais para a resolução de um conjunto de exercícios	139
Figura 34 - Exercício do bloco Enfocando Conceitos	141
Figura 35 - Teorema que trata da constante de integração	142
Figura 36 - Exemplo de cálculo de antiderivada	144
Figura 37 - Corporificação matemática	146
Figura 38 - Exemplo de exercício que requer a construção de demonstração	148
Figura 39 - Concepção inicial dos alunos sobre a criação dos conceitos do Cálculo	155
Figura 40 - Conhecimento dos alunos sobre a história do Cálculo	156
Figura 41 - Experiências anteriores dos acadêmicos com o Cálculo	156
Figura 42 - Informações coletadas pelo grupo G1	159
Figura 43 - Raciocínio construído por um aluno da turma	161
Figura 44 - Integração realizada por um dos acadêmicos da turma	162
Figura 45 - Comparação realizada pelo grupo G2	164
Figura 46 - Gráfico inicial	165
Figura 47 - Acréscimo ao gráfico inicial	166
Figura 48 - Nova concepção dos alunos sobre a criação dos conceitos do Cálculo	168
Figura 49 - Preferência dos alunos sobre abordagens para o ensino de Matemática	169
Figura 50 - Já-encontrados mobilizados na construção do conceito de integral	170

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Livros mais citados nas referências básicas	117
Quadro 2 - Frequência dos livros analisados em cursos de Licenciatura em Matemática no Estado do Rio Grande do Sul	117
Quadro 3 - Estimativas para a altura da passarela	163

RESUMO

Esta tese teve o objetivo geral de investigar a construção histórica do conceito de integral e como se dá o ensino desse conteúdo, à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática, na formação inicial de professores de Matemática do estado do Rio Grande do Sul, e buscar compreender como os futuros docentes percebem a introdução desse conceito, a partir de uma prática fundamentada nos pressupostos teóricos estudados e desenvolvida por meio da Modelação. Essa pesquisa, de cunho qualitativo, iniciou-se, portanto, com a reconstrução do caminho percorrido pela humanidade no desenvolvimento dos conceitos do Cálculo, desde a Mesopotâmia e o Antigo Egito até o século XX. Passou-se, então, para a construção de ideias referentes aos Três Mundos da Matemática, buscando conectá-las com a concepção de integral. A seguir, foi realizado um estado do conhecimento para analisar de que forma as pesquisas brasileiras, oriundas de programas de pós-graduação *stricto sensu*, têm utilizado essa teoria para contribuir com os processos de ensino e aprendizagem de Cálculo. Identificou-se, também, os livros didáticos mais utilizados na formação inicial de docentes de Matemática, em instituições do Estado do Rio Grande do Sul, para compreender como costuma ocorrer a introdução do conceito de integral. Aplicou-se, então, uma atividade de Modelação, junto aos alunos de uma turma da disciplina de Cálculo II, do Curso de Licenciatura em Matemática, de uma instituição de ensino gaúcha. A partir dessa experiência, os discentes responderam a um questionário, que teve suas respostas dissertativas interpretadas por meio da perspectiva metodológica denominada de Análise Textual Discursiva. Nesse contexto, os resultados obtidos apontam que os acadêmicos puderam iniciar o estudo do conceito de integral a partir de já-encontrados provenientes dos mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico. Ademais, os futuros docentes consideraram que experiências corporificadas trazem mais sentido para as aulas e que uma construção pedagógica que não prioriza manipulações algébricas e definições formais é capaz de trazer mais motivação para aprender, podendo, inclusive, ser uma fonte de inspiração para a sua posterior atuação profissional.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem de Cálculo; História do Cálculo; Três Mundos da Matemática; Educação Matemática; Ensino Superior.

ABSTRACT

This thesis aimed to investigate the historical construction of the concept of integral and how this content is taught in the light of the Three Worlds of Mathematics Theory in the initial education of mathematics teachers in the state of Rio Grande do Sul. It seeks to understand how the future professionals realize the introduction of this concept, from the practice based on the theoretical principles studied and developed through mathematical modeling. This is a qualitative research that was started with the reconstruction of the path followed by the mankind for the development of the concepts of calculus, from the Mesopotamia and Ancient Egypt to the XX century. The next step was the construction of ideas referring to the Three Worlds of Mathematics, seeking to connect them with the conception of integral. After that, the current state of knowledge was reviewed to analyze how Brazilian research, produced in *stricto sensu* programs, has used this theory to contribute to the processes of teaching and learning calculus. Another step was the identification of the most used teaching materials in the initial education of mathematics teachers in higher education institutions in Rio Grande do Sul to understand how the concept of integral is introduced. A mathematical modeling activity was then applied to undergraduate students in the subject Calculus II in the Mathematics teaching course in a higher education institution in Rio Grande do Sul. Based on that experience, the students answered a questionnaire, whose subjective answers were interpreted using the methodological approach called Discursive Textual Analysis. In such context, our results pointed out that the students could start the study of the concept of integral from the met-before coming from the Embodied Conceptual and Symbolic Operational worlds. Moreover, the students thought that embodied experiences give more meaning to the lessons and that an education construction that does not prioritize algebraic manipulations and formal definitions is able to create more motivation for learning, and might even become a source of inspiration for their subsequent professional action.

Keywords: Calculus teaching and learning; History of Calculus; The Tree Worlds of Mathematics; Mathematics Education; Higher Education.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	14
2. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS	20
2.1 A Construção Histórica do Cálculo Diferencial e Integral	20
2.1.1 A Mesopotâmia e o Antigo Egito	20
2.1.2 A Grécia Antiga	21
2.1.3 Arquimedes de Siracusa	25
2.1.4 A Idade Média	28
2.1.5 O Período Pré-Cálculo	32
2.1.5.1 Contribuições Iniciais	33
2.1.5.2 Johan Kepler	34
2.1.5.3 Galileu Galilei e Bonaventura Cavalieri.....	35
2.1.5.4 Evangelista Torricelli	38
2.1.5.5 Gregory St. Vincent.....	39
2.1.5.6 Giles Persone de Roberval.....	40
2.1.5.7 Blaise Pascal	41
2.1.5.8 Pierre de Fermat	43
2.1.5.9 René Descartes.....	44
2.1.5.10 John Wallis	46
2.1.5.11 Isaac Barrow	47
2.1.6 O Cálculo, dois Gigantes e uma Controvérsia.....	49
2.1.6.1 Isaac Newton.....	49
2.1.6.2 Gottfried Wilhelm Leibniz	55
2.1.6.3 A Controvérsia	59
2.1.7 Dúvidas Ainda Pairam no Ar	66
2.1.8 Os Irmãos Bernoulli	67
2.1.9 Leonhard Euler	69

2.1.10 Jean Le Rond D'Alembert.....	73
2.1.11 Joseph Louis Lagrange.....	74
2.1.12 A Formalização do Cálculo	75
2.1.12.1 Bernard Bolzano.....	75
2.1.12.2 Augustin Louis Cauchy	76
2.1.12.3 Karl Wihelm Theodor Weierstrass.....	81
2.1.13 A Integral de Riemann	82
2.2 OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA.....	84
2.2.1 Já-estabelecidos, Já-encontrados e A-encontrar	89
2.3 OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA E O CÁLCULO	93
2.4 ESTADO DO CONHECIMENTO.....	101
2.4.1 Perspectivas Metodológicas do Estado do Conhecimento.....	102
2.4.2 Apresentação e Análise dos Resultados	105
2.4.3 Considerações sobre o Estado do Conhecimento	109
3. METODOLOGIA	111
3.1 ESTUDO DE CASO.....	112
3.1.1 Análise Textual Discursiva	114
4. OS LIVROS DIDÁTICOS, O CONCEITO DE INTEGRAL E OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA	116
4.1 ANÁLISE DO LIVRO DE STEWART (2014).....	119
4.2 ANÁLISE O LIVRO DE ANTON, BIVENS E DAVIS (2007).....	133
4.3 ANÁLISE DO LIVRO DE LEITHOLD (1994)	141
5. DA TEORIA À PRÁTICA.....	150
5.1 MODELAÇÃO.....	150
5.2 A PRÁTICA.....	153
5.2.1 A Modelação e a Integral como Antiderivada.....	157
5.2.2 A Integral de Leibniz e a Área Sob a Curva.....	165

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES	168
6.1 Experiência Corporificada	172
6.2 Inspiração para a Atuação Docente	174
6.3 Tirar o Foco da Manipulação Algébrica e do Formalismo	176
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS	178
REFERÊNCIAS	181

1. INTRODUÇÃO

Desde a graduação em Licenciatura Plena em Matemática, questões acerca dos processos de ensino e aprendizagem dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral são recorrentes nas minhas reflexões¹. Impressionava-me, constantemente, com o domínio do conteúdo matemático que meus professores precisavam ter para trabalhar com tópicos complexos e sofisticados como limites, derivadas e integrais. Por outro lado, causava-me curiosidade o fato de todo esse conhecimento, em muitos casos, não ser suficiente para contribuir para que os alunos também compreendessem o conteúdo. Sempre me perguntava sobre as dificuldades encontradas por mim e meus colegas em construir o conhecimento proposto pelo sistema universitário e seu corpo docente.

Nesse contexto, muitos conceitos acabavam sendo apresentados como conhecimentos prontos, que foram criados por grandes mentes de determinadas épocas e, a partir de então, definidos como novas ferramentas capazes de transcender as fronteiras matemáticas estabelecidas. Dessa forma, parecia não ser relevante o fato de, segundo D’Ambrósio (1997), o conhecimento ser gerado, em grande parte, pela necessidade de respostas a problemas e situações palpáveis, estando, portanto, inserido em um contexto histórico.

Apesar de situações envolvendo os sistemas de representação gráfica e tabular serem exploradas em alguns momentos, o ensino se concentrava na construção de habilidades necessárias para aplicar técnicas algébricas para determinar limites, derivadas e integrais dos mais variados tipos de funções reais. Nesse sentido, eram priorizados métodos algorítmicos, preocupados, principalmente, com a competência mecânica do estudante e visando, prioritariamente, transmitir o conteúdo exposto nos livros didáticos (DEMO, 2005). Sobre esta realidade, abordando o conceito de derivada, Machado (1991) afirma:

Não se podem contestar as raízes geométricas e, sobretudo, as físicas, do seu nascimento. A noção de velocidade, as taxas de variação em geral, a noção de reta tangente, foram o substrato de onde emergiu a abstração unificadora. Entretanto que brutal inversão de perspectivas ocorre quando se passa a pensar na noção de derivada como algo em si, que inclusive “se aplica” ao real! Chega-se, algumas vezes, a pretender, por ingenuidade ou comodismo, que o aluno para entender o que é velocidade de uma partícula precisa conhecer antes a noção de derivada. É como se se dissesse que é necessário entender o esquema de funcionamento do aparelho respiratório para poder respirar (p. 53).

Uma questão, então, acompanhava-me: “Será que há alternativa para a construção dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior? ”.

¹ Neste capítulo, por trazer reflexões acerca da minha formação e prática docente, utilizo a primeira pessoa do singular.

Concluída a graduação, ingressei, em 2007, no Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUCRS, onde me dediquei à pesquisa sobre o papel das múltiplas representações na construção do conceito de função. Feita a apresentação da dissertação, no começo de 2009, decidi buscar uma oportunidade no Ensino Superior. Após alguns anos, em 2013, fui convidado para trabalhar como docente do Departamento de Matemática da Universidade de Santa Cruz do Sul – UNISC.

Nesse novo contexto, pude interagir com diversas turmas de disciplinas que trabalham com os conceitos de limite, derivada e integral, envolvendo alunos dos mais diversos cursos de graduação, em especial estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática. Essa experiência, junto com a consciência da importância dessa disciplina para a continuidade dos estudos em cursos envolvendo ciências exatas, fez renascer as antigas questões, que trazia comigo, acerca do ensino e da aprendizagem de Cálculo, tendo agora uma perspectiva docente sobre a mesma problematização.

Foi então que iniciei a busca por pesquisas e referências que pudessem contribuir para o meu trabalho como Professor de Cálculo Diferencial e Integral. Deparei-me, então, com trabalhos que retratam o contexto, ainda dominante, do ensino de Matemática que, segundo D’Ambrósio (1997), costuma tratar os alunos como um conjunto homogêneo e tem como resultado, excluindo-se as felizes exceções, alunos que acabam não atingindo todo o seu potencial criativo e intelectual. Essa situação traz consequências para essas disciplinas que, segundo Müller e Amaral (2012), são responsáveis por um número considerável de reprovações em cursos como engenharias e em licenciaturas em Matemática ou em Física, levando a sérios problemas, como a uma elevada taxa de evasão.

Nesse contexto, Artigue (1995) afirma que o ensino universitário, mesmo que tenha outras ambições, tende a centrar-se em uma prática algorítmica e algébrica do Cálculo e a avaliar apenas as competências provenientes desse domínio. Esse fenômeno acaba por deflagrar um círculo vicioso, pois, para tentar obter níveis aceitáveis de êxito, os professores procuram trabalhar com aquilo que os estudantes assimilam melhor e esses, por sua vez, consideram essas competências como o essencial da disciplina, já que é o que constitui a base da sua avaliação.

Assim, de acordo com Backendorf e Basso (2018), em muitos casos, os discentes acabam realizando processos rápidos, guiados por algoritmos mecânicos, que levam a soluções, mesmo que não tenham compreensão sobre o que foi feito. Percebe-se, então, um impasse, pois, segundo Tall (1996), apesar de a matemática universitária ser uma extensão da matemática escolar, particularmente no que se refere às técnicas de utilização de métodos numéricos e

algébricos, ela requer uma evolução gradual, a partir da reconstrução de ideias antigas, para ingressar na complexidade de métodos mais sofisticados que possibilitam a (re)construção de novas teorias. Nesse sentido, segundo Artigue (1995),

[...] que se bem pode ensinar os estudantes a realizar, de forma mais ou menos mecânica, alguns cálculos de derivadas e primitivas e a resolver alguns problemas padrões, se encontram grandes dificuldades para fazê-los entrar de verdade no campo do cálculo e fazê-los alcançar uma compreensão satisfatória dos conceitos e métodos de pensamento que são o centro desse campo matemático (p. 97).

Dessa forma, imergindo nos estudos de diferentes autores, pude verificar que a questão do ensino e da aprendizagem dos conceitos envolvidos em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral é bastante relevante e atual. Esse fato, agregado ao meu contexto profissional, justifica o interesse por esse tema para o desenvolvimento de uma nova pesquisa, agora em nível de doutorado.

Tendo definido o foco disciplinar para esse estudo, fui à busca, então, de teorias do desenvolvimento do pensamento humano que pudessem me auxiliar na compreensão de como se dá a aprendizagem matemática. Nessa perspectiva, tive a oportunidade de entrar em contato com a teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall (2004; 2013), que a desenvolveu com o objetivo de ter uma visão ampla e completa sobre o desenvolvimento cognitivo matemático. Segundo Tall (2013), esse se constitui em uma reconstrução contínua de conexões mentais que evolui no desenvolvimento de estruturas do conhecimento cada vez mais sofisticadas e envolve os mundos: Conceitual Corporificado; Operacional Simbólico; e Formal Axiomático.

Estudando a teoria proposta por David Tall, encontrei, então, elementos que, acredito, podem auxiliar no desenvolvimento do ensino e da aprendizagem das disciplinas envolvendo conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral. Para situar-me nesse campo de pesquisa, envolvendo essas disciplinas e a Teoria dos Três Mundos da Matemática, realizei um estudo denominado estado do conhecimento, buscando sistematizar e analisar o que foi produzido nesse contexto.

Deparei-me, então, com pesquisas de mestrado (FONSECA, 2010; MAÇÃO, 2014; SOARES, 2018) e doutorado (LEME, 2016; DIAS, 2017) que trazem investigações envolvendo o ensino e a aprendizagem do Cálculo e a teoria dos Três Mundos da Matemática. Os conteúdos matemáticos abordados nesses trabalhos foram: limite; derivada; convergência de sequências e séries numéricas; e problemas de otimização.

Já Almeida (2017) apresenta, em sua tese, material para o ensino de Cálculo composto por sete atividades baseadas em diversos referenciais teóricos da Educação Matemática, entre eles a teoria dos Três Mundos da Matemática. Nesse trabalho, estão envolvidos os conceitos de função, continuidade, diferenciabilidade, equações diferenciais, integral e limite de sequências.

Realizado o estado do conhecimento, pude perceber que nenhuma das pesquisas citadas se debruçou, de forma específica, sobre o ensino e aprendizagem do conceito de integral, envolvendo a teoria proposta por David Tall. Nesse contexto, levando em consideração esse quadro teórico, a minha preocupação com o ensino e aprendizagem de Cálculo, e o fato de estar constantemente trabalhando com a Licenciatura em Matemática, lecionando disciplinas como Cálculo I, Cálculo II, Cálculo III, Cálculo IV e Equações Diferenciais Ordinárias, planejei, em conjunto com meu orientador, esta pesquisa, que tem como questão norteadora: *que características dos Três Mundos da Matemática estão sendo trabalhadas na construção do conceito de integral, na formação inicial de professores de Matemática, no estado do Rio Grande do Sul, e como futuros docentes percebem a introdução desse conceito, a partir de uma prática alternativa, fundamentada no arcabouço teórico estudado?*

Levando em consideração a amplitude desse problema, surgem questões mais específicas, que trazem aspectos fundamentais para uma melhor compreensão do tema e, conseqüentemente, para a construção de possíveis respostas para o problema proposto. Estas são, portanto, as questões de pesquisa:

- *Como se deu a construção histórica do Cálculo e, em especial, do conceito de integral?*
- *Quais concepções da teoria dos Três Mundos da Matemática podem ser relacionadas com o ensino e a aprendizagem do conceito de integral?*
- *Quais são os livros didáticos mais indicados nas referências básicas de disciplinas que trabalham com o conceito de integral, em cursos de Licenciatura em Matemática do Estado do Rio Grande do Sul?*
- *Que características dos Três Mundos da Matemática são exploradas na construção do conceito de integral nos livros mais indicados nas referências básicas de disciplinas que trabalham com esse conceito, em cursos de Licenciatura em Matemática, no Estado do Rio Grande do Sul?*
- *Como futuros professores de Matemática percebem a construção do conceito de integral, a partir de uma prática alternativa, fundamentada em aspectos históricos do Cálculo e na teoria dos Três Mundos da Matemática?*

A partir da questão norteadora, surge o objetivo geral desta pesquisa: *investigar a construção histórica do conceito de integral e como se dá o ensino desse conteúdo, à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática, na formação inicial de professores de Matemática, e, então, buscar compreender como os futuros docentes percebem a introdução desse conceito, a partir de uma prática fundamentada no arcabouço teórico estudado.*

Com base nas questões específicas dessa pesquisa, foram estabelecidos os seguintes objetivos:

- *revisar a construção histórica do Cálculo, focando no conceito de integral;*
- *investigar as concepções da teoria dos Três Mundos da Matemática, relacionadas com o ensino e a aprendizagem do conceito de integral;*
- *identificar os livros mais indicados nas referências básicas de disciplinas que trabalham com o conceito de integral, em cursos de Licenciatura em Matemática do Estado do Rio Grande do Sul;*
- *investigar as características dos Três Mundos da Matemática que são exploradas na construção do conceito de integral, nos livros mais indicados nas referências básicas de disciplinas que trabalham com o conceito de integral, em cursos de Licenciatura em Matemática, no Estado do Rio Grande do Sul;*
- *investigar como futuros professores de Matemática percebem a introdução do conceito de integral, a partir de uma prática construída com base em aspectos históricos do Cálculo e na teoria dos Três Mundos da Matemática.*

Assim, essa tese está dividida em sete capítulos. Nesse capítulo 1, introdutório, trouxe uma contextualização das razões e motivações que me instigaram a realizar essa pesquisa, juntamente com a questão norteadora, as questões específicas, o objetivo geral e os objetivos específicos dessa investigação.

Na sequência, no capítulo 2, trago os pressupostos teóricos investigados, que contemplam: a construção histórica do Cálculo, com ênfase no conceito de integral; e a teoria dos Três Mundos da Matemática, discutindo as principais contribuições das ideias de David Tall e seus colaboradores à Educação Matemática e procurando construir conexões entre essa teoria e o ensino e a aprendizagem do conceito de integral. Ainda nesse capítulo, apresento um estado do conhecimento, que busca investigar de que forma as pesquisas brasileiras, oriundas de programas de pós-graduação *stricto sensu*, têm utilizado a teoria dos Três Mundos da Matemática para contribuir com os processos de ensino e de aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

No capítulo 3, apresento os procedimentos metodológicos sobre os quais fundamentei cada passo dado rumo à construção dessa tese, trazendo concepções sobre o paradigma qualitativo, o método denominado de Estudo de Caso e as formas utilizadas para a coleta e análise de dados. No capítulo 4, destinado ao estudo da introdução do conceito de integral em livros de Cálculo, trago as análises dos livros de Stewart (2014), Anton, Bivens e Davis (2007) e Leithold (1994), que são as obras mais recorrentes nas referências bibliográficas das instituições de ensino consultadas.

No capítulo 5, construo um panorama sobre a Modelagem Matemática na Educação – Modelação, justificando a sua escolha como metodologia capaz de colocar em prática as ideias desenvolvidas ao longo dessa pesquisa. A seguir, detalho dois encontros realizados junto a uma turma da disciplina de Cálculo II, composta por alunos de um Curso de Licenciatura em Matemática, nos quais empreguei a Modelação na introdução do estudo do conceito de integral.

No capítulo 6, trago os resultados e conclusões construídos a partir da análise das respostas dos acadêmicos frente a um questionário proposto ao fim das atividades realizadas. Dessa forma, expus as ideias emergentes dessa análise por meio de três metatextos desenvolvidos a partir das premissas da Análise Textual Discursiva. Finalizo essa tese, no capítulo 7, trazendo minhas considerações finais sobre a investigação realizada.

2. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

2.1 A CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

As ideias atuais que sustentam o Cálculo Diferencial e Integral foram construídas ao longo de muitos séculos. Ao contrário do que trazem alguns textos contemporâneos sobre o tema, o desenvolvimento dessa área da Matemática iniciou com estudos relacionados ao conceito atual de integral para, apenas muito tempo depois, surgirem estudos relacionados ao que se conhece hoje como derivada e, posteriormente, limite.

A ideia de integração se originou em processos somatórios para o cálculo de áreas, volumes e comprimentos. A diferenciação, criada posteriormente, resultou de processos para o cálculo de tangentes a curvas, de variações instantâneas de grandezas físicas e de problemas relacionados a máximos e mínimos. Mais tarde, verificou-se que a diferenciação e integração são, cada uma, a operação inversa da outra, o que culminou com a construção do Teorema Fundamental do Cálculo. (EVES, 2004).

2.1.1 A Mesopotâmia e o Antigo Egito

As origens do pensamento matemático como é conhecido atualmente são atribuídas às civilizações estabelecidas às margens férteis de grandes rios na China, Egito, Índia e Mesopotâmia. Entretanto, relatos mais precisos apenas são conhecidos sobre as culturas estabelecidas às margens do rio Nilo, no Egito, e entre os rios Tigres e Eufrates, na Mesopotâmia, provenientes, respectivamente, de papiros e tábulas de argila cozida recuperados ao longo dos últimos séculos.

De acordo com Roque (2012), da Mesopotâmia, onde estava localizada a Babilônia, são originadas as primeiras formas de escrita registradas, atribuídas aos sumérios, no quarto milênio antes de Cristo. Essa forma de escrita é atualmente chamada de cuneiforme, em forma de cunha. Esse surgimento está intimamente ligado à Matemática, pois a escrita era utilizada, basicamente, para gravar quantidades de rebanhos, de insumos relacionados à sobrevivência e, sobretudo, à organização da sociedade.

Conforme afirma Stewart (2014), cerca de um milhão de tabuletas de argila babilônicas já foram escavadas da região da Mesopotâmia e algumas centenas delas tratam de Matemática e Astronomia e mostram que esse povo tinha um extenso conhecimento sobre esses temas. A partir do estudo desse material, foi possível concluir que os babilônios eram

astrônomos avançados para sua época, sendo capazes de representar dados relativos a essa ciência com relativa precisão.

No que diz respeito à geometria, essa estava ligada à mensuração prática. Deduz-se que os babilônios, do período de 2000 a 1600 a.C., estavam familiarizados com regras gerais para o cálculo das áreas de algumas figuras geométricas, assim como de volumes de alguns sólidos. Pela utilização da base sexagesimal, iniciada pelos sumérios, e depois utilizada pelos seus sucessores, deve-se aos povos da Mesopotâmia, entre outras contribuições importantes, a divisão de uma hora em 60 minutos, de um minuto em 60 segundos e da circunferência em 360 partes iguais.

Segundo Edwards (1979), a geometria, entretanto, tem sua origem no Egito, onde os impostos eram coletados de acordo com a área das terras cultivadas por cada agricultor. Inclusive, se a cheia anual do Nilo alagasse parte de sua terra, o agricultor solicitava que os valores dos seus impostos fossem reduzidos de acordo com a área alagada do terreno. Para que essas questões fossem resolvidas, evidentemente técnicas elementares de geometria eram necessárias. De acordo com D'Ambrósio e Valente (2016), foi dessa necessidade do cálculo preciso de áreas de terras, que surgiu, em grego, o termo Geometria (geo + metria). Nesse contexto, um dos personagens do período, Heródoto (485 a.C. – 425 a.C.), afirmou:

[...] disseram que este rei (Sesostris) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que, ao mesmo tempo, o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra a fim de saber quanto ela estava diminuída, e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de sua terra. Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que depois passou aos gregos (*apud* MACHADO, 1991, p. 11).

Mais informações sobre a Matemática Egípcia são fornecidas pelos papiros de Rhind, copiado pelo escriba chamado Ahmes, por volta de 1650 a.C., de um original datado de 2000 a 1800 a.C., e de Moscou, escrito por volta de 1850 a.C. Nesses documentos históricos, são encontrados 110 problemas matemáticos e suas soluções. Desses, mais de 20 são relacionados ao cálculo de áreas de terrenos e volumes de celeiros para a estocagem de grãos.

2.1.2 A Grécia Antiga

Tales de Mileto (624 a.C. – 546 a.C.) foi o primeiro grego a ser relacionado com a revolução intelectual, trazendo contribuições significativas para o início de uma geometria demonstrativa. O pensador foi um grande viajante que, supõe-se, aprendeu noções de Astronomia dos Babilônios e de Geometria dos Egípcios e, retornando à Grécia, instruiu seus

sucessores nesses tópicos. A Tales é atribuído, inclusive, o estabelecimento da Matemática como uma disciplina dedutiva (BOYER, 1959).

Coube a Pitágoras de Samos² (571 a.C. – 495 a.C.) e a sua escola levarem adiante o processo de abstração iniciado por Tales. A procura da escola pitagórica por unidades na natureza e na Geometria levou a teorias aplicadas ao cálculo de áreas, o que foi fundamental para o desenvolvimento da geometria grega. Esse processo culminou, posteriormente, com o método da exaustão de Eudoxo de Cnido (408 a.C. – 355 a.C.), que pode ser considerado como o equivalente à gênese rudimentar grega do processo de integração.

Foi na época da escola pitagórica que surgiram as primeiras menções à ideia de infinitesimais. De forma simplificada, afirmava-se, então, que toda reta era composta por uma sequência de indivisíveis, que eram as partículas elementares da reta. Segundo Boyer (1959), entretanto, não há certeza se foram os próprios pitagóricos que criaram a ideia dos infinitamente pequenos. O que se pode afirmar é que um conceito inicial de infinitesimal surgiu no pensamento matemático no século V a.C., como resultado das indagações gregas sobre a natureza do mundo físico.

Nesse período, florescia, também, a escola de Abdera, defensora de uma doutrina atomista, que estabelecia que tudo, inclusive a mente e a alma, era formado por átomos, definidos como partículas indivisíveis. Um dos maiores defensores dessa doutrina foi Demócrito de Abdera³ (460 a.C. – 370 a.C.), que levou a teoria dos indivisíveis para a Geometria, sendo o primeiro grego a determinar fórmulas gerais para os volumes da pirâmide e do cone. De acordo com Boyer (1959), a fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide de base quadrangular regular era, provavelmente, conhecida pelos egípcios e Demócrito pode tê-la conhecido em suas viagens para, então, generalizar o resultado para todos os tipos de pirâmides. Já, a fórmula do cone, seria uma inferência obtida através do aumento indefinido do número de lados do polígono regular da base da pirâmide.

Consciente dos problemas relacionados à então recente ideia dos infinitesimais, o filósofo Zenão de Eleia⁴ (490 a.C. – 430 a.C.) construiu uma série de paradoxos que apontavam as dificuldades lógicas para a compreensão desse conceito. “Aquiles⁵ e a tartaruga”, por exemplo, propõe que Aquiles, por mais veloz que seja, nunca alcançará uma tartaruga, se tiver que chegar primeiro à posição inicial do animal, depois à posição seguinte, à seguinte e assim

² Outro pensador que, presume-se, fez viagens à Mesopotâmia e ao Egito.

³ Grande filósofo pré-socrático e matemático da Grécia Antiga.

⁴ Filósofo pré-socrático que nasceu em Eleia, onde atualmente se localiza Vélia, na Itália.

⁵ Herói da mitologia grega e protagonista da *Ilíada*, de Homero.

por diante. Entretanto, intuitivamente, é relativamente simples concluir que Aquiles, em algum momento, alcançará a tartaruga, o que leva a uma contradição. Já o paradoxo da “flecha” afirma que um objeto que ocupa um espaço igual a si está em repouso, o que é verdade para uma flecha, em cada instante de seu voo. Esse pensamento pode levar, então, à ideia contraditória de que a flecha não se move. Para resolução desses paradoxos são necessárias noções de conceitos atualmente elementares do Cálculo, como continuidade, limites e somas infinitas, abstrações com as quais obviamente os gregos ainda não estavam familiarizados.

Eves (2004) afirma que os paradoxos de Zenão desafiam ideias comuns da intuição humana: de que a soma de um número infinito de quantidades positivas é infinitamente grande, mesmo que cada uma delas seja extremamente pequena; e de que a soma infinita de quantidades de dimensão infinitamente pequena é zero.

De acordo com Alexander (2016), os problemas relacionados aos indivisíveis não se restringiram aos paradoxos de Zenão, pois essa noção também encontrava oposição no fato de que algumas grandezas são incomensuráveis em relação a outras. Essa questão teve origem na escola pitagórica, com a análise da relação entre um lado de um quadrado e a sua diagonal. Nos tempos atuais, diz-se que a razão entre os dois segmentos é $\sqrt{2}$, que é um número irracional. Mas os antigos diziam que os dois segmentos eram incomensuráveis, provando que não possuem uma medida comum. Essa questão levava ao raciocínio de que, se os segmentos fossem compostos por indivisíveis, então a magnitude desses infinitesimais seria uma medida comum para essas duas linhas. Mas, sendo incomensuráveis, concluía-se que não havia componente comum compartilhado, logo não existiam os indivisíveis.

A falta de habilidade dos filósofos gregos para responder a essas questões fez com que deixassem de lado a tentativa de dar uma explicação quantitativa a fenômenos relacionados ao movimento e à variabilidade. Com isso, apenas aspectos estáticos da ótica, mecânica e astronomia continuaram a ter espaço na Matemática da Grécia Antiga. Segundo Caraça (2003), os argumentos de Zenão e a dificuldade com a incomensurabilidade fizeram com que a Matemática da época fosse tomada por um verdadeiro horror ao infinito e às concepções dinâmicas, abandonando, sempre que possível, a ideia de movimento e adotando, cada vez mais, uma feição finitista.

As divisões sucessivas foram, posteriormente, aplicadas à Geometria por Eudoxo, sem a perda de rigor lógico, através do chamado método da exaustão. Dessa forma, conforme afirma

Boyer (1959), o pensador Platão⁶ (428 a.C. – 347 a.C.) propôs a Eudoxo problemas geométricos que o levaram a construir a gênese do Cálculo. As demonstrações dadas nesses problemas, resolvidos previamente sem provas por Demócrito, relacionados ao volume da pirâmide e do cone, levaram-no ao seu famoso método e à sua definição de proporção.

Nessa época, conforme argumenta Boyer (1996), os gregos já haviam conjecturado que a área e o perímetro de um círculo poderiam ser obtidos através de uma família de polígonos inscritos, com o seu número de lados aumentando cada vez mais. Essa hipótese teria sido levantada por Antífon (c. 430 a.C.), o Sofista, que afirmava que se inscrevendo um polígono regular em um círculo e realizando sucessivas duplicações do número de lados desse polígono a diferença entre o círculo e o polígono poderia ser sucessivamente diminuída até se exaurir.

Essa ideia, atribuída a Antífon, continha a base método da exaustão de Eudoxo, (presente nos Elementos X) que demonstrou que: dadas duas grandezas diferentes (ambas diferentes de zero), se, da maior subtrai-se uma parte não menor que sua metade, e, do que restou, subtrai-se uma parte não menor que sua metade, e, se esse processo se repetir continuamente, irá restar uma grandeza que será menor que a menor parte retirada. De acordo com Garbi (2010):

Esse processo de reduzir indefinidamente as diferenças entre um comprimento, uma área ou um volume desconhecidos e, respectivamente, famílias de comprimentos, áreas e volumes conhecidos, recebeu o nome de método da Exaustão. O círculo (perímetro e área) é exaurido por uma família de polígonos, o volume do cilindro por uma família de prismas, o do cone por uma família de pirâmides, etc. (p. 54).

Essa proposição, segundo Boyer (1996) é equivalente à seguinte formulação atual: se M é uma grandeza dada, ε uma grandeza da mesma espécie e r uma razão tal que $1/2 \leq r < 1$, então se pode encontrar um inteiro N tal que $M(1 - r)^n < \varepsilon$ para todo inteiro $n > N$. Isso equivale a dizer que $\lim_{n \rightarrow \infty} M(1 - r)^n = 0$.

Boyer (1959) afirma que a expressão “exaustão” não foi introduzida por Eudoxo ou mesmo utilizada em relação ao seu método até o século XVII, quando matemáticos aplicaram o termo para designar tanto o procedimento grego quanto seus próprios métodos que culminaram com o Cálculo. Os gregos, na verdade, nunca consideraram o processo com um número infinito de etapas, como foi feito séculos depois com a introdução do limite, conceito que permite a interpretação da construção da área ou volume a partir de uma verdadeira exaustão.

⁶ Filósofo fundador da Academia de Atenas.

2.1.3 Arquimedes de Siracusa

As próximas contribuições ao Cálculo foram dadas por Arquimedes (c. 280 a.C.) de Siracusa, considerado o maior gênio da Antiguidade. Esse pensador estudou em Alexandria, onde aprendeu concepções sobre Matemática, antes de voltar para sua cidade natal para servir ao rei Hierão⁷ (270 a.C. – 215 a.C.). Segundo Garbi (2010):

Ao final de sua carreira, com cerca de 75 anos, ele havia estendido as fronteiras da Matemática para muito além daquilo que recebera de Euclides e outros e a humanidade teve que esperar 19 séculos para que, com Newton, surgisse alguém que a ele pudesse ser comparado (p. 80).

Arquimedes demonstrou que a área de um círculo é igual à área de um triângulo cuja medida da altura é igual à medida do raio do círculo e cujo comprimento da base é igual ao perímetro da circunferência. Para essa e outras de suas demonstrações que procuravam provar que duas grandezas eram iguais, Arquimedes utilizava a dupla redução ao absurdo. Para tanto, supunha, inicialmente, que uma das grandezas era maior ou menor que a outra e, a seguir, supunha o contrário, e chegava, então, a dois absurdos, o que demonstrava que uma grandeza, não podendo ser nem menor, nem maior que a outra, só poderia ser igual a ela.

Entre os feitos de Arquimedes, destacam-se a determinação de que o comprimento de uma circunferência de raio R é o equivalente ao que se conhece atualmente⁸ como $2\pi R$ e de que a área de um círculo, também de raio R , é o equivalente ao que se denota hoje por πR^2 . Mas essa questão levou ao problema de determinar essa constante de proporcionalidade (que ainda não havia sido batizada), através da qual tanto o perímetro quanto a área do círculo poderiam ser calculados.

O pensador calculou então, utilizando pela primeira vez na história fórmulas de recorrência, uma aproximação de π , chegando a $3\frac{1}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Resolvidas as questões relativas ao círculo, Arquimedes, em seu tratado Sobre a Esfera e o Cilindro⁹, voltou sua atenção para a esfera e foi capaz de demonstrar que sua área é igual a 4 vezes a área do seu círculo máximo e que o seu volume é 4 vezes o volume do cone que tem como altura o raio dessa esfera e como base seu círculo máximo. Essas proposições são equivalentes às modernas expressões $4\pi R^2$ e $(4/3)\pi R^3$ para a área e o volume da esfera de raio R , respectivamente (BOYER, 1996).

⁷ Eleito rei de Siracusa, localizada na Sicília.

⁸ Conforme Garbi (2010), o símbolo π passou a ser utilizado a partir do século XVIII, quando foi introduzido por Leonhard Euler.

⁹ Esse parece ter sido o trabalho preferido de Arquimedes, uma vez que, segundo Boyer (1996), solicitou que sobre o seu túmulo fosse esculpida uma representação de uma esfera inscrita em um cilindro.

Arquimedes, conforme destaca Boyer (1959), utilizou, nas demonstrações de seus resultados, uma modificação do método de Eudoxo, considerando não apenas uma figura inscrita como também uma circunscrita. O método da exaustão, apesar de ser muito bem-sucedido para demonstrar resultados já conhecidos, não estava plenamente adaptado para a descoberta de novos, de forma que Arquimedes o combinou, então, com considerações sobre infinitesimais, trazendo progressos à teoria trazida por Demócrito.

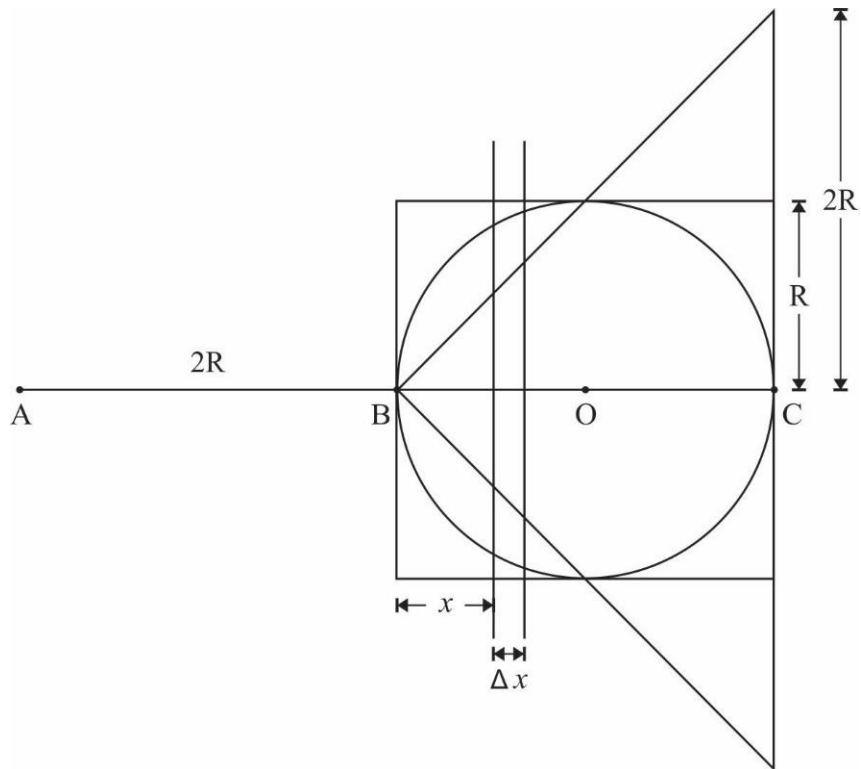
Essas considerações são claramente mostradas em seu trabalho endereçado a seu amigo Erastóstenes de Cirene¹⁰ (296 a.C. – 194 a.C.), da Universidade de Alexandria, chamado de “O Método” e que havia sido perdido e permanecido desconhecido até 1906, quando finalmente foi encontrado na biblioteca de um monastério em Istambul. Nesse material, é explicado o seu método utilizado para provar teoremas envolvendo áreas e volumes, como o volume da esfera, por exemplo. Percebendo a vantagem de ter uma ideia preliminar sobre o resultado, antes de iniciar uma abordagem geométrica, Arquimedes empregava, de acordo com Garbi (2010), o conceito físico de equilíbrio de pesos suspensos sobre barras (alavancas) em conjunção com a ideia de que uma superfície, por exemplo, era composta por muitas linhas.

Nesse contexto, segundo Eves (2004), para determinar uma área ou um volume, eram realizadas experiências mentais, nas quais a região era cortada em um número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas que eram, então, penduradas imaginariamente em uma extremidade de uma alavanca, de tal forma que fosse possível estabelecer o equilíbrio com uma área ou volume conhecidos. Esses princípios levavam o pensador grego a uma resposta para suas questões. Contudo, não se satisfazendo com esses procedimentos, Arquimedes recorria, então, ao princípio da exaustão a fim de ter uma demonstração tida como mais rigorosa de seus teoremas. O método do equilíbrio de Arquimedes é ilustrado nesse trabalho a partir do seu uso para determinar o volume de uma esfera, de acordo com o raciocínio desenvolvido a seguir.

Seja uma esfera de raio R , cujo diâmetro horizontal se encontra sobre o eixo das abscissas, sendo que uma de suas extremidades se encontra na origem B , e sejam um cilindro a ela circunscrito e um cone parcialmente inscrito e parcialmente circunscrito a essa esfera, conforme mostra a Figura 1, na qual está representada uma secção do conjunto obtida por um plano que passa pelo centro da esfera e que contém o eixo BC do cilindro. Tomem-se, então, nos três sólidos, fatias verticais muito finas correspondentes às abscissas x e Δx , que serão consideradas como cilindros achatados de altura Δx .

¹⁰ Matemático, geógrafo e astrônomo grego, que nasceu em Cirene, na África, e viveu em Alexandria.

Figura 1 – Método de Arquimedes para o cálculo do volume da esfera.



Fonte: Adaptado de Garbi (2010)

Os volumes dessas fatias são dados, aproximadamente, por:

$$\text{Cone: } \pi x^2 \Delta x$$

$$\text{Esfera: } \pi x(2R - x) \Delta x$$

$$\text{Cilindro: } \pi R^2 \Delta x$$

Suponha-se, agora, que são penduradas no ponto A, que dista $2R$ de B, as fatias da esfera e do cone. O momento de rotação¹¹ combinado das fatias em relação ao ponto B será:

$$\pi x(2R - x) \Delta x 2R + \pi x^2 \Delta x 2R = 4\pi R^2 x \Delta x$$

Já, o momento de rotação da fatia do cilindro, que está a uma distância x de B, será:

$$\pi R^2 x \Delta x$$

Pode-se observar, portanto, que para qualquer x escolhido para realizar a secção, a razão entre os momentos será de 4 para 1. Se for feita a adição de um número muito grande de fatias, a soma total de cada um desses pequenos cilindros resultará, em cada caso, em uma aproximação muito boa do volume da esfera, do cone e do cilindro. Isto é, para equilibrar nessa

¹¹ O momento de rotação de um volume em relação a um ponto é o produto do volume pela distância do ponto ao centroide desse volume.

alavanca o volume de uma esfera mais o volume de um cone, concentrados no ponto A , seriam necessários os volumes de quatro cilindros concentrados no ponto O . Ou seja:

$$2R(V_{esfera} + V_{cone}) = 4R \cdot V_{cilindro}$$

ou

$$V_{esfera} + \frac{8\pi R^3}{3} = 2 \cdot 2\pi R^3$$

ou

$$V_{esfera} = 4\pi R^3 - \frac{8\pi R^3}{3}$$

ou

$$V_{esfera} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Nesse contexto, Boyer (1959) ressalta que o método de Arquimedes indica uma antecipação da utilização do conceito de infinitesimais que, quando desenvolvido no século XVII, levou diretamente aos procedimentos do Cálculo. Nesse sentido, segundo Eves (2004):

Pelo método do equilíbrio pode-se ver a fertilidade da ideia que consiste em considerar toda grandeza como sendo formada por um número muito grande de porções atômicas, embora essa ideia não tivesse uma fundamentação precisa. É desnecessário dizer que, com o método dos limites, pode-se fazer com que o método do equilíbrio de Arquimedes se torne perfeitamente rigoroso, confundindo-se, em essência, com a moderna integração (p. 423-424).

Apesar do sucesso obtido, Arquimedes não teve sucessores, pois, conforme afirma Alexander (2016), as gerações seguintes de matemáticos se mantiveram à margem dos aspectos inovadores da sua abordagem. Em vez disso, preferiram se apoiar em métodos geométricos já experimentados e comprovados para aplicações em Astronomia, Mecânica e Óptica. Como consequência, por mais de um milênio e meio, o trabalho de Arquimedes envolvendo os infinitamente pequenos permaneceu apenas como um vislumbre de um caminho não trilhado.

2.1.4 A Idade Média

No período relativo à Baixa Idade Média, do século V até o século XI, a população ocidental europeia praticamente deixou de ter acesso ao ensino e quase todo o saber grego foi esquecido. Tinham acesso ao conhecimento apenas os monges dos mosteiros católicos e alguns poucos leigos cultos. Com exceção da elaboração do calendário cristão, a Matemática foi muito pouco utilizada durante mais de meio milênio (EVES, 2004).

Nos séculos XI e XII, segundo Roque (2012), a urbanização da Europa estimulou a concentração de riquezas, a disseminação de escolas e a intensificação da cultura intelectual. Foi no século XII, também, que se catalisaram as traduções de obras clássicas como, por exemplo, os tratados de Arquimedes. Mas foi apenas em 1269 que William Moerbeke¹² (c. 1215 - 1286), proveniente de Flandres¹³, publicou uma tradução do grego para o latim dos principais escritos científicos desse pensador. Foi essa obra que os sábios da renascença vieram, então, a conhecer.

No século XIV, nas universidades de Oxford e Paris, as evoluções matemáticas começaram a ocorrer. Foram nessas instituições, principalmente, que floresceram os primeiros estudos sobre as mudanças de forma geral e, em particular, sobre a variação da velocidade (BOYER, 1996).

Na Grécia Antiga, o movimento era tratado mais como uma qualidade do que como uma quantidade e não havia um estudo sistemático sobre essas qualidades. Inclusive, Aristóteles teria afirmado que a Matemática se concentrava, principalmente, em coisas que não envolviam o movimento. De forma geral, segundo Boyer (1959), a Matemática grega baseava-se mais no estudo da forma do que da variabilidade. Essa ideia predominou, então, até o século XIV.

Foi nesse período, de acordo com Boyer (1996), que um avanço teórico importante foi feito, contribuindo para uma evolução no sentido da construção do conceito de derivada. O início dessa evolução ocorreu nos primórdios desse século, com a introdução, atribuída ao filósofo francês Jean Buridan (1300 - 1358), da ideia de *impetus*¹⁴, uma noção de que um corpo, uma vez em movimento, tem a tendência a continuar seu movimento, sem a ação de forças externas.

Essa nova doutrina, segundo Boyer (1996), tornou mais aceitável a noção intuitiva de velocidade instantânea, presente nos estudos de variação do século XIV. Nos trabalhos dessa época, começaram então a surgir, ainda de forma mais filosófica do que matemática, inúmeras referências sobre a taxa de variação instantânea, ainda que nenhuma definição precisa desse conceito tivesse sido construída. Esses trabalhos se referiam à variabilidade de qualidades, discutidas no contexto da latitude das formas.

¹² Tradutor de obras filosóficas e científicas.

¹³ Região situada ao norte da Bélgica.

¹⁴ Essa ideia iniciou o caminho trilhado até o princípio da inércia de Isaac Newton.

Richard Suiseth¹⁵ (c. 1350), matemático do Merton College, de Oxford, também conhecido como *The Calculator*¹⁶, fez vários comentários acerca do infinito nos seus trabalhos. Mas foi em sua obra *Liber calculationum*¹⁷ que um importante tratado envolvendo a latitude das formas foi construído. Suiseth chegou à conclusão que a intensidade média de uma forma, cuja taxa de variação em um intervalo é constante, é dada pela média aritmética entre a primeira e a última intensidade. Essa afirmação foi nomeada de regra de Merton e, em termos atuais, informa que a velocidade média de um corpo que se move com velocidade que possui variação constante é a média aritmética entre as velocidades inicial e final.

Segundo Boyer (1959), é atribuído a Suiseth o primeiro esforço sério de tornar o estudo das quantidades físicas, como densidade, velocidade e intensidade da luz, matematicamente compreensível. Seu trabalho sobre as mudanças dessas quantidades antecipou a elaboração científica desse tema, como também sugeriu a introdução na Matemática de conceitos como a variabilidade. Inclusive as palavras *fluxões* e *fluentes*, empregadas por Suiseth nesse contexto, foram utilizadas por Isaac Newton (1642 - 1727), aproximadamente trezentos anos depois, quando esse último trouxe suas definições sobre o Cálculo.

As demonstrações dialéticas de Suiseth, de acordo com o que afirma Boyer (1959), não trouxeram relação alguma com a geometria, que acabou por se tornar a intermediária entre suas tentativas iniciais de estudar quantidades variáveis e as conceitualizações trazidas com a construção do Cálculo. Essa conexão entre o discurso de Suiseth e o simbolismo algébrico foi trazida pelo avanço do estudo da latitude das formas, cultivado por outros expoentes do século XIV, dentre os quais se destaca o pensador francês Nicole Oresme¹⁸ (1323 - 1382).

Oresme desenvolveu seu estudo a partir de uma abordagem geométrica. As formas, ou qualidades, eram os fenômenos como a luz, a distância ou a velocidade, que possuem vários níveis de intensidade e que mudam continuamente (BUENO; VIALI, 2009). De acordo com Boyer (1996), “os termos latitude e longitude, que Oresme usou, são equivalentes, num sentido amplo, à nossa ordenada e abscissa, e sua representação gráfica assemelha-se com a nossa geometria analítica” (p. 181).

No seu trabalho, Oresme representou a variação a partir de recursos geométricos, em detrimento da exposição dialética proposta por Suiseth. Segundo o filósofo e matemático

¹⁵ Ou Swineshead ou, ainda, Suisset.

¹⁶ O Calculador.

¹⁷ Livro de cálculos.

¹⁸ Oresme foi um dos principais divulgadores da ciência moderna e, segundo Eves (2004), além de filósofo, foi o maior matemático de sua época.

francês, o modo como uma qualidade varia de um instante para outro, ou de um lugar para outro, pode ser representado por um gráfico de duas dimensões, onde o eixo horizontal representa a extensão (tempo ou espaço) e o eixo vertical representa a intensidade da qualidade de interesse. A sucessão de intensidades é vista, assim, como uma figura plana em que, em cada ponto do eixo horizontal, é traçada uma reta vertical que representa a intensidade da qualidade observada nesse instante (ROQUE, 2012).

Apesar de não ter feito conexões significativas entre as suas curvas e uma correspondente representação algébrica, Boyer (1959) afirma que a representação gráfica proposta por Oresme marcou um passo importante na direção do Cálculo Diferencial e Integral, pois foi o estudo de problemas geométricos e a tentativa de expressá-los em termos numéricos que direcionaram estudos posteriores para a construção de conceitos como a derivada e a integral. Nesse sentido, segundo Boyer (1996):

Ele assinalou a propriedade de inclinação constante para o seu gráfico do movimento uniformemente acelerado – uma observação equivalente à equação por dois pontos de uma reta em geometria analítica e que leva ao conceito de triângulo diferencial. Além disso, ao achar a função distância, a área, Oresme evidentemente estava realizando uma simples integração que resulta na regra de Merton. Ele não explicou por que a área sob a curva velocidade-tempo representa a distância coberta, mas é provável que pensasse na área como sendo formada de muitos segmentos verticais ou indivisíveis [...] (p. 181).

Os estudos, desenvolvidos inicialmente em Oxford e em Paris, continuaram, no século XV, na Itália, onde Biagio Pelacani (1365 - 1416), conhecido como Blasius de Parma¹⁹, tido como um grande filósofo e matemático do seu tempo, trouxe questões relativas à latitude das formas em *Questiones super tractatus de latitudinibus formarum*²⁰. O pensador italiano inseriu, inclusive, esse tópico de estudo em suas aulas nas universidades de Pavia, Bologna e Pádua.

Já, o princípio da aquisição uniformemente disforme de uma qualidade era conhecido em Paris, no século XVI, por Álvaro Tomás²¹, John Major, Dominic Soto e outros. O princípio da aceleração uniforme parece ter sido de conhecimento comum do século XIV ao século XVI e é provável, inclusive, que Galileu Galilei (1564 - 1642) tivesse familiaridade com esse trabalho.

Apesar dos grandes avanços trazidos pelo estudo da latitude das formas, proposto por Suiseth e Oresme, segundo Boyer (1959), os princípios fundamentais para o desenvolvimento

¹⁹ Matemático, filósofo e astrólogo italiano. Um dos principais responsáveis pela disseminação na Itália das ideias científicas inovadoras oriundas na Universidade de Paris.

²⁰ Questões sobre o tratado da latitude das formas.

²¹ Filósofo e matemático português que estudou medicina em Paris, entre 1513 e 1518, e alcançou resultados importantes do estudo das séries infinitas.

do Cálculo continuaram sendo buscados na geometria de Arquimedes. Com o início do século XV, as ideias do pensador grego passaram a se tornar cada vez mais influentes nos trabalhos desenvolvidos por matemáticos, como o próprio Blasius de Parma, a quem são atribuídos tratados sobre os infinitesimais.

Outro proeminente destaque na evolução da Matemática no sentido do Cálculo Diferencial e Integral, influenciado pelo trabalho de Arquimedes, foi Nicholas Krebs²² (1401 - 1464), mais conhecido com Nicholas de Cusa, em referência à sua cidade natal, localizada no sudoeste da Alemanha. Apesar de suas definições de infinitamente grande e infinitamente pequeno serem insatisfatórias, ele se tornou significativo na medida em que utilizou as noções de infinito e infinitesimal. Considerou, por exemplo, um triângulo e um círculo como polígonos com o menor e o maior número de lados possíveis, respectivamente.

No seu método para o cálculo da área do círculo, conforme destaca Boyer (1956), Nicholas de Cusa considerou esse como sendo um polígono com um número infinito de lados e que pode ser dividido, portanto, em um infinito número de triângulos. Adicionou à sua explicação uma prova arquimediana, utilizando polígonos inscritos e circunscritos e fazendo a dupla redução ao absurdo. No entanto, quando os métodos de Nicholas de Cusa foram utilizados, posteriormente, por outros matemáticos, como Johann Kepler (1571 - 1630), a prova arquimediana foi abandonada, sendo utilizada apenas a sua noção elementar do conceito de limite.

Nesse contexto, de acordo com Boyer (1959), a Idade Média trouxe pouca evolução à geometria grega ou à álgebra. Suas contribuições se concentraram principalmente em especulações filosóficas sobre o infinito, o infinitesimal e o estudo do movimento e da variabilidade. Essas questões, apesar de muitas vezes não estarem fundamentadas com rigor matemático suficiente, desempenharam papéis relevantes no desenvolvimento dos métodos e conceitos do Cálculo, pois levaram à associação da geometria grega com a representação gráfica de variáveis, por meio do estudo da latitude das formas, antecedendo, dessa forma, a Geometria Analítica.

2.1.5 O Período Pré-Cálculo

No século XVI, um dos grandes avanços matemáticos foi o desenvolvimento da Álgebra, proveniente dos Hindus e dos Árabes e associada, conforme destaca Edwards (1979),

²² Jurista, astrônomo, teólogo e filósofo do humanismo renascentista.

às relações comerciais medievais. De acordo com Boyer (1959), no século XIII, letras já haviam sido utilizadas como símbolos para quantidades por Jordanus Nemorarius²³ (1225 – 1260), nos seus trabalhos em Ciências e Matemática. Entretanto, o estabelecimento de símbolos como quantidade abstratas, adentrando na Álgebra, coube ao matemático francês François Viète²⁴ (1540 - 1603), que utilizou vogais para denotar quantidades desconhecidas e consoantes para identificar as constantes. Nesse sentido, deve ser enfatizada:

[...] a introdução de inúmeros sinais para operações e relações matemáticas (em primeiro lugar para a adição, subtração, potência e igualdade) e, acima de tudo, sinais para quantidades desconhecidas e parâmetros, que Viète, em 1591, denotou por vogais A, E, I, ... e consoantes B, G, D, ... do alfabeto latino, respectivamente. A importância dessa notação, que, pela primeira vez, possibilitou colocar no papel a forma simbólica de equações algébricas e expressões contendo quantidades desconhecidas e coeficientes arbitrários (uma palavra também originada de Viète), dificilmente pode ser estimada. (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 51).

Esse simbolismo inovador foi fundamental para o avanço da Geometria Analítica e, conseqüentemente, do Cálculo, nos séculos seguintes. Nesse sentido, esses novos estudos permitiram, entre outras questões relevantes, que ideias relativas à variabilidade e às funções adentrassem no pensamento algébrico, melhorando a notação e conduzindo a métodos mais simples que aqueles aplicados geometricamente por Arquimedes.

2.1.5.1 Contribuições Iniciais

Provavelmente as primeiras contribuições significativas para o Cálculo, dadas no século XVI, foram feitas pelo engenheiro Simon Stevin²⁵ (1548 - 1620), da Bélgica. Por ter menos preocupações filosóficas e não dar tanta importância ao rigor matemático, Stevin utilizou um viés mais prático nas aplicações das ideias de Arquimedes e, segundo Eves (2004), evitou o uso da dupla redução ao absurdo na utilização do método da exaustão, passando diretamente ao limite em seus trabalhos no campo da hidrostática. De acordo com Boyer (1959), os procedimentos utilizados por Stevin constituíram-se em um passo importante na direção do que se entende atualmente desse conceito.

O matemático italiano Luca Valerio²⁶ (1552 - 1618) também tentou fazer uso do método de Arquimedes, sem a necessidade da redução ao absurdo, mas mantendo o rigor necessário para as demonstrações. Conforme afirma Boyer (1959), ele tentou substituir o

²³ Importante matemático e cientista do século XIII, sobre o qual há pouca informação biográfica além do seu trabalho.

²⁴ Advogado e matemático francês, considerado o pai da álgebra moderna.

²⁵ Engenheiro, físico e matemático nascido na cidade de Bruges, em Flanders, onde se localiza atualmente a Bélgica.

²⁶ Nasceu em Nápoles e foi professor da Universidade de Roma. Utilizou a obra e os métodos construídos por Arquimedes para buscar encontrar volumes e centros de gravidade de corpos sólidos.

método por teoremas gerais que poderiam ser citados no lugar de todos os detalhes da prova em cada caso.

2.1.5.2 Johan Kepler

Johan Kepler estudou para se tornar ministro luterano, mas acabou mudando seus planos em virtude de seu interesse profundo pela Matemática e pela Astronomia. Essa vocação o levou a ensinar Matemática em um seminário, na Áustria, de 1594 até 1598. Em 1600 foi convidado pelo famoso astrônomo dinamarquês Tycho Brahe²⁷ (1546 - 1601) para ser seu assistente em Praga e, com a morte desse em 1601, herdou a sua posição de astrônomo da corte do imperador da Bohemia, Rodolfo II, além de sua vasta coleção de dados astronômicos.

De posse das observações de Brahe, Kepler pôde complementar seu estudo sobre o movimento dos planetas em torno do sol e, em 1609, formulou as duas primeiras leis do movimento planetário e, dez anos depois, a terceira. Para calcular as áreas varridas pelos planetas na sua segunda lei²⁸, Kepler recorreu a uma forma rudimentar de Cálculo Integral. Nesse contexto, segundo Boyer (1996, p. 222), “Kepler pensava na área formada de uma infinidade de pequenos triângulos com um vértice no sol e os outros dois vértices em pontos infinitamente próximos um do outro ao longo da órbita”.

Kepler, portanto, não utilizou o rigor clássico de Arquimedes, referente ao método da exaustão, e optou por recorrer à abordagem mais sugestiva de Nicholas de Cusa. Esse também foi o procedimento adotado em seu tratado sobre volumes de barris de vinho, de 1615, *Stereometria doliorum vinorum*²⁹, em que Kepler calculou o volume de mais de noventa sólidos. Ele iniciou seu trabalho determinando a área do círculo, que foi considerado como um polígono regular com um número infinito de lados, de modo que sua área é composta por triângulos infinitesimais que têm um de seus vértices no centro da circunferência e cujas bases são os lados desse polígono (EDWARDS, 1979). Como as alturas dos triângulos são iguais ao raio (r) do círculo e a soma das suas bases correspondem ao comprimento da circunferência (C) concluiu que a área A é dada por $A = rC/2$.

Nos seus estudos sobre os volumes de barris de vinho, Kepler também trouxe contribuições para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial. Procurando determinar as melhores proporções dos barris, foi levado ao problema de máximos e mínimos, a partir do qual construiu tabelas de volumes variando de acordo com as dimensões dos recipientes. Analisando

²⁷ Conhecido por suas observações astronômicas precisas.

²⁸ O raio que liga um planeta ao sol varre áreas iguais em intervalos iguais (EVES, 2004).

²⁹ Nova Estereometria dos Barris de Vinho.

essas tabelas, percebeu que, à medida que o volume máximo se aproximava, a taxa de variação em relação às dimensões ficava cada vez menor.

2.1.5.3 Galileu Galilei e Bonaventura Cavalieri

Em 1635, o matemático e jesuíta italiano Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647) publicou *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*³⁰, um trabalho que rivalizou em popularidade com *Stereometria doliorum vinorum*, de Johan Kepler. A obra do italiano alcançou tamanha notoriedade que se pode dizer, com justiça, que a Análise Matemática iniciou com o lançamento desse livro (BOYER, 1959).

Nesse trabalho é apresentado o método dos indivisíveis de Cavalieri, que tem relação com os trabalhos de Demócrito e Arquimedes e que, apesar das negativas de Cavalieri, pode ter sido inspirado no método de Kepler. Essa conexão pode ter ocorrido de forma indireta, uma vez que os dois grandes pensadores mantinham correspondência com Galileu, que foi professor de Matemática em Pisa e posteriormente em Pádua, ambas na Itália.

Galileu pretendia escrever uma obra sobre os indivisíveis, que nunca foi publicada, mas sua visão sobre os infinitamente pequenos apareceu em *Dois principais sistemas*, de 1632, e, de forma mais abrangente, em *As duas novas ciências*, um tratado sobre dinâmica e resistência dos materiais, publicado três anos depois de *Geometria indivisibilibus* de Cavalieri. Nesse trabalho, Galileu utilizou, por exemplo, um gráfico para a velocidade, semelhante ao utilizado por Oresme, considerando a área abaixo de uma curva velocidade x tempo como a distância percorrida e fazendo alusões aos infinitesimais ao tratar sobre os momentos ou pequenos incrementos de distância.

Nas suas obras, Galileu também propôs a lei dos corpos em queda, algo revolucionário para a época, pois foi a primeira descrição matemática quantitativa do movimento na ciência moderna, o que traçou a tendência para a física e, em especial, para o campo da mecânica. Embora as ideias fundamentais dessa lei se baseassem em relações geométricas euclidianas, Galileu inclinou-se a assumir que uma reta era composta por infinitos pontos, o que respondeu a uma pergunta enviada a Galileu por Cavalieri, em 1621, encorajando, então, o jovem jesuíta italiano a persistir em seus estudos sobre os indivisíveis (ALEXANDER, 2016).

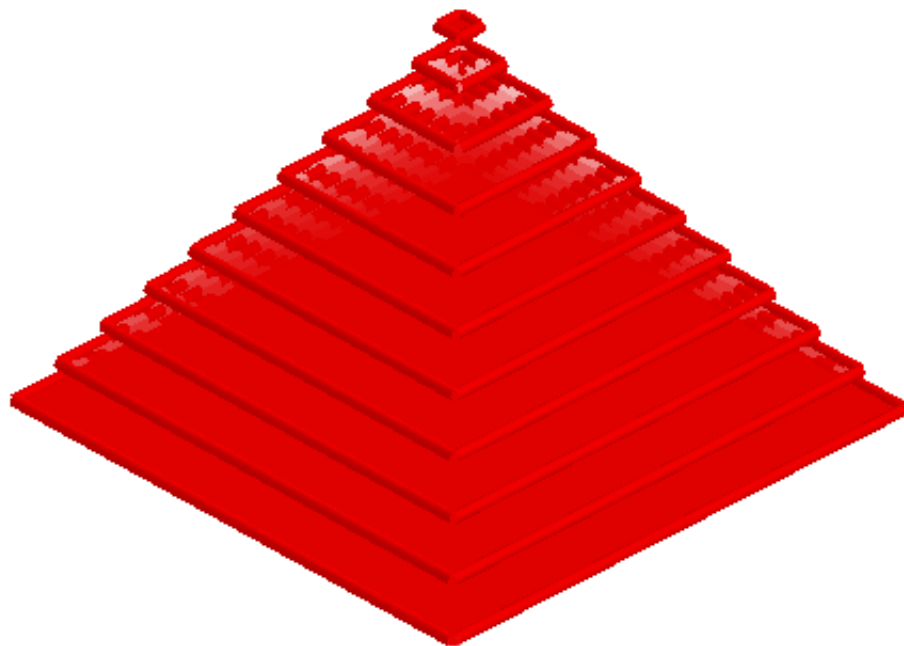
³⁰ Um Certo Método para o Desenvolvimento de uma Nova Geometria de Indivisíveis Contínuos.

Nesse contexto, tratando da destacada obra de Bonaventura Cavalieri, *Geometria indivisibilibus*, Boyer (1996) ressalta que:

O argumento em que se baseia o livro é essencialmente o sugerido por Oresme, Kepler e Galileu – que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou “indivisíveis” e que o volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase atômicos. Embora Cavalieri na época dificilmente pudesse tê-lo percebido, ele seguia pegadas realmente respeitáveis, pois esse é exatamente o tipo de raciocínio que Arquimedes usou em *O método*, então perdido (p. 226).

A técnica de Cavalieri era baseada na decomposição de figuras em indivisíveis, argumentando que um plano é feito de linhas, assim como uma roupa é feita de fios, e que um sólido é feito de planos, da mesma forma que um livro é composto por páginas. Assim, de acordo com Alexander (2016), a área de uma figura seria dada pela soma de uma infinidade de retas paralelas, da mesma forma que o volume de um sólido seria dado, conforme a Figura 2, pela soma de uma infinidade de áreas paralelas. Nesse contexto, Cavalieri afirmava, conforme destaca Edwards (1979), que se os correspondentes indivisíveis de duas figuras ou sólidos diferentes tivessem a mesma razão constante, então as suas áreas ou volumes tinham essa mesma razão.

Figura 2 – Método de Cavalieri para o cálculo do volume da pirâmide.



Fonte: Adaptado de Roque (2012).

O próprio Cavalieri destacou que existe uma diferença importante entre os objetos reais, como roupas ou livros, e os entes matemáticos, como planos ou sólidos, pois, uma vez que os primeiros são compostos por um número finito de fios ou páginas, os últimos são compostos por um número indefinidamente grande de indivisíveis. Contudo, conforme ressalta Alexander (2016), o matemático italiano, em nenhuma passagem do seu livro, explica explicitamente sua compreensão sobre o termo indivisível, que foi empregado para caracterizar os elementos infinitesimais no seu método. Cavalieri também não entrou em especulações sobre a natureza do infinito em sua obra, centrando suas demonstrações na correspondência entre indivisíveis de duas figuras ou sólidos.

O que fica evidente, segundo Alexander (2016), é que, diferentemente das provas euclidianas, o raciocínio de Cavalieri “começa com uma intuição do mundo como nós o vemos e então prossegue para generalizações matemáticas mais amplas e abstratas” (p. 112). Apesar de Cavalieri ter explorado um conceito que já havia sido trabalhado na Grécia Antiga, sua abordagem foi inovadora, permitindo o cálculo de áreas e volumes que dificilmente seriam alcançados pelos métodos elementares.

Dessa forma, em seus estudos, Cavalieri chegou a resultados que, em termos atuais, seriam expressos por:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Arquimedes, conforme destaca Boyer (1959), conhecia a verdade dessa afirmação para $n = 1$ e $n = 2$ e talvez soubesse que era verdadeira para $n = 3$. Os árabes, por sua vez, tinham provado a sua veracidade para $n = 4$. Mas foi Cavalieri, baseado em diferentes conceitos e talvez no trabalho do seu contemporâneo francês Pierre de Fermat (1601 - 1665), que generalizou essa afirmação para todos os valores inteiros e positivos de n . Apesar de não ter sido o primeiro a chegar a essa conclusão, seu trabalho representa a primeira publicação do teorema.

A falta de uma definição do conceito de indivisíveis por parte de Cavalieri e, também, de uma explicação de como a soma de elementos sem dimensão poderia levar à composição de uma área ou volume, de acordo com Alexander (2016), levou ao surgimento de sérias críticas ao seu trabalho, principalmente dos matemáticos Paul Guldin³¹ (1577 - 1643) e André Tacquet³²

³¹ Matemático suíço que lecionou nos colégios jesuítas de Roma, na Itália, e Graz, na Áustria.

³² Matemático e professor belga jesuíta, que foi aluno de Gregory St. Vincent. Inspirava-se nas ideias de Luca Valerio e nos métodos de Arquimedes.

(1612 - 1660). Para combater esses ataques, Cavalieri sustentou que as superfícies e os volumes podem ser gerados pelo fluxo de indivisíveis, o que não foi desenvolvido satisfatoriamente para o seu método geométrico. Essa evolução foi feita por seu sucessor, o também italiano Evangelista Torricelli (1608 - 1647) e culminou, posteriormente, com o método das *fluxões* de Isaac Newton.

2.1.5.4 Evangelista Torricelli

A evolução do método dos infinitesimais, proposto por Cavalieri, coube, então, ao matemático italiano Evangelista Torricelli. Em 1641, quando o mentor de Torricelli, o monge beneditino Benedetto Castelli (1578 - 1643), visitou Galileu, levou consigo um manuscrito do jovem matemático que impressionou o anfitrião. Ambos elaboraram, então, um plano que culminou com ida de Torricelli de Roma para Florença, a fim de servir como secretário de Galileu para ajudá-lo a editar e publicar seus últimos trabalhos.

Três meses depois da chegada de Torricelli, que ocorreu no outono de 1641, Galileu faleceu, em janeiro de 1642. Após esse episódio, o jovem matemático italiano permaneceu em Florença, como sucessor de Galileu, ocupando o cargo de grão-duque da Toscana e Professor na Universidade de Pisa (ALEXANDER, 2016).

Os anos seguintes foram frutíferos para Torricelli, o que catalisou seu estudo sobre os indivisíveis. O matemático suspeitava que os antigos possuísem uma forma secreta para encontrar as soluções para os teoremas, antes de demonstrá-los pelo método da exaustão. O trabalho de Arquimedes em *O método* mostrou, quando foi encontrado, séculos depois, como sua suspeita estava totalmente correta.

Publicado em 1644 por Torricelli, o livro *Opera Geometrica*³³, entre outros tratados fundamentados em métodos convencionais provenientes dos antigos, trouxe o ensaio *De dimensione parabolae*³⁴, que trouxe 21 provas diferentes do resultado que havia sido calculado por Arquimedes 1800 anos antes, provando que a área de uma parábola é $4/3$ da área de um triângulo com a mesma base e altura. Onze dessas demonstrações, trazidas por Torricelli, utilizam o método da exaustão e as dez finais fazem uso da nova geometria dos indivisíveis, com o propósito de mostrar a clara superioridade do método inovador. De acordo com Boyer (1996, p. 246), “se Torricelli tivesse aritmetizado seus processos nessa questão, teria chegado

³³ Trabalho Geométrico.

³⁴ Da dimensão da parábola.

muito perto do conceito moderno de limite, mas ele permaneceu sob a influência pesadamente geométrica de Cavalieri”.

As dez últimas provas fazem uso dos indivisíveis que, conforme destacou Torricelli, eram diretas e intuitivas, pois mostravam não apenas que os resultados eram verdadeiros, mas também o motivo pelo qual eram. Nesse contexto, Torricelli destacava que esse novo método era uma ferramenta admirável para demonstrar incontáveis teoremas através de provas curtas, diretas e positivas (ALEXANDER, 2016).

O trabalho de Torricelli sobre tangentes marca uma evolução da visão clássica e estática, pois caminha na direção da introdução da noção de velocidade instantânea. Ele considerou que as curvas eram geradas por um ponto que se move com velocidade não necessariamente constante. O matemático italiano empregou essa ideia para determinar tangentes de parábolas e também de outras curvas presentes nos trabalhos de Arquimedes.

O trabalho de representações cinemáticas de Torricelli, entretanto, pode ter sido antecipado pelos matemáticos franceses Giles Persone Roberval (1602 – 1675) e René Descartes (1596 - 1650). Esse suposto fato criou, inclusive, uma forte reação de Roberval, que chegou a acusar o italiano de plágio.

Nesse contexto, Garbi (2010) afirma que esse episódio levou à criação da lenda de que, devido à sua integridade, Torricelli se abalou tanto com a controvérsia que acabou morrendo, aos 39 anos, em virtude das acusações feitas pelo matemático francês. De acordo com Boyer (1996, p. 247), “se tivesse vivido mais, é possível que se tornasse o inventor do Cálculo”.

Apesar das grandes contribuições de Torricelli para o desenvolvimento do Cálculo, Boyer (1959) ressalta que não se deve atribuir a esse matemático avanços significativos em termos algébricos, pois nenhuma consideração analítica foi feita por Torricelli e não há indícios de que tivesse a pretensão de estabelecer, a partir de suas demonstrações, algoritmos gerais capazes de ser aplicados a outros casos semelhantes. Dessa forma, os resultados alcançados pelo italiano permaneceram apenas no campo geométrico, mesmo que, posteriormente, fossem de fundamental importância para o Cálculo e a Análise.

2.1.5.5 Gregory St. Vincent

O matemático belga Gregory St. Vincent (1584 – 1667) ampliou o trabalho de Arquimedes e Valerio, levando a ideia de divisão, utilizada no método da exaustão, até uma

subdivisão infinita. Na sua obra *Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni*³⁵, utilizou o recurso de construção de infinitos retângulos infinitamente delgados, fazendo uma referência implícita, conforme destaca Boyer (1959), ao uso dos infinitesimais.

No seu importante tratado sobre a Matemática, que inclusive foi lido por Leibniz (1646 – 1716), anos mais tarde, Gregory St. Vincent mostrou, ainda sem a notação moderna do Cálculo Diferencial e Integral, que:

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(a)$$

Os estudos de St. Vincent o levaram, então, até a noção de limite de uma progressão geométrica infinita. Dessa forma, o matemático belga, conforme enfatiza Boyer (1959), chegou à conclusão que uma série infinita pode ter uma soma.

Entretanto, em função de um equívoco, Gregory St. Vincent declarou que, utilizando o método dos indivisíveis, havia quadrado o círculo. Esse erro, infelizmente, parece ter superado suas conquistas por um bom tempo, de forma que suas contribuições ao Cálculo foram devidamente reconhecidas apenas décadas depois (BOYER, 1996).

2.1.5.6 Giles Persone de Roberval

Giles Persone Roberval foi um importante pensador francês que ocupou a cadeira de Matemática do *Collège Royal* da França, de 1634 até o dia de sua morte. Esse cargo, conforme destaca Boyer (1996), era disputado a cada três anos, com base em exames competitivos, cujas questões eram propostas pelo detentor da cátedra. Sendo assim, Roberval, que havia desenvolvido, entre 1628 e 1634, um método dos indivisíveis semelhante ao de Cavalieri, conseguiu conservar sua posição até o fim da sua vida.

Dessa forma, apoiado no seu distinto conhecimento, Roberval construiu um método para traçar tangentes em qualquer ponto de uma curva (questão também resolvida, no mesmo período, por Fermat e Descartes) e pôde encontrar o volume do sólido de revolução gerado por essa curva. Para tanto, considerava a curva sendo gerada por um ponto em movimento (CONTADOR, 2006).

Sem dúvida, Roberval havia se familiarizado amplamente com o trabalho de Cavalieri, tendo, inclusive, defendido o italiano de algumas críticas. Entretanto, o francês não afirmava que uma superfície era composta por linhas, ou que os sólidos eram compostos por superfícies. Declarava, em sutil oposição, que a expressão “infinito número de pontos” era utilizada por ele

³⁵ Obra Geométrica sobre a Quadratura do Círculo e de Secções Cônicas.

para expressar uma infinidade de pequenas linhas que compõem a linha como um todo, e que a expressão “infinito número de linhas” representava a infinidade de superfícies que compõem a superfície como um todo (BOYER, 1959).

Com o desenvolvimento do seu método, indicando que os problemas relativos à área pareciam mais acessíveis que os concernentes às tangentes, Roberval provou, de acordo com Boyer (1996), que:

$$\int_a^b \text{sen}(x) dx = \cos(a) - \cos(b)$$

Roberval, entretanto, não publicou todas as suas descobertas, tendo-as reservado, provavelmente, para testar os candidatos que desafiavam o seu posto no *Collège Royal*. Por essa razão, algumas de suas conquistas foram reivindicadas, posteriormente, por outros matemáticos, como Torricelli, que acabou, inclusive, sendo acusado de plágio pelo francês.

Dessa forma, é difícil determinar a amplitude da influência de Roberval sob seus contemporâneos. Ademais, seu artigo *Traité des Indivisibles*³⁶ foi publicado apenas em 1693, cerca de dez anos após as primeiras publicações sobre o Cálculo, feitas por Leibniz. Entretanto, é muito provável que Roberval tenha exercido grande influência sobre o cientista francês Blaise Pascal (1623 – 1662), uma vez que era amigo próximo do seu pai (BOYER, 1959).

2.1.5.7 Blaise Pascal

Um dos prodígios matemáticos do século XVII, o francês Pascal começou a despontar nessa ciência aos doze anos de idade, quando, sem ter acesso à obra de Euclides, reinventou muitas das ideias trazidas em *Os Elementos*. Estudando sozinho e passando a participar regularmente das conferências da Academia de Mersenne, o jovem cientista publicou, aos dezesseis anos, a obra *Essay pour les Coniques*³⁷, que tratava de geometria projetiva e na qual trouxe uma proposição que, desde então, é conhecida como Teorema de Pascal³⁸.

Por ordens de seu pai, Étienne, Blaise Pascal continuava estudando prioritariamente outros assuntos, alheios à Matemática, podendo-se dedicar a essa ciência apenas nas horas vagas. Seu entusiasmo, entretanto, não foi refreado e, aos dezenove anos, Pascal, que auxiliava os subordinados de seu pai³⁹ a realizar diversos tipos de cálculos, tentou facilitar a vida de todos e construiu, então, entre 1641 e 1642, uma das primeiras máquinas de calcular da história. O

³⁶ Tratado do Indivisíveis.

³⁷ Ensaio sobre as Cônicas.

³⁸ Os três pontos de cruzamento dos pares de lados opostos de um hexágono qualquer, inscrito em uma cônica, são colineares.

³⁹ Nessa época o pai de Pascal fora nomeado Oficial de Impostos.

sucesso da engenhosidade foi tão grande, que o jovem produziu e vendeu cerca de cinquenta unidades nos anos seguintes (CONTADOR, 2006).

Boyer (1996) destaca, entretanto, que os interesses de Pascal costumavam variar bastante. Assim, o francês voltou a dar atenção à Matemática apenas em 1654, quando redigiu a sua *Obra Completa sobre as Cônicas*, dedicou-se à continuação do seu *Essay* e deu início, junto com Fermat, à Teoria das Probabilidades.

Após um novo período longe da Matemática, no qual Pascal dedicou-se, sobretudo, à Teologia, o francês voltou-se, a partir de 1658, para estudos com infinitesimais. Dessa forma, Boyer (1959) afirma que, utilizando o seu conhecido triângulo aritmético como subsídio para algumas de suas demonstrações, Pascal chegou a resultados vinculados ao Cálculo, como, por exemplo, a seguinte igualdade, dada em notação moderna por:

$$\int_0^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

Pascal foi tão longe ao comparar os indivisíveis da Geometria com o zero da Aritmética, que tal ideia só foi completamente concebida e compreendida por Leonhard Euler (1707 – 1783), décadas mais tarde. Sendo assim, a concepção de Pascal sobre as quantidades negligenciadas pode ser caracterizada como o princípio básico do Cálculo (BOYER, 1959). Nesse princípio, de acordo com Roque (2012), a área abaixo de uma curva era concebida como a soma de um número indefinido de retângulos infinitamente finos, diferindo da área original por uma quantidade que poderia ser tornada menor que qualquer outra quantidade dada.

Nesse contexto, Boyer (1996, p. 252) argumenta que, se Pascal não tivesse morrido tão jovem, “ou se tivesse se dedicado mais constantemente à Matemática, ou se fosse mais atraído por métodos algorítmicos” teria, provavelmente, antecipando-se a Newton e Leibniz na criação do Cálculo Diferencial e Integral. Dessa forma, de acordo com Boyer (1959), o fato de Pascal ter subestimado o valor das visões algébrica e analítica talvez tenha sido responsável por sua falta de habilidade em definir o conceito de integral e, ainda, por sua incapacidade em reconhecer a natureza inversa entre os problemas da tangente e da quadratura.

Quando Blaise Pascal morreu, então, em 1662, fazia cerca de um ano que um jovem introvertido, silencioso e pensativo ingressara na Universidade de Cambridge, do outro lado do Canal da Mancha. Apoiando-se nos ombros de gigantes, o tímido rapaz inglês iria, nos anos seguintes, utilizar a Matemática para mudar, para sempre, a forma como os seres humanos veem o mundo.

2.1.5.8 Pierre de Fermat

O pacato e modesto francês, Pierre de Fermat, jurista por formação acadêmica e sem qualquer estudo oficial em ciências exatas, foi um dos protagonistas da Matemática do século XVII. Ocupando o cargo de Magistrado do parlamento da cidade de Toulouse, auferia bons rendimentos e ainda tinha tempo para dedicar-se a outras atividades, como a Matemática, que lhe era fonte de imensos prazeres (GARBI, 2010). Empregando, então, boa parte da sua energia no estudo de Matemática, Fermat configurava-se, de acordo com Singh (1999), em um verdadeiro estudioso amador, sendo chamado, inclusive, de Príncipe dos Amadores.

Um dos poucos matemáticos com quem o introspectivo Fermat se comunicava era justamente Blaise Pascal, com quem construiu, no século XVII, as primeiras ideias sobre a Teoria da Probabilidades. Nesse sentido, Singh (1999, p. 60) afirma que “Fermat era um gênio retraído, que sacrificava a fama de modo a não ser distraído por picuinhas com seus críticos”.

O matemático amador francês também estudou formas de associar equações algébricas indeterminadas (casos em que o x , por exemplo, assume o papel de variável e não de incógnita) a linhas geométricas, levando ao que se conhece atualmente como Geometria Analítica. Essa descoberta, porém, só foi divulgada em 1679, com a publicação póstuma de *Ad Locus Planos et Solidos Isogoge*⁴⁰. Nesse contexto, de acordo com Garbi (2010, p. 197), “a abordagem de Fermat foi mais clara e mais próxima daquilo que se faz hoje, quando comparada à de Descartes”.

Armado com as novas ferramentas criadas por meio da Geometria Analítica, Fermat resolveu, então, atacar o problema de traçar tangentes e encontrar máximos e mínimos de uma curva. Nesse contexto, Boyer (1996) destaca que, para achar o máximo ou o mínimo de uma curva polinomial $y = f(x)$, Fermat comparou o valor de $f(x)$, em um ponto específico, com o valor de $f(x + E)$, em um ponto vizinho, ambos próximos de um vale ou de um ápice da curva, lugares geométricos onde, de acordo com o francês, a variação tornava-se praticamente imperceptível.

Para achar os pontos de máximo ou de mínimo, Fermat igualava $f(x)$ a $f(x + E)$, de forma que, quanto menor o intervalo E entre os dois pontos, mais perto chegava da verdadeira equação. Depois de dividir tudo por E , Fermat fazia $E = 0$ e os resultados lhe davam os valores das abscissas nos pontos de máximo e de mínimo do polinômio.

⁴⁰ Introdução aos Lugares Geométricos Planos e Sólidos.

A essência desse processo está na diferenciação e o método empregado por Fermat equivale, em notação atual, a achar o limite seguinte e, então, igualar a zero.

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x + E) - f(x)}{E}$$

De acordo com Boyer (1959), o procedimento de Fermat é muito semelhante ao utilizado no Cálculo Diferencial atual, à exceção do símbolo Δx (ou h) que ocupa o lugar do E do francês. A contribuição de Fermat foi tão importante na evolução da Matemática, rumo ao Cálculo Diferencial e Integral, que Isaac Newton chegou a escrever, certa vez, que desenvolveu suas ideias inspirado no método do “*Monsieur Fermat*” para estabelecer tangentes (SINGH, 1999).

Entretanto, Boyer (1959) argumenta que o raciocínio utilizado por Fermat era menos transparente que o usado na modernidade. A Análise contemporânea recorre ao conceito de limite para tratar de Δx quando essa variação se aproxima de zero, enquanto o Príncipe dos Amadores parece não ter recorrido a esse conceito e, de fato, interpretou que E realmente chegava a zero. Em todo o caso, Boyer (1996) afirma que nenhum matemático, com a possível exceção de Isaac Barrow (1630 – 1677), chegou tão perto de antecipar a invenção do Cálculo, como fez Fermat.

2.1.5.9 René Descartes

Um dos maiores críticos do trabalho de Pierre de Fermat foi o seu compatriota René Descartes, nascido na cidade de *La Haye-en-Touraine*⁴¹. Ao concluir sua formação básica, na escola local *La Flèche*, em 1614, o jovem Descartes, atendendo ao apelo de seu pai, iniciou seus estudos na área do Direito, na Universidade de Poitiers. Nessa época, entretanto, sua atenção já estava voltada para outras áreas do conhecimento, como Filosofia, Física e, principalmente, Matemática (CARVALHO; MORAES; FERREIRA, 2016).

Nesse contexto, o pensador francês, em ressonância com os ideais filosóficos vigentes na época, acreditava que o desenvolvimento técnico melhoraria a vida dos homens. Dessa forma, defendia que o pensamento humano deveria voltar-se apenas para o que fosse passível de ser quantificado, sendo que as deduções lógicas, conforme sustentava, deveriam ser substituídas por relações entre entes quantificáveis, traduzidos em equações (ROQUE, 2012).

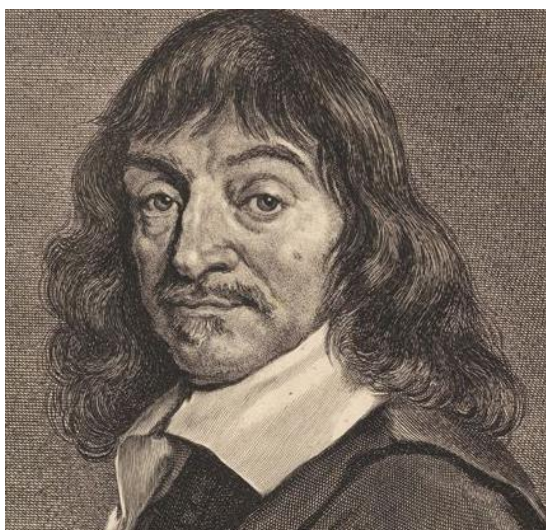
Sendo assim, em 1628, quando já morava na Holanda, Descartes deparou-se com um problema⁴² que, aparentemente, ainda não havia sido resolvido. Aplicando, então, alguns de

⁴¹ A partir de 1669, a cidade passou a ser chamada de Descartes, em homenagem ao seu cidadão mais ilustre.

⁴² Problema de Pappus, de Alexandria.

seus novos métodos, criados nos seus estudos solitários, resolveu a questão sem maiores dificuldades. Ao perceber a força das suas criações, resolveu escrever *La Géométrie*⁴³, que, publicada como um apêndice de *Le Discours de la Méthode pour Bien Conduire as Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences*⁴⁴, foi a obra responsável, em 1637, por levar a Geometria Analítica, que enfim aproximou a Álgebra da Geometria Clássica, ao conhecimento público (BOYER, 1996).

Figura 3 – René Descartes.



Fonte: royalsociety.org

Nesse trabalho, o notável pensador francês declarou que resolver problemas de Geometria tinha uma dimensão algébrica análoga, que levava à resolução de equações simbólicas. Nesse contexto, afirmou que uma curva poderia ser representada analiticamente por meio do *locus* de um ponto, que tem suas distâncias (x e y), relativas a duas linhas retas fixas⁴⁵, definidas e relacionadas. Descartes mostrou, então, que essa relação poderia ser representada por uma determinada equação envolvendo x e y e outros possíveis dados do problema (constantes) e, reciprocamente, que qualquer dessas equações expressava as propriedades geométricas das suas curvas (ARMITAGE, 1950). Nesse sentido, Gleick (2004, p. 48) destaca que o matemático francês “abriu as portas das jaulas, libertando estranhos e novos bestiários de curvas, muito mais variadas do que as elegantes secções cônicas estudadas pelos gregos”.

De acordo com Whiteside (2002), a incomparável obra de Descartes ocupou papel decisivo na condução dos pensamentos matemáticos de Newton. Dessa forma, o autor realça

⁴³ A Geometria.

⁴⁴ O Discurso sobre o Método para Raciocinar Bem e Procurar a Verdade nas Ciências.

⁴⁵ A ideia de dois eixos coordenados surgiu posteriormente.

que, quando o inglês leu *La Géométrie* pela primeira vez, em 1664, “o livro surgiu como uma revelação dos limites intermináveis do possível” (p. 494).

A disputa de Descartes com Fermat fez o primeiro interessar-se pelo problema das tangentes, levando-o a considerações importantes. Entretanto, os métodos de Descartes eram puramente algébricos, sem o envolvimento de qualquer ideia de limite ou infinitesimal. Em contrapartida, qualquer tentativa de interpretação geométrica de seus cálculos levaria, necessariamente, a algum desses conceitos. Dessa forma, se tivesse pensado em variáveis contínuas e não apenas em correspondência entre símbolos, que representavam linhas em um diagrama, talvez Descartes pudesse ter interpretado o seu método para encontrar tangentes em termos de limites, concebendo, assim, uma diferente interpretação do seu trabalho em relação ao Cálculo (BOYER, 1959).

2.1.5.10 John Wallis

Na França do século XVII, apenas Fermat e Descartes fizeram uso substancial dos seus novos métodos. Na Inglaterra, entretanto, o matemático e teólogo John Wallis (1616 – 1073), participante, desde a década de 1640, das reuniões regulares que levariam à criação da *Royal Society* e um dos predecessores ingleses de Isaac Newton, apoiou-se na Geometria Analítica para resolver problemas relacionados à quadratura.

Em 1656, Wallis, então Professor de Oxford, publicou sua obra prima *Aritmetica Infinitorum*⁴⁶ que, apesar de fazer uso das inovações de Descartes, tratava de um assunto obscuro para o francês: o cálculo da área de uma região limitada por uma curva, ou o cálculo do volume de um sólido limitado por superfícies curvas. Nesse sentido, Wallis trabalhava, na época, com o que atualmente é denominado de Cálculo Integral (GUICCIARDINI, 2011).

Fazendo uso de ideias de Descartes e Cavalieri, conforme destaca Boyer (1996), Wallis transcendeu a ambos ao utilizar as séries infinitas como parte de seus estudos e análises. Ao aritmetizar *Geometria Indivisibilibus* e abandonar o cenário geométrico, associando aos infinitos indivisíveis das figuras valores numéricos, utilizando pela primeira vez, inclusive, o símbolo ∞ ⁴⁷, o inglês chegou, de forma menos laboriosa que Cavalieri, a resultados (para todos os valores inteiros de m) como:

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

⁴⁶ Aritmética do Infinito.

⁴⁷ Para representar o infinito.

O tratamento dado por Wallis para os infinitamente pequenos foi bem mais audacioso que aquele utilizado por Fermat, por exemplo. Conforme informa Boyer (1959), enquanto o francês não chamou expressamente seu símbolo E de infinitesimal, Wallis afirmou que $1/\infty$ representava uma quantidade infinitamente pequena, ou *non-quanta*. Utilizando esse recurso, o matemático inglês encontrou diversos resultados importantes, como a fórmula para o cálculo da área de um triângulo. Nesse caso, Wallis supôs esse polígono dividido em infinitos paralelogramos, paralelos à sua base.

Fermat, por sua vez, criticou parte do trabalho de Wallis, sugerindo falta de rigor e elegância nas suas demonstrações por indução e interpolação, por exemplo. Nesse sentido, Alexander (2016) enfatiza que Wallis replicou, argumentando que sua Matemática se fundamentava nas ideias de Cavalieri e que os questionamentos do francês estavam respondidos nos livros do italiano. Desse modo, Wallis afirmou que seu método era uma sofisticação daquele⁴⁸ utilizado pelos antigos.

Apesar das reticências de Fermat, o jovem Newton buscou inspiração nas criações de Wallis sobre a quadratura e, dessa forma, a primeira descoberta importante de Newton, em 1664, sobre séries binomiais com potências fracionárias, foi obtida a partir de uma generalização do trabalho do seu compatriota. Ademais, trabalhando com Newton, Wallis construiu, no final do século XVII, um trabalho que exaltava a matemática britânica, assim como o papel do próprio Wallis nessa escola. Assim, Wallis acabou por participar, também, efetiva e decisivamente de uma grande controvérsia entre Newton e Leibniz sobre o Cálculo Diferencial e Integral (GUICCIARDINI, 2011).

2.1.5.11 Isaac Barrow

O londrino Isaac Barrow foi uma figura cultural altamente distinta no século XVII, sendo respeitado como filósofo, teólogo e matemático. Em 1663, passou a ser o primeiro homem a ocupar a Cátedra Lucasiana de Matemática em Cambridge, posição que, mais tarde, em 1669, abdicou em favor de Isaac Newton. Seu trabalho inicial foi uma edição completa de *Os Elementos*, de Euclides, escrita, inicialmente, para ajudar seus alunos de Matemática e, posteriormente, publicada para comercialização em latim e em inglês (FEINGOLD, 1990).

Considerado um conservador em Matemática, Barrow não apreciava formalismos algébricos, o que o diferenciava diametralmente de Wallis. Dessa forma, o Professor Lucasiano preferia utilizar nas suas aulas e nos seus trabalhos a visão cinemática, de Torricelli, à

⁴⁸ Método da Exaustão.

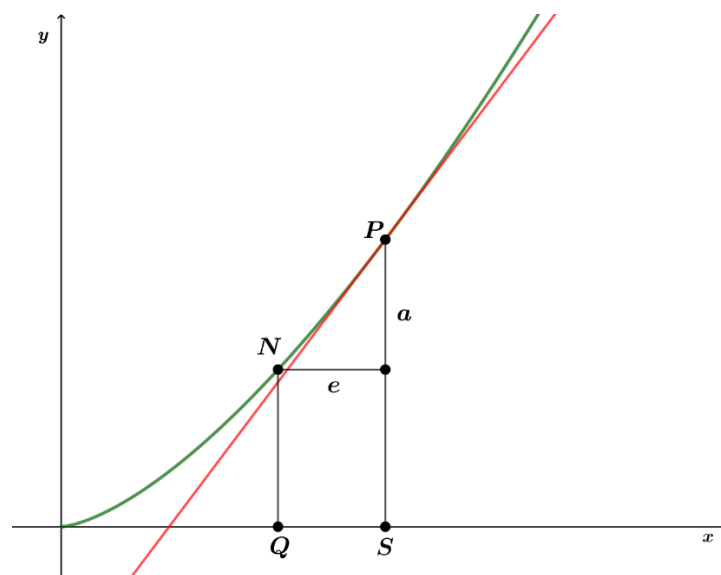
aritmética, utilizada por Wallis. Assim, Barrow pensava nas grandezas geométricas sendo geradas por fluxos de pontos (BOYER, 1996).

De acordo com Feingold (1990), Isaac Barrow aproximou-se muito de encontrar uma demonstração geométrica para o Teorema Fundamental do Cálculo. Entretanto, em função da sua característica rejeição por recursos algébricos, o matemático britânico não foi capaz de perceber o importante significado dos resultados encontrados por meio da sua análise geométrica.

Sendo assim, Boyer (1959) argumenta que, apesar da falta de apreciação pelos métodos analíticos de Descartes e Fermat e da incapacidade de aceitar a importância da aritmetização de Wallis, os resultados geométricos alcançados por Barrow significaram uma aproximação altamente considerável em relação ao Cálculo. Entre esses resultados estão inúmeros teoremas sobre quadraturas e tangentes e, provavelmente, o reconhecimento mais lúcido, até aquele momento, sobre a relação entre esses dois tipos de problemas.

Isaac Barrow pensava nitidamente em termos de problemas geométricos e infinitesimais, em detrimento da ideia de funções e símbolos para variáveis. Dessa forma, de acordo com Contador (2006, p. 254), “seu método era muito semelhante ao de Fermat”, sendo que, enquanto o francês utilizava unicamente a letra E , o professor inglês de Cambridge fazia uso de duas letras, a e e (futuros Δy e Δx), conforme se percebe na Figura 4, aproximando-se ainda mais do processo de diferenciação conhecido, difundido e utilizado atualmente.

Figura 4 – Método de Barrow para o problema da tangente.



Fonte: Adaptado de Contador (2006).

Ademais, Boyer (1959) destaca que algumas das afirmações de Barrow se assemelhavam às de Fermat, quando esse último negligenciava, no fim dos seus cálculos, todos os termos que continham E , por exemplo. Entretanto nenhum dos dois foi capaz de justificar formalmente essa ação.

Nesse sentido, pode-se afirmar que Barrow, provavelmente, pôde perceber a conexão inversa entre os problemas da tangente e da quadratura, mas sua visão enfaticamente geométrica impediu-o de utilizar essa relação de forma eficiente. Barrow sabia, entretanto, que, naquela mesma época, o seu jovem amigo e sucessor, Isaac Newton, estava concentrado nessas mesmas importantes questões (BOYER, 1996).

2.1.6 O Cálculo, dois Gigantes e uma Controvérsia

2.1.6.1 Isaac Newton

Isaac Newton, um jovem interiorano britânico, de Wollsthorpe, ingressou no *College of the Holy and Undivided Trinity*⁴⁹, na Universidade de Cambridge, na Inglaterra, em 1661, aos 18 anos de idade. Nessa época seu interesse estava voltado, principalmente, para estudos vinculados à Química.

A partir de 1663, quando começou a entrar em contato com obras clássicas da Matemática, como *Os Elementos*, de Euclides, e *La Géométrie*, de René Descartes, e a assistir às aulas de Isaac Barrow sobre espaço, tempo e movimento, conforme destacam Bonfim e Calábria (2017), Newton passou a voltar sua atenção para incursões matemáticas. Nesse sentido, de acordo com Whiteside (2002), *La Géométrie* cristalizou a sua primeira visão do poder universal da variável algébrica, traduzido na sua potencialidade de generalizar o particular.

Com suas intensas leituras, Newton familiarizou-se com as séries infinitas, que lhe forneceram meios para encontrar soluções numéricas para o cálculo de áreas de formas geométricas diversas. No livro de John Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, deparou-se com os passos introdutórios para a criação do Cálculo, encontrando, então, inspiração para ampliar esse trabalho e desenvolver um método mais geral. Nesse contexto, Gleick (2004, p. 50) destaca que “conceber as séries infinitas e então aprender a manipulá-las era transformar o estado da Matemática. Newton parecia agora possuir uma habilidade ilimitada para generalizar, para mudar de um ou de alguns casos específicos conhecidos para o universo de todos os casos”.

⁴⁹ Colégio da Santíssima e Indivisa Trindade.

O período no qual a produção científica de Newton alcançou o seu auge, entretanto, foi quando estava longe de Cambridge. Entre 1665 e 1667, a universidade fechou suas portas, em virtude de uma epidemia de peste bubônica que assolou Londres e as cidades vizinhas, chegando a matar um de cada seis londrinos. Nesse tempo, o pensador voltou para Wollsthorpe, onde sua família tinha uma fazenda, e lá escreveu manuscritos com conceitos fundamentais e inovadores para os campos da Matemática, Óptica, Mecânica e Gravitação Universal.

De acordo com Gleick (2004), o primeiro ano da peste foi o ano da transformação de Newton que, solitário, acabou atravessando as fronteiras do conhecimento estabelecido. Nesse sentido, Westfall (1995, p. 45) afirma que “ele havia estudado os mestres reconhecidos. Sabia dos limites que eles não conseguiam transpor. E os havia superado, a todos, de longe”. Nesse sentido, de acordo com Stewart (2013, p. 54):

Anteriormente, Galileu Galilei, Johannes Kepler e outros tinham erguido a ponta do tapete da natureza e visto algumas das maravilhas ocultas debaixo dele. Agora, Newton simplesmente removia o tapete do lugar. Não só revelou que o universo tem padrões secretos, as leis da natureza; além disso, forneceu ferramentas matemáticas para exprimir essas leis precisamente e deduzir suas consequências.

Enquanto esperava a reabertura da universidade, Newton concentrava-se em pensar sobre o funcionamento do universo e, nesse contexto, acabou fazendo uma descoberta espetacular atrás da outra. Dessa forma, esse período em que o cientista esteve no interior é denominado de *anni mirabiles*, ou seja, anos miraculosos, pois resultou no que pode ser considerado o maior conjunto de conhecimentos que qualquer pessoa jamais produziu, em um espaço de tempo tão reduzido. Segundo o próprio Newton afirmou, posteriormente, ele estava no melhor período da sua vida para a invenção e se dedicava à Matemática e à Filosofia com uma intensidade que nunca conseguiu replicar (BARDI, 2008).

Newton criou, pensando cineticamente em curvas geradas pelo movimento de um ponto (ou mais), métodos gerais para encontrar a inclinação da reta tangente a uma curva em qualquer ponto específico e para quadrar linhas curvas (a atual integração), que pudessem ser quadradas. Dessa forma, pensou na tangente como a reta na qual a curva se tornaria, se pudesse ser analisada por um microscópio altamente poderoso, e a encontrava por meio do cálculo da relação entre dois pontos separados por uma distância infinitesimal (GLEICK, 2004).

Segundo Westfall (1995), ao estender sua abordagem cinemática, Newton começou a tratar as curvas como o *locus* de um ponto que se desloca em condições determinadas. Dessa ideia, veio a inspiração para propor o termo *fluxional* que foi incorporado à teoria para descrever, em 1666, o método das *fluxões*, conhecido atualmente como Cálculo Diferencial e Integral.

Nesse contexto, conforme destacam Rachelli e Bisognin (2019), Newton desenvolveu a teoria das *fluxões*, pensando no movimento como o cerne do estudo das curvas. Utilizava as suas criações conceituais *fluente* e *fluxões*, afirmando que as *fluente*s são as quantidades que fluem (atuais variáveis), enquanto as *fluxões* são as velocidades com que essas quantidades fluem (atuais derivadas). Dessa forma, Newton definia a derivada como a velocidade de fluência e, para representar a *fluxão* de uma *fluente* y , por exemplo, criou a notação \dot{y} que, em linguagem moderna, equivale a dy/dt , com t representando o tempo.

Sendo assim, de acordo com Stewart (2013), pode-se ilustrar esse método com o seguinte exemplo: seja uma grandeza y , que é o quadrado de outra grandeza t , ou seja, $y = t^2$. Newton introduziu, então, “uma pequena diferença em t ”, denotada por o , fazendo com que a variação correspondente em y fosse:

$$(t + o)^2 - t^2 = 2to + o^2$$

Dessa forma, a taxa de variação, em um intervalo muito pequeno o (menor que qualquer coisa finita, mas maior que zero), era dada por:

$$\frac{2to + o^2}{o} = 2t + o$$

Considerando que o pode ser feito cada vez menor, fluindo para zero, essa taxa vai, cada vez mais, aproximar-se de $2t$, que é a taxa de variação instantânea de y em relação a t .

Sendo assim, Newton escrevia:

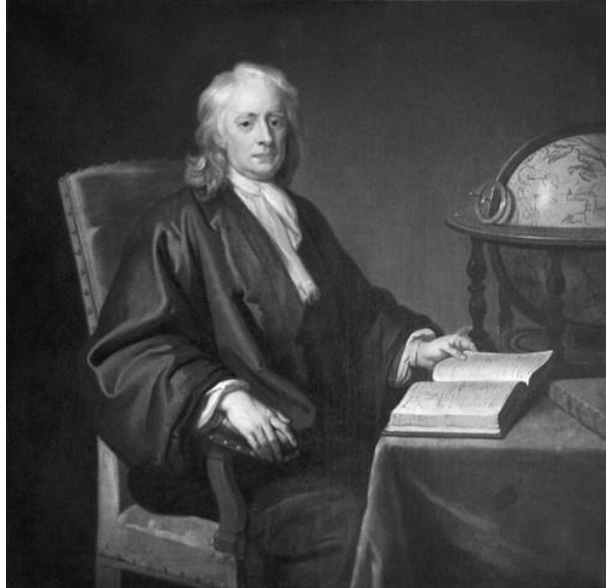
$$\dot{y} = 2t$$

Gleick (2004) destaca que o recurso conceitual representado pelo símbolo o , uma distância infinitesimal, também possibilitou que Newton conseguisse quadrar linhas curvas, que pudessem ser quadradas. Dessa forma, Boyer (1959) ressalta que, apesar de o Cálculo não ser resultado do trabalho de um único indivíduo, isoladamente, Newton foi o primeiro homem a conceber um procedimento geral para determinar variações instantâneas e, então, invertê-lo para o cálculo de áreas.

Nesse contexto, para encontrar, por exemplo, distâncias (*fluente*s) a partir das velocidades (relação *fluxional*), Newton resolvia aquilo que atualmente é denominado equação diferencial, invertendo o procedimento utilizado para encontrar a *fluxão*. Sendo assim, o jovem inglês prontamente notou que o problema de encontrar *fluente*s a partir das *fluxões* era equivalente ao de determinar a área sob uma curva, a partir da expressão algébrica da sua função. Nesse contexto, Newton descobriu e passou a utilizar em suas pesquisas o que

atualmente é denominado de Teorema Fundamental do Cálculo (BONFIM; CALÁBRIA, 2017).

Figura 5 - Isaac Newton



Fonte: royalsociety.org

Todavia, tanto o Cálculo quanto outras descobertas impressionantes feitas por Newton nesse período de retiro permaneceram desconhecidos por cerca de meio século, pois o cientista não aceitava bem as críticas sobre sua obra. Acredita-se, inclusive, que, até 1669, apenas Isaac Barrow conhecesse o trabalho matemático de Newton.

Nesse ano, porém, um dos seus artigos, intitulado *De analysi per aequationes numero terminorum infintas*⁵⁰, que trata das séries infinitas e suas aplicações para cálculo da área, foi enviado por Barrow a seu amigo John Collins⁵¹ (1625 – 1683), em Londres. A partir de então, conforme afirma Westfall (1995, p. 70), “o anonimato de Newton começou a se desfazer”.

Boyer (1959) destaca que, em *De analysi*, o jovem britânico empregou a ideia de momentos de área e, assim, pôde encontrar um método geral para a quadratura de curvas. Nesse contexto, se, de acordo com o que afirmava Newton, houvesse uma abscissa x e uma ordenada y , de forma que a área abaixo da curva fosse dada por:

$$z = \left(\frac{n}{m+n} \right) ax^{\frac{m+n}{n}}$$

⁵⁰ Da análise por meio de equações tendo um número infinito de termos.

⁵¹ Um empresário que incentivava o estudo da Matemática no século XVII, servindo, muitas vezes, de acordo com Westfall (1995), de entreposto de informações sobre os últimos avanços dessa ciência.

Então, se o momento de variação da abscissa fosse o , a nova abscissa seria $x + o$, e a nova área:

$$z + oy = \left(\frac{n}{m+n}\right) a(x+o)^{\frac{m+n}{n}}$$

Dessa forma, aplicando o seu teorema binomial, dividindo a expressão por o e descartando os termos contendo o , Newton encontrava:

$$y = ax^{\frac{m}{n}}$$

Ou seja, o jovem matemático afirmava que, se uma área fosse dada por:

$$z = \left(\frac{n}{m+n}\right) ax^{\frac{m+n}{n}}$$

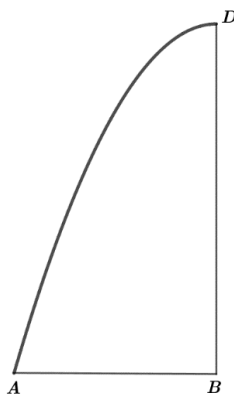
Então, a curva que origina essa área seria denotada por:

$$y = ax^{\frac{m}{n}}$$

Além disso, de forma inversa, Newton argumentava, conforme exemplificam Bonfim e Calábria (2017), que, se a base AB de uma curva AD for perpendicular à ordenada BD , de acordo com a Figura 6, e ainda, se AB for chamado de x e BD de y , com a, b, c, \dots sendo quantidades dadas e m e n inteiros, então, se $y = ax^{m/n}$, a área de ABD será:

$$\text{Área} = \left(\frac{n}{m+n}\right) ax^{\frac{m+n}{n}}$$

Figura 6 - Exemplo elaborado por Newton em *De analysi*.



Fonte: Adaptado de Bonfim e Calábria (2017).

Mesmo tendo realizado essas descobertas incríveis, de acordo com White (2000), Newton recusou-se a permitir que Barrow ou Collins tentassem publicar o seu trabalho. *De analysi* permaneceu inédito, então, até 1711. Houvesse o jovem gênio publicado esse artigo quando o escreveu, teria se poupado, conforme argumenta Bardi (2008), de um grande número

de problemas posteriores e, mais importante, teria feito avançar o conhecimento humano muito mais depressa.

A aversão por controvérsias, que levou Newton a não publicar sua obra enquanto a criava, ampliou-se ainda mais após a apresentação, na *Royal Society*, em Londres, em 1672, de um manuscrito seu sobre ótica. Nesse trabalho, de acordo com Gleick (2004), o cientista afirmava, a partir de experiências, que a luz é composta por partículas, que a luz branca é uma mistura heterogênea e que a Óptica é uma ciência matemática, portanto, rigorosa e precisa. Essa foi a primeira comunicação pública de Newton.

Em face desse trabalho, entretanto, o jovem cientista, que já desfrutava do prestígio de ocupar a Cátedra Lucasiana de Matemática no *Trinity College*, acabou sendo duramente questionado por muitos dos pensadores que, até então, admirava, como, por exemplo, o inglês Robert Hooke (1635 - 1703). Dessa forma, conforme destaca Eves (2004, p. 436): “Newton achou a discussão subsequente tão desagradável que jurou jamais publicar mais nada em ciência”.

O matemático, entretanto, fez uma nova tentativa, em 1675, quando enviou para a *Royal Society* a sua teoria corpuscular da luz. Vendo-se novamente confrontado, principalmente por Hooke, preferiu voltar-se definitivamente para os seus estudos, sem buscar editar seus trabalhos novamente⁵². Dessa forma, após sua curta e infeliz incursão para além dos muros de Cambridge, o jovem cientista contentou-se em explorar solitariamente as margens distantes do conhecimento humano (WHITE, 2000). Nesse sentido,

A desafortunada vítima de toda essa luta foi o trabalho de Newton sobre o Cálculo, uma vez que sempre teve a intenção de publicar, ao mesmo tempo, seus trabalhos sobre ótica e cálculo. A dor causada pela publicação daqueles o fez abandonar os planos de publicar estes. (BARDI, 2008, p. 65)

Nesse contexto, apesar de ter descoberto o Cálculo entre 1665 e 1666, a sua primeira publicação envolvendo esse domínio ocorreu apenas em 1687, no famoso *Principia mathematica philosophiae naturalis*⁵³. De acordo com Boyer (1959), as proposições trazidas nesse livro, versando sobre velocidade, aceleração, tangentes e curvaturas, são extremamente semelhantes às utilizadas atualmente no Cálculo Diferencial e Integral.

⁵² Além disso, cabe ressaltar que Isaac Barrow faleceu em maio de 1677, o que deixou Newton ainda mais desprotegido e isolado do mundo exterior a Cambridge.

⁵³ Princípios matemáticos de filosofia natural.

2.1.6.2 Gottfried Wilhelm Leibniz

O pensador alemão Gottfried W. Leibniz ingressou na Universidade de Leipzig aos 14 anos, em 1661, e completou seus estudos com 20 anos de idade. Nesse período, concentrou-se, principalmente, em aprender as leis e a filosofia escolástica. Ao receber, após o término do seu mestrado em Direito, negativa dessa instituição quanto ao seu pedido para lá permanecer como professor, submeteu sua tese, *De casibus perplexis*⁵⁴, em outubro de 1666, à universidade de Altdorf, onde, cinco meses depois, concluiu seu doutorado.

Declinando de um convite para permanecer em um posto acadêmico em Altdorf, Leibniz passou, a partir de então, a dedicar sua vida a servir duas importantes famílias da nobreza alemã dos séculos XVII e XVIII. Nesse contexto, de acordo com Bardi (2008), o jovem advogado começou a trabalhar, inicialmente, em 1667, como secretário, assistente, consultor e bibliotecário do Barão Johan Christian von Boineburg (1622 - 1672).

Cinco anos depois, em meio a uma disputa entre franceses, holandeses e ingleses, que deixou a Europa à beira de uma grande guerra, Boineburg enviou Leibniz a Paris, em uma missão diplomática que buscava dar ao Barão acesso a suas terras na França e a uma pensão que lhe era devida naquele país (BARDI, 2008). Foi na sua estada em Paris que o jovem gênio alemão começou a desenvolver seu conhecimento matemático.

Esse processo se iniciou quando Leibniz percebeu, a partir de interações com proeminentes matemáticos europeus, como o holandês Christian Huygens (1629 - 1695), a fragilidade das suas percepções sobre essa ciência. Com o incentivo de Huygens, o inspirado Leibniz começou, então, a estudar a Matemática com um entusiasmo destemido. Dessa forma, passou a ler *Arithmetica Infinitorum*, de Wallis; *Geometria*, de Cavalieri; e um importante livro de Gregory St. Vincent, que, conforme afirmam Bonfim e Calábria (2017), imaginava uma área como sendo composta pela soma de infinitos retângulos infinitamente delgados, o que antecipava, de alguma forma, o cálculo integral. Nesse contexto, Bardi (2008, p. 80) argumenta que:

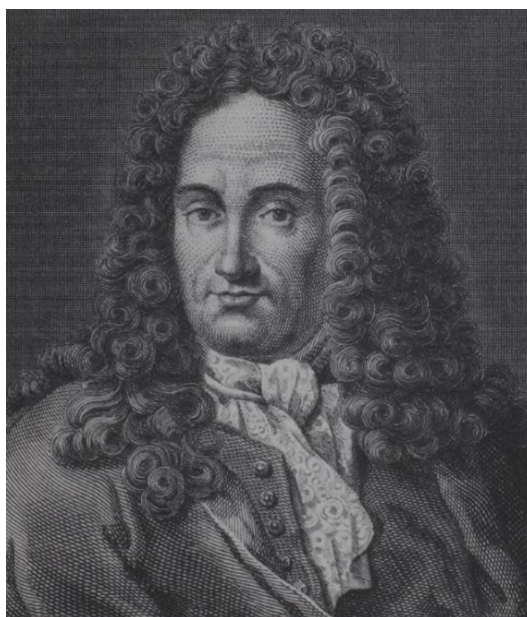
Nos quatro anos e meio que viveu em Paris, ele, de um advogado com pouco preparo formal em Matemática, cresceu para tornar-se um profundo conhecedor da matéria, que não apenas compreendia os mais avançados estudos de seus contemporâneos, mas ainda os levava adiante – como, por exemplo, inventando o Cálculo.

Em 1673, entretanto, Leibniz interrompeu sua estada na capital francesa para acompanhar Melchior Friedrich von Schönborn (1644 - 1717), sobrinho do Eleitor da Mogúncia

⁵⁴ Sobre casos difíceis (no Direito).

e genro do então já falecido Boineburg, em outra missão política, dessa vez em Londres. Nessa passagem pela metrópole inglesa, que ocorreu cerca de um ano após a primeira apresentação pública do trabalho de Newton, o jovem cientista alemão teve acesso a um exemplar de *Lectiones Geometricae*, de Barrow, encontrou pessoalmente Collins e, após apresentar uma máquina de calcular, que ele mesmo havia inventado e construído, acabou tornando-se membro da *Royal Society*.

Figura 7 - Gottfried W. Leibniz.



Fonte: Cook (1996).

Em fevereiro de 1673, faleceu o Eleitor da Mangúcia. Sendo assim, Leibniz retornou a Paris e continuou seus estudos em Matemática, pois, conforme o próprio cientista afirmou posteriormente, até aquele momento tinha pouco conhecimento sobre as séries infinitas, os novos métodos geométricos e as ideias de Descartes. Nesse período, conforme informa Cook (1996), em função da sua ligação com a *Royal Society*, Leibniz recebia constantemente correspondências com relatos sobre a evolução da Matemática britânica. Esse fato acabaria por se tornar, posteriormente, um dos pilares da controvérsia sobre a criação do Cálculo.

Em meio a essa incursão pela Matemática, entretanto, Leibniz acabou sendo demitido pela família Boineburg, em setembro de 1674. Dessa forma, após sucessivas tentativas infrutíferas de permanecer em Paris, acabou aceitando o convite do Duque Johan Friedrich (1625 - 1679) e assumiu, no verão de 1676, uma posição de bibliotecário e consultor, em Hannover, tendo como sua principal obrigação junto ao Duque (e posterior Eleitor de Hannover) construir a história genealógica da família (BONFIM; CALÁBRIA, 2017).

Sobre o período vivido por Leibniz em Paris, Bardi (2008, p. 110) destaca que “ele tinha vindo para essa cidade como um jovem interessado, em primeiro lugar, por leis e assuntos de Estado, sabendo muito pouco de Matemática, e a deixava quatro anos depois como um dos dois ou três mais importantes matemáticos da Europa”.

Conforme destaca Cook (1996), na sua viagem de Paris até Hannover, Leibniz passou por Londres. Na sua breve estada na capital inglesa, o jovem alemão visitou a *Royal Society* e, com o assentimento de John Collins, teve acesso a dois documentos da biblioteca da instituição: *De analysi*, de Newton, e *Historiola*, do próprio Collins, que continha um resumo da Matemática britânica da época. Entretanto, segundo o autor, Leibniz provavelmente não percebeu que as séries infinitas, sobre as quais se debruçava o método das *fluxões* de Newton, eram, de certa forma, equivalentes ao seu método diferencial, que surgiu no mesmo período.

Nesse contexto, de acordo com Boyer (1996), em 1673, Leibniz entendeu que a construção da tangente a uma curva depende da razão entre a diferença das ordenadas e das abscissas, quando essas são feitas infinitamente pequenas. Além disso, percebeu que as quadraturas estão relacionadas à soma de retângulos infinitamente finos, que, juntos, formam a área.

Leibniz chegou, então, às descobertas primordiais do Cálculo, em 1675, e, no que tange ao processo de diferenciação, suas ideias eram muito similares ao método das *fluxões*, de Newton. Nesse sentido, o matemático alemão havia elaborado, também, a sua notação característica, que inclusive continua a ser utilizada até os dias atuais (WESTFALL, 1995).

Dessa forma, conforme ressalta Boyer (1996), Leibniz tinha chegado às mesmas conclusões a que o seu colega inglês havia chegado vários anos antes. Depois de algumas tentativas iniciais, o matemático alemão, que sempre teve uma ótima percepção sobre a importância das representações para o desenvolvimento do pensamento humano, definiu dx e dy como as menores possíveis diferenças em x e y e criou o sinal de integral com um “s” alongado, advindo da palavra soma⁵⁵. Achar as tangentes, então, levava ao *Calculus differentialis*⁵⁶ e encontrar as áreas direcionava para o *Calculus integralis*⁵⁷.

Todas essas conclusões sobre o trabalho de Leibniz foram construídas, entretanto, a partir dos seus manuscritos, tal como aconteceu com as invenções de Newton (WESTFALL, 1995). Sendo assim, Boyer (1996) destaca que a primeira publicação oficial do matemático

⁵⁵ *Summa* em latim.

⁵⁶ Cálculo diferencial.

⁵⁷ Cálculo integral.

alemão sobre o Cálculo ocorreu apenas em 1684, sob o título *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur*⁵⁸. Nesse trabalho, segundo o autor, Leibniz trouxe as fórmulas $dxy = xdy + ydx$, $d(x/y) = (ydx - xdy)/y^2$ e $dx^n = nx^{n-1}$.

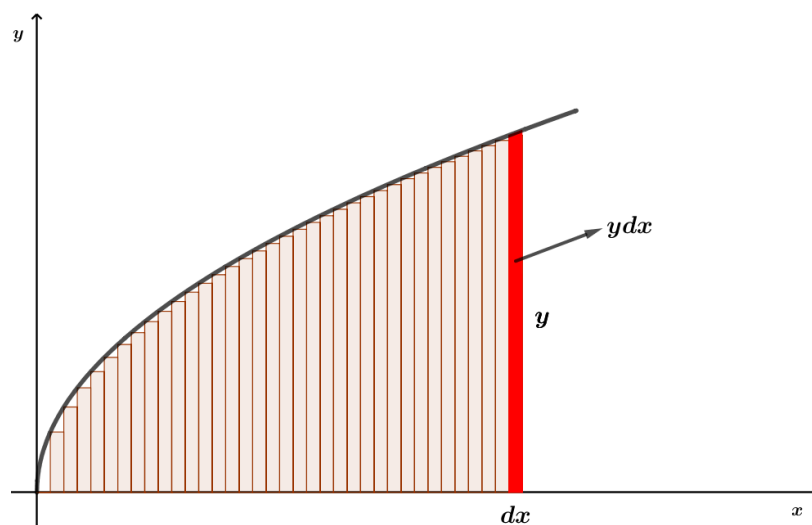
Dois anos depois, em 1686, Leibniz publicou um novo texto, dando ênfase ao cálculo integral. Assim, mostrou que a quadratura se caracteriza como o método inverso ao utilizado para encontrar tangentes, focando, dessa forma, na relação inversa entre diferenciação e integração, o que o levou ao Teorema Fundamental do Cálculo (BOYER, 1996). Conforme ressaltam Bonfim e Calábria (2017), a ideia central da abordagem trazida por Leibniz para o Cálculo distinguia-se da de Newton, pois não se fundamentava na noção de taxa de variação (derivada ou *fluxão*), mas na conceituação de diferenciais.

Nesse contexto, Leibniz percebia a integral, por exemplo, como a soma de retângulos infinitamente pequenos, cada um com área ydx , conforme a Figura 8, de forma que, utilizando sua criação notacional, denotava a área sob a curva $y(x)$ por:

$$\int ydx$$

Como Leibniz não estabelecia um intervalo de integração, os cálculos de integral do matemático alemão não traziam as constantes de integração, como são normalmente utilizadas na atualidade (BONFIM; CALÁBRIA, 2017).

Figura 8 - A ideia de Leibniz para a integral.



Fonte: Adaptado de Bonfim e Calábria (2017).

⁵⁸ Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais.

Desde essa época, emergiu, então, um elemento de terminologia, em função de atitudes diferentes de Newton e Leibniz em relação à definição de integral. Embora tanto um quanto outro conhecesse os dois aspectos do conceito, o matemático inglês definiu a *fluente* como a quantidade gerada por uma *fluxão* dada, ou seja, como o inverso da *fluxão*, e, mantendo essa ênfase, incluiu nos seus trabalhos diversas tabelas de integrais imediatas. Leibniz, por sua vez, definiu a integral a partir da soma de um número infinito de retângulos infinitamente pequenos. Essas duas visões foram perpetuadas nas disciplinas de Cálculo, nas quais frequentemente são abordadas duas integrais: a indefinida e a definida. Essa questão pode ser percebida, também, quando se faz referência, em trabalhos acadêmicos, à Integral de Newton ou à Integral de Leibniz (BOYER, 1959).

Em *Nova methodus*, que, de acordo com Bardi (2008), foi a primeira publicação sobre o Cálculo a ser divulgada em qualquer parte do planeta, Leibniz externou uma série de tesouros matemáticos, como a resolução de um problema que Descartes não conseguiu solucionar durante toda sua vida. Entretanto, não incluiu no trabalho introdução histórica alguma sobre seus métodos, nem sequer mencionou a comunicação que havia estabelecido com Collins e, principalmente, com Newton.

Em contrapartida, ao encaminhar *Nova methodus* para a publicação, em julho de 1684, Leibniz informou para o editor que estava de posse de certas cartas de Newton sobre o método das *fluxões*, mas que acreditava que o gênio inglês não iria reivindicar essas invenções para si. Foi essa pequena suposição que levou a uma enorme controvérsia entre os dois gigantes matemáticos, que se desdobrou pelas décadas seguintes (BARDI, 2008).

2.1.6.3 A Controvérsia

O Cálculo Diferencial e Integral não é, certamente, uma conquista que pode ser atribuída a um único homem, pois a sua gênese remonta às questões propostas filosoficamente na Grécia Antiga e o seu desenvolvimento, até a construção de métodos algorítmicos, no século XVII, agregou contribuições de intelectuais de diferentes épocas. Apesar dessa percepção ser lógica, a invenção desse campo de estudos é, frequentemente, atribuída a Newton e (ou) a Leibniz, que organizaram tal evolução de ideias, culminando com a construção de uma sofisticação simbólica que permitiu a generalização de séculos de corporificações através do Teorema Fundamental do Cálculo.

Entretanto, esse não foi um trabalho realizado conjuntamente pelos dois gigantes da Matemática. Pelo contrário, cada um desenvolveu sua própria visão sobre o Cálculo isoladamente, em décadas diferentes do século XVII, utilizando, inclusive, notações e

abordagens distintas para problemas semelhantes. Nesse contexto, Boyer (1996, p. 278) afirma que “o raciocínio de Newton estava mais perto dos modernos fundamentos do Cálculo que o de Leibniz, mas a plausibilidade da atividade de Leibniz e a eficácia de sua notação diferencial produziram uma maior aceitação dos diferenciais que dos fluxos”.

A controvérsia reside, portanto, no fato de, apesar de Newton ter chegado primeiro às ideias modernas sobre o Cálculo (em 1665), Leibniz ter sido reconhecido por muitos, na época, como o precursor desse campo, em função das suas publicações iniciais sobre o tema, em 1684 e 1686. Os argumentos trazidos nessa disputa, que levaram Newton, posteriormente, a acusar Leibniz de copiar suas invenções, tiveram suas origens na primeira visita do distinto alemão à *Royal Society*, no começo de 1673.

A partir dessa incursão inicial de Leibniz à *Royal Society*, foi estabelecida uma troca regular de correspondências entre o cientista alemão e Collins, tendo como foco as principais evoluções matemáticas da Inglaterra. Apesar de Newton provavelmente não saber da existência de Leibniz, o jovem alemão costumava receber relatos periódicos sobre as realizações matemáticas do britânico, contendo, inclusive, citações do seu trabalho em *De analysi* (WESTFALL, 1995). Nesse contexto, de acordo com Hall (1975, p. 183),

O resultado imediato foi um “Relatório Matemático”, enviado em abril de 1673, que consistia em uma revisão, elaborada por Collins, sobre o que havia de mais interessante na Matemática inglesa da época, que Leibniz, quase certamente, não achou relevante naquele momento, apesar de, algum tempo depois, ter dado a atenção merecida.

Dessa forma, Leibniz, cada vez mais impressionado com os relatos sobre os avanços de Newton, escreveu, em 1676, para Henry Oldenburg (1619 - 1677), secretário da *Royal Society*, solicitando mais informações sobre o trabalho do colega inglês com as séries infinitas. Com a insistência de Collins e Oldenburg para que Newton respondesse às cartas, o cientista inglês terminou por redigir, em junho de 1676, sua resposta inicial para Leibniz. Porém, evitando estabelecer comunicação direta, encaminhou-a para Oldenburg que, por sua vez, a repassou para Leibniz (WESTFALL, 1995). Com essa conjuntura,

[...] teve início a troca de cartas envolvendo Leibniz, Oldenburg, Collins e, finalmente, Newton, durante os dois últimos anos que Leibniz passou em Paris. Eles se corresponderam mais ou menos continuamente, jogando uma espécie de jogo de gato e rato, com Leibniz partilhando alguma informação, segurando outras, e Collins fazendo o mesmo. (BARDI, 2008, p. 101)

As cartas que Newton passou a enviar, então, para Leibniz não eram simples. Duas das mais importantes, *Epistola prior* e *Epistola posterior*⁵⁹, tinham, respectivamente, onze e

⁵⁹ Carta anterior e Carta posterior.

dezenove páginas. Juntas, continham o resumo das descobertas matemáticas de Newton e procuravam mostrar a Leibniz que o Professor de Cambridge havia chegado, há muitos anos, a uma versão das séries infinitas e a outras tantas inovações significativas. Ainda assim, com receio de que outros acessassem suas ideias precursoras, Newton não fez qualquer menção explícita ao Cálculo, mas acrescentou uma referência codificada sobre o seu estudo na área: “[...] preferi ocultá-lo assim 6accdae13eff7i319n404qrr4s8t12vx” (WHITE, 2000).

Essas frases secretas eram compostas, na época, por caracteres codificados e ordenados. Nesse contexto, após serem apropriadamente traduzidos, esses símbolos resultam na seguinte sentença: “dadas em uma equação as *fluentes* de qualquer número de quantidades, encontrar as *fluxões* e vice-versa”. Conforme argumenta Bardi (2008), entretanto, é provavelmente impossível que Leibniz tenha conseguido ler essas linhas.

Assim, de acordo com White (2000), Newton, após enviar a *Epistola posterior*, por ainda estar concentrado na sua disputa com Hooke, sobre a Óptica, solicitou a Oldenburg que encerrasse o ciclo de comunicações com Leibniz, redigindo: “Espero que isso satisfaça o Sr. Leibniz, para que não seja necessário voltar a escrever sobre esse assunto. Pois, tendo outras questões em mente, ser forçado a tratar dessas coisas torna-se uma interrupção nada bem-vinda por mim” (BARDI, 2008, p. 115).

Não sabendo da posição de Newton sobre as suas correspondências, Leibniz escreveu sua resposta, repleta de elogios, imediatamente após receber a *Epistola posterior*, em junho de 1677. Comunicou, então, o cerne do seu Cálculo Diferencial, fez algumas perguntas relevantes e solicitou que a troca de ideias continuasse. Entretanto, em agosto 1678, Oldenburg faleceu e, apesar de Newton certamente ter recebido o material de Leibniz, não respondeu e, assim, a correspondência entre ambos terminou (WESTFALL, 1995).

Nesse contexto, ao publicar seus trabalhos sobre o Cálculo Diferencial e Integral, seis anos mais tarde, Leibniz sabia que Newton havia desenvolvido certas técnicas matemáticas que possuíam conexão com os seus métodos. Ainda que não estivesse satisfeito em seu desejo de compreender plenamente o trabalho do inglês sobre as *fluxões*, Leibniz certamente conhecia pelo menos os conceitos básicos empregados por Newton (BARDI, 2008).

Durante os anos que transcorreram entre as cartas trocadas por Leibniz e Newton e as publicações do alemão sobre o Cálculo, o cientista inglês passou por uma fase de silêncio, dedicando-se a estudos sobre teologia e alquimia. Essa reclusão, entretanto, teve seu fim decretado por um cometa, avistado da Terra em 1682. Assim, Newton elaborou um conjunto de proposições sobre cometas e afirmou, também, nesse trabalho, que o Sol e os planetas

possuíam gravitação para seus respectivos centros e que essa decrescia de acordo com o quadrado da distância (WESTFALL, 1995).

Em agosto de 1684, o astrônomo Edmund Halley (1656 - 1742) viajou de Londres para Cambridge, a fim de fazer a Newton uma pergunta que, segundo pensava, somente ele seria capaz de responder: poderia a força que mantém os planetas em movimento em torno do Sol diminuir conforme o inverso do quadrado da distância? Ao propor tal questão a Newton, Halley obteve, prontamente, a resposta e a informação de que o Professor Lucasiano havia chegado a essa conclusão, por meio de seus cálculos, alguns anos antes. Assim, três meses após retornar a Londres, o astrônomo recebeu de Newton um tratado de nove páginas, denominado *De motu corporum in gyrum*⁶⁰. Foi esse trabalho que impulsionou a redação, em pouco mais de dois anos, do manuscrito de *Philosophiae naturalis principia mathematica*⁶¹ (WHITE, 2000).

Conforme destaca Westfall (1995), a motivação que se infligiu a Newton no fim de 1684 e que o dominou nos trinta meses seguintes, transformou a sua vida e o futuro da ciência global. Nesse sentido, em julho de 1687, editado e financiado por Halley, foi lançado o livro conhecido como *Princípios*. Sendo assim, de acordo com Bardi (2008, p. 137),

[...] embora alguns possam pensar que a maior contribuição de Halley foi predizer a volta do cometa ao qual ele acabou por dar seu nome, pode-se argumentar que, de fato, o seu maior feito foi convencer Newton a publicar um dos mais importantes livros já escritos – os *Princípios*.

Com o acolhimento e o reconhecimento do livro, as ideias de Newton transformaram-se instantaneamente, conforme enfatiza Westfall (1995 p. 192), “na ortodoxia reinante entre os filósofos da natureza” da Grã-Bretanha. Apesar de a obra ter causado um grande impacto também no continente, alguns pensadores da época, como Leibniz, por exemplo, rejeitaram conceitos complexos trazidos por Newton em *Princípios*, principalmente sobre a gravitação universal. Entretanto, nenhum deles pôde permanecer indiferente às questões discutidas pelo matemático inglês.

Newton passou a ser visto, então, sob um prisma diferente. O isolamento que lutara bravamente por manter, nos vinte anos anteriores, tornou-se impossível. Além disso, de acordo com Westfall (1995, p. 198), o matemático inglês, em 1690, “era um homem diferente daquele da década de 1670. A conclusão e a publicação dos *Princípios*, bem como seu próprio reconhecimento da importância da obra, deram-lhe um novo sentimento de confiança”.

⁶⁰ Do movimento dos corpos em revolução.

⁶¹ Princípios matemáticos de filosofia natural.

Em 1693, Newton incluiu no volume II de *Opera Mathematica*, de John Wallis, um resumo de suas descobertas sobre o Cálculo, que se dirigia, primordialmente, a Leibniz. Assim, o Professor de Cambridge, por meio de Wallis, fez referências específicas ao seu texto de *Epistola posterior*, inclusive traduzindo as mensagens codificadas contidas na carta que havia sido enviada, mais de quinze anos antes, ao matemático alemão (COOK, 1996). Foi nesse trabalho, de acordo com Bardi (2008), que, pela primeira vez, foi divulgada publicamente a informação de que Newton havia criado métodos idênticos ao Cálculo de Leibniz, mas que o precediam.

Apesar de não se manifestar explicitamente sobre o episódio, Leibniz publicou, em 1695, uma resenha anônima da obra inglesa, ressaltando que o trabalho de Newton não passava de um mero louvor à distinção matemática do alemão. Ademais, em 1696, um dos seguidores de Leibniz, Jean Bernoulli (1667 – 1748), propôs um problema, endereçado aos mais destacados matemáticos da época, com o objetivo principal de testar o método e a capacidade de Newton.

O matemático inglês, que nessa época já morava em Londres e ocupava o posto de Superintendente da Casa da Moeda, recebeu o desafio em 29 de janeiro de 1697. Newton encaminhou, então, no dia 30 de janeiro, a resposta correta do problema à *Royal Society*. Além disso, enviou uma carta anônima a Bernoulli, o qual, compreendendo a sofisticação da capacidade cognitiva de Newton, reconheceu sua autoria no texto, “como se reconhece o leão por sua pata” (WESTAFALL, 1995, p. 233).

A chama da disputa arrefeceu por alguns anos, mas, de forma alguma, havia se apagado. Tanto é que, em 1699, o matemático suíço Nicolas Fatio de Duiller (1664 - 1753), um antigo aprendiz de Newton, deu início a um novo capítulo da controvérsia, reacendendo a disputa, ao escrever um artigo no qual afirmava que Newton havia sido o primeiro – por uma diferença de muitos anos – a descobrir o Cálculo.

Leibniz respondeu a Fatio com um artigo publicado na revista alemã *Acta Eruditorum*⁶², insinuando que o suíço clamava por atenção e, ainda assim, não havia angariado nem mesmo o apoio de Newton. Ademais, como costumava fazer, o matemático alemão também fez veicular uma crítica anônima ao seu próprio artigo, concedendo-lhe, obviamente, diversos elogios (BARDI, 2008). Entretanto, conforme argumenta Westfall (1995, p. 277), “ao negá-la, tinha levado seu silêncio sobre a correspondência de 1676 a dar mais um passo em

⁶² Ata Erudita foi um periódico científico, fundado por Leibniz, que teve publicações mensais entre 1682 e 1782.

direção à rematada mentira, afirmando que, em 1684, quando da publicação original do seu método, ele só estava ciente de que Newton tinha um método das tangentes”.

Sem o amparo de Newton, entretanto, Fatio foi vencido facilmente por Leibniz, inclusive no âmbito da *Royal Society*. Nesse sentido, de acordo com Bardi (2008), John Wallis, por exemplo, incomodado com as acusações do suíço, garantiu ao alemão que sua reputação permanecia intocada em Londres.

Em 1704, um Newton revigorado com sua eleição para presidente da *Royal Society* colocou fim a um longo silêncio sobre o Cálculo. Dessa forma, publicou um apêndice, junto ao seu livro *Opticks or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light*⁶³, denominado “Sobre a quadratura das curvas”. Em resposta, Leibniz publicou novamente uma resenha anônima sobre o apêndice, na qual insinuava sutilmente, conforme argumenta Bardi (2008), que Newton havia tomado de Leibniz o Cálculo. Entretanto, passaram-se alguns anos até que o cientista inglês descobrisse esse texto.

Já, em 1709, de acordo com Cook (1996), o matemático escocês John Keill (1671 - 1721) publicou um artigo no qual ressaltou que os seus resultados, obtidos por integração, vinham diretamente do método das *fluxões*. Keill fez questão de frisar ainda que, sem dúvida alguma, esse método havia sido descoberto por Newton, apesar de também ter sido divulgado no continente por Leibniz que, segundo o escocês, apenas mudou o nome e a representação simbólica.

De acordo com Westfall (1995), Leibniz viu o texto de Keill somente em 1711 e, ultrajado com as insinuações do escocês, enviou uma carta para a *Royal Society*, exigindo uma retratação. Nessa época, entretanto, conforme destaca Cook (1996), Newton, além de ser o presidente da *Royal Society*, posto que ocupava desde 1703, já era também um Cavaleiro da Rainha. Considerando esse contexto, Bardi (2008, p. 210) afirma que: “quando Leibniz fez seu apelo à *Royal Society*, estava, na realidade, fazendo seu apelo ao próprio Newton”.

Sendo assim, na reunião da *Royal Society* de 22 de março de 1711, na qual a carta de Leibniz foi lida, Newton expôs, finalmente, sua versão sobre a criação do Cálculo. Como resultado, a sociedade acabou solicitando a Keill que redigisse outro documento endossando os direitos de Newton. O novo texto foi enviado para Leibniz em maio do mesmo ano (WESTFALL, 1995).

⁶³ Óptica ou um Tratado sobre Reflexões, Refrações, Inflexões e Cores da Luz.

De acordo com Cook (1996), a resposta de Leibniz chegou à *Royal Society* em janeiro de 1712. Nela, o alemão mantinha sua reivindicação sobre a autoria do Cálculo, argumentando que seu trabalho era tão bom quanto o de Newton. Nessa conjuntura atribulada de argumentos conflitantes, a sociedade estabeleceu, então, uma comissão, com onze membros, para averiguar o assunto. Conforme informa Westfall (1995), Newton costumava se referir à comissão como numerosa, qualificada e composta por intelectuais de diversas nações.

Seis semanas depois de ser constituída, a comissão entregou seu relatório final. Segundo White (2000), depois de detalhar as alegações de Newton, o documento concluía que o matemático inglês deveria ser reconhecido como o primeiro inventor do Cálculo e que Keill, ao corroborar tal fato, não havia sido, de forma alguma, ofensivo com Leibniz. Esse último, por sua vez, respondeu à decisão da comissão com a publicação anônima – apesar de sua autoria ser transparente – de um artigo intitulado *Charta Volans*⁶⁴, em julho de 1713 (COOK, 1996). No documento, de acordo com White (2000), Leibniz afirmou que Newton não veiculou nada antes dele, de forma que o britânico havia assumido para si a honra de outrem, pois queria roubar da Europa continental o crédito pela invenção do Cálculo Diferencial e Integral.

Nesses termos, e angariando apoiadores de um lado e de outro, as discussões prosseguiram. Nessa época, Newton atingia o ápice de sua fama e notoriedade, contando com um grande e crescente grupo de admiradores e discípulos. Em contrapartida, Leibniz sofria com a sua saúde e o seu isolamento, ocupando o posto de arquivista do Eleitor de Hannover (futuro Rei da Inglaterra). Até mesmo o seu maior apoiador, Jean Bernoulli, recusava-se a atacar Newton de frente. Nesse infeliz contexto, Leibniz faleceu, em 1716, e seu funeral foi assistido por apenas uma pessoa, um único criado que permaneceu com ele, até o final, na corte de Hannover (WHITE, 2000).

Já Newton, faleceu apenas em março de 1727 e foi enterrado, com grande pompa, na Abadia de Westminster, entre reis, nobres e grandes pensadores britânicos. No local, foi erguido um monumento com querubins segurando referências às descobertas de Newton, uma figura feminina, que representa a Astronomia, um globo terrestre e o próprio matemático, sentado na sua poltrona (WESTFALL, 1995). O filósofo francês Voltaire (1694 – 1778), que assistiu à cerimônia, escreveu, anos mais tarde: “vivi, certa vez, em um país onde um professor de Matemática, somente por ter sido grande em sua vocação, foi enterrado como um rei que proporcionou o bem a seus súditos” (*apud* GARBI, 2010, p. 240).

⁶⁴ Carta voadora.

2.1.7 Dúvidas Ainda Pairam no Ar

Mesmo após as descobertas de Newton e Leibniz, que levaram ao avanço do Cálculo e ao estabelecimento do seu teorema fundamental, algumas dúvidas ainda pairavam no ar. Apesar de reconhecer o poder da diferenciação e da integração, alguns pensadores, como engenheiro inglês Benjamin Robins (1707 – 1751) e o filósofo irlandês George Berkeley (1685 – 1753), levantaram questões acerca da fundamentação lógica dessa área de estudos. De acordo com Cohen e Westfall (2002), muitas dessas dúvidas, que atormentaram os matemáticos durante as décadas seguintes, só foram findadas quando o francês Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) trouxe, no século XIX, sua aplicação do conceito de limite.

Em *The Analyst, or A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*⁶⁵, obra publicada após a morte de Isaac Newton, Berkeley (1734) afirmou que o método das *fluxões* constituía-se na chave que permitia aos matemáticos modernos a revelação dos segredos da geometria e, por conseguinte, da natureza. Entretanto, no mesmo texto, o autor argumentou que quanto mais o ser humano analisava e perseguia essas ideias de Newton, mas ficava perdido e perplexo em devaneios, pois os objetos, a princípio fugazes e muito pequenos, às vezes acabavam simplesmente desaparecendo. Além disso, colocando nuvens também sob o pensamento de Leibniz, o filósofo irlandês afirmou que conceber uma quantidade que é infinitamente menor que qualquer coisa sensível e, ainda, manipulá-la algebricamente era uma dificuldade infinita para qualquer pessoa. Dessa forma, de acordo com Edwards (1979, p. 293), Berkeley considerava “os seguidores de Newton e Leibniz culpados de usarem métodos que não entendiam”.

Sendo assim, Berkeley (1734) argumentava, também, que o conceito de velocidade dependia de um determinado espaço percorrido, em um certo período de tempo, e que essa concepção tornava impossível aceitar a ideia de velocidade instantânea, proposta por Newton. Nesse contexto, Boyer (1959) afirma que, apesar dos argumentos de Berkeley terem sido válidos, ao mostrar que esse conceito inovador não tinha correspondente físico, não havia razão para esse não ser admitido como uma abstração matemática útil, pois a Matemática, em sua forma mais sofisticada, tem critérios de verdade diferentes, que estão mais relacionados com a consistência lógica do que com a plausibilidade da intuição ou percepção.

⁶⁵ O Analista, ou um Discurso Endereçado para um Matemático Infiel. Nessa expressão, Berkeley referia-se a Halley como o “Matemático Infiel”.

Buscando dar uma base geométrica sólida para o Cálculo e refutar os argumentos de Berkeley, o jovem matemático escocês Colin Maclaurin (1698 – 1746), o mais bem-sucedido discípulo de Newton, escreveu o trabalho *Treatise of Fluxions*⁶⁶, em 1742, com o rigor dos gregos antigos. Entretanto, de acordo com Boyer (1996), o método geométrico era menos sugestivo que aqueles que estavam sendo empregados na Análise da Europa continental e foi, provavelmente, por essa razão que a Grã-Bretanha não se destacou na Matemática do século XVIII, tempo no qual a Análise transcendeu a Geometria.

Com essa conjuntura de reticências emergentes, criou-se, na Inglaterra, uma percepção sobre uma possível falta de clareza na notação e nos argumentos de Newton, o que levou a uma confusão sobre a interpretação do seu método. No continente, por sua vez, o pensamento de Leibniz ganhava popularidade mais rapidamente. O matemático alemão, ao contrário do inglês, havia estabelecido uma extensa rede de correspondências com muitos outros colegas, o que fomentou o surgimento de um conjunto considerável de admiradores do seu trabalho. Dessa forma, catalisado principalmente pelo entusiasmo dos irmãos Bernoulli, discípulos diretos de Leibniz, o Cálculo Diferencial e Integral evoluiu mais depressa na Europa continental do que na Grã-Bretanha (BOYER, 1959).

2.1.8 Os Irmãos Bernoulli

Fugindo dos Países Baixos, em função das perseguições espanholas, a família Bernoulli estabeleceu-se na Basiléia, na Suíça, em 1583. Dessa forma, um dos membros da família, Nicolau Bernoulli (1623 – 1708), que se dedicou principalmente ao comércio de especiarias, acabou por tornar-se, inclusive, vereador da cidade. Foi Nicolau, então, quem fundou, mesmo sem ter consciência disso, uma notável linhagem de expoentes das Ciências Exatas, principalmente da Matemática.

Jacques⁶⁷ Bernoulli (1654 – 1705), quinto filho de Nicolau, foi o primeiro matemático profissional da família. Apesar de ter morado a vida toda na Basiléia, Jacques viajou muito e pôde encontrar, então, grandes cientistas da Europa da sua época, tornando-se, inclusive, amigo de alguns deles, como Leibniz, por exemplo (GARBI, 2010).

Dessa forma, o grande interesse de Jacques pelo Cálculo, que havia começado com as obras de Wallis e Barrow, e foi catalisado por sua relação de amizade com Leibniz, permitiu-lhe dominar as técnicas e os novos métodos desse campo. Nesse contexto, sugeriu ao alemão,

⁶⁶ Tratado sobre Fluxões.

⁶⁷ James em inglês ou Jakob em alemão.

em 1680, o emprego da palavra “integral” para o problema da quadratura e, em seus próprios trabalhos com séries infinitas, demonstrou, por exemplo, que a série harmônica diverge⁶⁸ (BOYER, 1996).

Além disso, Jacques estudou as coordenadas polares para construir, entre outros, a espiral de Arquimedes, publicando inclusive dois artigos sobre o assunto, em 1691 e 1694. Entretanto, de acordo com Boyer (1996), Newton já utilizava esse importante recurso, desde 1671, para, assim como Jacques, aplicar o sistema de coordenadas ao Cálculo.

Jean Bernoulli⁶⁹, décimo filho de Nicolau, em virtude de seu enorme talento, mas também do prestígio de sua família, cresceu rapidamente como matemático e acabou por tornar-se, inclusive, de acordo com Garbi (2010), o maior rival do seu irmão, Jacques. Entretanto, foi por intermédio do próprio Jacques que Jean construiu sua amizade com Leibniz, com quem se uniu para difundir o Cálculo e, também, para lutar fervorosamente contra Newton. Quando esteve em Paris, Jean conheceu o Marquês Guillaume François Antoine L’Hospital (1661 - 1704), para quem ensinou a nova matemática de Leibniz (CONTADOR, 2006).

Além disso, Edwards (1979) destaca que, em troca de um salário regular, Jean se comprometeu a enviar ao Marquês todas as suas descobertas matemáticas, para que esse último as utilizasse como melhor entendesse. Desse acordo, surgiu o primeiro livro texto sobre o Cálculo, publicado por L’Hospital, em 1696, e intitulado de *Analyse des infiniment petits pour l’intelligence des lignes courbes*⁷⁰. Esse trabalho é lembrado até os dias atuais devido a uma descoberta de Bernoulli conhecida como regra de L’Hospital para formas indeterminadas. Entretanto, no livro essa é definida apenas verbalmente, sem indícios da notação contemporânea relativa às funções.

Boyer (1959) afirma que os irmãos Bernoulli tinham perspectivas diferentes em relação ao Cálculo. Enquanto Jean demonstrava uma atitude positiva frente aos infinitesimais, Jacques empregava mais cautela no seu uso, argumentando que a ideia de infinito ainda não era suficientemente convincente. Dessa forma, Jacques afirmava que o infinitamente pequeno não deveria ser pensado como uma quantidade específica, mas como um fluxo perpétuo em direção ao nada. Essa visão, segundo Boyer (1959), levava à percepção dos diferenciais como variáveis e esse raciocínio direcionava o Cálculo para o método dos limites, que Jacques não conseguia expressar claramente, pois o conceito de função ainda não havia sido propriamente construído.

⁶⁸ Apesar de Oresme ter feito o mesmo anteriormente.

⁶⁹ John em inglês e Johann em alemão.

⁷⁰ Análise dos infinitamente pequenos para a compreensão das curvas.

2.1.9 Leonhard Euler

De acordo com Boyer (1996), o pai de Leonhard Euler, que era um ministro religioso na Basiléia, tinha conhecimentos de Matemática, tendo sido, inclusive, aluno de Jacques Bernoulli. Apesar disso, foi a contragosto que viu seu filho adquirir entusiasmo pelas ciências exatas. De qualquer forma, o suíço Leonhard Euler recebeu uma formação distinta e eclética, estudando Matemática com Jean Bernoulli e ampliando seus interesses até a Medicina, a Astronomia, a Física e os idiomas orientais. Sobre Euler, Garbi (2010, p. 242) afirma que:

[...] foi um furacão que varreu o território da Matemática durante a maior parte do século XVIII e que, nas quase seis décadas de sua vida matematicamente produtiva, dominou o cenário mundial das Ciências Exatas, sem que qualquer outra das grandes figuras da época pudesse disputar-lhe o cetro. Euler é, sem dúvida e de longe, o matemático que mais obras produziu em todos os tempos, cobrindo todas as áreas conhecidas da Matemática e criando outras que não haviam sido sequer vislumbradas por seus antecessores.

Nesse contexto, apesar de o Marquês L'Hospital ter sido o responsável pela publicação do primeiro livro texto sobre o Cálculo Diferencial e Integral, foram os dois volumes de *Introductio in analysin infinitorum*⁷¹, publicados por Euler, em 1748, quando já fazia parte da corte de Frederico, o Grande (1712 – 1786), em Berlim, que forneceram uma nova visão sobre a Matemática. Nessa obra, Euler abordou, de forma categórica, o conceito de função e ainda fez avançar os processos infinitos, estudando diversos tipos de séries (EDWARDS, 1979).

Antes de Euler, porém, Jean Bernoulli utilizou a palavra função, pela primeira vez, em 1698, em um artigo dedicado à solução de um problema proposto por Jacques (BUENO; VIALI, 2009). Dessa forma, Roque (2012) destaca que, no final do século XVIII, Jean já relacionava a concepção de função com quantidades que eram constituídas a partir de quantidades indeterminadas e outras constantes e, em correspondências trocadas com Leibniz, acabou sofisticando essas ideias com a construção dos conceitos de variável e constante.

A primeira definição direta do conceito de função foi proposta, então, por Jean Bernoulli, em 1718, à Academia de Ciências de Paris. Nesse trabalho, trouxe a letra grega φ para representar uma função, escrevendo-a, ainda sem o auxílio dos parênteses, simplesmente como φx . Nesse sentido, tanto os parênteses, quanto a letra f , foram contribuições posteriores, trazidas por Euler (BUENO; VIALI, 2009).

Foi na obra de Euler, *Introductio*, portanto, que o conceito de função passou a ocupar um papel central na Matemática. Assim, o Cálculo Diferencial e Integral passou a ser visto pelo

⁷¹ Introdução à Análise Infinita.

suíço como um estudo das funções, o que lhe permitiu aritmetizar ideias geométricas e distanciar a Análise Infinitesimal das concepções relacionadas à Geometria.

Nesse contexto, Boyer (1996) enfatiza que, a partir da publicação de Euler, de 1748, a ideia de função tornou-se o cerne da Análise Matemática. No começo de *Introductio*, o matemático suíço propõe, então, a sua definição: “uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta, de alguma forma, por essa quantidade variável e por números, ou quantidades constantes” (EULER, 1988, p. 3).

Figura 9 – Leonhard Euler.



Fonte: britishmuseum.org

Euler abordava nos seus estudos, portanto, as funções analíticas e as transcendentess⁷², que, segundo pensava, podiam ser melhor compreendidas a partir das suas expansões em séries infinitas. Dessa forma, Roque (2012, p. 375) destaca que:

[...] o objetivo de Euler não era reduzir toda a matemática à álgebra das séries de potências, mas estender o máximo possível a análise, usando a ferramenta algébrica. Ele pretendia unificar a matemática com base na álgebra, que não era encarada somente como uma linguagem para representar objetos matemáticos. Para ele, a álgebra permitia uma definição interna desses objetos. As quantidades podiam ser tidas como abstratas e não demandavam considerações sobre a sua natureza específica. O que importava eram suas relações operacionais com outras quantidades similares, dadas por funções.

⁷² Boyer (1996) afirma que provavelmente Euler referia-se às funções algébricas e as funções transcendentess elementares.

Assim, Euler começou a utilizar, por exemplo, a representação analítica para funções trigonométricas, fazendo com o que o seno ou cosseno não fossem mais percebidos estritamente como segmentos de reta, mas também como razões. Ademais, conforme ressalta Edwards (1979), o matemático suíço também provou, estudando as séries infinitas, que funções trigonométricas e exponenciais podem ser relacionadas⁷³. Para tanto, Euler utilizou-se das séries trigonométricas para $\cos(\theta)$ e $\text{sen}(\theta)$ e da série que define e^x :

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$\text{sen}(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

A seguir, trabalhando com essas três séries, Euler obteve a sua famosa relação entre funções trigonométricas e exponenciais, muito utilizada atualmente no Cálculo com variáveis complexas⁷⁴. Essa relação foi traduzida⁷⁵ pelo matemático suíço com seguinte equação:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \text{sen}(\theta)$$

Sendo assim, foi nesse trabalho de Euler que o símbolo e foi eternizado como o representante do número irracional 2,71828 ..., base do logaritmo natural. Apesar de outros matemáticos terem utilizado anteriormente diferentes símbolos para esse mesmo número, foi a representação de Euler que resistiu ao tempo e, portanto, continua sendo usada até os dias atuais. Essa notação advém do fato de Euler ter utilizado a forma geral $a^y = x$ para interpretar, pela primeira vez na história, os logaritmos a partir de expoentes e, então, ter denominado a letra a como a base do seu sistema. Nesse sentido, como a vogal seguinte disponível era e , foi essa letra que acabou sendo escolhida pelo suíço para representar a base do logaritmo natural (BALL, 1960).

Além disso, tomando a famosa igualdade anterior e fazendo θ ser igual a π (outro símbolo atribuído a Euler), surge a equação que engloba as três notações pelas quais o matemático é popularmente mais reconhecido. Essa equação é, inclusive, considerada a mais

⁷³ A letra i , para $\sqrt{-1}$, entretanto, foi introduzida por Euler apenas em 1777, em um manuscrito que acabou sendo publicado, postumamente, em 1794.

⁷⁴ Em cursos de Engenharia Elétrica principalmente.

⁷⁵ Dessa equação, deduz-se também às seguintes igualdades: $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ e $\text{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

bela entre todas as fórmulas, por unir os cinco números mais importantes de toda a Matemática (BALL, 1960; BOYER, 1996; GARBI, 2010).

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Em *Introductio*, Euler também trouxe suas exposições sobre coordenadas polares, de forma que classes completas de curvas, algébricas e transcendentais, foram consideradas. Ademais, o matemático expôs nessa obra equações trigonométricas para a transformação de coordenadas polares em coordenadas cartesianas. Em face do sucesso e da amplitude desse trabalho, o sistema de coordenadas polares é, usualmente (e erroneamente), atribuído a esse prolífico matemático (BOYER, 1996).

Já em *Institutiones Calculi Differentialis*⁷⁶, obra publicada em 1755, Euler utilizou, de acordo com Edwards (1979), suas expansões para derivar funções elementares, a partir da ideia de diferenciais, proposta por Leibniz. Sendo assim, o matemático suíço simplesmente desconsiderava, no seu processo, diferenciais de ordem mais alta, tais como $(dx)^2$, $(dx)^3$. Dessa forma, para $f(x) = e^x$, por exemplo, Euler utilizava a série que define e^x e procedia conforme ilustra-se a seguir:

$$d(e^x) = e^{x+dx} - e^x$$

$$d(e^x) = e^x \left[1 - 1 + dx + \frac{(dx)^2}{2!} + \frac{(dx)^3}{3!} + \dots \right]$$

$$d(e^x) = e^x dx$$

Além disso, em *Institutiones*, Euler traz uma nova definição de função, mais universal e abstrata. Essa ideia originou-se da ampla controvérsia sobre as cordas vibrantes⁷⁷ que, segundo Yuoschkevitch (1976), tornou a definição inicial de Euler obsoleta. Sendo assim, no prefácio do seu livro, o matemático suíço escreveu:

Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que, se as outras mudam, essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade dada pode ser determinada por outras. Correspondentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x , de qualquer maneira, ou que são determinadas por x , são chamadas de funções de x (apud ROQUE, 2012, p. 378).

Com suas ideias inovadoras, Euler, conforme argumenta Boyer (1959), transcende, então, seus predecessores, que limitavam o Cálculo às fronteiras da Geometria. O suíço, nesse

⁷⁶ Fundamentos de Cálculo Diferencial.

⁷⁷ Célebre problema da área da Física-Matemática, que tratava das vibrações infinitamente pequenas, em cordas homogêneas, finitas e com suas extremidades fixas (BUENO; VIALI, 2009).

sentido, construiu uma teoria formal, a partir da sua definição de função, que não necessitava mais ser convertida constantemente para diagramas ou traduzida em concepções geométricas.

2.1.10 Jean Le Rond D’Alembert

O francês Jean Le Rond D’Alembert (1717 – 1783), assim como Euler, angariou uma ampla educação formal, estudando Direito, Medicina e Matemática. Assim como o suíço, D’Alembert envolveu-se também na controvérsia sobre as cordas vibrantes e, principalmente, no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, sendo, de acordo com Eves (2004), o um dos primeiros matemáticos a estudar as equações diferenciais parciais.

Considerando discutíveis algumas atitudes matemáticas de Euler, com quem se correspondia regularmente, D’Alembert não consentia com a ideia de que os diferenciais poderiam ser assumidos como “símbolos para quantidades que são zero, mas, no entanto, são qualitativamente diferentes” (BOYER, 1996, p. 311). O francês criou, então, uma nova perspectiva para o Cálculo, focando na ideia de limite.

Dessa forma, de acordo com Edwards (1979), D’Alembert trouxe o primeiro argumento incisivo para resolver as dúvidas levantadas por Berkeley. Nesse contexto, definiu a derivada como um limite de quocientes de incrementos, seguindo a ideia trazida, mas não demonstrada claramente, por Newton. No item denominado de “Diferencial”, presente no quarto volume de *Encyclopédie* ou *Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*⁷⁸, D’Alembert (2012) escreveu, referindo-se ao gênio inglês:

Ele nunca considerou o Cálculo Diferencial como o estudo de quantidades infinitamente pequenas, mas como o método das primeiras e últimas razões, que, seja dito, constitui-se em um método para achar limites de razões. Assim, esse ilustre autor nunca realizou a diferenciação usando quantidades, mas usando equações, pois, de fato, toda equação envolve a relação entre duas variáveis e a diferenciação de equações consiste, meramente, em encontrar o limite da razão de diferenças finitas dessas duas variáveis contidas na equação (p. 985).

Sendo assim, Edwards (1979) argumenta que D’Alembert apresentou, na descrição contida no verbete, uma percepção do conceito de derivada que, atualmente, pode ser expressa pela seguinte igualdade:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Nesse sentido, D’Alembert discordava de Leibniz e Euler e afirmava que uma quantidade deve ser alguma coisa ou nada, de modo que, se ainda é alguma coisa, não

⁷⁸ Enciclopédia ou Dicionário Explicativo das Ciências, das Artes e dos Ofícios.

desapareceu e, se é nada, literalmente já não existe. Ou seja, argumentava que o fato de supor que existisse um estado intermediário entre esses dois era um absurdo. Dessa forma, D'Alembert rejeitava a ideia de que os diferenciais eram grandezas infinitamente pequenas e os definia, então, como uma notação que, por fim, referia-se aos limites (BOYER, 1959).

Vendo a teoria dos limites como a verdadeira metafísica do Cálculo Diferencial, D'Alembert (2012) definiu, no verbete limite, de *Encyclopédie*, que uma quantidade é dita o limite de outra, quando a segunda quantidade pode aproximar-se da primeira, mais do que qualquer quantidade dada, por menor que essa seja. O francês afirmou, ainda, que, apesar de a quantidade aproximante chegar cada vez mais perto do seu limite, essa não pode coincidir com ele ou ultrapassá-lo.

Apesar de D'Alembert não ter construído uma descrição formal do conceito de limite, com a precisão que seria agregada, posteriormente, no século XIX, o matemático francês contribuiu significativamente para a evolução do Cálculo, identificando a derivada como um limite (EDWARDS, 1979). Entretanto, de acordo com Boyer (1959), as ideias de D'Alembert não surtiram efeito imediato em seus contemporâneos, de forma que os livros publicados no continente, naquela época, continuaram priorizando a explanação de Leibniz.

2.1.11 Joseph Louis Lagrange

Italiano, de Turim, Lagrange (1736 – 1813) foi considerado o segundo maior matemático do século XVIII, atrás apenas de Leonhard Euler, com quem, inclusive, costumava trocar correspondências. Ademais, Lagrange também construiu uma amizade duradoura com D'Alembert. Contando, então, com o apoio e a influência desses dois expoentes da época, Lagrange chegou, em 1766, ao posto de Matemático Oficial da Prússia, cargo que ocupou até 1787, quando foi para a França, onde lecionou Matemática nas escolas *Normale* e *Plytechnique* (GARBI, 2010).

Dessa forma, para os discentes da *École Plytechnique*, Lagrange ministrou cursos de Análise Matemática e redigiu material de apoio para suas aulas que, desde então, foi considerado um texto clássico sobre o Cálculo. Os resultados construídos foram publicados, em 1797, sob o título de *Théorie des Fonctions Analytiques*⁷⁹.

Esse trabalho de Lagrange, que originou a expressão “derivada” e a notação $f'(x)$, para designar a derivada de $f(x)$, ambas utilizadas até os dias atuais, visava, sobretudo, tornar

⁷⁹ Teoria das Funções Analíticas.

o Cálculo logicamente mais satisfatório. Entretanto, de acordo com Edwards (1979, p. 297), “a tentativa de Lagrange de expungar do Cálculo todos os traços de infinitesimais e do conceito de limite fracassaram, inevitavelmente”.

De acordo com Boyer (1959), D’Alembert, assim como Newton e Leibniz, parece não ter compreendido o vínculo da noção de função com a diferenciação, de forma que idealizou essa operação visualizando simplesmente dois lados de uma igualdade, que possuíam o mesmo limite. Sendo assim, foi a partir da evolução do método de Lagrange, que envolvia predominantemente as séries de Taylor, que surgiu a concepção de função derivada, que contribuiu efetivamente para a construção da definição ainda em voga atualmente.

O método de Lagrange, como outras criações matemáticas da época, indicava, assim como ocorreu no caso da controvérsia britânica protagonizada por Berkeley, uma insatisfação com as ideias relacionadas a limites, *fluxões* e infinitesimais. Entretanto, a expansão em séries de Taylor era possível apenas para funções menos sofisticadas e, conseqüentemente, a abordagem tinha uma aplicação limitada. Nesse sentido, apesar de não conseguir alcançar seu intento, Lagrange influenciou o início da indistinguível teoria das funções de variável real (BOYER, 1996).

2.1.12 A Formalização do Cálculo

2.1.12.1 Bernard Bolzano

A nova concepção sobre o Cálculo Diferencial e Integral iniciou-se, por assim dizer, com a divulgação do primeiro trabalho sobre Análise, construído por Bernard Bolzano (1781 – 1848), proveniente do Reino da Bohemia, onde atualmente encontra-se a República Tcheca. O então Professor da Universidade de Praga, publicou, em 1817, a obra *Rein Analytischer Beweis des Lehrsatzes dass Zwischen je Zwei Werthen, die Ein Entgegengesetztes Resultat Gewähren, Wnigstens Eine Reele Wurzel der Gleichung Liege*⁸⁰. De acordo com Edwards (1979), Bolzano propôs-se a construir, nesse trabalho, uma prova totalmente analítica para o teorema do valor intermediário para funções contínuas.

Essa abordagem indicou, então, o início do período do rigor formal em, praticamente, todas as áreas da Matemática. Com relação ao Cálculo, essa postura levou ao estabelecimento de análises lógicas mais profundas sobre o conceito de limite e acabou por marcar o fim de um

⁸⁰ Prova Puramente Analítica do Teorema que Afirma que Entre Dois Valores de Sinais Opostos Existe Pelo Menos Uma Raiz Real da Equação

tempo de indecisão, desencadeado pelo método das *fluxões*, de Newton, e as ideias de Leibniz sobre diferenciais (BOYER, 1959).

Pensando em evitar questões que estavam direcionando discussões matemáticas para campos filosóficos, Bolzano foi um dos pioneiros da jornada que buscou trazer mais rigor para os fundamentos do Cálculo. Dessa forma, Boyer (1959) afirma que, assim como Lagrange entendeu que a introdução de ideias sobre o tempo e o movimento não eram necessárias, Bolzano buscou não fazer uso sequer de considerações sobre a intuição espacial humana.

Entendendo, então, que concepções geométricas levavam a ideias equivocadas sobre continuidade, Bolzano propôs uma definição baseada no conceito de limite. Sendo assim, afirmou que uma função $f(x)$ é contínua, em um determinado intervalo, se, para qualquer x desse intervalo, a diferença $f(x + \omega) - f(x)$ pode ser feita menor do que qualquer quantidade, fazendo ω ser tão pequeno quanto se queira (EDWARDS, 1979). Ou seja, Bolzano definiu que $f(x)$ é contínua em um intervalo, se, para todo x desse intervalo:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} f(x + \omega) = f(x)$$

Sobre a questão da notação dy/dx , que Euler havia afirmado ser um quociente entre zeros, Bolzano argumentou tratar-se de um símbolo para designar a função derivada. Nesse sentido, destacou que a notação não deveria ser entendida como uma razão entre dy e dx ou, ainda, como um quociente de zero por zero (BOYER, 1959).

De acordo com Edwards (1979), o trabalho de Bolzano não foi amplamente divulgado na época, de tal forma que a sua influência imediata continua incerta. Entretanto, houve um matemático que desenvolveu, na mesma época, ideias muito semelhantes às de Bolzano e que acabou tornando-se, em virtude da amplitude alcançada pelo seu trabalho, a figura conhecida por estabelecer as novas bases para o Cálculo Diferencial e Integral. Esse proeminente pensador atendia pelo nome de Augustin Louis Cauchy.

2.1.12.2 Augustin Louis Cauchy

Nascido em Paris, Cauchy foi aluno da *École Polytechnique* onde, inclusive, ocupou posteriormente o cargo de Professor de Mecânica. Contribuiu para diversas áreas da Matemática, estudando, entre outros assuntos, equações diferenciais, convergência de séries infinitas e probabilidade.

É lembrado também por sua dedicação intensa à causa do rigor matemático, que, no que diz respeito ao Cálculo Diferencial e Integral, culminou com o desenvolvimento da Análise Matemática (GARBI, 2010). Nesse sentido, Cauchy argumentava que:

[...] ao apresentar seus conceitos básicos para os estudantes, não era possível apelar para o modo como eram entendidos em uso, uma vez que o iniciante não tem experiência para tanto. Sendo assim, não bastava reconhecer que infinitésimos, ou limites, eram fundamentos inadequados para a análise; uma doutrina positiva se fazia necessária. Cauchy dirá então que, para explicitar os fundamentos da análise, é preciso derivar seus resultados em uma ordem coerente. Isso significa isolar os princípios fundamentais da teoria e deduzir deles os teoremas. Em análise, tais princípios serão os conceitos de função, limite, continuidade, convergência, derivação e integração (ROQUE, 2012, p. 406).

Dessa forma, Cauchy publicou três livros texto provenientes das suas aulas: *Cours d'analyse*⁸¹, em 1821, *Resume des leçons sur le calcul infinitesimal*⁸², em 1822, e *Leçons sur le calcul différentiel*⁸³, em 1829. Nesses trabalhos, o matemático francês frisou, por exemplo, a importância de demonstrar a existência de integrais, antes de estabelecer suas propriedades, e também de construir o conceito de integrais entre determinados limites, ou seja, a noção de integral definida (EDWARDS, 1979). Ademais, Cauchy trouxe uma nova definição de função (ainda de caráter geral e, portanto, não atual) e descreveu sua ideia sobre a noção de limite, afirmando que:

Quando os valores atribuídos sucessivamente a uma determinada variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de forma que acabam diferindo desse último de uma quantidade tão pequena quanto se queira, esse valor fixo é chamado de limite de todos os outros valores (BRADLEY; SANDIFER, 2009, p. 6).

Boyer (1959) argumenta que, ao trazer essa definição para a ideia de limite, Cauchy foi capaz de desvincular esse conceito de qualquer referência geométrica. Além disso, de acordo com o autor, essa foi a definição mais clara construída até aquele momento, mesmo que, posteriormente, objeções tenham sido trazidas e outras contribuições dadas para sofisticar ainda mais essa ideia.

O matemático francês promoveu também uma reconciliação com os infinitesimais, evitando denotá-los como números fixos. Cauchy expressou, então, um infinitesimal, ou uma quantidade infinitamente pequena, simplesmente como uma variável cujo limite era zero. Nesse contexto, de acordo com Edwards (1979), pode-se depreender que Cauchy referia-se, na sua definição, a uma variável dependente, ou função $f(x)$, por exemplo, que se aproxima cada vez mais de zero, à medida que $x \rightarrow 0$.

⁸¹ Curso de análise.

⁸² Resumo das aulas sobre o cálculo infinitesimal.

⁸³ Lições sobre o cálculo diferencial.

A partir de suas ideias sobre limite e infinitesimal, Cauchy propôs definições para os conceitos de derivada e integral. Nesse contexto, de acordo com Boyer (1996), o matemático francês⁸⁴ definiu a derivada da mesma maneira que Bolzano havia feito anteriormente, ou seja, afirmou que, se há uma função $y = f(x)$ e se incrementa, então, a variável x de $\Delta x = i$, de forma que possa-se estabelecer a razão:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + i) - f(x)}{i}$$

o limite dessa razão, quando i tende a zero, se existir, é representado por $f'(x)$ e chamado de derivada de y em relação a x .

Edwards (1979) destaca que Cauchy também foi responsável por introduzir o que, atualmente, chama-se de regra da cadeia, para diferenciação de funções compostas. Assim, supondo z como uma segunda função de x , ligada à primeira, denotada por $f(x) = y$, de forma que $z = F(y)$, Cauchy afirmou que, se $\Delta x, \Delta y$ e Δz fossem chamados de incrementos infinitamente pequenos, respectivamente, de x, y e z , então:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Aplicando, então, o limite, em ambos os membros da equação, Cauchy pôde concluir que⁸⁵:

$$z' = F'(y) \cdot y' = F'[f(x)] \cdot f'(x)$$

Tratando do conceito de continuidade, Cauchy formulou uma definição também muito similar àquela trazida por Bolzano. Dessa forma, o matemático francês afirmou que uma função $f(x)$ é contínua, em um dado intervalo, se um acréscimo infinitamente pequeno α , em relação à variável x , resulta sempre em um acréscimo infinitamente pequeno na diferença $f(x + \alpha) - f(x)$ (BRADLEY; SANDIFER, 2009). Lembrando a definição de Cauchy de quantidades infinitamente pequenas, sua definição, de acordo com Boyer (1959), pode ser traduzida da seguinte forma atual: uma função $f(x)$ é contínua em um determinado intervalo, se o limite da variável $f(x)$, à medida que x se aproxima de a , é igual a $f(a)$, para qualquer a pertencente a esse intervalo.

O último conceito básico desenvolvido por Cauchy foi o de integral definida. Nessa construção, o matemático francês recorreu a muitos dos aspectos que havia estudado

⁸⁴ Ao demonstrar alguns teoremas sobre a diferenciação, Cauchy utilizou, pela primeira vez na história, a notação com épsilons e deltas (GRABINER, 1981).

⁸⁵ De acordo com Edwards (1979), nessa demonstração, assim como acontece em alguns livros de Cálculo atuais, a possibilidade de $\Delta y = 0$, para valores pequenos de Δx , mas diferentes de zero, não é considerada.

anteriormente, como, por exemplo, as ideias de limite e continuidade. Assim, Cauchy estabeleceu, em *Resume des leçons*, de 1823, a integral definida como um limite de somas (GRABINER, 1981).

Figura 10 – Augustin Louis Cauchy.



Fonte: uc.pt

Até aquele momento, a maioria dos matemáticos rejeitava a definição de Leibniz, que também havia percebido a integral como uma soma. Dessa forma, conforme destaca Edwards (1979), a integral era vista unicamente como a antiderivada, no sentido trazido por Newton, pois essa interpretação parecia adequada, uma vez que limites de somas e a ideia de área⁸⁶ ainda não haviam sido bem compreendidas.

Intrigado com a falta de rigor na definição do conceito de integral, de tal forma que não conseguia aplicar essa ferramenta convenientemente ao seu estudo do Cálculo com variáveis complexas⁸⁷, Cauchy buscou insistentemente uma construção formal lógica para essa ideia. Sendo assim, ao tratar a integral definida como um limite de somas, o francês habilitou-se a provar a existência de integrais de funções contínuas, a considerar integrais de funções que não eram percebidas como derivadas de outras funções conhecidas e a explicar o comportamento de integrais ao longo de um caminho, ou integrais de contorno (GRABINER, 1981).

Dessa forma, na vigésima primeira lição de *Resume des leçons*, Cauchy começou estabelecendo uma função $f(x)$, contínua em um intervalo $[x_0, X]$, para, então, dividir esse

⁸⁶ A primeira definição matemática formal de área foi dada, de acordo com Edwards (1979), pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858 – 1932), em 1887.

⁸⁷ Principalmente no estudo de integrais de contorno (ou ao longo de um caminho).

intervalo em n subintervalos, não necessariamente iguais, por meio dos pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = X$. A partir dessa subdivisão, o matemático construiu a seguinte soma:

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

Analisando essa subdivisão, Cauchy, de acordo com Edwards (1979), percebeu e destacou que, se os comprimentos desses subintervalos se tornam muito pequenos, à medida que n fica cada vez maior, o modo como a subdivisão é feita não tem influência sobre o valor de S . Dessa forma, S depende unicamente de $f(x)$ e de x_0 e X , ou seja, S possui um único limite, que Cauchy chamou, então, de integral definida.

Nesse contexto, Grabiner (1981) ressalta que Cauchy alertou que o símbolo \int não deveria mais ser interpretado como uma soma de produtos, mas como o limite dessa soma. Sendo assim, o matemático francês propôs a seguinte notação, que creditou ao seu compatriota Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830), para a integral definida:

$$\int_{x_0}^X f(x) dx$$

Ademais, Cauchy argumentou que, apesar de ser definida independentemente, a integração constitui-se no processo inverso da diferenciação. Nesse sentido, construiu o que talvez tenha sido, de acordo com Boyer (1959), a primeira demonstração rigorosa do teorema fundamental do Cálculo, sem ter recorrido a noções intuitivas sobre o conceito de área. Dessa forma, Cauchy provou, conforme aponta Edwards (1979), que, se f é uma função contínua, então:

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{x_0}^x f(t) dt \right] = f(x)$$

Além disso, para deduzir dessa primeira forma, a segunda expressão utilizada para designar o teorema fundamental do Cálculo, Cauchy considerou, de acordo com Edwards (1979), a função $F(x)$, de tal forma que $F'(x) = f(x)$, no intervalo $[x_0, X]$, e concluiu que:

$$\int_{x_0}^X f(x) dx = F(X) - F(x_0)$$

para qualquer antiderivada F de f .

Com essas construções, Cauchy pôde, enfim, aprofundar seus estudos sobre a teoria das integrais com variáveis complexas. Assim, aplicou sua definição de integral como um limite

de somas no artigo *Mémoire sur les Intégrales Définies Prises entre Limites Imaginaires*⁸⁸, escrito em 1825 e publicado em 1874 (GRABINER, 1981).

2.1.12.3 Karl Wihelm Theodor Weierstrass

O jovem alemão Karl Weierstrass (1815 – 1897), ao concluir sua educação básica, aos 19 anos, foi enviado por seu pai para a Universidade de Bonn, para estudar administração, leis e economia, de forma que pudesse, posteriormente, galgar uma posição como servidor público. Entretanto, Weierstrass, sem interesse algum por essas áreas do conhecimento, não concluiu sua graduação e, em 1838, foi para a Academia de Münster, com o objetivo de participar de um curso de Matemática que pudesse lhe dar, rapidamente (em virtude das dificuldades financeiras da sua família), o status de Professor de Ensino Fundamental. De acordo com Sinkevich (2015), seu desempenho no curso e nas avaliações acabou sendo tão impressionante que Weierstrass recebeu, em 1841, uma permissão especial do governo para ensinar Matemática e Física no ensino secundário da época.

Depois de passar seis anos, entre 1842 e 1848, lecionando na cidade de Walcs, na atual Polônia, Weierstrass passou a ensinar Matemática, Física e Botânica, em Braunsberg, localizada na região oeste da Prússia. Tendo recebido, em 1854, o diploma de PhD *honoris causa*, da Universidade de Königsberg, em virtude do seu trabalho publicado em 1853, sobre funções Abelianas, habilitou-se, enfim, para trabalhar no Ensino Superior. Em 1856 mudou-se, então, para Berlim, onde passou a lecionar no Instituto Industrial da cidade e, também, na Universidade de Berlim (SINKEVICH, 2015).

Na esfera do Cálculo Diferencial e Integral, de acordo com Grabiner (1981), Weierstrass levou adiante a tarefa iniciada por Cauchy e formalizou definições por meio de épsilons e deltas, o que levou à eliminação das incertezas ainda existentes nessa área. Nesse contexto, Weierstrass formulou, por exemplo, a definição puramente aritmética do conceito de limite, substituindo a descrição dinâmica⁸⁹ por uma totalmente estática, sem mencionar movimento ou mesmo questões geométricas (EDWARDS, 1979). Dessa forma, Weierstrass escreveu que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$, tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

⁸⁸ Memória sobre as Integrais Definidas em Intervalos Imaginários

⁸⁹ Caracterizado por expressões como “ $f(x)$ aproxima-se de L , à medida que x aproxima-se de a ”.

Conforme argumenta Boyer (1959), essa expressão da ideia de limite, em conjunção com as definições de Cauchy de derivada e integral, forneceu a precisão que constituiu a base para, enfim, alcançar a formulação rigorosa do Cálculo. Sendo assim, Edwards (1979, p. 333) afirma que “com vários desses limites aparecendo na reformulação do Cálculo, a aritmetização da análise estava completa, e o Cálculo assumiu, então, precisamente a forma com a qual aparece nas explicações do século vinte”.

Ademais, com essa definição do conceito de limite, que não fez referência alguma aos infinitesimais, a expressão Cálculo Infinitesimal passou a ser inadequada para designar essa área da Matemática. O simbolismo puro de Weierstrass foi o responsável, portanto, por erradicar do Cálculo a noção tão controversa de um valor infinitesimal fixo (BOYER, 1959).

2.1.13 A Integral de Riemann

Nascido na província de Hannover, na Alemanha, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) estudou na Universidade de Berlim e, posteriormente, transferiu-se para a Universidade de Göttingen, onde cursou seu doutorado, que culminou com a defesa de sua tese sobre funções de variáveis complexas⁹⁰. Em 1854, candidatou-se para a posição de Professor de Göttingen e, ao apresentar seu trabalho para a banca examinadora, da qual fazia parte Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), introduziu o conceito de espaços com mais de três dimensões, de forma que esse campo se tornou “de tal maneira fértil que, durante décadas, os matemáticos exploraram suas consequências e fizeram notáveis descobertas” (GARBI, 2010, p. 355). De acordo com Boyer (1996), essa foi, inclusive, a mais célebre seleção docente da história da Matemática.

Trabalhando com o conceito de integral, Riemann criou uma generalização da ideia de Cauchy. A definição do matemático alemão, conforme argumenta Edwards (1979), ainda é a mais conveniente e útil descrição de integral definida para aplicações elementares no Cálculo. Nesse contexto, Riemann afirmou que, para estabelecer corretamente $\int_a^b f(x) dx$, deve-se tomar uma sequência de valores x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , entre a e b , e, para abreviar, chamar $x_1 - a$ de δ_1 , $x_2 - x_1$ de δ_2 , ... e $b - x_{n-1}$ de δ_n , e denotar frações próprias e positivas por ε_i . Sendo assim, o valor da soma:

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \dots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

⁹⁰ Nesse trabalho, Riemann abordou as famosas equações de Cauchy-Riemann, que estabelecem uma condição necessária, mas não suficiente, para a existência da derivada de uma função complexa.

depende da escolha dos intervalos δ_i e das frações ε_i . Dessa forma, essa soma tende sempre a um certo limite A , uma vez que todos os deltas tornam-se infinitamente pequenos. Esse valor A foi, então, chamado por Riemann de $\int_a^b f(x) dx$.

Nesse contexto, o matemático alemão escolheu pontos arbitrários $x_i^* = x_{i-1} + \varepsilon_i \delta_i$, dentro cada subintervalo da partição construída em $[a, b]$, e definiu, então, a integral da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

com δ caracterizando o comprimento máximo dos δ_i dos subintervalos da partição.

A integral de Riemann diferiu e avançou, então, em relação à definição dada por Cauchy. A primeira e importante sofisticação reside no fato de Cauchy ter tomado aproximações esquerdas para $f(x)$, em cada subintervalo de $[a, b]$, enquanto Riemann abriu a possibilidade de se escolher um ponto arbitrário em cada um desses subintervalos. Além disso, e provavelmente ainda mais importante, Cauchy trabalhou apenas com funções contínuas (assumindo implicitamente a ideia de continuidade uniforme), enquanto o matemático alemão não fez uso dessa condição, trazendo, inclusive, exemplos de integrais de funções com infinitos pontos de descontinuidade (GRABINER, 1981).

Posteriormente, em 1902, o matemático francês Henri Lebesgue (1875 – 1941) ampliou a definição de integral dada por Riemann. Para tanto, utilizou uma generalização do conceito de comprimento, denominada de medida de um conjunto (ABOTT, 2016). Assim, Lebesgue provou, de acordo com Brandemberg (2017), que uma função limitada, em um intervalo fechado, é Riemann integrável se, e somente se, o seu conjunto de pontos de descontinuidade tiver medida zero.

Ademais, conforme destaca Edwards (1979), Lebesgue demonstrou que toda função limitada, em um intervalo fechado e passível de ser mensurado, é Lebesgue integrável. Dessa forma, avançando em seus estudos, o matemático francês propôs, inclusive, uma releitura do teorema fundamental do Cálculo, para a integral de Lebesgue, afirmando que, se uma função f for diferenciável e f' for limitada em $[a, b]$, então f' é Lebesgue integrável, e:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

Nesse sentido, a integral de Lebesgue destaca-se como o padrão de estudos dos profissionais da Matemática pura avançada, sendo utilizada, inclusive, na maior parte dos

artigos científicos vinculados à Análise Matemática. Enquanto isso, é a integral de Riemann que é discutida, usualmente, nas disciplinas introdutórias do Cálculo Diferencial e Integral, com estudantes de graduação dos mais diversos cursos superiores que envolvem ciências exatas (ABOTT, 2016).

2.2 OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

David Tall é Professor Emérito do pensamento matemático na Universidade de Warwick, no Reino Unido, e se dedica ao estudo do sentido da Matemática e em como essa é ensinada e aprendida. Sua preocupação se debruça sobre o fato de que, enquanto alguns estudantes veem essa disciplina como algo incrível e belo, muitos outros encontram nela apenas fonte de problemas e ansiedade.

Em suas pesquisas, o autor constatou que o que acontece em cada estágio de aprendizagem é afetado significativamente por experiências prévias e tem um efeito importante no desenvolvimento de estágios posteriores. Nesse sentido, não é suficiente focar apenas em um estágio particular de ensino e aprendizagem, uma vez que os alunos desse estágio estarão sob o efeito do que já encontraram e o que aprendem agora irá afetar seus futuros estudos.

Nesse contexto, Tall (2013), na obra *How Humans Learn to Think Mathematically: exploring the three worlds of mathematics*⁹¹, se propôs a realizar um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento matemático através de uma jornada desde os conceitos iniciais construídos por uma criança até os limites da pesquisa em Matemática. Esse trabalho resultou em uma teoria cognitiva denominada de Três Mundos da Matemática que é voltada para o ensino e aprendizagem dessa disciplina e que pode inclusive ser aplicada no estudo do seu desenvolvimento histórico.

No seu trabalho, o autor afirma que o desenvolvimento do pensamento matemático é mais complexo do que simplesmente a adição de novas experiências a uma estrutura fixa de conhecimentos. Constitui-se em uma reconstrução contínua de conexões mentais que evolui para construir, com o tempo, estruturas de conhecimento cada vez mais sofisticadas.

O estudo da geometria, por exemplo, começa com a criança brincando com objetos, como triângulos, e reconhecendo suas características através dos sentidos e descrevendo-as através da sua língua materna. Com o tempo essas características se tornam definições mais precisas até atingirem um estágio em que possam ser traduzidas em uma teoria formal, como a

⁹¹ Como os Humanos Aprendem a Pensar Matematicamente: explorando os três mundos da matemática

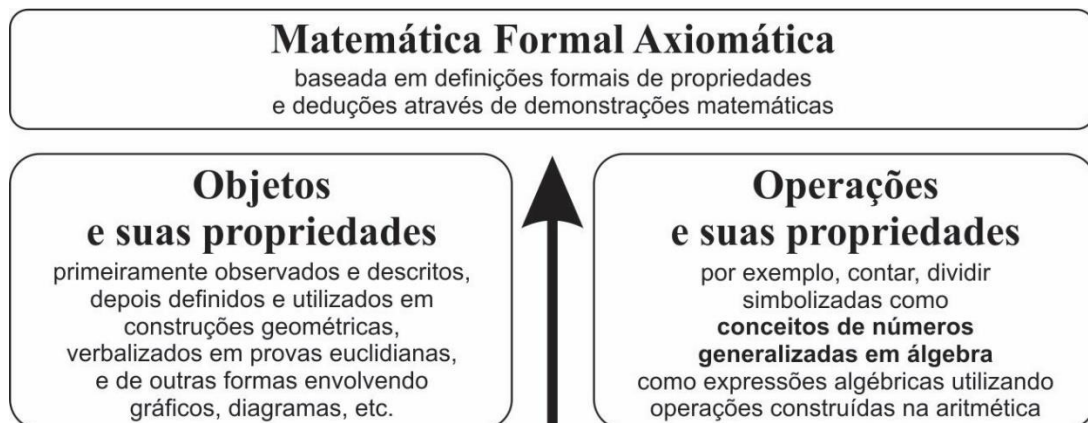
geometria euclidiana. Para aqueles que chegam à universidade, há ainda a possibilidade de um estudo de diferentes tipos de geometria, como geometria diferencial, topologia e geometria não-euclidiana.

O aprendizado da aritmética acontece de outro modo, enfatizando não as propriedades de objetos físicos, mas as ações que podem ser realizadas sobre esses objetos, tais como: contar, agrupar, ordenar, adicionar, subtrair, multiplicar e dividir. Essas ações acabam se tornando operações matemáticas e os símbolos são introduzidos para que acabem sendo feitas rotineiramente, sem grande esforço consciente. Posteriormente, elas podem deixar de ser vistas apenas como operações a serem realizadas para se tornarem também concepções que podem ser mentalmente manipuladas.

Já a álgebra emerge da generalização das operações estudadas em aritmética com a manipulação algébrica seguindo as regras construídas no estudo anterior. Funções algébricas podem ser visualizadas por meio de gráficos e posteriormente estruturas algébricas podem ser formuladas em sistemas axiomáticos, como corpos, anéis e grupos.

Há então três formas distintas de conhecimento matemático, conforme apresentado na Figura 11. A primeira envolve o estudo de objetos e suas propriedades que levam à criação de conceitos mentais descritos em linguagem materna. A segunda se desenvolve por meio do estudo da aritmética, levando à álgebra, e culminando com formulação e resolução de problemas utilizando o simbolismo algébrico. A terceira forma nasce por intermédio do estudo formal da matemática pura e é catalisada através do estudo acadêmico nas universidades.

Figura 11 - Esquema inicial para as três formas de conhecimento em Matemática.



Fonte: Tall (2013)

Essas questões levam a três maneiras por meio das quais o pensamento matemático é desenvolvido, dando origem então à teoria dos Três Mundos da Matemática.

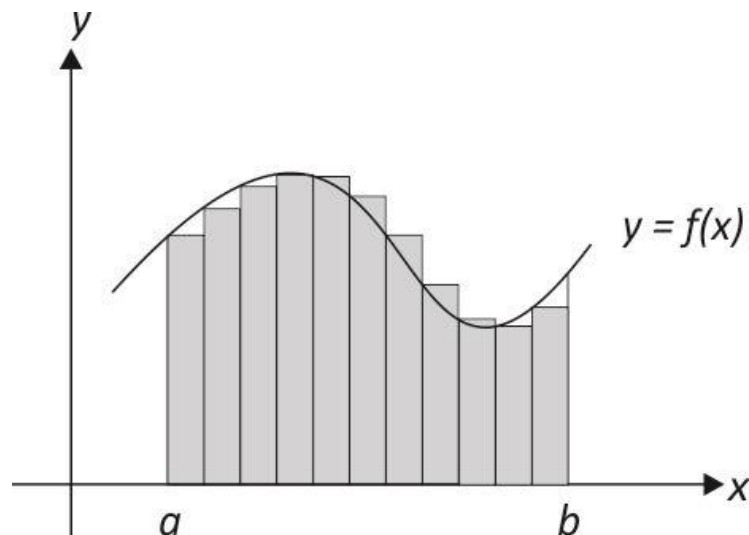
O primeiro, denominado de Conceitual Corporificado, é construído a partir das percepções e ações que acontecem no mundo real e se desenvolvem até a criação de imagens mentais cada vez mais sofisticadas. Nesse contexto, concepções que não pertencem a esse mundo real passam a ser mentalizadas como, por exemplo, uma linha perfeitamente reta. (TALL, 2004).

O conceito de corporificação se refere à observação, descrição, ação e reflexão sobre experiências que envolvem inicialmente objetos físicos, mas que evoluem até a construção de experiências mentais. Nesse caso, o indivíduo manipula o objeto no seu pensamento, observando-o, descrevendo-o, agindo e refletindo sobre ele. Essas experiências por muitas vezes também podem acabar por ser representadas de alguma forma com a ajuda de softwares ou outros recursos disponíveis (LIMA, 2007).

O Mundo Conceitual Corporificado inclui percepções mentais de objetos reais, mas também concepções internas de significado. No caso do conceito de integral definida, por exemplo, essa questão pode ser identificada nos cursos de Cálculo quando se emprega um raciocínio análogo ao utilizado por Leibniz e, posteriormente, por Cauchy.

Assim, são construídos n retângulos aproximantes, com alturas iguais a $f(x)$, localizadas, nesse caso, na extremidade esquerda de cada retângulo, e com bases com comprimentos iguais a $\frac{b-a}{n}$, conforme observa-se na Figura 12. Essa corporificação inicial pode auxiliar na compreensão de que o resultado da soma das áreas desses retângulos será cada vez mais próximo da área abaixo da curva e acima do eixo das abscissas, à medida que se aumenta o número de retângulos.

Figura 12 – Exemplo do Mundo Conceitual Corporificado.



Fonte: O autor

O Mundo Operacional Simbólico envolve os símbolos utilizados em aritmética, álgebra e no cálculo diferencial e integral, por exemplo. Começa com ações que se desenvolvem até se tornarem processos matemáticos que podem ser trocados por conceitos para se pensar sobre. Enquanto alguns estudantes permanecem no nível dos processos, outros vão além e veem os símbolos como operações a serem realizadas e também como objetos a serem operados através do cálculo e da manipulação algébrica.

De acordo com Lima (2007), esse mundo é composto por símbolos que representam ações e percepções que estão presentes no mundo corporificado. No estudo do conceito de integral, utiliza-se o símbolo $\int f(x)dx$ que envolve a percepção de que a função em questão deve ser integrada em relação à variável x e a ação de integrar, utilizando regras de integração, como $\int_a^b \cos x \, dx = \text{sen } b - \text{sen } a$, ou ainda a integração por substituição, frações parciais ou partes.

O terceiro mundo é o Formal Axiomático, no qual se constrói o conhecimento a partir de axiomas que geram teoremas, corolários, etc., cujas propriedades são deduzidas por demonstrações matemáticas formais. Nesse mundo não são utilizados apenas objetos sensoriais como base, mas experiências mentais que culminam com axiomas cuidadosamente formulados para definir estruturas, como um espaço vetorial, por exemplo, em termos de propriedades específicas (TALL, 2004).

Na realidade desse mundo, as demonstrações envolvem definições formais e deduções como conseqüências de propriedades estabelecidas. Apesar de os teoremas formulados poderem se originar de experiências corporificadas e simbólicas, as provas devem seguir sua dedução unicamente a partir de definições formais sem a utilização implícita de qualquer outra ideia que não pertença ao mundo Formal Axiomático (TALL, 2013).

No estudo do conceito de Integral, adentra-se nesse mundo, quando se evolui para a utilização de ε 's e δ 's nas demonstrações. Por exemplo, para calcular a área entre uma função positiva e contínua f e o eixo das abscissas, em um intervalo $[a, b]$, conforme a figura 12, pode-se dividi-lo em n subintervalos, com extremidades $x_0(= a) < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n(= b)$. Assim, são formados n retângulos, cada um com largura dx_i e altura $f(x_i)$, e a soma desses pode ser dada por:

$$\sum_a^b f(x_i)dx_i$$

Como f é uma função contínua, dado um $\varepsilon > 0$, é possível encontrar um $\delta > 0$, tal que, se cada retângulo tem largura menor que δ , então a variação do retângulo pode ser menor

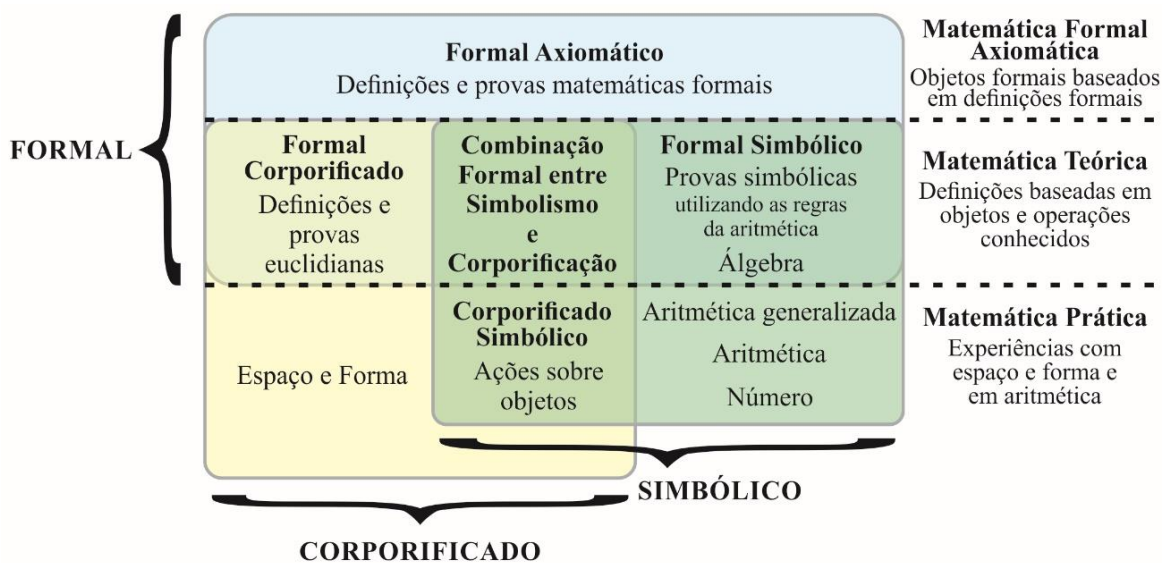
que $dx \times \varepsilon/(b - a)$. Esse valor é escolhido de forma que a variação de todos os retângulos seja menor que $(dx_1 + \dots + dx_n) \times \varepsilon/(b - a)$, que, como $dx_1 + \dots + dx_n = b - a$, gera uma variação total menor que ε .

Para a função contínua f , a largura dos retângulos pode ser tomada, então, pequena o suficiente de forma que se tenha uma aproximação numérica para o valor área. Segundo a notação de Leibniz e o conceito de limite, o seu valor preciso é dado por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)dx_i$$

É importante destacar que, apesar de apresentarem características individuais, podem existir intersecções entre os mundos, sendo que o estudante pode utilizar particularidades de cada um deles no seu desenvolvimento cognitivo. Lima (2007) afirma que há uma hierarquia entre os Mundos, uma vez que o Mundo Formal normalmente não é discutido antes do Ensino Superior, sendo tratado, portanto, apenas após os mundos Corporificado e Simbólico. Ao compreender o mundo formal, entretanto, e não apenas algumas de suas características, é possível que o indivíduo faça uso de aspectos concretos ou concepções mentais sobre objetos reais, bem como de manipulações simbólicas, para encaminhar a demonstração de um teorema, por exemplo. A Figura 13, a seguir, ilustra como os Três Mundos da Matemática podem interagir.

Figura 13 – Interação entre os Três Mundos da Matemática.



Fonte: Adaptado de Tall (2013)

Conforme afirmam Tall e Mejía- Ramos (2004), cada mundo tem uma forma diferente de garantir suas verdades⁹². No Mundo Conceitual Corporificado, a verdade é fundamentada, primeiramente, na intuição humana para depois, em um nível mais sofisticado, se basear em experimentos mentais. Ou seja, algo é verdadeiro, se parece ser ou, de acordo com Tall (2003), se as experiências realizadas acabam ocorrendo da forma como se prevê intuitivamente.

No Mundo Operacional Simbólico, uma fórmula é verdadeira, pois pode ser demonstrada por uma sequência de manipulações algébricas. No contexto do Cálculo Diferencial e Integral, Tall (2003) afirma, por exemplo, que uma grandeza, como a velocidade tem uma certa taxa de variação instantânea (derivada), ou um gráfico tem uma determinada área (integral), pois isso pode ser calculado algebricamente.

Já, no Mundo Formal Axiomático, um teorema é verdadeiro, se pode ser provado a partir de axiomas e definições. Assim, uma função tem uma derivada ou integral, porque isso pode ser provado.

Cada um dos Mundos cresce em sofisticação, com a utilização da linguagem, à medida que o estudo evolui e cada estudante traça seu caminho único em seu desenvolvimento matemático. Durante sua jornada pelos Três Mundos da Matemática, são encontrados problemas que requerem ideias anteriores para serem transpostos e cada um os trata de forma diferente, o que leva a uma variedade de desenvolvimentos pessoais. Algumas dessas ideias anteriores levam a um progresso crescente de sofisticação enquanto outras levam a um caminho alternativo que pode acarretar, inclusive, em concepções errôneas.

2.2.1 Já-estabelecidos⁹³, Já-encontrados⁹⁴ e A-encontrar⁹⁵

As ideias de já-estabelecidos e já-encontrados são empregadas por Tall (2013) para auxiliarem na compreensão da construção do pensamento matemático. Os já-estabelecidos são estruturas mentais que caracterizam o ser humano. São congênicas e comuns a todos os indivíduos e levam algum tempo para se desenvolver, à medida que o cérebro cria conexões na idade tenra. Os já-encontrados, por sua vez, são estruturas mentais resultantes de experiências prévias. Esses dependem em parte da natureza da matemática, o que leva a já-encontrados similares entre indivíduos, e em parte do desenvolvimento cognitivo pessoal, o que leva a diferenças consideráveis de pessoa para pessoa.

⁹² *warrants of truth*

⁹³ *set-before*

⁹⁴ *met-before*

⁹⁵ *met-after*

Segundo Tall (2013), o pensamento matemático é construído a partir de três já-estabelecidos: reconhecimento, repetição e linguagem.

Reconhecimento de padrões, similaridades e diferenças é uma característica evolutiva compartilhada com outras espécies. É resultado da aplicação de uma combinação de sentidos que todos possuem como olfato, visão, tato, paladar, audição e noção espacial.

Repetição de ações também é um já-estabelecido comum a outras espécies. É caracterizado pela repetição de uma sequência de ações até que essa possa ser realizada automaticamente, sem a consciência dos detalhes.

A linguagem, por sua vez, é um atributo que distingue o ser humano das outras espécies, pois, segundo Tall (2013), a comunicação através da fala e da escrita, no nível utilizado pela humanidade, é exclusiva. Nesse contexto, Harari (2015) afirma que a característica verdadeiramente única da linguagem humana é a capacidade de transmitir informações sobre coisas que não existem, pois, até onde se sabe, apenas os sapiens podem falar sobre tipos e mais tipos de entidades que nunca viram, tocaram ou cheiraram.

Essa capacidade traz a possibilidade de desenvolver graus cada vez mais sofisticados de pensamento em uma sociedade contemporânea e também através das gerações, por meio da transmissão de ideias e conceitos construídos. Com relação ao desenvolvimento do pensamento matemático, a linguagem, combinada com a capacidade de reconhecimento e repetição, é fundamental, pois possibilita a categorização e comunicação de ideias matemáticas como variável, função, derivada e integral.

Essa combinação de já-estabelecidos leva o ser humano além dos limites de sua própria existência. Praticando uma sequência de operações até que possam ser repetidas automaticamente, é criado o potencial de, por exemplo, contar números atribuídos a conjuntos de objetos. Começando com o número um, pode-se seguir sempre contando o número seguinte, chegando em 2, 3, 4 e assim sucessivamente até que se sinta que, não importa até que número a contagem foi feita, sempre haverá um novo número a seguir. Em algum momento, essa repetição pode levar à conjectura sobre o conceito de infinito, por exemplo.

Se, junto à capacidade de repetição, for adicionada a capacidade de categorizar conceitos através da linguagem, então esses números contáveis, potencialmente infinitos, podem ser categorizados, recebendo um nome ou até mesmo um símbolo, como \mathbb{N} . A partir de então, torna-se mais fácil pensar sobre esse conjunto e, embora a mente humana não possa contar todos os números naturais, ela pode pensar sobre esse conjunto numérico como um todo.

Apesar de concordar com a noção de conjunto de números naturais ou reais como coerente, mesmo sabendo que não podem contar todos os elementos desses conjuntos em uma vida finita, muitos estudantes têm dificuldade em compreender o conjunto dos números complexos, por exemplo. Tall (2013) enfatiza que o problema comum entre esses alunos é o fato de acreditarem que não faz sentido a igualdade $i^2 = -1$, pois essa viola a regra que afirma que não há raiz quadrada de um número negativo.

Nesse sentido, segundo o autor, cada indivíduo trilha seu próprio caminho nos Três Mundos da Matemática, considerando que o desenvolvimento cognitivo é individual e fundamentado em experiências anteriores, escolares ou não, que podem ajudar ou atrapalhar na construção de um novo conhecimento. Essas experiências são denominadas por Tall (2013) de já-encontrados. Esse termo é utilizado para descrever como novas situações são interpretadas a partir de experiências prévias, mas não se refere exclusivamente à experiência em si e sim ao traço deixado por ela e que pode afetar o pensamento. De acordo com Lima (2007), um já-encontrado é definido como “um construto mental que um indivíduo usa em um dado momento, baseado em experiências que encontrou anteriormente” (p. 86).

De acordo com Tall, Lima e Healy (2014), a influência de um já-encontrado é positiva quando esse opera em um novo contexto de tal forma que permite que métodos já vistos sejam utilizados de forma prazerosa na construção de generalizações de técnicas anteriormente estabelecidas. Por outro lado, a influência é considerada negativa quando esse impede a generalização e é causa de confusão. Nesse sentido, um estudante confiante pode sentir-se frustrado por tal obstáculo e, então, utilizar essa frustração como incentivo para trabalhar para encontrar alternativas cognitivas capazes resolver essa questão. De outra forma, um indivíduo que não tenha tal confiança pode sentir-se alienado, sofrendo com uma ansiedade cada vez maior, à medida que interage com novos contextos que trazem, sucessivamente, aspectos problemáticos. Nesse cenário, esse sofrimento pode fazer com que cresça sua vontade de evitar esse desconforto simplesmente aprendendo o que fazer, para, ao menos, ter o prazer de ser aprovado nos testes aos quais for submetido.

Quando um aluno estuda limites, por exemplo, esse aprende que, se existem $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, sendo a um número real, então $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right]$. Esse já-encontrado, que é verdadeiro para o estudo de limites de funções reais, pode ser problemático para o aprendizado da integral de um produto de funções reais, pois pode levar o estudante a imaginar que $\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \left[\int f(x) dx \right] \cdot \left[\int g(x) dx \right]$.

Os obstáculos originados de já-encontrados não são, portanto, resultado de falta de conhecimento, mas são conhecimentos antigos, sedimentados pelo tempo, e que resistem à construção de novas ideias que ameacem a estabilidade intelectual de quem os detém. Conforme D'Amore (2005):

Obstáculo é uma ideia que, no momento da formação do conceito, foi eficaz para enfrentar os problemas (mesmo que apenas cognitivos) precedentes, mas que se revela ineficaz quando se tenta aplicá-la a um problema novo. Dado o sucesso obtido (aliás, principalmente devido a ele) tende-se a conservar a ideia já adquirida e comprovada e, apesar da falência, busca-se salvá-la: esse fato, porém, termina por ser uma barreira para as aprendizagens sucessivas (p. 104).

A ideia de obstáculo é fundamental para o desenvolvimento do estudo de como os humanos aprendem a pensar matematicamente. Na construção de novas teorias e conceitos, como as do Cálculo Diferencial e Integral, muitos matemáticos contribuíram, ao longo dos séculos, para uma evolução não linear e sem ordem pré-definida, que ultrapassou várias barreiras até chegar à forma com a qual o conhecimento é apresentado nos livros didáticos atualmente, por exemplo. Não se pode, portanto, desconsiderar a probabilidade de ocorrência de eventos semelhantes na construção do conhecimento dos alunos de nível universitário.

Segundo Tall (2013), os currículos focam, entretanto, principalmente em já-encontrados positivos, que são vistos como a base para o desenvolvimento futuro. O autor destaca, no entanto, que é importante perceber que muitos aspectos problemáticos surgem quando os estudantes se deparam com novas situações. Nesse sentido, ao se confrontar com um conceito inovador, catalisa-se uma revolução interna de ideias junto aos alunos e, nesse processo, conflitos cognitivos, que desafiam ideias inicialmente consolidadas, podem emergir.

Tall (2013) ressalta que essas mudanças conceituais internas, que vão ocorrendo à medida que a evolução do pensamento matemático se desenvolve, têm consequências relevantes para os estudantes universitários que concluem a graduação em Licenciatura em Matemática e estão se preparando para ingressar nas escolas. Nesse sentido, é evidente que apenas saber matemática avançada não prepara completamente um futuro professor para entender como os seus alunos aprendem.

Acadêmicos que estão se graduando em Matemática têm percepções pessoais sobre os conteúdos estudados. Esses recém-formados docentes, conforme destaca Tall (2013), precisam construir, então, o hábito da reflexão constante sobre abordagens didáticas para a construção do conhecimento em sala de aula. Assim, tornam-se aptos a perceber as verdadeiras necessidades dos alunos com os quais irão se deparar na Escola.

A experiência em disciplinas de nível superior desses graduandos desenvolve neles novas visões da Matemática, que podem interferir em ideias, conceitos e concepções aprendidas anteriormente. Essas são definidas por Lima e Tall (2008) pelo termo a-encontrar que, segundo os autores, denota uma experiência encontrada posteriormente que pode afetar a memória de conhecimentos prévios.

Um exemplo interessante de a-encontrar é a prova, utilizando a integral definida, para a fórmula do cálculo do volume de uma pirâmide reta. Esse conhecimento é muito interessante para aqueles que são capazes de construir significado a partir de ideias mais sofisticadas, mas não pode ser utilizado diretamente por um professor ao trabalhar com esse conteúdo em uma Escola de nível básico.

Nesse caso, o docente pode optar, por exemplo, por provar que o volume de uma pirâmide de base triangular é igual a um terço do volume de um prisma, com as mesmas base e altura, e fazer uso da noção intuitiva de que a relação vale para outros tipos de pirâmide também. Em um estágio menos avançado, esse pode também simplesmente mostrar aos seus alunos que há a necessidade de despejar o conteúdo de três pirâmides inteiras para encher um prisma de mesma base e altura. Nesse contexto, Tall (2013) afirma que “professores deveriam estar cientes dos aspectos positivos e problemáticos que os estudantes enfrentam, enquanto buscam construir sentido sobre a Matemática, em caminhos que irão afetar seu desenvolvimento futuro” (p. 403).

2.3 OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA E O CÁLCULO

O desenvolvimento do Cálculo possibilitou ao ser humano calcular como as coisas variam (diferenciação), como elas se constroem (integração), a estabelecer a relação entre essas duas questões (Teorema Fundamental do Cálculo) e a construir inúmeros modelos, buscando explicar a realidade observada. Esses novos conceitos levaram a uma gama enorme de possibilidades de aplicação para o cálculo de taxas de variação de quantidades e como essas se acumulam. Segundo Tall (2013), essas ideias podem ser corporificadas visualmente e dinamicamente como a inclinação da reta tangente a uma curva em determinado ponto e como a área sob uma curva.

Nesse contexto, os trabalhos de Newton e Leibniz trouxeram uma nova realidade ao Cálculo, a partir da construção de métodos algorítmicos para o cálculo de taxas de variação e áreas. Assim, o Cálculo Diferencial e Integral passou a ser visto também no Mundo Operacional

Simbólico, através da resolução de problemas com a aplicação de técnicas algébricas de diferenciação e integração (TALL, 2003).

De acordo com Tall (2013), entretanto, o Cálculo foi o foco de grandes debates através dos séculos, por tratar de quantidades arbitrariamente pequenas e de processos potencialmente infinitos. Esse problema foi resolvido apenas no século dezenove, com a introdução da definição do conceito de limite, através da abordagem utilizando épsilons e deltas, o que possibilitou aos matemáticos construir a teoria moderna da Análise Matemática, mas que é, frequentemente, fonte de dificuldades para os estudantes no seu primeiro encontro com o Cálculo.

Tall e Mejía-Ramos (2004) afirmam que essa dificuldade se apresenta, pois, enquanto o matemático vê o Cálculo pelas lentes das provas formais, os alunos têm seu conhecimento matemático estruturado nos mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico. Essa questão leva a um problema, pois acaba sendo criado um hiato cognitivo considerável entre os mundos habitados pelos estudantes e o mundo mais sofisticado e formal, da Análise Matemática, habitado pelo matemático profissional.

Usualmente, o matemático, que obviamente tem solidificados os conceitos de limite, derivada e integral, vê o Cálculo como uma construção lógica, feita a partir da definição de limite, que é um dos seus já-encontrados. Portanto, suas aulas são conduzidas a partir de uma definição desse conceito. No entanto, esse pensamento desconsidera a visão do estudante, que, conforme ressalta Tall (2008), provavelmente se sentiria mais confortável se o conhecimento dessa disciplina fosse desenvolvido a partir de uma abordagem corporificada de inclinação da reta tangente de uma curva no gráfico, antes de ser introduzido às técnicas simbólicas de cálculos e à linguagem formal. O autor destaca também que a rota mais natural para os alunos atingirem seu potencial, para posteriores aplicações do Cálculo ou, em alguns poucos casos, para o avanço para a Análise Matemática, encontra-se na combinação dos mundos corporificado e simbólico.

De acordo com Tall e Mejía-Ramos (2004), os estudantes que estão iniciando sua jornada de aprendizado do Cálculo Diferencial e Integral têm muitas experiências que fundamentam suas concepções matemáticas. Inicialmente, quando abordam a aritmética, são introduzidos a situações nas quais os símbolos representam um processo, que faz deles uma operação, que leva a uma resposta. Em contrapartida, no estudo da álgebra, um símbolo pode se tornar unicamente potencial, como em $57x + 32$, onde “+” representa uma operação que não pode ser resolvida enquanto o valor de x não for conhecido. Essa questão causa problemas no

estudo da álgebra, muito importante para o desenvolvimento do Cálculo, pois alguns alunos criam até mesmo aversão à manipulação de símbolos que não geram uma resposta numérica única.

Referindo-se a essa situação, que trata do caráter simbólico dualístico existente na Matemática, Tall e Gray (1991) propuseram a noção de “proceito”, definindo-o como o amálgama entre processo e conceito, no qual o processo e o seu produto acabam sendo representados pelos mesmos símbolos. Tall (2004) afirma que a noção de proceito se constrói, inicialmente, a partir de ações no mundo Conceitual Corporificado e torna-se mais sofisticada com a introdução de atividades simbólicas na aritmética, aumentando sua complexidade com a introdução de conceitos de números mais sofisticados (frações, números racionais, números irracionais, números complexos...) que permitem o cálculo e a manipulação de símbolos com grande eficácia e precisão. Essa evolução continua com a generalização da aritmética até a chegada da álgebra, através da manipulação de símbolos para resolver equações, até a construção de conceitos mais gerais, como aqueles utilizados na parte algébrica do Cálculo, por exemplo.

Tall (2004) afirma, então, que esse contexto sugere que muitos conceitos simbólicos são desenvolvidos, gradualmente para a representação de corporificações, para, depois, evoluírem, cada vez mais, até chegarem a simbolismos mais sofisticados. Entretanto, há muitas ocasiões em que alguns indivíduos não conseguem interpretar o que, de fato, significam os processos realizados, de forma que acabam levando-os adiante em uma rotina baseada apenas em repetição mecânica, o que caracteriza uma visão do processo unicamente, sem o desenvolvimento conceitual capaz de levar à habilidade “proceitual”.

Foi o que aconteceu com Girolamo Cardano⁹⁶ (1501 - 1576) e Nicoló Fontana⁹⁷ (1500 - 1557), mais conhecido por Tartaglia⁹⁸, que, de acordo com Garbi (1997), entraram em choque, no século XVI, em uma disputa pela autoria do método de resolução de equações de terceiro grau. No seu método de resolução, os dois matemáticos efetivaram cálculos que levaram a raízes quadradas de números negativos, que acabaram, por fim, sendo anulados, resultando em uma solução aceitável para a época. Esses números, resultantes dessas raízes quadradas de números negativos, não faziam qualquer sentido naquele momento histórico e eram

⁹⁶ Nascido em Pavia, na Itália, além de trabalhos sobre Matemática, envolvendo principalmente equações algébricas, escreveu sobre medicina, física, filosofia e música.

⁹⁷ Matemático italiano nascido na Brescia.

⁹⁸ Apelido, que quer dizer gago, recebido devido a um defeito de fala originado por uma profunda cicatriz na boca, que foi resultado de um ataque das tropas francesas à Brescia, em 1512.

desvinculados de qualquer representação geométrica corporificada. Atualmente, entretanto, são representados pelos números complexos, que são corporificados com pontos no plano de Argand-Gauss. Esse episódio, conforme destaca Tall (2004), mostra que, em algumas ocasiões, a utilização de manipulação simbólica pode se desenvolver até levar, novamente, a uma conceituação corporificada significativa.

Segundo afirmam Tall e Gray (1991), essa dualidade da notação matemática, caracterizada pelo proceito, se bem compreendida, traduz-se em uma flexibilidade de pensamento que permite que o estudante se movimente entre o processo de resolver uma expressão e o conceito de manipulá-la mentalmente, como parte de uma construção mais ampla. Essa capacidade é tão importante, que pode ser considerada como o alicerce sobre o qual se sustenta o sucesso do pensamento matemático. No contexto do Cálculo, Tall e Li (1992) perceberam, por exemplo, que diferentes estruturas mentais são construídas ao se trabalhar com limites de sequências $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, tanto para o termo s_n , ora percebido como um processo de cálculo, ora como um objeto mental, quanto para o limite como um todo, visto como um processo e também como um objeto.

Nesse sentido, no estudo de métodos de integração, normalmente abordados em disciplinas iniciais de Cálculo, os alunos deparam-se com situações nas quais o símbolo \int não designa um processo a ser realizado, mas unicamente o conceito de integral. Sendo assim, na integração por partes, por exemplo, é comum a resolução de problemas, como o que segue, em que, em determinado momento, a integral não precisa ser calculada, mas apenas manipulada, caracterizando, assim, a compreensão do que Tall e Gray (1991) denominam de proceito.

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \text{sen}(x) - \int e^x \text{sen}(x) dx$$

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \text{sen}(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

Percebe-se, na transição seguinte, que a integral que surgiu no segundo membro da equação não precisa mais ser resolvida (calculada). Basta, portanto, que seja manipulada como um conceito. Dessa forma, somando-se, em ambos os membros da equação, $\int e^x \cos(x) dx$, obtém-se:

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x \text{sen}(x) + e^x \cos(x)$$

Sendo assim, encontra-se a solução da integral inicial, que é dada por:

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x}{2} [\operatorname{sen}(x) + \cos(x)] + C$$

Tall e Mejía-Ramos (2004) afirmam que há problemas ainda maiores no estudo do Cálculo Diferencial e Integral. Essa situação se acentua pelo fato de o conceito de limite, normalmente o primeiro a ser abordado no estudo da disciplina, ser potencialmente infinito. Tall (2003) ressalta que muitos estudantes acreditam que o limite de uma função é algo que pode continuar indefinidamente, sem que possa ser calculado e determinado por um valor específico. Essa questão leva a uma grande quantidade de equívocos conceituais como a crença de que o limite é algo que nunca pode ser alcançado ou ultrapassado, por exemplo.

Entretanto, quando os estudantes são apresentados às regras de diferenciação, esses encontram novamente a segurança de procedimentos que levam a uma resposta. Essa é uma característica que indica o porquê de os alunos terem dificuldades na compreensão do conceito de limite e, mesmo assim, acreditarem que são capazes de entender o Cálculo. Essa confiança baseia-se na expectativa desses estudantes, construída durante sua trajetória escolar, de receber a indicação do que fazer e como fazer para, depois, serem testados apenas na sua capacidade de repetir tais procedimentos.

Tall e Mejía-Ramos (2004) destacam que outra questão problemática do ensino e da aprendizagem do Cálculo é a prática de tentar introduzir conceitos de uma esfera “superior” à dos alunos, habitada pelos matemáticos, através de definições e provas formais. Essa situação leva os estudantes a enfrentar concepções que requerem grandes reconsiderações de suas crenças, que foram construídas a partir de experiências que podem não ser consistentes com as definições que são propostas.

Nesse contexto, Tall e Vinner (1981), no seu clássico artigo *Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Special Reference to Limits and Continuity*⁹⁹, cunharam o termo conceito imagem para descrever a ampla estrutura cognitiva associada a um conceito, que inclui imagens mentais e propriedades e processos associados. Segundo os autores, o conceito imagem é constantemente (re)construído, ao longo do tempo, sofrendo vários tipos de influências e mudando à medida que o estudante se depara com novas situações enriquecedoras e se desenvolve. Pode-se afirmar, portanto, que o conceito imagem é

⁹⁹ Conceito Imagem e Conceito Definição em Matemática com Referência Especial aos Conceitos de Limite e Continuidade.

caracterizado pelo que é acionado na memória de um indivíduo quando esse se depara com uma referência a um determinado conceito.

Do mesmo modo, foi trazido à luz por Tall e Vinner (1981), o termo conceito definição, como sendo a forma como as palavras são utilizadas para especificar um conceito. Esse pode, inclusive, ser uma reconstrução pessoal da definição de um determinado conceito, desenvolvida por um indivíduo, sendo, nesse caso, uma combinação de palavras utilizada para evocar o seu conceito imagem. Nesse contexto, os autores afirmam que um conceito definição pessoal pode diferir de um conceito definição formal, sendo esse último o conceito definição aceito pela comunidade matemática.

Os autores também ressaltam que, para que um conceito seja construído por um indivíduo, é fundamental que um conceito imagem do mesmo seja formado, pois a mera memorização do conceito definição, seja ele pessoal ou formal, não implica na sua compreensão. Em contrapartida, Tall e Vinner (1981) afirmam que a ausência da memorização de um conceito definição não impede que esse conceito acabe se desenvolvendo por experiência, sem a necessidade de recorrer a sua definição formal.

Essas questões sugerem que uma abordagem pedagógica de conceitos matemáticos, como limite, derivada e integral, não deve focar apenas em definições formais precisas. Deve imperativamente também buscar construir situações capazes de promover a interação dos estudantes com uma ampla gama de ideias relacionadas a esses conceitos, possibilitando, assim, que cada um construa o seu conceito imagem sobre o conteúdo abordado.

Giraldo (2004) destaca que a utilização de definições formais pode se configurar em um obstáculo para os alunos em estágios tenros de aprendizagem do Cálculo. Segundo o autor, um obstáculo inicial se configura na utilização da própria linguagem, pois as definições matemáticas são feitas a partir de palavras que possuem certo significado na linguagem natural, mas que devem ser abstraídas desses significados para que a compreensão dessas definições seja construída.

A palavra limite, por exemplo, é comumente entendida como uma fronteira que não pode ser alcançada. Já a noção de tangente é comumente assumida como um já-encontrado pelos professores no início do estudo do Cálculo e, então, utilizada livremente para se introduzir o estudo da derivada. Entretanto, a noção de reta tangente, construída no contexto da geometria euclidiana, conforme ilustrado na Figura 14, leva à ideia intuitiva de que essa “encosta” na curva em apenas um ponto e, de forma alguma, intercepta-a. Essas concepções e significados, construídos a partir de experiências prévias, não contribuem para o entendimento de novos

conceitos no contexto das definições necessárias para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Figura 14 – Afinal, o que é uma tangente?



Fonte: Adaptado de Tall (2010)

Nesse sentido, Tall e Mejía-Ramos (2004) afirmam que, para poder evoluir na forma como se trabalha com o ensino e a aprendizagem do Cálculo, permitindo que essa disciplina faça sentido para os discentes, é necessária uma compreensão dos conceitos como são comumente discutidos pela comunidade matemática, mas, sobretudo, uma compreensão de como esses são construídos pelos acadêmicos no desenvolvimento do seu conhecimento pessoal. Portanto, apesar de os matemáticos terem seus já-encontrados baseados no conceito de limite, os alunos, que não têm experiência com o Mundo Formal Axiomático, podem se beneficiar de uma introdução ao Cálculo a partir de ideias provenientes dos mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico.

Tall e Mejía-Ramos (2004) ressaltam ainda que uma questão que precisa de atenção é a que se refere ao papel da demonstração no estudo do Cálculo, em detrimento de se buscar construir significado a partir do ponto de vista dos alunos. Esse fato sugere que a necessidade de uma pequena minoria, que progredirá para a disciplina de Análise Matemática, por exemplo, se sobrepõe à necessidade da maioria, que utilizará as ideias do Cálculo para construir experimentos mentais para resolver problemas reais.

A área abaixo de um gráfico, por exemplo, pode ser notada analisando-se uma figura no mundo corporificado. Nesse sentido, Tall e Mejía-Ramos (2004) ratificam que é possível perceber que a área terá um valor numérico, sendo o principal problema, portanto, encontrar esse valor simbolicamente e não provar a sua existência.

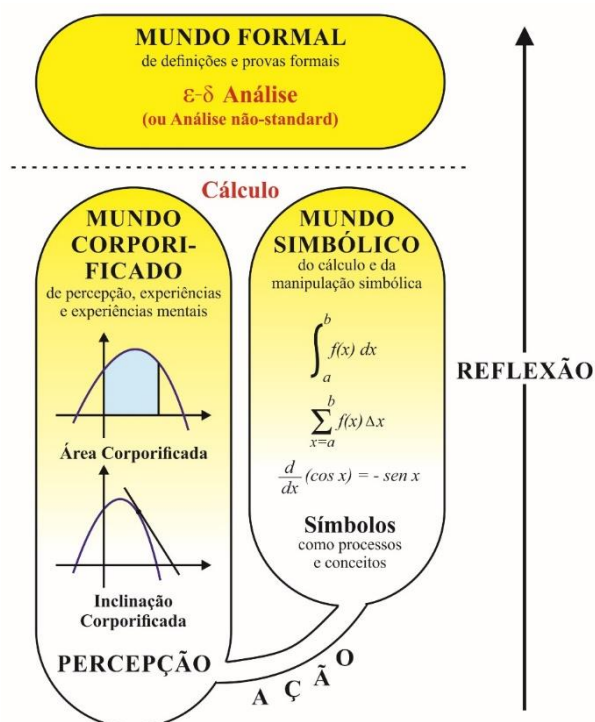
Segundo os autores, demonstrar a existência da área é uma questão do Mundo Formal Axiomático, destinada a matemáticos profissionais, engajados em estudos mais complexos e sofisticados, como o da integral de Lebesgue, por exemplo. Esse problema não tem significado algum para a vasta maioria dos estudantes de Cálculo, que não prosseguirão para disciplinas de Análise Matemática ou para um mestrado em Matemática Pura. Nesse contexto, Tall (2008)

destaca que o estudo do Cálculo Diferencial e Integral não pertence ao Mundo Formal Axiomático, que o olha de cima, mas à realidade de Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz, que perceberam seus conceitos a partir de já-encontrados construídos nos mundos Conceitual Corporificado, da geometria e dos gráficos, e Operacional Simbólico, da aritmética e da álgebra.

Essa proposta, entretanto, não indica que se deve partir da Matemática de um ponto de vista de um profissional e apenas simplificar as suas ideias, formalmente construídas, até que se chegue a uma abordagem meramente intuitiva. Configura-se, em oposição a essa ideia, em construir um ponto de vista a partir da base, desenhado cuidadosamente para alcançar as sutilezas matemáticas a partir da posição em que o estudante se encontra. Para alcançar esse objetivo, é necessária a construção de uma integração entre a Matemática e a percepção que os acadêmicos trazem sobre essa ciência e seus conceitos (TALL, 2010).

Assim, Tall (2003), conforme sugere a Figura 15, defende uma abordagem corporificada na introdução ao Cálculo Diferencial e Integral, concentrando-se, inicialmente, no estudo de ações e de ideias perceptuais fundamentais. Nesse contexto, o estudo não começa com ideias formais sobre limite, mas com ideias corporificadas, que são traduzidas, por exemplo, através de representações gráficas de funções. Essa abordagem, contudo, não deve se ater apenas a aplicações reais, pois, embora essas sejam componentes importantes, as concepções matemáticas também devem ser construídas por meio de uma sofisticação gradual.

Figura 15 – A estrutura conceitual do Cálculo e da Análise Matemática.



A ideia central de uma abordagem corporificada, de acordo com Tall (2003), é construída através da interação com a visão física do gráfico de uma função, sempre enfatizando que as funções envolvem variáveis numéricas. A inclinação do gráfico em determinado ponto é um número, a área sob o gráfico é um número e a inclinação da reta tangente e a área, por sua vez, têm gráficos que expressam também quantidades numéricas. Nesse sentido, pode-se, inclusive, construir os gráficos de derivadas e antiderivadas no mesmo plano, se assim for necessário.

Essa questão, entretanto, pode ser complicada se for feita uma introdução ao Cálculo na qual apenas aplicações reais específicas são abordadas, sem que generalizações sejam criadas. Uma situação clássica diz respeito à construção da inclinação da reta tangente ao gráfico baseada, única e exclusivamente, em representações da distância em função do tempo, determinando, portanto, a velocidade ou, por sua vez, da velocidade em função do tempo, determinando a aceleração. Obviamente, esses contextos ilustram muito bem os conceitos estudados, mas, se as atividades pedagógicas se restringirem apenas a esses (ou outros) casos práticos, sem a construção de generalizações matemáticas, a aprendizagem pode ser prejudicada.

Entretanto, de acordo com Tall (2013), trazer à realidade essas ideias não é uma tarefa simples, uma vez que os professores, como todos os seres humanos, são criaturas sociais e tendem a repetir para os seus alunos as concepções e os métodos com os quais conviveram, enquanto estudantes, tanto de nível básico, quanto superior. Seus já-encontrados, forjados a partir de grandes conflitos cognitivos, uma vez que, em grande parte, foram submetidos a um ensino formal e baseado, prioritariamente, em repetições de manipulações algébricas mecânicas, são levados a sucessivas gerações, sendo aprendidos e, muitas vezes, temidos como já-encontrados que devem ser seriamente evitados. Assim, como consequência, o propósito das aulas acaba, frequentemente, deixando de ser a potencial compreensão de conceitos para se tornar mera memorização de técnicas e procedimentos repetitivos que são úteis em algumas aplicações e, principalmente, para alcançar a aprovação nas tão temidas avaliações.

2.4 ESTADO DO CONHECIMENTO

De acordo com Morosini (2015), a sistematização e a análise do que foi produzido no campo disciplinar do pesquisador, em especial no seu país, são essenciais para fundamentar o que será produzido numa tese qualificada, uma vez que, segundo Quivy e Campenhoudt (2005), todo trabalho investigativo se inscreve em um *continuum* e pode ser situado em correntes que

o antecedem e o influenciam. Nesse sentido, os autores afirmam que é natural que um investigador tome conhecimento de trabalhos precedentes que se concentram em objetos comparáveis, explicando o que aproxima e o que distingue seu trabalho dos anteriores.

Nesse contexto, Lovitts (2007) afirma que os três principais propósitos de uma tese são: demonstração de habilidades de pesquisa pelo estudante, desenvolvimento dessas habilidades e a realização de uma contribuição ao conhecimento de uma determinada área. Para a caracterização de contribuição ao conhecimento da área, surge a importância da realização de um estudo do tipo estado do conhecimento, que conforme afirma Morosini (2015, p. 102), trata “da identificação, registro e categorização que levam à reflexão sobre a produção científica de uma determinada área, em um determinado espaço de tempo [...]”.

2.4.1 Perspectivas Metodológicas do Estado do Conhecimento

De acordo com Morosini e Nascimento (2017), a primeira etapa de construção de uma pesquisa denominada estado do conhecimento é constituída pela seleção do *corpus* de análise, que se caracteriza pela busca de trabalhos científicos que se enquadrem no tema proposto. Essa pode ocorrer no banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), em repositórios dos bancos de teses e dissertações de Universidades e em periódicos na área de Educação. A busca também pode ser complementada na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (IBICT).

Para sistematizar a busca por trabalhos mais relevantes que tratam sobre os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral sob a ótica dos Três Mundos da Matemática, inicialmente foi escolhida a base onde os dados foram buscados. A opção recaiu sobre Catálogo de Teses e Dissertações da Capes. Na sequência, conforme sugere Morosini (2015), foram definidos os descritores, ou seja, palavras-chave que designam o tema e que foram utilizadas para nortear as buscas realizadas.

A ação de busca pelos trabalhos aconteceu no ano de 2018, utilizando como descritores as expressões “Cálculo” e “Três Mundos da Matemática”, sem o estabelecimento de restrição temporal alguma. Nessa pesquisa foram encontrados oito resultados, sendo três dissertações de mestrado acadêmico, uma dissertação de mestrado profissionalizante e quatro teses de doutorado. A dissertação de mestrado profissionalizante não estava disponível no catálogo da Capes, portanto foi buscada diretamente no repositório da sua instituição acadêmica de origem. Dos oito resultados encontrados, dois não atendiam à busca: o primeiro, pois trata sobre os Três Mundos da Matemática no contexto da equivalência de números racionais na representação

fracionária, conteúdo normalmente trabalhado no Ensino Fundamental; e o segundo, pois se refere a um estado da arte das pesquisas acadêmicas sobre modelagem matemática e foi indicado como resultado da busca por ter seu resumo trocado, ou seja, o resumo cadastrado para esse trabalho é o de uma outra pesquisa, também retornada na busca.

Para complementar a pesquisa por trabalhos, também foi realizada busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações. Essa retornou apenas três resultados, sendo que todos já haviam sido contemplados anteriormente.

Com o *corpus* de análise constituído, foi realizada a leitura inicial dos textos selecionados. Essa leitura, segundo Morosini e Nascimento (2017), visa a permitir que os trabalhos sejam organizados em três etapas: bibliografia anotada; bibliografia sistematizada; e bibliografia categorizada.

Inicialmente, foram lidas as páginas iniciais de cada pesquisa selecionada. Esse trabalho permitiu a construção do que as autoras denominam de bibliografia anotada, que consiste no tabelamento das produções escolhidas de acordo com as suas referências bibliográficas completas e os seus respectivos resumos.

A bibliografia sistematizada, que é a relação dos trabalhos selecionados a partir de aspectos considerados relevantes, foi realizada tendo como base uma leitura mais detalhada dos textos. Morosini e Nascimento (2017) citam os itens que consideram que devem ser utilizados para a sistematização, entretanto, salientam que esses podem ser alterados de acordo com o objetivo da pesquisa em andamento. Para efetuar o registro das produções encontradas, foi criada, então, uma ficha na qual foram destacados os seguintes dados: autor, título, data, orientador, objetivos, metodologia, conceitos do cálculo abordados e resultados.

A etapa seguinte é denominada de bibliografia categorizada e constitui-se em uma reorganização da bibliografia sistematizada segundo blocos temáticos de pesquisas com focos convergentes. Essa construção, que exige “compreensão das leituras e impregnação aprofundada na análise” (MOROSINI; NASCIMENTO, 2017) tem como base os conhecimentos prévios do pesquisador, ou seja, diferentes sentidos surgem de acordo com quem estuda o material da pesquisa.

Nesse contexto, os trabalhos analisados foram codificados pelas siglas MA, para dissertações de mestrados acadêmicos, MP, para dissertações de mestrados profissionais, e D, para teses de doutorado, seguidas por números escolhidos de acordo com a ordem em que foram acessados, conforme observa-se na Figura 16. Esses códigos irão acompanhar e identificar as produções no decorrer da análise.

Figura 16 – Codificação dos trabalhos analisados.

Código	Título	Autor
MA1	Uma Proposta de Ensino para o Conceito de Derivada.	Douglas Paes Mação
D1	Aprendizagem da Derivada: uma perspectiva de análise pelos fluxos de pensamento.	Jayme do Carmo Macedo Leme
MA2	O Conceito de Limite na Formação Inicial de Professores de Matemática: um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática.	Gabriel de Oliveira Soares
D2	Material para o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral: referências de Tall, Gueudet e Trouche.	Marcio Vieira de Almeida
MP1	Convergência de Sequências e Séries Numéricas no Cálculo: um trabalho visando a corporificação de conceitos.	Daila Silva Seabra de Moura Fonseca
D3	Aspectos Cognitivos e Conceituais Mobilizados na Resolução de Problemas de Otimização por Estudantes de Engenharia.	Rodrigo Rodrigues Dias

Fonte: A pesquisa.

Todas as pesquisas estudadas se debruçam sobre o ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, tendo como fundamentação teórica (em alguns casos em conjunto com outras) a teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por Tall (2004; 2013). Entretanto, esse quadro teórico foi utilizado de diferentes formas para abordar conceitos diversos dessa disciplina em vários contextos. Utilizando essa distinção como critério, foram criadas categorias nas quais os trabalhos foram agrupados, de acordo com a Figura 17, descrita na sequência.

Figura 17 – Categorização dos trabalhos analisados.

Categoria	Código	Ano	Curso Foco da Pesquisa
a. Limites.	MA2	2018	Licenciatura em Matemática
b. Derivadas.	MA1	2014	Engenharias
	D1	2016	Engenharias
	D3	2017	Engenharias
c. Sequências e Séries Numéricas.	MP1	2012	Engenharias
d. Continuidade, Diferenciabilidade, Integral, Equação Diferencial e Limite de Sequências Numéricas.	D2	2017	Não informado.

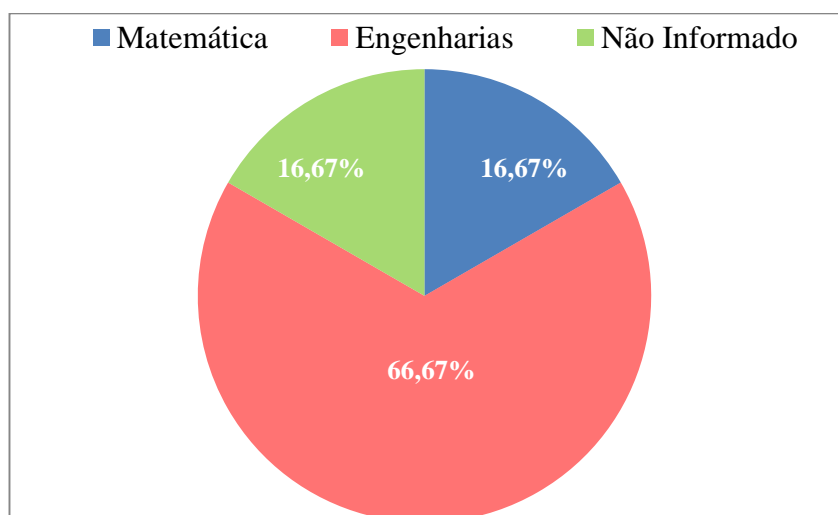
Fonte: A pesquisa.

A partir dessa categorização, foi possível estudar os trabalhos que constituem o *corpus* de análise desse estado do conhecimento para buscar responder à seguinte questão: de que forma as pesquisas brasileiras, oriundas de programas *stricto sensu*, tem utilizado a teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall, para contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral?

2.4.2 Apresentação e Análise dos Resultados

Inicialmente, conforme descrito na Figura 18, percebeu-se que as pesquisas se concentram no ensino e aprendizagem de disciplinas de Cálculo com foco em cursos de engenharia. Nesse sentido, constatou-se que quatro dos seis trabalhos selecionados se destinaram a esses cursos, enquanto apenas um deles teve como foco o curso de Licenciatura em Matemática.

Figura 18 – Distribuição Relativa das Pesquisas Quanto ao Curso Foco.



Fonte: A pesquisa.

Essa questão reflete diretamente o contexto profissional dos pesquisadores envolvidos nessas pesquisas, uma vez que os estudos tiveram como objetivo contribuir para a prática docente nos cursos com os quais trabalhavam enquanto construía suas investigações. A única pesquisa que não está claramente vinculada ao ensino e aprendizagem voltado para um curso específico é a de Almeida (2017), pois, segundo o autor, essa foi realizada para aprofundar os conhecimentos construídos durante o seu mestrado, que se iniciou quando ainda não tinha experiência significativa na docência.

A pesquisa que se concentrou no curso de Licenciatura em Matemática foi realizada por Soares (2018), e teve como cerne a construção do conceito de limite por estudantes de dois

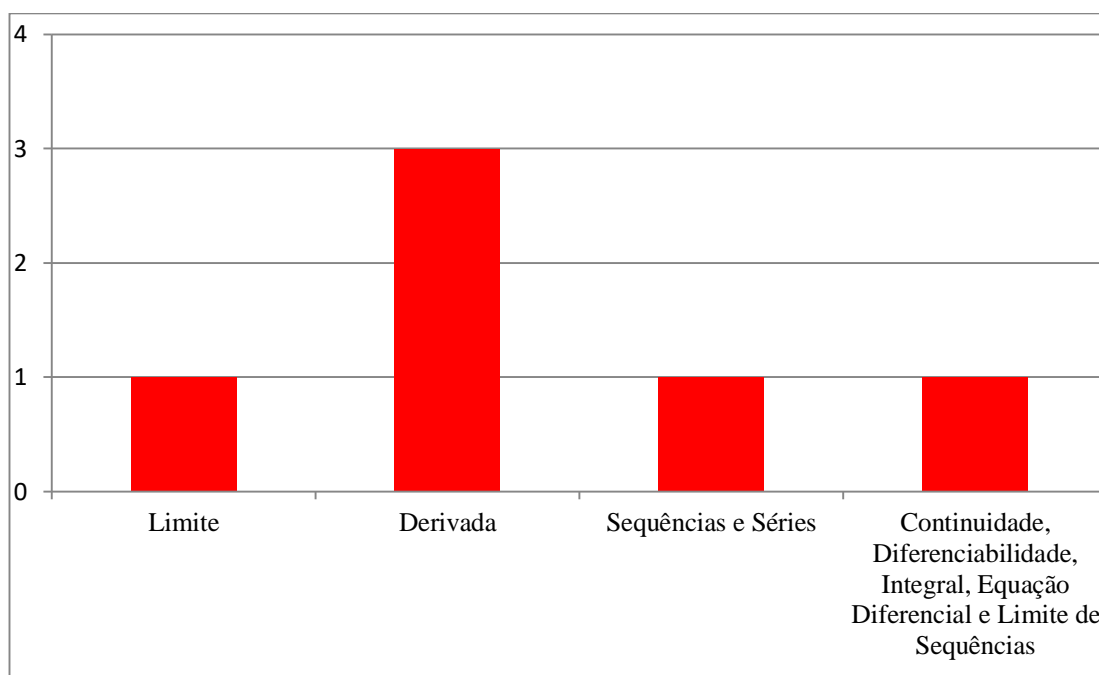
cursos de formação de professores de Matemática. O trabalho teve como objetivos: verificar quais características dos Três Mundos da Matemática estão presentes na introdução do conceito de limite em livros didáticos; investigar como ocorre o trabalho de professores de Cálculo de dois cursos de Licenciatura em Matemática, utilizando os livros didáticos citados; analisar como os alunos desses cursos expressam a compreensão do conceito de limite, no contexto dos Três Mundos da Matemática; e relacionar o quadro teórico com as estratégias de resolução utilizadas pelos estudantes em questões sobre limites.

Nos resultados da sua investigação, Soares (2018) apontou que a maior parte dos livros didáticos estudados prioriza características dos mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico na abordagem do conceito de limite. Já os exercícios trazidos nesses materiais, em grande parte, são resolvidos mecanicamente, através de algoritmos.

Com relação ao trabalho docente, o autor salienta que, nos dois cursos, há uma preocupação de que haja uma articulação entre os conceitos trabalhados no Cálculo e aqueles vistos no Ensino Básico. Para tanto, ocorre uma articulação entre os livros e diferentes materiais, com vistas à construção do conhecimento dos futuros professores. No que diz respeito à compreensão dos alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática sobre o conceito de limite, Soares (2018) afirma que em apenas uma questão proposta obteve-se resposta de todos. Esse fato ocorreu justamente na situação em que se solicitava apenas o cálculo de um limite, o que pôde ser feito por meio de manipulações algébricas elementares. O pesquisador ressalta também que, em nenhum momento, puderam ser evidenciadas características do Mundo Formal Axiomático na interação com os estudantes.

Outra característica importante que diferencia entre si os trabalhos constituintes desse *corpus* de análise é o conceito principal do Cálculo abordado na pesquisa. Nesse contexto, de acordo com a Figura 19, um estudo se concentrou no conceito de limite (SOARES, 2018), três focaram no conceito de derivada (MAÇÃO, 2014; LEME, 2016; DIAS, 2017), um em sequências e séries numéricas (FONSECA, 2012) e um nos conceitos de Continuidade, Diferenciabilidade, Integral, Equação Diferencial e Limite de Sequências Numéricas (ALMEIDA, 2017).

Figura 19 – Pesquisas em Função do Conceito Matemático Estudado.



Fonte: A pesquisa.

O único trabalho que abordou o conceito de integral, foco da presente tese, foi o apresentado por Almeida (2017). O autor teve como objetivo elaborar material didático para o ensino de diversos conceitos vinculados ao Cálculo, buscando promover a integração entre teoria e prática. Para tanto, apoiou-se na ideia de Gênese Documental¹⁰⁰, elaborada por Gueudet e Trouche (2009) e nos constructos teóricos de Tall (1986; 1993; 1994; 2004; 2013) sobre a utilização do computador no ensino e aprendizagem de Matemática, os Organizadores Genéricos e Raízes Cognitivas e os Três Mundos da Matemática.

Na sua tese, Almeida (2017) afirma que é necessário que um material de ensino tenha respaldo em uma estratégia didático-pedagógica e é possível que esse não atinja seus objetivos de maneira autônoma, fazendo-se necessária, portanto, a participação do professor como agente organizador da atividade. De acordo com o pesquisador, essas crenças são corroboradas pelo quadro teórico apresentado, pois a Teoria de Gênese Documental traz indicações de cunho didático, visando a organização do material, e as ideias de Tall, de caráter cognitivista, são utilizadas para nortear o desenvolvimento das atividades.

São elaboradas pelo autor, então, atividades para o ensino e aprendizagem dos conceitos de Continuidade, Diferenciabilidade, Integral, Equação Diferencial e Limite de

¹⁰⁰ Teoria que toma como ponto inicial o trabalho de documentação elaborado pelo docente na preparação das suas aulas, considerando essa documentação como o âmago das atividades desenvolvidas e do seu crescimento profissional (ALMEIDA, 2017).

Sequências Numéricas, considerando três componentes: matemática, didática e material. Para a componente material foram utilizados *applets*¹⁰¹ ou ferramentas construídas no *software* GeoGebra.

Após apresentar e detalhar as atividades propostas, nas suas considerações sobre o trabalho realizado, Almeida (2017) ressalta que uma forma de viabilizar a pretendida integração entre teoria e prática é concebida pela aproximação entre professores e pesquisadores. Segundo o autor, tentou-se realizar essa tarefa por meio da construção de materiais de ensino, baseada em constructos teóricos, e destacando a necessidade da utilização das novas tecnologias, considerando o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Nesse contexto, o trabalho é concluído ratificando a validade de se incorporar conceitos teóricos, de natureza cognitiva, no desenvolvimento de materiais para o ensino de Cálculo. Segundo Almeida (2017), é dessa forma que essas teorias podem ser incorporadas no repertório de recursos de um professor e compor um dos elementos da sua prática docente.

O conceito do Cálculo mais abordado nas pesquisas foi o de derivada, que esteve presente em 50% dos trabalhos analisados. A dissertação de Mação (2014) e a tese de Leme (2016) se concentram em aspectos que podem contribuir para a construção, por parte dos alunos, desse conceito. Já Dias (2017) trata da ideia de derivada no contexto da resolução de problemas de otimização.

Mação (2014), em seu trabalho de cunho teórico, tem por objetivo apresentar abordagens para o conceito de derivada, através da elaboração de atividades menos dependentes do professor, promovendo, portanto, mais autonomia nos estudantes. Para tanto escolhe três das sete abordagens propostas por Thurston (1994), a saber: geométrica, taxa e aproximação. A partir dessa teoria e das ideias dos Três Mundos da Matemática, o autor propõe três abordagens iniciais para o conceito de derivada buscando inserir o sujeito na construção do seu conhecimento e proporcionar a sua interação com características formais, simbólicas e corporificadas nesse processo.

Leme (2016), na sua investigação também teórica, busca identificar e compreender os diferentes fluxos de pensamento envolvidos na aprendizagem do conceito de derivada, tendo por base a teoria dos Três Mundos da Matemática. Segundo o autor, sua finalidade é identificar meios que potencializem a compreensão desse conceito matemático.

¹⁰¹ Pequenos *softwares* que executam atividades específicas no contexto de um *software* mais abrangente.

Baseando-se, então, nas ideias de Tall (2004; 2013), Leme (2016) propõe nove fluxos de pensamento, que foram exemplificados utilizando o conceito de extremos locais. Segundo o autor, as atividades elaboradas ativam diferentes características referentes à aprendizagem de objetos matemáticos, destacando elementos dos diferentes mundos e os possíveis fluxos de pensamento que podem ocorrer entre eles.

Na sua tese, Dias (2017) trabalha com o conceito de derivada no contexto no qual busca apontar quais aspectos cognitivos e conceituais são mobilizados por estudantes de engenharia na resolução de problemas de otimização. Nesse sentido, a pesquisa foi dividida em cinco etapas: levantamento bibliográfico; entrevistas; elaboração e implementação de atividades; análise parcial; e análise final. A investigação foi baseada nas teorias dos Registros de Representação Semiótica, de Duval (2009; 2011), do Pensamento Matemático Avançado, de Tall (1991) e Dreyfus (1991), e dos Três Mundos da Matemática, de Tall (2004; 2013). A partir da análise do resultado do seu estudo, Dias (2017) destaca a relevância da construção de atividades que instiguem o espírito investigativo dos estudantes, as vantagens da utilização de recursos computacionais e a importância da utilização de recursos manipulativos, como agentes catalisadores dos processos de visualização, modelagem e generalização.

2.4.3 Considerações sobre o Estado do Conhecimento

O levantamento realizado nesse estado do conhecimento mostra que ainda não há uma grande quantidade de pesquisas *stricto sensu* relacionando o Cálculo Diferencial e Integral com a teoria dos Três Mundos da Matemática. Também se pode constatar que as existentes são recentes, começando pelo ano de 2012. Entretanto, dada a visibilidade do aporte teórico proposto por David Tall, caracterizada principalmente pela publicação do seu livro *How Humans Learn to Think Mathematically: exploring the three worlds of mathematics*, em 2013, a quantidade desse tipo de produção vem crescendo nos últimos anos e pode se constituir em fonte de consulta para práticas pedagógicas de professores e para revisão de literatura para pesquisadores de Programas de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática.

Um dos principais pontos levantados nessa investigação é a forma como essa teoria vem sendo utilizada pelos pesquisadores. A maior parte dos trabalhos analisados se concentra na elaboração de propostas de ensino para os conceitos de Cálculo, a partir da teoria dos Três Mundos da Matemática, destacando, em alguns casos, a relevância das novas tecnologias para o sucesso dessas abordagens.

Nesse contexto, a construção desse estado do conhecimento, tendo como cerne a utilização da teoria dos Três Mundos da Matemática no desenvolvimento do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, possibilitou uma imersão no tema a partir da análise dos trabalhos selecionados para compor o *corpus* de análise. Para tanto, as pesquisas foram estudadas conforme os conceitos abordados e também de acordo com o curso no qual focam seus esforços.

Notou-se, então, que há apenas uma pesquisa envolvendo o Curso de Licenciatura em Matemática, abordando o conceito de Limite. Da mesma forma, foi possível observar que há apenas um estudo tratando do conceito de Integral, em uma tese que também trata dos conceitos de Continuidade, Diferenciabilidade, Equação Diferencial e Limite de Sequências Numéricas.

Nesse sentido, a ausência de trabalhos *stricto sensu*, no *corpus* de análise sugerido, abordando o conceito de Integral, no contexto do Curso de Licenciatura em Matemática, sob a ótica da teoria dos Três Mundos da Matemática, aponta uma direção que ainda pode ser explorada na presente pesquisa, caracterizando o ineditismo requerido em um trabalho em nível de doutorado.

3. METODOLOGIA

Nesse capítulo são apresentados os processos desenvolvidos nessa investigação, descrevendo os caminhos percorridos para buscar responder às inquietações que geraram o interesse pelo tema proposto. Nesse sentido, de acordo com Deslandes (2002), a pesquisa científica transcende o senso comum por meio do método científico, que é o que permite a reconstrução da realidade enquanto objeto de conhecimento, unindo, dialeticamente, o teórico e o empírico. Nesse sentido, Severino (2007, p. 102) acrescenta que:

A ciência utiliza-se de um método que lhe é próprio, o método científico, elemento fundamental do processo do conhecimento realizado pela ciência para diferenciá-la não só do senso comum, mas também das demais modalidades de expressão da subjetividade humana, como a filosofia, a arte [...].

Conforme destaca Minayo (2002, p. 16), entende-se por metodologia “o caminho do pensamento e a prática exercida na abordagem da realidade”. De acordo com a socióloga, a metodologia também inclui as concepções teóricas de abordagem, o conjunto de técnicas que viabilizam a construção da realidade e o potencial criativo do pesquisador.

A partir dessa concepção de metodologia, das questões e dos objetivos de pesquisa elencados anteriormente nesta tese, escolheu-se a abordagem qualitativa para o percurso dessa investigação, que, de acordo com o que argumenta Borba (2004), caracteriza a preferência por procedimentos descritivos, à medida que a interpretação trazida admite, de forma explícita, interferência subjetiva, entendendo o conhecimento como uma compreensão contingente, negociada, e não como uma verdade absoluta. Nesse sentido, Minayo (2002) afirma que a pesquisa qualitativa trabalha com um universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que leva a um conjunto mais profundo de relações construídas entre os processos e os fenômenos, que não é perceptível e captável quantitativamente, por equações, médias e outros recursos estatísticos. No que diz respeito à normatização em uma investigação de cunho qualitativo, Garnica (2001) ressalta que esse viés se constitui em:

[...] um meio fluido, vibrante, vivo e, portanto, impossível de prender-se por parâmetros fixos, similares à legislação, às normas, às ações formalmente pré-fixadas. Em abordagens qualitativas de pesquisa, não há modelos fixos, não há normatização absoluta, não há a segurança estática dos tratamentos numéricos, do suporte rigidamente exato. (p. 42).

Dessa forma, Minayo (2002) destaca que nada substitui a criatividade do pesquisador e que a supervalorização de técnicas resulta em um formalismo árido, ou em respostas estereotipadas. Ressalta, contudo, que o completo desprezo aos métodos acaba levando a um

empirismo, que pode ser ilusório em suas conclusões ou a especulações, normalmente abstratas e muitas vezes estéreis.

Nesse contexto, esta pesquisa iniciou-se com um estudo documental ou bibliográfico sobre a construção histórica do Cálculo Diferencial e Integral. Esse processo, em conformidade com o que apontam Fiorentini e Lorenzato (2012), foi realizado a partir de análises históricas e revisão de estudos, tendo como material de trabalho referenciais publicados em documentos escritos, como livros, artigos científicos e anais de eventos, entre outros.

Em um segundo momento, foram investigadas as ideias propostas por David Tall, na teoria dos Três Mundos da Matemática, a partir da leitura e interpretação do seu livro, *How Humans Learn to Think Mathematically: exploring the three worlds of mathematics*, e de diversos artigos publicados pelo autor, de forma isolada ou em conjunto com outros estudiosos, que estão disponíveis na sua página pessoal¹⁰². O objetivo dessa etapa da pesquisa foi buscar vincular as concepções de David Tall com os conteúdos estudados nas disciplinas de Cálculo e, de forma mais específica, com o ensino e aprendizagem do conceito de integral.

Posteriormente, buscou-se identificar quais são os livros didáticos mais indicados nas referências básicas das disciplinas que trabalham com o conceito de integral, em cursos de Licenciatura em Matemática, no Estado do Rio Grande do Sul. A partir dessa busca, investigou-se que características dos Três Mundos da Matemática são exploradas na construção do conceito de integral nessas obras.

3.1 ESTUDO DE CASO

Dessa forma, passou-se para um estudo de caso, que, de acordo com Yin (2001), caracteriza-se como uma investigação prática sobre um fenômeno contemporâneo, inserido em um contexto real e delimitado por características específicas. Complementando, Ponte (2006) descreve o estudo de caso como uma pesquisa que se assume particular, que se debruça sobre uma situação que se supõe ser única, em muitos aspectos, buscando descobrir o que há de mais essencial nessa conjuntura, para, desse modo, contribuir para uma compreensão mais global do fenômeno.

Assume-se, portanto, um raciocínio indutivo, no qual, conforme argumenta Severino (2007), o cientista procura passar de um caso particular, considerado representativo e

¹⁰² <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/>

significativo, para a construção de inferências capazes de contribuir para uma possível generalização, que se aplique a situações análogas. Nesse sentido,

Na Educação Matemática, os estudos de caso têm sido usados para investigar questões de aprendizagem dos alunos bem como do conhecimento e das práticas profissionais de professores, programas de formação inicial e continuada de professores, projetos de inovação curricular, novos currículos, etc. (PONTE, 2006, p. 3).

Nesse contexto, aplicou-se, junto a uma turma da disciplina de Cálculo II, uma abordagem diferente daquelas propostas nos livros didáticos para a introdução do estudo do conceito de integral. A turma era formada por sete discentes¹⁰³, do terceiro semestre de um curso de Licenciatura em Matemática, de uma instituição de ensino do Estado do Rio Grande do Sul, sendo três do sexo feminino e quatro do masculino, com idades variando entre 21 e 38 anos. Assim, foi realizada com a turma, em dois encontros, uma atividade de Modelação, fundamentada na teoria dos Três Mundos da Matemática e em aspectos históricos da Construção do Cálculo.

Buscando-se, então, de acordo com Ponte (2006), tirar partido das fontes e evidências desse cenário, os acadêmicos responderam a um questionário. Nesse sentido, o questionário foi construído e utilizado a partir da definição de Severino (2007, p. 125) que o descreve como um “conjunto de questões, sistematicamente articuladas, que se destinam a levantar informações escritas por parte dos sujeitos pesquisados, com vistas a conhecer a opinião dos mesmos sobre os assuntos em estudo”.

Com os dados coletados e registrados, procurou-se, conforme argumentam Pimenta e Ferreira (2010), compreender melhor o problema pesquisado e, assim, construir conclusões, descrições e generalizações. Com esse intento, foram criados pelo pesquisador textos descritivos e interpretativos, com o objetivo de contar uma história que, segundo a visão de Ponte (2006), acrescente algo ao conhecimento existente e seja, de alguma forma, interessante e iluminativa.

Esses textos foram desenvolvidos a partir da interpretação das respostas dissertativas dos estudantes às duas questões seguintes, propostas ao final das duas aulas utilizadas para a introdução ao estudo do conceito de integral: *o que você pensa sobre o uso de experiências que requerem observação, descrição, ação e reflexão no estudo de Matemática?; você acredita que*

¹⁰³ Destaca-se que o número reduzido de sujeitos deve-se ao contexto de isolamento social imposto desde o mês de março de 2020. Esse cenário impossibilitou a aplicação da prática junto a mais turmas e, conseqüentemente, mais acadêmicos.

atividades de Modelação, como a que foi realizada em aula, são importantes para a Educação Matemática?

Os sete alunos responderam aos dois questionamentos, trazendo suas ideias e argumentos sobre o tema abordado. Dessa forma, suas narrativas foram estudadas para essa investigação à luz da Análise Textual Discursiva (ATD), conforme propõem Moraes e Galiuzzi (2016), que a definem como um método qualitativo de análise de informações que visa a produção de novas compreensões sobre fenômenos e discursos.

3.1.1 Análise Textual Discursiva

De acordo com o que apontam Souza e Galiuzzi (2018), com o uso da ATD nessa investigação, procurou-se desprender-se do reducionismo epistêmico, caracterizado pelo usual esquema sujeito-objeto, ainda presente nas pesquisas envolvendo as ciências naturais. Nessa perspectiva, seguindo os passos sugeridos por Moraes (2003), ideias foram construídas por meio de uma sequência recursiva, composta por três momentos, inicialmente ordenados, conforme ilustra o esquema apresentado na Figura 20.

Iniciou-se, portanto, pela unitarização, que se constituiu na desconstrução dos textos analisados, de forma que, de acordo com Moraes e Galiuzzi (2016), breves fragmentos receberam títulos representantes do tema central de cada trecho. Nessa etapa, interpretações pessoais foram assumidas pelo pesquisador, o que, conforme ressaltam os autores, caracteriza o passo inicial rumo à autoria própria.

Figura 20 – Os três momentos da ATD.



Fonte: Adaptado de Bueno, Ballejo e Viali (2020).

Passou-se, então, para categorização, na qual, de acordo com Paula, Menezes e Guimarães (2015), buscou-se definir e classificar as categorias emergentes, que surgiram das unidades de sentido. Conforme preconizam Moraes e Galiuzzi (2016), essa construção implicou

em um processo de comparação e contraste entre as unidades de análise, no qual foram organizados conjuntos com elementos semelhantes, como base no referencial teórico dessa investigação, ou seja, na História do Cálculo e na teoria dos Três Mundos da Matemática.

Finalmente, chegou-se à construção dos metatextos, que partiu da descrição de cada categoria estabelecida e passou, então, para uma interpretação ampla, até a criação de argumentos aglutinadores. Conforme destacam Bueno, Ballejo e Viali (2020), cada metatexto foi formado por trechos das narrativas dos acadêmicos, análise e interpretação do pesquisador e teorização fundamentada nas ideias discutidas ao longo da pesquisa. Nesse sentido, Paula, Menezes e Guimarães (2015, p. 31) destacam que:

A interpretação que advém da relação entre as categorias é múltipla, podendo ser atribuídos os mais variados e diferentes significados nessa interpretação. O que faz com que o pesquisador opte por determinadas relações é decorrente do objetivo da pesquisa e do aporte teórico que está sendo utilizado.

Nesse contexto, percebe-se que a ATD exige teoria, mas a teoria demandada nesse processo precisa se mostrar em movimento epistêmico com o próprio pesquisador. Sendo assim, as categorias emergentes surgiram como uma compreensão construída durante a análise, a partir das perspectivas do investigador, entendido como um sujeito histórico e que, portanto, parte das suas pré-concepções para alcançar ideias até então desconhecidas (SOUZA, GALIAZZI, 2018).

Nessa investigação, o percurso traçado pela ATD resultou em três categorias emergentes, que funcionam como pontes de compreensão sobre o fenômeno pesquisado. Dessa forma, três metatextos foram elaborados e expressam, portanto, uma compreensão sobre os significados e sentidos construídos ao longo da leitura dos argumentos dos sujeitos dessa pesquisa, futuros professores de Matemática (MORAES; GALIAZZI, 2016).

4. OS LIVROS DIDÁTICOS, O CONCEITO DE INTEGRAL E OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

Neste capítulo, à luz do quadro teórico abordado, são trazidas as análises dos três livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral mais citados como referências básicas nos cursos de Licenciatura em Matemática de instituições de ensino superior (IES) do Estado do Rio Grande do Sul. Nesse sentido, busca-se compreender as propostas que os seus autores empregam no processo de construção do conceito de integral. Parte-se da premissa de que entender o que vem sendo feito pode contribuir para o desenvolvimento de uma nova abordagem inicial para o conceito, podendo essa se constituir em uma alternativa e pedagogicamente válida.

Para verificar em que disciplina de cada curso de Licenciatura em Matemática do Estado do Rio Grande do Sul o conceito de integral é introduzido e que livros são indicados nas suas referências básicas, primeiramente foi feito um levantamento das IES gaúchas que oferecem esse curso. A seguir, foi realizado o estudo dos seus Projetos Pedagógicos de Curso (PPC). Essas etapas investigativas foram realizadas, inicialmente, em março de 2019, e complementadas em abril de 2020.

Em grande parte, as informações necessárias para esse estudo estavam disponíveis nos *sites* das IES, mas, em alguns casos, foi necessário entrar em contato com os coordenadores de curso, por e-mail, para se ter acesso às ementas das disciplinas que trabalham com a construção do conceito de integral. Entretanto, mesmo após o envio de e-mail e contato telefônico, algumas informações não foram obtidas. Fazem parte dessa investigação, portanto, 13 Instituições de Ensino Superior, conforme o Quadro 2.

Elencadas as disciplinas que trabalham com a construção do conceito de integral nos cursos de Licenciatura em Matemática das instituições estudadas, foram investigadas as suas ementas, a fim de verificar as bibliografias básicas recomendadas. Nesse sentido, 15 obras diferentes sobre o Cálculo Diferencial e Integral foram citadas, sendo que três delas destacaram-se como as mais frequentes¹⁰⁴. Os livros mais recorrentes foram identificados, portanto, para essa investigação pelas siglas L1, L2 e L3, de acordo com o que se apresenta no Quadro 1.

¹⁰⁴ Ressalta-se que, em alguns casos, as edições desses livros são distintas nas referências. Nessa pesquisa, optou-se, portanto, por considerá-las todas como sendo a mesma obra.

Quadro 1 – Livros mais citados nas referências básicas.

Sigla	Referência
L1	STEWART, J. Cálculo . v. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
L2	ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. Cálculo . v. 1. Porto Alegre: Bookman, 2007.
L3	LEITHOLD, L. Cálculo com Geometria Analítica . São Paulo: Harbra, 1994.

Fonte: A pesquisa.

O Quadro 2 identifica a recorrência dos livros indicados no Quadro 1 nas referências das ementas das disciplinas analisadas. Pode-se perceber, portanto, que nove instituições adotam L1, seis adotam L2 e cinco adotam L3.

Quadro 2 – Frequência dos livros analisados em cursos de Licenciatura em Matemática no Estado do Rio Grande do Sul

Instituição de Ensino Superior	Sigla	L1	L2	L3
Centro Universitário Franciscano	UNIFRA	X		
Faculdades Integradas de Taquara	FACCAT			
Instituto Federal Farroupilha	IFFar		X	
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul	PUCRS	X	X	
Universidade Federal do Pampa	UNIPAMPA	X		X
Universidade Federal de Pelotas	UFPeI	X		X
Universidade Federal do Rio Grande	FURG		X	X
Universidade Federal do Rio Grande do Sul	UFRGS	X	X	
Universidade Federal de Santa Maria	UFSM	X	X	
Universidade de Passo Fundo	UPF	X	X	X
Universidade de Santa Cruz do Sul	UNISC	X		
Universidade Luterana do Brasil	ULBRA	X		
Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões	URI			X

Fonte: A pesquisa.

Nesse contexto, foi realizada a análise dos livros didáticos destacados, buscando-se, em cada caso, identificar quais já-encontrados são abordados, para caracterizar quais pré-requisitos os autores invocam, e que características da teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall, emergem na introdução do estudo do conceito de integral. Além disso, são analisados os exercícios propostos em cada obra, com o objetivo de verificar que estratégias

são necessárias para a sua resolução e como essas estão relacionadas com os mundos: Corporificado, Simbólico e Formal. Acredita-se que, com essa investigação, é possível evidenciar, a partir das propostas dos autores, as habilidades e competências que os estudantes podem construir com o auxílio dessas obras, ao longo de sua formação como futuros docentes. Dessa forma, inspirando-se em Soares (2018) e Mação (2014), a análise divide-se em duas etapas distintas: análise da introdução do conceito de integral e análise dos exercícios propostos.

1ª ETAPA – ANÁLISE DA INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE INTEGRAL

Nessa etapa, analisa-se o capítulo dedicado à introdução do estudo do conceito de integral, buscando-se entender quais os já-encontrados são abordados nesse processo e que características dos Três Mundos da Matemática são evocadas na prática adotada pelos autores. Para a realização dessa investigação, foram propostas as seguintes questões:

- Como é realizada a introdução do conceito de integral?
- Quais são os já-encontrados necessários para acompanhar o raciocínio proposto?
- Como o conceito de integral é desenvolvido através dos exemplos apresentados?
- Quais características dos Três Mundos da Matemática podem ser desenvolvidas através da abordagem sugerida?

2ª ETAPA – ANÁLISE DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nessa etapa são analisados os exercícios propostos junto ao capítulo de introdução ao estudo do conceito de integral, com o objetivo de identificar os já-encontrados necessários para sua resolução e que características dos Três Mundos da Matemática estão relacionadas com as estratégias utilizadas nesse processo. Dessa forma, são estabelecidas as seguintes questões:

- Quais os objetivos dos exercícios propostos?
- Quais os já-encontrados necessários para a resolução dos exercícios?
- Que características dos Três Mundos da Matemática podem ser relacionadas com as estratégias de resolução que se espera que sejam empregadas na resolução dos exercícios?

Acredita-se que, perpassando cada uma dessas duas etapas e respondendo às questões apresentadas, pode-se construir um panorama sobre a introdução do estudo do conceito de integral, à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática, em cada um dos três livros analisados.

4.1 ANÁLISE DO LIVRO DE STEWART (2014)

Esse livro concentra-se na compreensão de conceitos, enfatizando as apresentações geométrica, numérica, algébrica e verbal ou descritiva dos seus tópicos. A obra é composta pelos seguintes capítulos: 1. Funções e Modelos; 2. Limites e Derivadas; 3. Regras de Derivação; 4. Aplicações de Derivação; 5. Integrais; 6. Aplicações de Integração; 7. Técnicas de Integração; 8. Mais Aplicações de Integração; e Apêndices.

Após a leitura do título de cada capítulo, pode-se perceber que o conceito de integral é estudado após a construção de conhecimentos relativos às funções e aos conceitos de limite e derivada. Essa constatação pode indicar os campos do conhecimento matemático onde, segundo o autor, situam-se os já-encontrados necessários para a introdução ao estudo das integrais, levando-se à inferência de que o estudo desse conceito será feito, conforme destaca Tall (2004), com um olhar vindo de uma esfera matemática “superior”, característica dos matemáticos, mas ainda inexplorada pelos alunos.

1ª ETAPA – ANÁLISE DA INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE INTEGRAL

O estudo da integral, no livro de Stewart (2014), começa com a apresentação de dois problemas: da área sob uma curva e da distância percorrida, dada a velocidade em função do tempo. Na mesma sentença em que são apresentadas as indagações referentes a esses problemas afirma-se que, na tentativa de resolvê-los, acaba-se encontrando um mesmo tipo especial de limite.

Na abordagem da questão relativa à área, parte-se da ideia de que os estudantes têm o conhecimento necessário para encontrar áreas em situações nas quais os lados das figuras envolvidas são retos, como são os casos de retângulos, triângulos ou polígonos em geral. No entanto, destaca-se que a tarefa não é tão simples quando uma região possui lados curvos, pois, nesse caso, mesmo que seja possível se ter uma noção intuitiva sobre a sua área, transformar essa intuição em algo preciso, através de uma definição exata, é uma questão mais sofisticada.

A seguir, são apresentados exemplos nos quais se pretende, segundo o autor, aproximar as regiões das quais se deseja calcular as áreas, utilizando-se retângulos para, então, tomar-se o limite da soma das áreas desses retângulos, à medida que se aumenta o número de retângulos, para o cálculo da área da região. O primeiro desses exemplos encontra-se na Figura 21, destacada na sequência.

Figura 21 - Primeiro exemplo para a construção da área abaixo de uma curva.

EXEMPLO 1 Use retângulos para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 (a região parabólica S ilustrada na Figura 3).

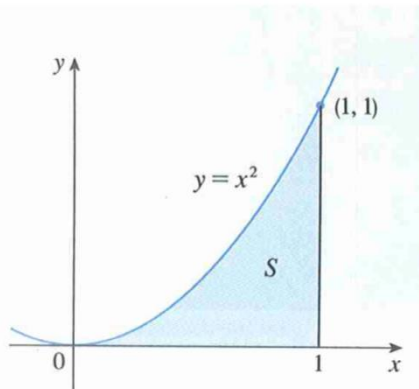


FIGURA 3

SOLUÇÃO Observamos primeiro que a área de S deve estar em algum lugar entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado com lados de comprimento 1, mas certamente podemos fazer melhor que isso. Suponha que S seja dividida em quatro faixas S_1, S_2, S_3 e S_4 , traçando as retas verticais $x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{3}{4}$, como na Figura 4(a).

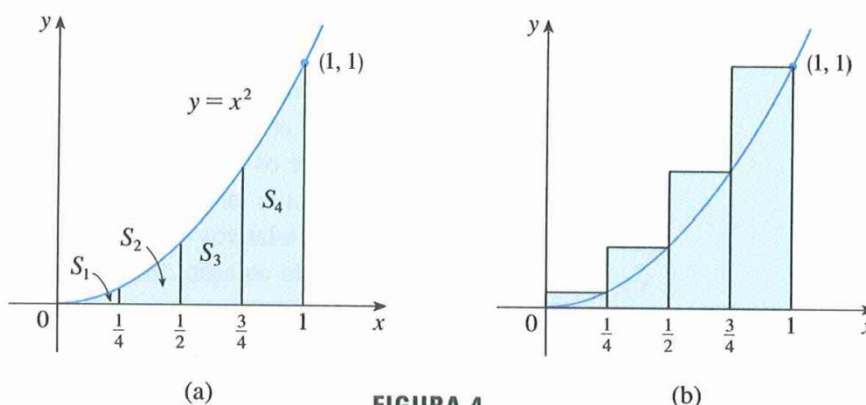


FIGURA 4

Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa [veja a Figura 4(b)]. Em outras palavras, as alturas desses retângulos são os valores da função $f(x) = x^2$ nas extremidades *direitas* dos subintervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ e $[\frac{3}{4}, 1]$.

Fonte: Stewart (2014).

Continuando seu raciocínio, o autor propõe que se aproxime a área em questão com a utilização de retângulos com alturas nas extremidades esquerdas dos quatro subintervalos construídos. Após o cálculo das áreas desses retângulos, afirma que foram encontradas estimativas inferior (soma das áreas dos retângulos com alturas nas extremidades esquerdas) e superior (soma das áreas dos retângulos com alturas nas extremidades direitas) para a área de S .

Na sequência, Stewart (2014) apresenta uma repetição do procedimento, com a divisão da região S em oito retângulos com a mesma largura. Obtém, assim, novas e mais refinadas estimativas inferior e superior para a área buscada. Continuando sua linha de raciocínio, afirma pode-se obter estimativas cada vez melhores, à medida que se aumenta o número de faixas. Conclui o exemplo trazendo uma tabela com os valores das aproximações direitas (R_n) e esquerdas (L_n) encontradas para alguns números crescentes de retângulos e sugerindo que R_n aproxima-se cada vez mais de $1/3$, conforme aumenta-se n .

Para comprovar a conjectura com a qual encerra o primeiro exemplo (de que R_n aproxima-se cada vez mais de $1/3$, conforme aumenta-se n) Stewart (2014) traz o cálculo do limite de R_n , quando n tende a infinito. Finalizada a demonstração, o autor afirma que, de forma análoga, também pode-se provar que as somas aproximantes inferiores tendem igualmente a $1/3$, quando se aumenta n indefinidamente. Com o auxílio da ilustração a seguir, propõe que, conforme n aumenta, tanto L_n quanto R_n se tornam aproximações cada vez melhores da área de S .

Figura 22 - Aumento do número de retângulos para o cálculo do limite.

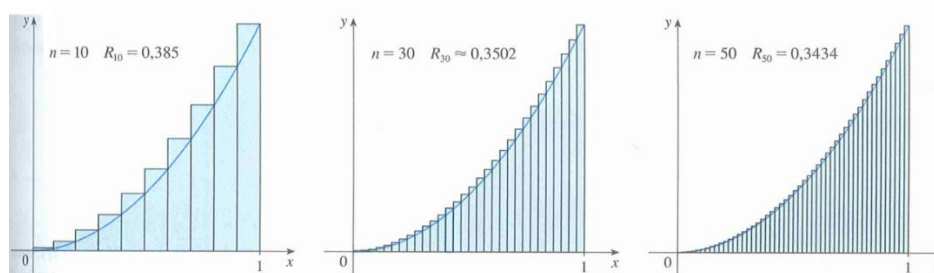


FIGURA 8 As extremidades da direita produzem somas superiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

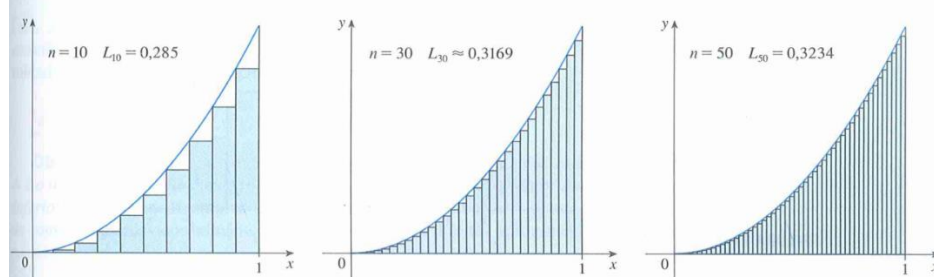


FIGURA 9 As extremidades da esquerda produzem somas inferiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

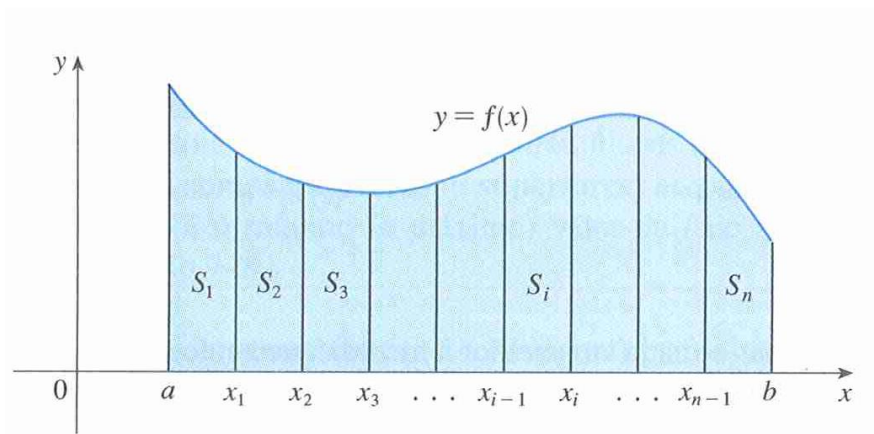
Fonte: Stewart (2014)

O autor define, então, a área A de S como o limite coincidente das somas das áreas desses retângulos aproximantes. Nesse caso, chega-se a $1/3$, ou seja:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{1}{3}$$

Na sequência, o autor passa para o cálculo de área de regiões mais gerais, como é o caso do exemplo a seguir, em que o intervalo é definido entre os números genéricos a e b . Sendo assim, a região S é subdividida em n faixas de larguras iguais a $\Delta x = (b - a)/n$.

Figura 23 - Generalização para o cálculo do limite.



Fonte: Stewart (2014)

Aproximando a i -ésima faixa por um retângulo com largura Δx e altura $f(x_i)$ (extremidade direita), conclui-se que o i -ésimo retângulo tem área igual a $\Delta x \cdot f(x_i)$. Stewart (2014) propõe, então, que é possível considerar, intuitivamente, que a área de S é aproximada pela soma das áreas desses retângulos (R_n). Dessa forma, tem-se, então:

$$R_n = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

Após ilustrar a declaração anterior com exemplos envolvendo 2, 4, 8 e 12 retângulos, Stewart (2014, p. 330) afirma “[...] que essa aproximação parece tornar-se cada vez melhor à medida que aumentamos o número de faixas, isto é, quando $n \rightarrow \infty$ ”. Nesse sentido, define a área A , da região S , que está sob o gráfico de uma função contínua f , como o limite da soma das áreas dos seus retângulos aproximantes pela direita, ou seja:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$$

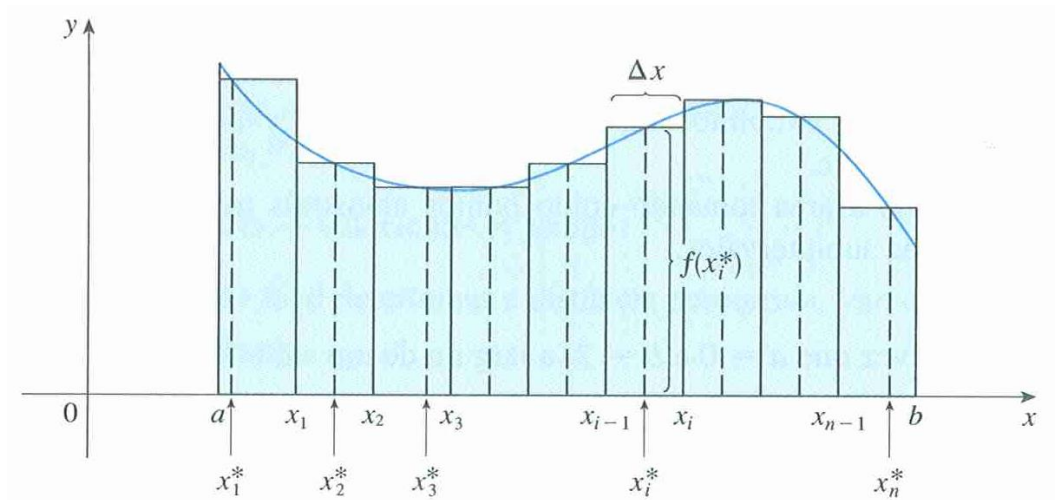
A seguir, o autor informa que pode ser demonstrado que esse limite sempre existe, uma vez que f seja contínua. Ressalta que também pode ser demonstrado que se obtém o mesmo valor se forem consideradas as extremidades esquerdas aproximantes. Dessa forma:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x]$$

O raciocínio em busca da generalização continua e o autor propõe, então, usando a inovação trazida por Riemann, que é possível utilizar a altura do i -ésimo retângulo como sendo

o valor de f em qualquer número x_i^* do i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Essa afirmação é ilustrada pelo autor com o gráfico seguinte:

Figura 24 - Generalização da altura dos retângulos para o cálculo do limite.



Fonte: Stewart (2014)

Nesse contexto, define uma expressão mais geral para a área A da região S , a partir dos pontos amostrais $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$. Assim sendo, tem-se:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1^*) \cdot \Delta x + f(x_2^*) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n^*) \cdot \Delta x] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x$$

Após estabelecer essa expressão geral para o cálculo da área sob a curva, Stewart (2014) traz um exemplo no qual solicita que seja construída uma expressão para encontrar a área A que está abaixo do gráfico de $f(x) = e^{-x}$ e entre $x = 0$ e $x = 2$. Além disso, pede que seja estimada essa área, tomando-se como pontos amostrais os pontos médios e utilizando-se primeiramente 4 e, depois, 10 subintervalos. Para encontrar a expressão solicitada, o autor faz uso, então, de algumas manipulações algébricas elementares, tidas como já-encontrados, para chegar em:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{2i}{n}}$$

No cálculo da estimativa da área, para $n = 4$ e para $n = 10$, o autor resolve os somatórios e chega, então, às seguintes respostas:

$$A \approx \sum_{i=1}^4 f(x_i^*) \cdot 0,5 = 0,8557 \text{ e } A \approx \sum_{i=1}^{10} f(x_i^*) \cdot 0,2 = 0,8632$$

Ilustrando a resolução com os gráficos para ambas as situações, Stewart (2014) conclui que a estimativa para $n = 10$ é melhor que para $n = 4$.

Findado esse exemplo, o autor passa a explorar a outra questão proposta no início do capítulo: descobrir a distância percorrida por um determinado objeto, durante um certo intervalo de tempo, conhecendo-se a velocidade desse objeto em todos os instantes. Ressalta que, se a velocidade for constante, o problema é de fácil solução, indicando um desejável já-encontrado. Entretanto, se a velocidade variar, tem-se uma resolução mais sofisticada, conforme observa-se no exemplo dado.

Figura 25 - Exemplo para o cálculo da distância percorrida.

EXEMPLO 4 Suponha que queiramos estimar a distância percorrida por um carro durante um intervalo de tempo de 30 segundos. A cada 5 segundos registramos a leitura do velocímetro na seguinte tabela:

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (m/s)	7,5	9,4	10,6	12,8	14,2	13,9	12,5

Fonte: Stewart (2014)

Na resolução, o autor propõe uma aproximação utilizando, para cada intervalo, uma velocidade constante. Inicialmente, faz uso daquela lida no momento inicial do intervalo em estudo. Seguindo esse raciocínio, chega à distância percorrida de 342 metros, a partir da seguinte expressão:

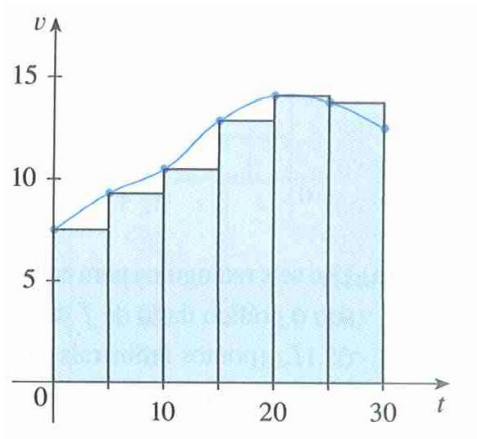
$$7,5 \cdot 5 + 9,4 \cdot 5 + 10,6 \cdot 5 + 12,8 \cdot 5 + 14,2 \cdot 5 + 13,9 \cdot 5 = 342 \text{ m}$$

Analogamente, faz uso da velocidade lida no momento final de cada intervalo, tomando-a como velocidade constante do período considerado. Stewart (2014) chega então à distância de 367 metros.

$$9,4 \cdot 5 + 10,6 \cdot 5 + 12,8 \cdot 5 + 14,2 \cdot 5 + 13,9 \cdot 5 + 12,5 \cdot 5 = 367 \text{ m}$$

O autor aponta, então, que essas soluções lembram as somas utilizadas nos cálculos de aproximações de áreas, estudadas anteriormente. Ressalta, dessa forma, que, de fato, as aproximações das distâncias percorridas podem ser interpretadas como as áreas dos retângulos, tomando-se a altura como a velocidade e a largura como o tempo, conforme destaca no gráfico da Figura 26.

Figura 26 - Relação das áreas dos retângulos com a distância percorrida.



Fonte: Stewart (2014)

De forma geral, o autor afirma que tomando-se $v = f(t)$, com $a \leq t \leq b$ e $f(t) \geq 0$, pode-se registrar as velocidades em tempos igualmente espaçados $\Delta t = (b - a)/n$. Nesse sentido, utilizando-se as velocidades aproximantes nas extremidades esquerdas, obtém-se a seguinte aproximação:

$$f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \dots + f(t_{n-1})\Delta t = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})\Delta t$$

Se forem utilizadas as velocidades nas extremidades direitas, a estimativa da distância percorrida será:

$$f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t + \dots + f(t_n)\Delta t = \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta t$$

Stewart (2014) conclui, então, afirmando que quanto mais frequentemente for medida a velocidade do objeto em movimento, mais precisa será a aproximação obtida. Nesse contexto, destaca que intuitivamente (enquanto informa que em uma seção futura poderá ser visto que isso é realmente verdadeiro) parece razoável que a distância exata d seja o limite dessas expressões.

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})\Delta t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta t$$

Buscando concluir a 1ª etapa da análise do capítulo de introdução do conceito de integral do livro de Stewart (2014), passa-se às respostas dos questionamentos inicialmente propostos para o capítulo.

Como é realizada a introdução do conceito de integral?

É feita a partir de dois problemas concretos (da área abaixo da curva e da velocidade percorrida), explorando, principalmente, a intuição dos estudantes ao fazer uso de visualizações gráficas para a construção de aproximações para as soluções das questões propostas.

Quais são os já-encontrados necessários para acompanhar o raciocínio proposto?

O autor remonta a vários conceitos matemáticos, claramente considerados já-encontrados e que, portanto, são necessários para uma compreensão dos raciocínios propostos ao longo do capítulo. Noções importantes sobre funções, continuidade e limites, abordadas em capítulos anteriores do livro, são recorrentes ao longo das explicações trazidas por Stewart (2014). Em diversas situações, a notação de somatório também é utilizada, tanto na construção de ideias iniciais, quanto na definição dos limites mais complexos.

Nesse contexto, conhecimentos inerentes ao Ensino Básico também são utilizados e se constituem em já-encontrados importantes no desenvolvimento inicial na busca pela construção do conceito de integral. Em várias ocasiões, o autor realiza manipulações algébricas bem características dos estudos realizados nas escolas.

Como o conceito de integral é desenvolvido através dos exemplos apresentados?

É desenvolvido através de situações ilustradas por vários gráficos que, passo a passo, buscam levar o estudante a perceber tendências particulares do problema proposto no exemplo, mas que, posteriormente serão utilizadas na generalização. Nesse sentido, percebe-se que os exemplos não são trazidos apenas após as definições, mas que, ao contrário, são utilizados como base para a sua construção.

Quais características dos Três Mundos da Matemática podem ser desenvolvidas através da abordagem sugerida?

O desenvolvimento inicial dos raciocínios que visam a culminar com a construção do conceito de integral, no livro de Stewart (2014), parte de duas situações (da área abaixo da curva e da velocidade percorrida) que podem desenvolver características do Mundo Conceitual Corporificado, pois envolvem descrição, ação e reflexão sobre experiências mentais. Em ambos os casos, os estudantes são estimulados a manipular objetos no seu pensamento, observando-os, descrevendo-os e agindo e refletindo sobre eles. Caracteriza-se esse aspecto, por exemplo, nas construções dos retângulos para as aproximações das áreas e das distâncias percorridas e, principalmente, no caso do exemplo que envolve o deslocamento de um carro.

Questões importantes do Mundo Operacional Simbólico também são exploradas e podem ser desenvolvidas a partir da abordagem proposta, pois características marcantes do Mundo Conceitual Corporificado são generalizadas por meio de símbolos. Essa afirmação pode ser ilustrada pelo caso em que o tempo e a velocidade, a partir de suas representações algébricas, foram trabalhados no cálculo da distância percorrida e, através de manipulações elementares, passaram por ações e percepções características do mundo corporificado.

2ª ETAPA – ANÁLISE DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Ao final do capítulo de introdução do conceito de integral, Stewart (2014) propõe trinta exercícios. Desses, quatro possuem um destaque na cor magenta, o que indica que há dicas disponíveis (em inglês) para sua resolução no site *stewartcalculus.com*, cinco vêm com a sigla SCA, o que informa que é necessário usar um sistema de computação algébrica para resolução do problema, e um traz um pequeno desenho, que lembra um gráfico, o que revela que é preciso utilizar um computador ou calculadora gráfica para o desenvolvimento da questão.

Os doze primeiros exercícios indicados pelo autor solicitam a construção de retângulos para a obtenção de aproximações de áreas abaixo de uma curva e em intervalos específicos da variável independente. Os números de retângulos construídos, assim como a sua altura, mudam de questão para questão e, em alguns casos, de item para item dentro de um mesmo exercício. Em alguns problemas, são solicitados quatro, seis, oito retângulos, assim como a utilização de pontos amostrais nas extremidades esquerdas, direitas e no ponto médio dos subintervalos estudados.

Alguns exercícios procuram trabalhar, também, com a percepção crítica dos estudantes sobre a atividade realizada. Nesse sentido, há questionamentos sobre que situações se traduzem em superestimativas ou subestimativas, em relação à área verdadeira, e sobre qual aproximação construída fornece a melhor estimativa.

Passando-se para as questões propostas para essa análise, tem-se as seguintes considerações sobre os exercícios iniciais propostos por Stewart (2014), no capítulo introdutório do conceito de integral:

Quais os objetivos dos exercícios propostos?

Pode-se considerar que esses exercícios iniciais buscam familiarizar o estudante com a questão da área abaixo de uma curva e limitada lateralmente por duas retas verticais, situação muito distinta das tratadas no ensino básico. Nesse contexto, são feitas as solicitações para a construção de retângulos com o intento de criar aproximações para as áreas pretendidas.

Também se entende que há o objetivo de contribuir para o desenvolvimento do raciocínio do estudante, explorando situações em que retângulos aproximantes construídos a partir de uma mesma extremidade em um exercício se constituem em subestimativas, e em outros em superestimativas. Com esse mesmo intento são trazidas questões nas quais as melhores aproximações não se encontram sempre no mesmo parâmetro (R, L ou M) de construção da altura dos retângulos, o que cria a necessidade de reflexão sobre a prática de construção geométrica.

Quais os já-encontrados necessários para a resolução dos exercícios?

Nesses casos iniciais, destaca-se como já-encontrado necessário e fundamental a habilidade de construção de retângulos e o cálculo da sua área. Entende-se que o conceito de função assim como a construção gráfica, a partir de noções de Geometria Analítica, também são já-encontrados invocados pelo autor, tanto para a compreensão das questões propostas, quanto para a sua resolução.

Que características dos Três Mundos da Matemática podem ser relacionadas com as estratégias de resolução que se espera que sejam empregadas na resolução dos exercícios?

Essencialmente características do Mundo Conceitual Corporificado, que permitem a visualização e compreensão de situações envolvendo retângulos e gráficos, para a construção de aproximações para as áreas. No contexto dessas questões inicialmente trazidas por Stewart (2014), acredita-se que os alunos são recorrentemente estimulados a manipular objetos geométricos, buscando-se fomentar ações e reflexões sobre as construções.

Os seis exercícios seguintes, propostos no livro, tratam de situações contextualizadas, próximas das vivências cotidianas contemporâneas dos alunos. Nesse sentido, são solicitadas, por exemplo, aproximações para: a distância percorrida por um corredor, a partir de informações sobre sua velocidade; a quantidade de óleo que vazou de um tanque, partindo de uma taxa de vazão de litros por hora, que varia com o tempo; e a distância percorrida por um carro que está freando, tendo algumas informações sobre a sua velocidade ao longo do percurso.

Nesse contexto, o exercício 14, por exemplo, explora a ideia de encontrar a distância percorrida por uma motocicleta, a partir de informações sobre a sua velocidade. Assim sendo, práticas geométricas similares às realizadas nos exercícios iniciais são construídas, buscando-se dar significado a elas, uma vez que situações factíveis como essa são exploradas nessas questões.

Figura 27 - Exercício 14.

14. A leitura do velocímetro de uma motocicleta em intervalos de 12 segundos é mostrada na tabela a seguir.
- Estime a distância percorrida pela motocicleta durante esse período, usando a velocidade no começo dos intervalos de tempo.
 - Dê outra estimativa utilizando a velocidade no fim dos intervalos de tempo.
 - As estimativas feitas nas partes (a) e (b) são estimativas superior e inferior? Explique.

t (s)	0	12	24	36	48	60
v (m/s)	9,1	8,5	7,6	6,7	7,3	8,2

Fonte: Stewart (2014)

Continuando-se com a análise dos exercícios propostos por Stewart (2014), tem-se as seguintes considerações:

Quais os objetivos dos exercícios propostos?

Identifica-se como um dos objetivos desses exercícios contextualizar, dando significado à prática do cálculo de aproximações para a área abaixo de uma curva, em um intervalo determinado de sua variável independente. Dessa forma, aplicações são trazidas, evidenciando a utilidade do cálculo que está sendo feito.

Observa-se que também se busca extrapolar as aplicações trazidas nos exemplos sobre o cálculo da distância percorrida, pois situações distintas são trabalhadas nesses exercícios. Pode-se ilustrar esse fato com as questões envolvendo a vazão de óleo e, até mesmo, o lançamento de um ônibus espacial.

Quais os já-encontrados necessários para a resolução dos exercícios?

Como entende-se que o objetivo principal desses exercícios é contextualizar as ações realizadas nas questões anteriores, conclui-se que os já-encontrados utilizados são os mesmos inicialmente explorados. Ou seja, o desenho de retângulos, e o cálculo da sua área, o conceito de função e a construção gráfica, a partir de noções de Geometria Analítica.

Que características dos Três Mundos da Matemática podem ser relacionadas com as estratégias de resolução que se espera que sejam empregadas na resolução dos exercícios?

São invocadas características do Mundo Conceitual Corporificado, pois as resoluções dos exercícios são construídas a partir das percepções de ações que acontecem no mundo real e são modificadas e acabam se desenvolvendo até a criação de imagens mentais cada vez mais

sofisticadas. Nesse contexto, por meio dessa atividade, os alunos, provavelmente, manipulam objetos no seu pensamento, observando-os, descrevendo-os, agindo e refletindo sobre eles.

As questões 19 a 24 trazem exercícios que propõem a construção de expressões utilizando limites para áreas abaixo de curvas, definidas por funções, sem a necessidade de cálculo dos limites, assim como a solicitação de determinação de regiões cujas áreas sejam iguais aos limites dados. Nesse sentido, os exercícios solicitam a utilização da seguinte definição para encontrar a expressão buscada: “A área A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes: $A = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x]$ ” (SETWART, 2014, p. 330).

Figura 28 - Exercícios 19 a 21.

19–21 Use a Definição 2 para achar uma expressão para a área sob o gráfico de f como um limite. Não calcule o limite.

$$19. f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad 1 \leq x \leq 3$$

$$20. f(x) = x^2 + \sqrt{1 + 2x}, \quad 4 \leq x \leq 7$$

$$21. f(x) = \sqrt{\sin x}, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

Fonte: Stewart (2014)

Analisando-se esse recorte dos exercícios propostos pelo autor, constroem-se as seguintes considerações:

Quais os objetivos dos exercícios propostos?

Trabalhar com a construção das expressões algébricas para o cálculo das áreas abaixo das curvas dadas (também algebricamente), assim como com a identificação de uma região em questão a partir do limite utilizado para a determinação da sua área. Nesse contexto, desenvolve-se a capacidade de relacionar expressões algébricas como representantes de áreas e regiões.

Quais os já-encontrados necessários para a resolução dos exercícios?

São necessários já-encontrados relacionados com construções algébricas, desde as mais elementares até algumas mais sofisticadas. Também são essenciais já-encontrados relativos ao estudo dos conceitos de função e limite, assim como aqueles referentes à notação de somatório.

Que características dos Três Mundos da Matemática podem ser relacionadas com as estratégias de resolução empregadas na resolução dos exercícios?

Como, basicamente, os exercícios trabalham com a manipulação simbólica, acredita-se que esse recorte de atividades se concentra em aspectos relacionados ao Mundo Operacional Simbólico, caracterizado, de forma ampla, por processos algébricos que podem, em estágios mais sofisticados, ser trocados por conceitos, originando proceitos. No contexto desses exercícios, acredita-se, contudo, que os símbolos (\lim , Σ , $f(x)$) são empregados apenas para representar ações simbólicas.

As questões 25, 26 e 30, trazidas por Stewart (2014), podem caracterizar um tipo particular de exercício dentro do capítulo de introdução ao conceito de Integral. Nas três situações, entende-se que são propostos desafios mais complexos aos estudantes, trabalhando inclusive com demonstrações. Nesse sentido, diferentes respostas podem ser dadas às questões:

Quais os objetivos dos exercícios propostos?

Aprofundar o conhecimento dos estudantes, levando-os na direção de construções matemáticas características dos trabalhos de matemáticos e alunos de bacharelado na disciplina. Assim, reflexões mais complexas são necessárias para, não apenas calcular algo, mas construir demonstrações, como é o caso do exercício a seguir.

Figura 29 - Exercício 25.

25. Seja A a área sob o gráfico de uma função contínua crescente f de a até b , e sejam L_n e R_n as aproximações para A com n subintervalos usando extremidades esquerdas e direitas, respectivamente.
- (a) Como A , L_n e R_n estão relacionados?
- (b) Mostre que

$$R_n - L_n = \frac{b - a}{n} [f(b) - f(a)]$$

Então, desenhe um diagrama para ilustrar essa equação, mostrando que n retângulos representando $R_n - L_n$ podem ser reunidos num único retângulo cuja área é o lado direito da equação.

- (c) Deduza que

$$R_n - A < \frac{b - a}{n} [f(b) - f(a)]$$

Quais os já-encontrados necessários para a resolução dos exercícios?

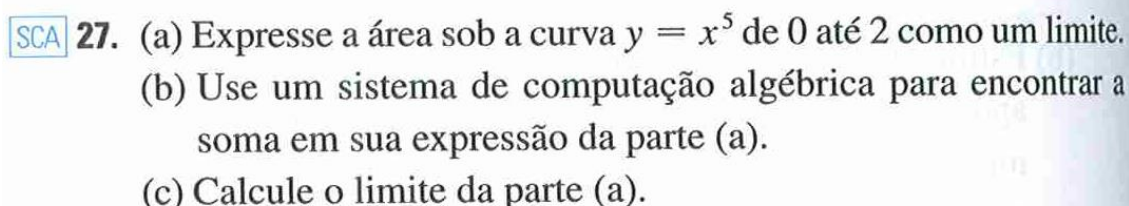
Observa-se que são utilizados já-encontrados similares aos utilizados nas atividades anteriores, como função, limite, somatório. Além disso, o próprio conhecimento construído ao longo do capítulo em questão é um já-encontrado necessário para a resolução dessas questões, que também envolvem, em alguns casos, desigualdades.

Que características dos Três Mundos da Matemática podem ser relacionadas com as estratégias de resolução empregadas na resolução dos exercícios?

Entende-se que são necessárias características típicas do Mundo Operacional Simbólico, uma vez que símbolos são utilizados para a construção de ações sobre objetos do mundo corporificado, como os gráficos. Ademais, percebe-se a presença de aspectos do Mundo Formal Axiomático, pois são utilizados objetos sensoriais (gráficos) como base para a elaboração de experiências mentais na busca pela elaboração de demonstrações matemáticas formais.

Os exercícios 27, 28 e 29 constituem um bloco diferente dos demais, pois solicitam o trabalho com sistemas de computação para construção de suas respostas, como percebe-se na Figura 30, a seguir. Nesse sentido, merecem uma análise à parte.

Figura 30 - Exercício 27.

- 
- SCA 27.** (a) Expresse a área sob a curva $y = x^5$ de 0 até 2 como um limite.
 (b) Use um sistema de computação algébrica para encontrar a soma em sua expressão da parte (a).
 (c) Calcule o limite da parte (a).

Fonte: Stewart (2014)

Quais os objetivos dos exercícios propostos?

Acredita-se que essas questões tenham como objetivo trazer uma interação dos estudantes com as tecnologias digitais da informação e comunicação e levá-los, também, a perceber a validade dos cálculos feitos, comparando-os com os resultados obtidos com os recursos computacionais.

Quais os já-encontrados necessários para a resolução dos exercícios?

São necessários já-encontrados oriundos da Educação Básica, como o conceito de função, e outros provenientes do Ensino Superior, como o conceito de limite e as técnicas necessárias para o seu cálculo. De forma particular, esse conjunto de exercícios também

trabalha com já-encontrados relacionados à utilização de *softwares* para encontrar limites e somas infinitas.

Que características dos Três Mundos da Matemática podem ser relacionadas com as estratégias de resolução empregadas na resolução dos exercícios?

Observa-se que são necessárias características do Mundo Operacional Simbólico, pois são utilizados símbolos para a realização de ações sobre ideias provenientes do mundo corporificado, como os gráficos e a concepção da noção de área. Entende-se que essas características se preservam, mesmo que essas ações sejam realizadas com o auxílio das novas tecnologias digitais de informação e comunicação.

4.2 ANÁLISE O LIVRO DE ANTON, BIVENS E DAVIS (2007)

Essa obra traz como foco, de acordo com Anton, Bivens e Davis (2007) a compreensão estudantil por meio de textos explicativos bem estruturados, exemplos construídos com várias etapas, diversos tipos de problemas e exercícios de compreensão, de desenvolvimento de conceitos e de revisão. Ademais, os autores ressaltam que o livro se caracteriza por sua flexibilidade, de forma que o Cálculo Diferencial e Integral pode ser interpretado por diferentes vertentes filosóficas, desde as mais tradicionais até as mais atuais.

A distribuição dos capítulos segue a seguinte ordem: 1. Funções; 2. Limites e Continuidade; 3. A Derivada; 4. Funções Exponenciais, Logarítmicas e Trigonométricas Inversas; 5. A Derivada em Gráficos e Aplicações; 6. Integração; 7. Aplicações da Integral Definida na Geometria, nas Ciências e na Engenharia; 8. Princípios do Cálculo de Integrais. Analisando-se o título de cada capítulo, percebe-se que o conceito de integral, assim como na obra de Stewart (2014), é estudado após a construção de conhecimentos relativos aos conceitos de função, limite e derivada.

Essa leitura pode indicar os já-encontrados que são utilizados para a introdução ao estudo de integral. Nesse contexto, entende-se que há a adoção, também nessa obra, de uma visão formal do Cálculo Diferencial e Integral, fundamentada nas ideias pedagógicas do século XIX.

1ª ETAPA – ANÁLISE DA INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE INTEGRAL

O capítulo de introdução ao estudo das integrais começa trazendo o problema relativo ao cálculo da área de regiões com, de acordo com Anton, Bivens e Davis (2007, p. 349), “contornos curvilíneos”. Assim, é construída uma breve descrição da trajetória de Arquimedes,

identificado como o precursor da integração. Faz-se referência, inclusive, ao método da exaustão, com o exemplo do cálculo da área de um círculo, que culmina com a conclusão que o método equivale, em termos atuais, a aplicação de um limite.

Passa-se, então, para a utilização de retângulos para o cálculo de áreas abaixo de funções contínuas e não-negativas, em um determinado intervalo. Dessa forma, os autores afirmam que, utilizando o método da exaustão, pode-se dividir um intervalo em questão em n subintervalos iguais, de forma que, sobre cada um desses, seja construído um retângulo, que se estende, desde o eixo das abscissas, até um ponto da curva $y = f(x)$, por exemplo. Sendo assim, afirma-se que, se A_n denota a aproximação da área exata A , sob a curva, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

O que diferencia essa abordagem daquela trazida na obra de Stewart (2014) é o fato de, já nessa parte inicial, afirmar-se, que “o ponto particular não interessa, podendo ser o que estiver acima do centro, acima dos extremos ou acima de qualquer outro ponto do subintervalo” (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, p. 351). Nesse sentido, entende-se que a ideia utilizada pelos autores parte de corporificações, uma vez que trata de áreas e gráficos, mas, rapidamente, eleva-se para concepções mais formais, como o conceito de limite. Dessa forma, o raciocínio se desenvolve até a sofisticação traduzida pela proposta de Riemann (mesmo que não tenha sido mencionada) para definição do conceito de integral.

Após um exemplo, no qual calcula-se uma área a partir de aproximações de alturas realizadas nos extremos direitos dos subintervalos, inicia-se uma nova seção para tratar do método da antiderivada para encontrar áreas. Os autores informam o leitor, então, que Isaac Newton e Gottfried Leibniz descobriram, no século XVII, uma relação entre o problema da área e o conceito de derivada, mostrando que “se f é uma função contínua não-negativa no intervalo $[a, b]$ e se $A(x)$ denota a área sob o gráfico de f acima do intervalo $[a, x]$, onde x é um ponto qualquer do intervalo $[a, b]$, então” (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, p. 352):

$$A'(x) = f(x)$$

Nesse contexto, conforme ilustra a Figura 31, são trazidos exemplos no quais são encontradas, por meio de construções gráficas e de fórmulas provindas da geometria escolar básica, expressões algébricas para áreas $A(x)$, no intervalo $[-1, x]$. A seguir, são calculadas, em cada situação, as derivadas $A'(x)$, de forma que pode-se interpretar que a derivada é um conceito entendido como um já-encontrado necessário para compreender os exemplos trazidos pelos autores.

Figura 31 – Exemplo de cálculo de $A(x)$ com uso de Geometria elementar.

Solução (c) Lembre que a fórmula para a área de um trapézio é $A = \frac{1}{2}(b + b')h$, onde b e b' denotam os comprimentos dos lados paralelos do trapézio, e a altura h denota a distância entre os lados paralelos. Pela Figura 6.1.8c, vemos que

$$A(x) = \frac{1}{2}((2x + 3) + 1)(x - (-1)) = x^2 + 3x + 2$$

é a área de um trapézio de lados paralelos de comprimentos 1 e $2x + 3$ e altura $x - (-1) = x + 1$. Para essa função área,

$$A'(x) = 2x + 3 = f(x)$$

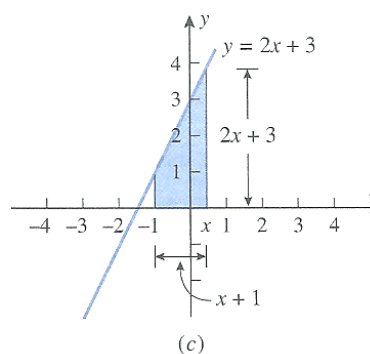


Figura 6.1.8

Fonte: Anton, Bivens e Davis (2007).

Resolvidos os exemplos propostos, os autores informam que, se for possível obter uma expressão para $A(x)$ a partir de uma fórmula dada de $A'(x)$, pode-se encontrar a área procurada. Esse processo é definido então como método da antiderivação para encontrar áreas. Nesse contexto, essa ideia foi usada para a encontrar a área exata que fora aproximada, no começo do capítulo, pela soma de retângulos com aproximações de alturas realizadas nos extremos direitos dos subintervalos definidos no eixo x .

Os cálculos das antiderivadas são realizados, nesse estágio, “por adivinhação” (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, p. 353). Na resolução desse exemplo surge, então, a constante real C , que acabou sendo determinada com a utilização de um ponto da curva como uma condição inicial.

Prosseguindo-se com a 1ª etapa da análise do capítulo de introdução do conceito de integral do livro de Anton, Bivens e Davis (2007), são construídas as respostas para os questionamentos propostos para este capítulo da pesquisa.

Como é realizada a introdução do conceito de integral?

É feita a partir de um problema corporificado: da área abaixo da curva. Nesse sentido, a obra inicia trazendo uma referência histórica, que destaca a gênese da criação do processo de integração para o cálculo da área. Salienta-se, contudo, que, apenas três linhas depois das referências feitas a Arquimedes, os autores chegam a Newton e Leibniz, que são reverenciados

como os responsáveis pela descoberta do “método geral de obtenção de áreas que utilizasse explicitamente a noção de limite” (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, p. 351).

Assim, são exploradas no livro a ideia de área e intuição espacial dos acadêmicos. Dessa forma, são destacadas representações gráficas usadas para a construção de aproximações iniciais, por meio de retângulos, para as áreas abaixo das curvas estudadas. Além disso, a obra conduz a atenção dos alunos para o método das antiderivadas para encontrar áreas, sem que, tenha sido desenvolvida, nessa introdução ao conceito de integral, uma explicação da razão dessa conexão.

Quais são os já-encontrados necessários para acompanhar o raciocínio proposto?

Diversos conceitos matemáticos são abordados pelos autores, que segundo entende-se, foram considerados necessários para o desenvolvimento do conceito de integral, e, portanto, são entendidos como já-encontrados. Nesse sentido, destaca-se os conceitos de área, função, limite, continuidade e derivada.

Observa-se, distinguindo-se esse trabalho da obra de Stewart (2014), que a notação de somatória não aparece em momento algum, apesar da área abaixo de uma curva ter sido definida, inicialmente, como a soma das áreas de retângulos, quando o seu número cresce indefinidamente. Assim, os autores sofisticaram o desenvolvimento das suas ideias sem esse recurso, passando de somas básicas, exploradas na escola, diretamente para o limite de somas.

Como o conceito de integral é desenvolvido através dos exemplos apresentados?

É desenvolvido, inicialmente, quando a obra foca na ideia de soma de áreas de retângulos, por meio de algumas situações traduzidas por gráficos. Na sequência, contudo, os autores se concentram na concepção de antiderivada e passam, então, a trabalhar mais com manipulações algébricas para encontrar áreas. Cabe salientar, ainda, que, ao contrário do que foi constatado na obra de Stewart (2014), os exemplos, nesse capítulo do livro de Anton, Bivens e Davis (2007), são trazidos após as definições.

Quais características dos Três Mundos da Matemática podem ser desenvolvidas através da abordagem sugerida?

Como a construção se dá a partir do problema da área, acredita-se que características do Mundo Conceitual Corporificado podem ser desenvolvidas, pois há necessidade, ao longo do raciocínio proposto pelos autores, de descrição, ação e reflexão sobre as representações gráficas. Ademais, os acadêmicos são requisitados continuamente a manipular os objetos no seu pensamento. Esse aspecto pode ser traduzido no processo de construção de retângulos para as aproximações das áreas.

Características típicas do Mundo Operacional Simbólico também são recorrentes ao longo das explicações, podendo, portanto, ser desenvolvidas a partir da abordagem trazida na obra. Esses aspectos ficam ainda mais evidentes quando os autores propõem o método de antiderivação para encontrar a área, uma vez que, a partir desse momento, as manipulações algébricas passam a dominar as ações, tanto para encontrar $A(x)$, quanto para determinar o valor das constantes reais, denominadas simbolicamente de C , e as áreas definidas em intervalos dados.

2ª ETAPA – ANÁLISE DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Ao final do estudo da introdução do conceito de integral, os autores propõem trinta exercícios. Esses estão divididos em três seções, denominadas de: Exercícios de Compreensão; Exercícios; e Enfocando Conceitos. Nesse contexto, optou-se por realizar essa análise a partir da ordem trazida na obra.

Começa-se, então, pelos Exercícios de Compreensão, que são os cinco primeiros a aparecerem nesse capítulo do livro. Percebe-se que esses se concentram nas concepções e percepções corporificadas sobre as ideias trazidas anteriormente. Assim, cálculos mais complexos não se fazem necessários para encontrar as soluções, conforme é possível notar na Figura 32, que explora, por exemplo, a área abaixo de uma curva a partir da soma de quatro retângulos.

Figura 32 – Exemplo de exercício de compreensão.

1. Seja R a região abaixo do gráfico de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e acima do intervalo $[-1, 1]$.
 - (a) Use um argumento geométrico para encontrar a área de R .
 - (b) Quais são as estimativas que se obtêm se a área de R for aproximada pela área total dentro dos retângulos da figura abaixo?

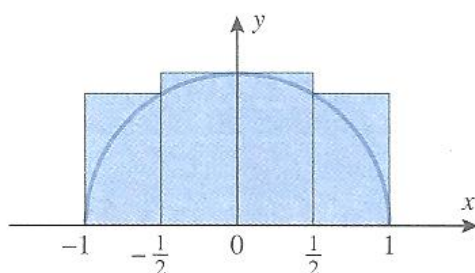


Figura Ex-1

Passando-se para as discussões propostas para essa etapa da análise, foram construídas as seguintes considerações sobre os Exercícios de Compreensão, propostos pelos autores, no capítulo introdutório do conceito de integral:

Quais os objetivos dos exercícios propostos?

Acredita-se que essas primeiras atividades têm o objetivo de subsidiar uma auto avaliação inicial por parte dos acadêmicos, de tal forma que possam verificar se compreenderam os argumentos intuitivos necessários, de acordo com os autores da obra, para a construção do conceito de integral. Nesse sentido, os exercícios focam mais em corporificações da ideia de área, a partir de discussões geométricas e de alguns cálculos elementares, envolvendo os já-encontrados dos alunos.

Quais os já-encontrados necessários para a resolução dos exercícios?

São necessárias, principalmente, concepções sobre o conceito de área, plano cartesiano e função. Contudo, nos dois últimos exercícios, os discentes devem empregar, a princípio, o conceito de derivada para, de alguma forma, construir um raciocínio inverso que os leve até a antiderivada, que culmina com a expressão para o cálculo da área abaixo de determinadas curvas.

Que características dos Três Mundos da Matemática podem ser relacionadas com as estratégias de resolução que se espera que sejam empregadas na resolução dos exercícios?

Principalmente características provenientes do Mundo Conceitual Corporificado que, possibilitam que os acadêmicos construam experiências mentais que tornem possível a visualização do que os autores propõem ao mencionar as funções e as áreas. Ademais, são necessárias algumas técnicas de manipulação algébrica e a capacidade de viajar do Mundo Conceitual Corporificado, onde as áreas podem ser imaginadas, para o Mundo Operacional Simbólico, onde são generalizadas por expressões algébricas que possibilitam a determinação da área abaixo das curvas em qualquer intervalo $[0, x]$, que pertença ao domínio de uma função contínua e não negativa.

O segundo bloco de atividades proposto pelos autores intitula-se apenas de Exercícios, perfazendo um total de 20 questões. Entretanto, apenas quatro orientações são trazidas para a resolução, a primeira engloba os exercícios 1 a 12, a segunda, as questões 13 a 18, conforme a Figura 33, enquanto a terceira se refere à atividade 19 e a quarta à 20.

Figura 33 – Orientações gerais para a resolução de um conjunto de exercícios.

13-18 Use fórmulas de área simples da Geometria para encontrar a função área $A(x)$ que dá a área entre o gráfico da função f especificada e o intervalo $[a, x]$. Confirme que $A'(x) = f(x)$ em cada caso.

Fonte: Anton, Bivens e Davis (2007).

Analisando-se esse segundo bloco de questões, foram construídos os argumentos para buscar responder as perguntas propostas para essa etapa da pesquisa. Dessa forma, as ideias seguintes foram desenvolvidas.

Quais os objetivos dos exercícios propostos?

Essas atividades propostas pelos autores assemelham-se ao que se denominava, há alguns anos, de “exercícios de fixação”, pois tratam, basicamente, de repetições de processos. Assim, pode-se conjecturar que o objetivo principal desse bloco de questões constitui-se na memorização, por parte dos acadêmicos, de ideias relativas ao cálculo da área abaixo do gráfico de uma função f e acima de um intervalo específico.

Nessa perspectiva, os discentes, segundo solicitam Anton, Bivens e Davis (2007), devem começar construindo diversas aproximações de áreas por meio da construção de retângulos, em número cada vez maior. A seguir, os acadêmicos passam a se utilizar de fórmulas de geometria básica para encontrar a função área, entre uma determinada curva e um intervalo genérico $[a, x]$, confirmando, posteriormente, que essa função é realmente uma antiderivada daquela que descreve a curva sob a qual a área está sendo calculada.

Quais os já-encontrados necessários para a resolução dos exercícios?

Pode-se citar, principalmente, os já-encontrados que se referem à Geometria Elementar e à Geometria Analítica, ou seja, fórmulas para o cálculo da área de retângulos, triângulos e trapézios, noções sobre plano cartesiano e construções gráficas a partir da representação algébrica de uma função. Também são vistos como já-encontrados importantes para essas atividades propostas, as técnicas de diferenciação. Além disso, em alguns casos, conhecimentos de funções trigonométricas são necessários, bem como a noção intuitiva de limite.

Que características dos Três Mundos da Matemática podem ser relacionadas com as estratégias de resolução que se espera que sejam empregadas na resolução dos exercícios?

Inicialmente, características do Mundo Conceitual Corporificado se fazem presentes na visualização de funções, através de seus gráficos, e, também, na construção de retângulos aproximantes no plano e na interpretação da soma das suas áreas como possíveis estimativas para áreas abaixo das curvas trabalhadas. Noções desse mundo também são constatadas no desenvolvimento de funções $A(x)$, para as áreas, a partir da interpretação de regiões gráficas como figuras geométricas básicas.

Nesse momento, são requisitadas ideias relacionadas ao Mundo Operacional Simbólico, uma vez que fórmulas da Geometria escolar passam a ser necessárias para a construção das funções $A(x)$. Ademais, características mais sofisticadas desse mundo também são necessárias para a aplicação de técnicas de diferenciação capazes de comprovar que $A'(x)$ é igual, em cada caso, à expressão algébrica da função dada.

Percebe-se, entretanto, que, apesar de o conceito de limite surgir logo no início do capítulo de introdução ao estudo do conceito de integral, esse não se faz necessário, de forma explícita e bem definida, em nenhum desses exercícios. Pode-se, contudo, entender que uma ideia geral sobre limites se faz necessária para entender que a soma dos retângulos aproximantes tende à área abaixo da curva e acima de um intervalo dado, à medida que o número de retângulos aumenta.

Chega-se, enfim, às questões do bloco denominado pelos autores de Enfocando Conceitos, que é constituído por seis exercícios. As ideias emergentes surgidas a partir das interpretações construídas nessa investigação são, conforme proposta desse capítulo, traduzidas nas respostas das perguntas a seguir elencadas.

Quais os objetivos dos exercícios propostos?

Percebe-se que esse conjunto de questões se propõe a levar os acadêmicos a reflexões mais sofisticadas sobre o conceito a ideia do conceito de integral. Assim, busca-se encontrar formas de, a partir da expressão algébrica geral de uma área $A(x)$, encontrar a área em um intervalo específico, que não começa na origem.

Ademais, acredita-se que os autores trazem, nos dois últimos exercícios desse bloco, uma introdução a um pensamento matemático mais vinculado ao Mundo Formal Axiomático. Nesse sentido, de acordo com a Figura 34, os cálculos dão lugar a explicações, que requerem, de alguma forma, demonstrações, mesmo que não seja, conforme imagina-se, necessária uma complexidade notadamente científica.

Figura 34 – Exercício do bloco Enfocando Conceitos.

26. Sejam A a área entre o gráfico de $f(x) = 1/x$ e o intervalo $[1, 2]$ e B a área entre o gráfico de f e o intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$. Explique geometricamente por que $A = B$.

Fonte: Anton, Bivens e Davis (2007).

Quais os já-encontrados necessários para a resolução dos exercícios?

Os já-encontrados que se fazem necessários aqui não são diferentes dos anteriores, uma vez que esses exercícios se debruçam na construção de argumentos capazes de justificar e comprovar, de alguma forma, aquilo que foi feito anteriormente. Assim, não são requeridas novas formas de cálculo de áreas, mas a capacidade de desenvolver raciocínios matemáticos mais avançados.

Que características dos Três Mundos da Matemática podem ser relacionadas com as estratégias de resolução que se espera que sejam empregadas na resolução dos exercícios?

Nota-se, novamente, a presença de características dos mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico, pois noções de área, gráfico e habilidade de manipulação algébrica continuam sendo necessárias. Contudo, acredita-se que esses exercícios levam os acadêmicos a terem o primeiro vislumbre de um novo mundo, no qual não basta que as afirmações ou cálculos pareçam verdadeiros, eles têm que ser explicados e justificados adequadamente. Assim, adentra-se, mesmo que timidamente, no Mundo Formal Axiomático.

4.3 ANÁLISE DO LIVRO DE LEITHOLD (1994)

Essa obra, segundo seu prefácio, foi construída por meio de apresentações, explicações, exemplos e exercícios voltados para principiantes na área. Dessa forma, Lethold (1994) destaca que nenhuma etapa ou passagem foi omitida ou ficou sem explicação.

Nesse contexto, o livro está dividido nos seguintes capítulos: 1. Números Reais, Funções e Gráficos; 2. Limites e Continuidade; 3. A Derivada e a Derivação; 4. Valores Extremos da Funções, Técnicas de Construção de Gráficos e Diferencial; 5. Integração e Integral Definida; 6. Aplicações da Integral Definida; 7. Funções Inversas, Logarítmicas e Exponenciais; 8. Funções Trigonométricas Inversas e Funções Hiperbólicas; 9. Técnicas de Integração; 10. Secções Cônicas e Coordenadas Polares; e 11. Formas Indeterminadas, Integrais Impróprias e Fórmula de Taylor. Analisando-se os títulos apresentados em cada capítulo, percebe-se que o conceito de integral, assim como nas obras de Stewart (2014) e de Anton, Bivens e Davis

(2007), é abordado após a construção de conhecimentos relativos aos conceitos de função, limite e derivada.

Sendo assim, pode-se inferir, inicialmente, que a construção do conceito de integral é feita a partir desses já-encontrados. Essa concepção pedagógica remonta, então, aos trabalhos de Bolzano, Cauchy, Weirstrass e Riemann e suas concepções formais a respeito da Matemática e das ideias relativas ao Cálculo Diferencial e Integral, fundamentadas no conceito de limite.

1ª ETAPA – ANÁLISE DA INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE INTEGRAL

O capítulo relativo à introdução ao estudo do conceito de integral inicia-se com concepção de operações inversas. Dessa forma, são citadas, como exemplos, a potenciação e a radiciação, a multiplicação e a divisão, e a adição e a subtração, para, então, trazer a concepção de antidiferenciação, definida pelo autor como a operação inversa da diferenciação. As ideias são desenvolvidas, então, a partir de uma postura formal frente ao Cálculo, pois são trazidos definições e teoremas (treze no total) que, só depois de enunciados, são ilustrados com exemplos.

Nesse sentido, após definir que uma função F é denominada de antiderivada de uma função f , em um determinado intervalo, se $F'(x) = f(x)$, para todo x nesse intervalo, é trazido um exemplo, puramente algébrico, chamado de ilustração 1, no qual deriva-se uma função F , dada, e encontra-se f . Na sequência, Leithold (1994) elenca os dois primeiros teoremas do capítulo, seguidos das suas demonstrações formais. Assim, é introduzida a ideia de constante de integração, chamada, conforme a Figura 35, de “constante arbitrária” (LEITHOLD, 1994, p. 287).

Figura 35 – Teorema que trata da constante de integração.

Se F for uma antiderivada particular de f em um intervalo I , então toda antiderivada de f em I será dada por

$$F(x) + C \quad (1)$$

onde C é uma constante arbitrária e todas as antiderivadas de f em I poderão ser obtidas de (1), atribuindo-se certos valores a C .

Fonte: Leithold (1994)

A partir dessas concepções iniciais, o autor define a antidiferenciação como a ferramenta utilizada para encontrar todas as antiderivadas de uma determinada função e

introduz a notação de Leibniz, citando rapidamente o pensador alemão. Dessa forma, utilizando o “s” alongado e sem ainda utilizar o termo “integral”, escreve-se que:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

de tal forma que $F'(x) = f(x)$ e $d[F(x)] = f(x)dx$.

Passa-se, então, para uma série de onze teoremas envolvendo operações no cálculo de antiderivadas (antiderivada de uma constante real vezes uma função, antiderivada da soma,...) e antiderivadas de funções trigonométricas. Apenas após os teoremas serem elencados, são explorados alguns exemplos algébricos de aplicação das regras estabelecidas.

O capítulo termina, então, com a explicação sobre casos nos quais deseja-se encontrar uma antiderivada específica, a partir de certas condições iniciais que possibilitam determinar um valor específico para a constante arbitrária C . Nessa perspectiva, são trazidos dois exemplos corporificados, envolvendo a determinação da função de uma curva a partir da equação da sua reta tangente e o cálculo de uma função custo total a partir da função custo marginal.

Continuando, então, com a 1ª etapa da análise do capítulo de introdução do conceito de integral do livro de Leithold (1994), são desenvolvidas as respostas para os questionamentos propostos para esta fase da investigação.

Como é realizada a introdução do conceito de integral?

A introdução do conceito de integral é realizada a partir de uma perspectiva tradicional de ensino, que foca em definições, teoremas e demonstrações que, apenas após serem elencados e demonstrados, são ilustrados com exemplos de aplicações imediatas das fórmulas, em contextos puramente algébricos. Nesse sentido, apenas na parte derradeira dessa introdução ao estudo do conceito de integral são abordados dois exemplos mais palpáveis para os acadêmicos. Ainda assim, o primeiro desses exemplos é corporificado dentro de uma esfera puramente matemática, sem fazer conexão com a realidade extracurricular vivida pelos discentes.

Entende-se que esse tipo de abordagem se insere no caso de um estudo realizado verticalmente, de forma que os acadêmicos são submetidos, conforme ressaltam Tall e Mejía-Ramos (2004) a uma enxurrada de ideias vindas do Mundo Formal Axiomático, sem qualquer contexto de aplicação aparente. Acredita-se que essa metodologia pode ter efeitos indesejados junto aos alunos, uma vez que a sofisticação das ideias trazidas, e corroboradas por suas provas formais, distancia-se dos mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico, frequentados pelos discentes.

Quais são os já-encontrados necessários para acompanhar o raciocínio proposto?

Distinguindo-se das duas outras obras analisadas, o livro de Leithold (1994) não traz qualquer questão gráfica nesse capítulo inicial do estudo do conceito de integral. Dessa forma, entende-se que os já-encontrados requeridos pelo raciocínio proposto pelo autor são os conceitos de função e derivada. Cabe ressaltar que, nesse caso, as funções trigonométricas também são abordadas nesse capítulo, ocupando boa parte das explicações e dando origem a seis teoremas.

Como o conceito de integral é desenvolvido através dos exemplos apresentados?

Acredita-se que é desenvolvido de forma mecânica, pois os exemplos abordam, em sua grande maioria, conforme a Figura 36, apenas aplicações de regras de antidiferenciação, determinadas pelos teoremas trazidos pelo autor. Assim, trabalha-se apenas com manipulações algébricas repetitivas, nas quais os alunos podem, até mesmo, alcançar o resultado correto, mas com as quais, provavelmente, nenhum sentido será construído para o que se estuda.

Figura 36 – Exemplo de cálculo de antiderivada.

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + 4) dx$$

Solução

$$\begin{aligned} & \int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + 4) dx \\ &= \int [(\sec^2 x - 1) + (\operatorname{cosec}^2 x - 1) + 4] dx \\ &= \int \sec^2 x dx + \int \operatorname{cosec}^2 x dx + 2 \int dx \\ &= \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + 2x + C \quad (\text{dos Teoremas 5.1.11 e 5.1.12}) \end{aligned}$$

Fonte: Leithold (1994).

Ressalta-se, contudo, que há dois exemplos que diferem dos demais e adentram, ainda que timidamente, no campo de aplicações corporificadas. Dessa forma, entretanto, percebe-se a construção de uma inversão epistemológica, pois, conforme corroboram Machado (1991) e D'Ambrósio (1997), essa concepção de ensino subsidia a construção da ideia de que o conhecimento matemático se desenvolve à parte do mundo real, mas que, em alguns casos, pode inclusive ser aplicado para resolver problemas práticos.

Quais características dos Três Mundos da Matemática podem ser desenvolvidas através da abordagem sugerida?

Entende-se que esse capítulo do livro de Leithold (1994) contribui, basicamente, para o desenvolvimento de características do Mundo Operacional Simbólico, pois são priorizadas, nos diversos exemplos ilustrados, apenas manipulações algébricas. Entretanto, em alguns casos muito específicos, que englobam acadêmicos que já habitam a complexidade do Mundo Formal Axiomático, a abordagem proposta pode auxiliar na compreensão de como funciona a estrutura de pensamento que fundamenta o desenvolvimento de ideias matemáticas sofisticadas, no campo da Matemática Pura.

2ª ETAPA – ANÁLISE DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Na análise do conjunto de exercícios propostos junto ao capítulo de introdução ao estudo do conceito de integral, entende-se que esses podem ser divididos em três blocos distintos. Assim, as respostas às perguntas criadas para essa etapa da investigação serão respondidas para cada um desses três recortes de questões.

O bloco inicial de exercícios se caracteriza pelo cálculo algébrico de integrais indefinidas, que, contudo, ainda são denominadas apenas de antiderivadas. Nesse sentido, são trazidas pelo autor as primeiras trinta a seis atividades vinculadas à introdução do conceito de integral. Dessa forma, as ideias construídas a partir das interpretações desses exercícios são, conforme proposta desse capítulo, traduzidas nas respostas das perguntas descritas a seguir.

Quais os objetivos dos exercícios propostos?

Pode-se entender que os objetivos são familiarizar os acadêmicos com as notações características da integral (antidiferenciação) e, principalmente, desenvolver a aptidão para o cálculo algébrico de antiderivadas. Essa percepção sobre esses exercícios advém do fato de não haver contexto algum permeando as atividades e da constatação que essas se constituem, basicamente, na repetição das técnicas de cálculo elencadas através dos teoremas trazidos por Leithold (1994) ao longo desse capítulo da sua obra.

Quais os já-encontrados necessários para a resolução dos exercícios?

Apesar de as questões tratarem de integrais de funções diversas, incluindo as trigonométricas, é possível resolvê-las sem que uma compreensão sobre esse tema seja necessária. Sendo assim, acredita-se que o único já-encontrado requerido para responder às questões propostas é a ideia de derivada, uma vez que, em quinze ocasiões, o autor solicita que o resultado seja verificado pelos estudantes por meio da diferenciação.

Que características dos Três Mundos da Matemática podem ser relacionadas com as estratégias de resolução que se espera que sejam empregadas na resolução dos exercícios?

Partindo da percepção de que os exercícios tratam apenas de repetições de técnicas algébricas de cálculo de antiderivadas, acredita-se que se pode relacionar com as suas estratégias de resolução apenas a ideia de processo, vinculada ao Mundo Operacional Simbólico. Em nenhum momento há necessidade de interpretação de corporificações, sejam elas iniciais e visíveis concretamente no cotidiano dos acadêmicos, sejam elas mais sofisticadas e descritas por corporificações matemáticas, como gráficos construídos do plano cartesiano, por exemplo.

O segundo conjunto de exercícios é composto por quatorze situações problema que requerem a ideia de antiderivada (integral) para que as soluções sejam desenvolvidas. Assim, algumas questões tratam de corporificações relacionadas exclusivamente à Matemática, conforme ilustra-se na Figura 37, enquanto outras vinculam-se a ideias corporificadas por situações cotidianas, seja, por exemplo, para o cálculo da função relativa ao custo de produção de uma empresa, seja para determinar o valor de venda de uma obra de arte.

Figura 37 – Corporificação matemática.

37. O ponto $(3, 2)$ está numa curva e em qualquer ponto (x, y) sobre a curva a inclinação da reta tangente é igual a $2x - 3$. Ache uma equação da curva.

Fonte: Leithold (1994).

Nesse contexto, as interpretações construídas sobre esse bloco de exercícios são trazidas por meio das argumentações desenvolvidas nas respostas das questões propostas para essa análise.

Quais os objetivos dos exercícios propostos?

Pode-se inferir que essas questões buscam trazer aplicações para as ideias estudadas durante o capítulo. Assim, entende-se que o autor tenta levar os acadêmicos a perceber que tudo o que foi desenvolvido algebricamente, nas páginas anteriores, tem alguma relação com corporificações.

Acredita-se, entretanto, assim como D'Ambrósio (1996), Machado (1991), Biembengut (2016), Tall (2013) e Tall e Mejía-Ramos (2004), que essa é uma forma artificial de conectar a Matemática com a realidade, pois faz parecer que primeiro surgem, no vácuo, as grandes descobertas acadêmicas para, apenas depois, serem aplicadas em problemas

corporificados. Nega-se, assim, que grande parte do desenvolvimento dessa ciência está intrinsicamente ligado a contextos culturais, sociais e, até mesmo, econômicos, como percebe-se, por exemplo, com a situação do cálculo de impostos sobre as terras no Antigo Egito.

Quais os já-encontrados necessários para a resolução dos exercícios?

Na diversidade das situações propostas nesse bloco de atividades, são necessários os conceitos de função, derivada, a compreensão geométrica da derivada como a inclinação da reta tangente a uma curva em um determinado ponto dessa curva, a ideia de função de rendimento marginal e as concepções de porcentagem e volume.

Aponta-se que, apesar de apenas dois exemplos terem sido construídos nesse sentido, no final do capítulo, esse bloco propõe quatorze exercícios de aplicação da ideia de antiderivada. Ademais, as seis primeiras questões desse conjunto são iguais ao penúltimo exemplo do capítulo, enquanto as cinco seguintes constituem-se em pequenas variações do último exemplo.

Dessa forma, apenas os exercícios 48, 49 e 50 trazem situações corporificadas diferentes daquelas exemplificadas durante o estudo introdutório. Assim, explora-se nessas questões a eficiência de trabalho de um operário, o volume de água em um tanque e o valor de uma obra de arte.

Que características dos Três Mundos da Matemática podem ser relacionadas com as estratégias de resolução que se espera que sejam empregadas na resolução dos exercícios?

Entende-se que são exploradas, em acréscimo às manipulações algébricas do bloco inicial, características do Mundo Conceitual Corporificado. Nesse sentido, todos os exercícios partem de situações palpáveis, seja no âmbito da Matemática, a partir da ideia de gráficos de funções, seja em um contexto mais abrangente, a partir de situações envolvendo produção, lucro, volume ou mesmo preço de venda.

Enfatiza-se, contudo, que, mesmo que diversas situações envolvendo curvas construídas a partir de funções, retas tangentes e inclinações de retas tenham sido discutidas nos exercícios, em lugar algum desse capítulo há uma representação gráfica. Ou seja, nem os exemplos ilustrativos, nem os exercícios propostos trazem qualquer recurso de visualização vinculado à Geometria Analítica, que, conforme pode-se depreender do estudo da evolução histórica do Cálculo, é fundamental para a compreensão de suas ideias.

Prosseguindo-se com essa análise, chega-se, enfim, ao terceiro bloco de exercícios da obra de Leithold (1994). Esse conjunto se distingue dos demais, segundo interpreta-se, por focar

em aspectos mais complexos e formais das ideias estudadas. Os detalhes dessa percepção são descritos nas respostas das perguntas propostas para esse estudo.

Quais os objetivos dos exercícios propostos?

Acredita-se que as quatro questões desse recorte buscam sofisticar as construções feitas ao longo do capítulo, de forma que os acadêmicos construam demonstrações formais para determinadas situações, conforme percebe-se na Figura 38, que traz o primeiro exercício desse bloco.

Figura 38 – Exemplo de exercício que requer a construção de demonstração.

51. Seja $f(x) = 1$ para todo x em $(-1, 1)$ e seja

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Então $f'(x) = 0$ para todo x em $(-1, 1)$ e $g'(x) = 0$, onde quer que exista g' em $(-1, 1)$. Mas, $f(x) \neq g(x) + K$ para x em $(-1, 1)$. Por que o Teorema 5.1.2 não é válido?

Fonte: Leithold (1994).

Quais os já-encontrados necessários para a resolução dos exercícios?

É possível perceber que são necessários conhecimentos de funções, incluindo as funções definidas por partes e as modulares, do conceito de derivada, de noções de desigualdades e, principalmente, da construção de demonstrações formais de afirmações matemáticas. Nesse contexto, acredita-se que há a necessidade de um salto cognitivo enorme para que os acadêmicos saiam de uma perspectiva basicamente algébrica e mecânica, adotada ao longo das explicações do autor, e cheguem no Mundo Formal Axiomático para desenvolver afirmações e explicações matemáticas complexas para quem está iniciando sua incursão no Ensino Superior.

Que características dos Três Mundos da Matemática podem ser relacionadas com as estratégias de resolução que se espera que sejam empregadas na resolução dos exercícios?

Como essas questões solicitam o desenvolvimento de provas formais, sem que uma técnica específica para tanto tenha sido trazida pelo autor, os caminhos tomados pelos estudantes podem ser diversos. Entretanto, conjectura-se que alguns acadêmicos optem, inicialmente, pela construção de gráficos das funções elencadas nos exercícios (apesar de gráfico algum ter sido usado nas explicações da obra), o que os levaria a uma incursão no Mundo Conceitual Corporificado para visualizar o que está trabalhado.

O que se pode inferir também, com maior probabilidade de acerto, é que os discentes farão uso de manipulações algébricas para desenvolver suas ideias de demonstrações formais para as questões propostas. Assim, armam-se com ferramentas do Mundo Operacional Simbólico para construir raciocínio que culminem com provas dentro do Mundo Formal Axiomático.

5. DA TEORIA À PRÁTICA

5.1 MODELAÇÃO

Com base nos estudos feitos acerca da construção histórica do Cálculo e da teoria dos Três Mundos da Matemática, entende-se que a utilização da Modelagem Matemática como método de ensino pode auxiliar os acadêmicos na busca pela construção de significados relativos ao conceito de integral. De acordo com Biembengut (2014), a Modelagem Matemática é o processo envolvido na elaboração de modelos para problemas reais, de qualquer área do conhecimento, e:

A essência desse processo emerge na mente de uma pessoa quando alguma dúvida genuína ou circunstância instigam-na a encontrar uma melhor forma para alcançar uma solução, descobrir um meio para compreender, solucionar, alterar, ou ainda criar ou aprimorar algo (p. 21).

Se a Matemática for entendida, apressadamente, como um conhecimento científico segregado da realidade, acredita-se que é possível buscar transpor esse paradigma utilizando-se a Modelagem Matemática para criar uma intersecção, fazendo esses dois conjuntos interagirem. Nesse contexto, segundo Bassanezi (2002, p. 16), “a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

Partindo dessa compreensão, e buscando desconstruir o panorama tradicional e predominante nos processos de ensino e aprendizagem, para estreitar a distância entre o corpóreo e o abstrato no estudo da Matemática, o debate no cenário mundial sobre Modelagem na Educação Matemática passou a ganhar destaque a partir da década de 1960, impulsionando a formação de grupos de pesquisadores sobre o tema. Dentre esses grupos, destaca-se a *International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications*¹⁰⁵ – ICTMA, criada em 1983, e que, desde então, realiza periodicamente a *International Conference of Teachers of Mathematical Modelling and Applications*¹⁰⁶. (BIEMBENGUT, 2009).

Os movimentos internacionais pela Modelagem Matemática influenciaram também o Brasil e contaram com a colaboração inicial e destacada de três educadores: Aristides Camargo Barreto, que, na década de 1970, começou a utilizar modelos matemáticos como uma de suas estratégias de ensino na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro; Ubiratan D’Ambrósio, representante brasileiro na comunidade internacional de Educação Matemática,

¹⁰⁵ Comunidade Internacional de Professores de Modelagem Matemática a Aplicações.

¹⁰⁶ Conferência Internacional de Professores de Modelagem Matemática e Aplicações.

que, nas décadas de 1970 e 1980, coordenou projetos na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) que catalisaram a formação de grupos de docentes para o estudo de Matemática Aplicada; e Rodney Carlos Bassanezi que, além de atuar nesses projetos na UNICAMP, adotou a Modelagem Matemática em suas práticas de sala de aula, tornando-se, desde então, um dos seus principais disseminadores no país. (BIEMBENGUT, 2009).

Dessa forma, começa-se a propor no país a utilização da Modelagem Matemática como um método de ensino com pesquisa, que, de acordo com Biembengut (2016), valoriza o que se aprende, tornando o conhecimento (re)construído, ao mesmo tempo, útil e estimulante. Nesse sentido, Bassanezi (2002) ressalta a possibilidade de trazer experiências corpóreas para o cotidiano do estudo de Matemática, e define a Modelagem Matemática como:

[...] um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas em linguagem usual (p. 24).

Dessa forma, é possível contrapor-se à realidade das aulas tradicionais de Cálculo, por exemplo, nas quais, conforme ressaltam Almeida, Fatori e Souza (2010), os conceitos são apresentados como conhecimentos prontos, saberes já construídos, não deixando, portanto, espaço para a intuição, experimentação, investigação ou descoberta. Assim, de acordo com os autores, anula-se qualquer possibilidade de os estudantes discutirem e criarem seus próprios argumentos sobre os temas propostos. Nesse sentido, Dewey (1978, p. 46) argumenta que “a origem de tudo que é morto, mecânico e formal em nossas escolas, está precisamente aí: na subordinação da vida e da experiência [...] ao programa. É por isso que estudo virou sinônimo de fadiga”.

Com a Modelagem Matemática, entretanto, pode-se dar aos acadêmicos a oportunidade de estudar Matemática por meio de situações-problema concretas. Percorre-se, assim, um caminho natural, como historicamente ocorreu na construção dos conceitos, pois a abordagem se desenvolve a partir de percepções sobre contextos reais e, então, evolui para generalizações criadas com o auxílio de símbolos. Processos matemáticos são, portanto, estabelecidos pelos estudantes que podem, enfim, sofisticar seu pensamento até a construção de conceitos, como o de integral, por exemplo.

Sabendo-se que o sistema de ensino vigente, tanto no nível básico quanto no superior, exige que certos conteúdos programáticos sejam desenvolvidos, dentro de determinados períodos de tempo (trimestres, semestres, anos), Biembengut (2016) sugere adequar o processo de Modelagem Matemática, de forma que sua essência seja preservada, mas se percorra, tanto

quanto possível, os assuntos previstos nas ementas propostas. Assim, Biembengut e Hein (2003) denominam de Modelação o método que se utiliza do cerne da Modelagem Matemática, mas que realiza adaptações para sua aplicação em cursos regulares, com programas pré-estabelecidos.

Biembengut (2016) destaca como objetivo da Modelação, promover a construção de conhecimento dos discentes, familiarizando-os com a intersecção criada entre o corpóreo e abstrato no estudo de Matemática. Nesse contexto, de acordo com a autora, essa prática oportuniza a cada aluno: entender uma situação concreta (Mundo Conceitual Corporificado); conhecer novas linguagens matemáticas que lhe permitem representar tal situação (Mundo Operacional Simbólico); e interpretar os resultados obtidos junto com seus colegas. Ademais, Almeida, Fatori e Souza (2010) afirmam que essa estratégia de ensino pode contribuir para que os acadêmicos construam um conceito imagem de forma mais coerente com suas percepções e, ainda, para que isso ocorra antes de serem apresentados ao conceito definição formal.

Nessa perspectiva, segundo Biembengut (2004), o professor pode trabalhar com certos modelos conhecidos, procurando, junto com seus alunos, recriá-los em sala de aula. Para tanto, é necessário que o docente tenha audácia e, sobretudo, desejo de modificar sua prática, dispondo-se sempre a aprender.

Conforme afirma Biembengut (2016), para que o aluno entenda a modelação não é suficiente que o docente apenas disponha ideias, conceitos e definições. É necessário que o estudante seja orientado: a identificar a situação que deve ser modelada; a expressar suas observações em linguagem matemática; a construir relações entre os símbolos matemáticos utilizados; e a construir, a partir dos dados coletados, um modelo que descreva o experimento realizado. Para tanto, a autora distingue três etapas essenciais nas quais a Modelação pode ser dividida: *Percepção e Apreensão*; *Compreensão e Explicação*; e *Significação e Expressão*.

A primeira etapa da Modelação, designada de *Percepção e Apreensão*, visa, de acordo com Biembengut (2016), fomentar junto aos estudantes o interesse por algum tema estimulante, que é escolhido para servir como um fio condutor dos conteúdos com os quais se busca trabalhar. É o momento, segundo a autora, de motivar os discentes a expressar suas percepções sobre o assunto e tomar consciência das diferentes formas de linguagem inseridas no contexto experimental. Nesse sentido, é importante discutir sobre a situação proposta, levantar questões e sugestões e selecionar posicionamentos dos discentes que favoreçam o desenvolvimento dos conceitos curriculares.

A segunda fase da Modelação, denominada de *Compreensão e Explicitação*, consiste, conforme destaca Biembengut (2016), em procurar levar os discentes a identificar elementos do tema que, partindo de seus já-encontrados, favoreçam a construção de ideias e conceitos que ainda desconhecem. Para tanto, é necessário associar os dados coletados à compreensão, de forma que essa associação contribua para o entendimento da situação proposta. Nesse sentido, a compreensão dos alunos se aprimora na medida em que são criadas oportunidades para a interação com contextos corpóreos e linguagens simbólicas que permeiam todo o estudo.

A terceira etapa da Modelação é chamada de *Significação e Expressão* e, de acordo com Biembengut (2016), consiste na avaliação da validade do modelo e na verificação do que foi aprendido. Não consiste, segundo a autora, em avaliar exclusivamente o modelo construído, mas, sobretudo, o alcance do trabalho realizado.

Destacada a importância da Modelação e de cada uma de suas etapas nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática, infere-se a relevância de se utilizar essa metodologia em disciplinas de cursos de formação de professores de Matemática. Assim, entende-se que os futuros docentes podem ter a oportunidade de constatar, na prática, os benefícios da Modelação, vista como um meio de fazer interagir o corpóreo e o abstrato (representações simbólicas) e, então, vislumbrar uma possibilidade para sua atuação.

Além disso, segundo Biembengut (2016), não há como aprender Modelação sem fazer Modelação. Nesse contexto, Leite (2008) afirma que todas as importantes questões abordadas acabam por se tornar ainda mais relevantes, pois os panoramas de aprendizagem apresentados não se limitam ao aluno, enquanto acadêmico, mas estendem-se, sobretudo, ao futuro professor e seus estudantes. Ademais, de acordo com Tavares e Scheller (2019, p. 63), o trabalho docente “é um retrato dos fundamentos teórico-metodológicos apreendidos ao longo dos estudos realizados e seu planejamento e concretização refletem as características e ideologias da sua formação acadêmica”.

5.2 A PRÁTICA

As atividades apresentadas nessa investigação foram realizadas no primeiro semestre de 2020, com uma turma da disciplina de Cálculo II, que prevê 72 horas aula, do Curso de Licenciatura em Matemática, de uma instituição de Ensino Superior, que se localiza no Estado do Rio Grande Sul. O objetivo do curso, segundo seu Plano Político e Pedagógico, é integrar à sociedade profissionais qualificados e cidadãos capazes de interpretar a realidade e se

posicionar crítica, criativa e autonomamente, contribuindo, assim, para o desenvolvimento dos contextos escolar e social nos quais se inserirem.

O conjunto dos participantes foi composto por sete discentes, do terceiro semestre do curso, sendo três do sexo feminino e quatro do masculino, com idades variando entre 21 e 38 anos. Após participarem da disciplina de Cálculo I, na qual são estudados os conceitos de limite e derivada, além de suas aplicações, os acadêmicos, ao ingressarem na turma de Cálculo II, propõem-se, conforme a ementa da disciplina, a estudar: o conceito de integral como antiderivada; técnicas de integração; o teorema fundamental do Cálculo; a integral definida e suas propriedades; e aplicações de integrais definidas no cálculo de áreas e volumes de sólidos de revolução.

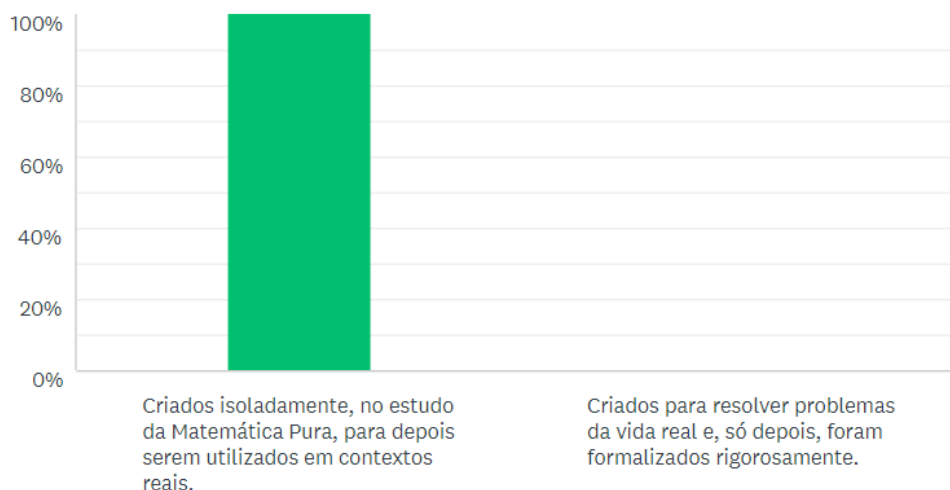
No primeiro encontro com a turma, de quatro horas aula, foi feita a apresentação do docente, dos objetivos da disciplina e dos critérios de avaliação. A seguir, foi proposto um questionário para os acadêmicos, por intermédio da ferramenta gratuita para criação de pesquisas designada de *SurveyMonkey*¹⁰⁷. Dessa forma, as perguntas elaboradas foram disponibilizadas no ambiente virtual de aprendizagem da disciplina, por meio de um *QR code* fornecido pela ferramenta digital.

Analisando os resultados desse questionário inicial, que buscou caracterizar o grupo de participantes quanto a suas experiências anteriores no estudo de Cálculo Diferencial e Integral, pôde-se perceber, por exemplo, que consideravam que os conceitos estudados nessa área foram desenvolvidos desvinculados da realidade. Nesse sentido, conforme observa-se na Figura 39, todos os alunos da turma acreditavam que, inicialmente, foram desenvolvidas as criações conceituais abstratas e simbólicas e suas demonstrações formais, complexas e sofisticadas, dentro de um mundo exclusivamente matemático, para, somente depois, essas ideias e conceitos serem aplicados a alguns problemas concretos, relacionados a contextos reais subordinados a cenários físicos, sociais ou econômicos de suas respectivas épocas.

¹⁰⁷ pt.surveymonkey.com

Figura 39 – Concepção inicial dos alunos sobre a criação dos conceitos do Cálculo.

Com relação ao Cálculo, você considera que seus conceitos foram:



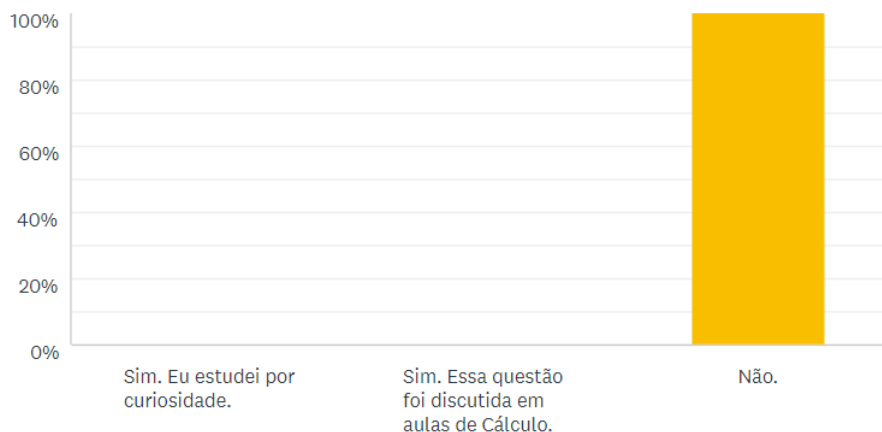
Fonte: A pesquisa.

Dessa forma, percebe-se que esses acadêmicos acreditavam que os matemáticos começam o seu trabalho na intersecção entre os mundos Operacional Simbólico e Formal Axiomático, onde generalizações algébricas e demonstrações sofisticadas e formais são desenvolvidas, sem conexão aparente com a realidade que os cerca. Essa visão dos futuros professores de Matemática pode ser compreendida pelo fato de, segundo é possível perceber na Figura 40, não terem, até então, conhecimento algum sobre o desenvolvimento histórico dos conceitos desse campo.

Esse contexto é consequência da falta de interesse dos discentes em buscar espontaneamente informações sobre a criação histórica de conceitos como limite, derivada ou integral, e também do fato de esse tipo de discussão, segundo os acadêmicos, não ter sido proposta anteriormente durante a sua graduação. Esse cenário leva, então, a uma provável alienação dos futuros docentes sobre como se dá a construção de ideias matemáticas, o que pode levá-los a assumir uma postura semelhante nas suas aulas, quando iniciarem seu trabalho como Professores.

Figura 40 – Conhecimento dos alunos sobre a história do Cálculo.

Você tem conhecimento sobre algum fato da História do Cálculo?

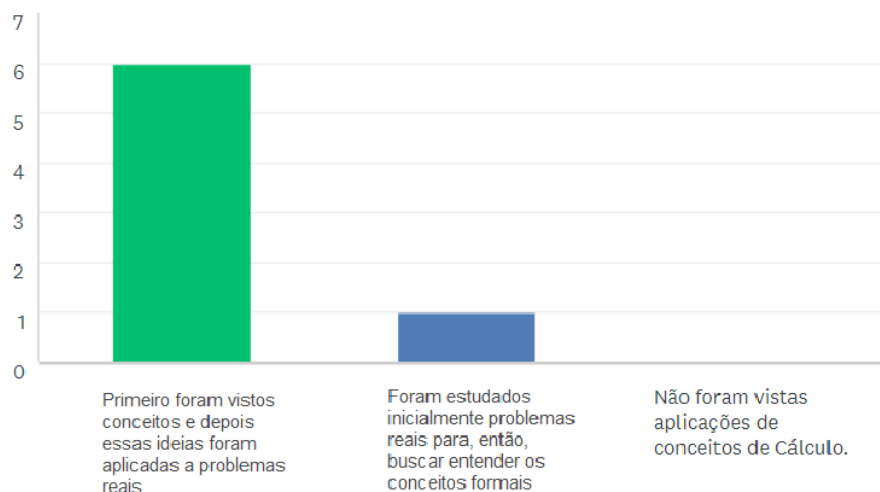


Fonte: A pesquisa.

Ademais, conforme pode-se constatar na Figura 41, o cenário mais comumente encontrado durante a formação dos discentes, foi aquele no qual as aulas seguem uma ordem linear, semelhante à trazida na grande parte dos textos científicos. Nesse contexto, acostumaram-se a aulas expositivas, onde os conceitos são expostos e demonstrados algebricamente para, então, aplicações serem trazidas sob a forma de exemplos e exercícios. Nessa perspectiva, D'Ambrósio (2002) afirma que a educação tem sido dominada por uma fascinação pelo teórico e abstrato e, normalmente, apenas após a apresentação de definições formais são explorados exemplos que pouco podem ser vinculados à realidade do aluno.

Figura 41 – Experiências anteriores dos acadêmicos com o Cálculo.

Nas suas experiências anteriores com o estudo de Cálculo:



Fonte: A pesquisa.

Dessa forma, pode-se perceber, conforme destacam Almeida, Fatori e Souza (2010), que os conteúdos trabalhados em disciplinas de Cálculo não são, costumeiramente, relacionados à realidade dos acadêmicos e às necessidades sociais, culturais e econômicas. Assim, os autores afirmam que são priorizadas operações, técnicas e repetição de algoritmos que podem levar ao insucesso dos alunos ou, em alguns casos, à simulação de sucesso, uma vez que aprovações podem ser alcançadas, mas, provavelmente, significados não são construídos.

5.2.1 A Modelação e a Integral como Antiderivada

Buscando-se desconstruir esse panorama e iniciar uma jornada diferente pelos Três Mundos da Matemática, na segunda aula da turma, propôs-se uma atividade baseada nas premissas da Modelação. Com isso, procurou-se contribuir para que os acadêmicos pudessem desenvolver ideias utilizando, de acordo com Tall (2010), suas percepções sobre a realidade, operações matemáticas e o uso de linguagem adequada.

Assim, iniciou-se a etapa denominada por Biembengut (2016) de *Percepção e Apreensão*, que visa fomentar, junto aos acadêmicos, o interesse por um tema concreto. Conforme destaca Dewey (1978), esse interesse se caracteriza pela supressão da distância entre o discente e a matéria e busca criar uma união orgânica entre o sujeito e o objeto de estudo. Nesse contexto, perguntou-se aos alunos se tinham familiaridade com a seguinte situação: *em uma avaliação escolar, foi entregue à turma, da qual fazia parte um jovem chamado Newton, um teodolito¹⁰⁸ e, então, solicitou-se que, utilizando esse equipamento, descobrissem a altura de um determinado prédio.*

Após discutirem sobre a ideia proposta, e se familiarizarem com as utilidades práticas do teodolito, todos acadêmicos responderam que não tinham conhecimento dessa anedota. Dessa forma, continuando a história, informou-se que o jovem Newton, para resolver o problema, levou o instrumento até o telhado da construção e, então, deixou-o cair, medindo o tempo que esse levou para atingir o solo. De posse dessa informação, e estando a par da ideia da aceleração da gravidade na Terra, pôde, então, encontrar a altura correta do edifício.

Dando sequência à aula, fez-se as seguintes perguntas para os acadêmicos: *Será que era essa a intenção do docente com a atividade? Será que o professor considerou correta a resposta do jovem Newton? O que você, como docente, faria?* A partir da situação descrita e desses questionamentos propostos, buscou-se, conforme sugere Biembengut (2016), motivar os

¹⁰⁸ Instrumento muito utilizado na construção civil e na agricultura para medir ângulos, distâncias e alturas.

discentes a externar suas percepções sobre o assunto, buscando, com isso, iniciar o processo de construção de significados.

Discutindo sobre as diversas nuances do contexto caracterizado, os alunos chegaram à conclusão que o professor do jovem Newton, provavelmente, não esperava essa abordagem para o problema e, por essa razão, deve ter considerado a resposta incorreta. Entretanto, argumentaram que, caso fossem docentes na situação descrita, aceitariam a resposta dada, buscando entender o raciocínio do aluno, e, então, procurariam explicar ao discente como esperavam que a questão fosse resolvida.

Seguindo a atividade de Modelação, e buscando, conforme destaca Dewey (1979), colocar os espíritos dos acadêmicos em dúvida e perplexidade, para aguçar sua curiosidade e interesse pela aula, propôs-se que realizassem o mesmo experimento que o jovem Newton. Nesse sentido, de acordo com Tall (2013), procurou-se criar um ambiente de aprendizagem no qual os alunos pudessem perceber o problema positivamente, como um objetivo a ser alcançado em conjunto, e não como um teste padrão, em que qualquer erro deve ser necessariamente evitado. Dessa forma, D'Ambrósio e Valente (2016) afirmam que é possível, inclusive, explorar o processo percorrido pela humanidade e como essa tratou o erro, que é recorrente ao longo de séculos de busca pela verdade.

Sendo assim, a turma foi dividida em três grupos (G1, G2 e G3) e todos foram convidados para irem até uma passarela elevada, que interliga dois laboratórios da instituição, para soltar de lá um objeto e, então, medir o tempo de queda até o solo. Foram utilizados nessa experiência os seguintes artefatos, trazidos pelos acadêmicos, conforme solicitação prévia feita no ambiente virtual de aprendizagem da turma: uma bola de basquete, um urso de pelúcia e uma bola de handebol.

Orientou-se, então, cada grupo a realizar a experiência cinco vezes, medindo o tempo, em segundos, e anotando os valores obtidos em uma tabela, conforme percebe-se na Figura 42, que traz os dados coletados pelo grupo G1. A seguir, os acadêmicos foram convidados a calcular a média aritmética dos tempos obtidos, para utilizar esse valor como referência para o desenvolvimento das atividades posteriores.

Figura 42 – Informações coletadas pelo grupo G1.

i	t_i
1	0:66
2	0:93
3	0:73
4	0:73
5	0:72

$$M = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = 0,75 \quad \text{Media } 0,75$$

Fonte: A pesquisa.

Findada essa fase inicial da Modelação, que privilegiou aspectos vinculados ao Mundo Conceitual Corporificado, por meio da realização da experiência física, passou-se para a segunda etapa, denominada por Biembengut (2016) de *Compreensão e Explicitação*. Assim, iniciou-se a busca pela construção de um modelo simbólico, que envolve o desenvolvimento da compreensão dos elementos que agem e interagem na situação-problema, buscando, enfim, representá-la por meio de relações matemáticas algébricas. Tall (2013) ressalta que, nesse estágio do trabalho, aspectos da experiência sensorial passam a ser pensados com o auxílio de linguagens mais sofisticadas, como a Álgebra, que permitem a ampliação de concepções mentais para oportunizar a criação de modelos.

De acordo com Bassanezi (2002), a matemática mobilizada nessa fase da Modelação pode ser entendida como um instrumento intelectual unificador, capaz de sintetizar percepções e construir generalizações que possibilitam a previsão tendências. Dessa forma, foram propostos dois novos desafios aos futuros professores: *Procure estabelecer a seguinte relação da altura em função do tempo: $h(t) = \frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2$, sabendo que g é a aceleração da gravidade na terra ($9,8m/s^2$) e C_1 e C_2 são constantes reais; e Descubra os valores de C_1 e C_2 para a situação estudada.*

Entende-se que, ao realizar as atividades necessárias para alcançar o modelo sugerido, criam-se condições para que os acadêmicos alcancem um estágio de, conforme sugere Tall (2013), combinação formal entre simbolismo e corporificação. Nesse ambiente matemático, no qual se pretende que os alunos adentrem, de acordo com Tall (2003), as verdades podem ser garantidas a partir de uma perspectiva simbólica e as definições fundamentam-se em objetos, experiências e operações conhecidos.

Nesse contexto, alguns *já-encontrados* fizeram-se necessários para a continuidade da Modelação. Assim, os acadêmicos passaram a interagir, com os colegas e o docente, buscando relembrar constructos mentais advindos das suas vivências anteriores (LIMA, 2007). Os alunos trocaram, então, ideias e experiências, acadêmicas ou não, sobre funções, variáveis, unidades de tempo, aceleração, velocidade e distância.

Para iniciar a construção do modelo, contudo, fez-se necessária uma intervenção junto à turma, com o propósito de relembrar ideias relativas a um *já-encontrado* que não foi mencionado por aluno algum: o conceito de derivada. Nesse sentido, perguntou-se como poderiam descrever essa ferramenta matemática e, nas suas respostas, os alunos trouxeram apenas ideias sobre técnicas de diferenciação, sem que tenha sido feita relação alguma da derivada com a ideia de variação.

Foram lembradas, então, concepções sobre o conceito de derivada, tanto a partir de uma ótica geométrica, quanto de uma visão da sua utilidade para o cálculo de taxas de variação instantânea. Nesse contexto, os futuros professores começaram a perceber a relação desse conceito com o que estava sendo estudado na Modelação, uma vez que visualizaram que a aceleração, de modo geral, e a aceleração da gravidade, particularmente, representam a taxa de variação da velocidade. Ou seja:

$$g = \frac{dv}{dt}$$

Nesse momento, partindo-se de uma concepção Newtoniana da integração (BOYER 1959), fez-se uma nova intervenção junto aos alunos, questionando-os se não seria interessante se existisse uma outra ferramenta matemática capaz de “desfazer” essa derivada para, então, encontrar a expressão da velocidade em função do tempo. Os alunos, após alguns minutos de reflexão, na qual fizeram analogias com as operações de multiplicação e divisão, foram unânimes em concordar que seria excelente se essa ferramenta realmente existisse.

Foi criada, então, a oportunidade para, a partir de uma necessidade advinda de uma experiência corporificada, introduzir a ideia inicial do conceito de integral. Nesse sentido,

informou-se que existe uma operação inversa à diferenciação, que é chamada de integração. Foi trazida, então, sua notação \int , informando-se que se trata de “s” alongado, introduzido pelo matemático alemão Leibniz, no século XVII, para denotar a palavra soma, que, em latim escreve-se *summa*. Assim, algumas ideias, como mostra a anotação de um aluno, na Figura 43, começaram a surgir entre os acadêmicos.

Figura 43 – Raciocínio construído por um aluno da turma.

The image shows handwritten mathematical work. At the top, the equation $g = \frac{dv}{dt}$ is written. Below it, the word "integral" is written vertically, with a curved arrow pointing from the g in the equation above down to the v in the equation below. The equation below is $v = \frac{ds}{dt}$.

Fonte: A pesquisa.

Quando todos da turma compreenderam, interagindo com seus pares, a ideia trazida pelo conceito de integral, surgiram as dúvidas relacionadas ao seu processo de aplicação. Nesse momento, informou-se que a ideia era pensar na função que, quando derivada em relação ao tempo, resulta na constante gravitacional g . Assim, manipulações algébricas foram feitas e os educandos chegaram à seguinte igualdade:

$$\int g dt = \int dv$$

$$gt = v$$

Nesse contexto, uma nova mediação docente precisou ser feita para que os acadêmicos percebessem que, sim, essa era uma possível resposta, mas que outras poderiam existir, uma vez que:

$$\frac{d}{dt}[gt] = g$$

Mas que ainda existem outras infinitas possibilidades, tais como:

$$\frac{d}{dt}[gt + 1] = g$$

$$\frac{d}{dt}[gt + \sqrt{2}] = g$$

$$\frac{d}{dt}[gt - 35] = g$$

Sendo assim, convencionou-se, junto à turma, que a igualdade seria generalizada e expressa da forma que segue, com C_1 sendo uma constante real.

$$\int g dt = \int dv$$

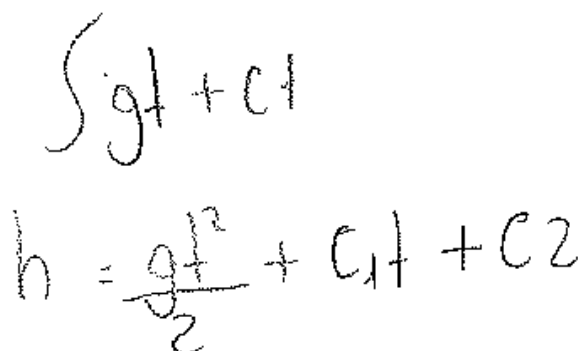
$$v = gt + C_1$$

Os acadêmicos perceberam, então, que, apesar de essa etapa ter sido realizada com sucesso, o objetivo ainda não havia sido alcançado, pois buscava-se a expressão da altura em função do tempo. Nesse sentido, por meio de uma nova mediação, que promoveu também interações entre os estudantes, lembrou-se que a velocidade também reflete uma variação. Os discentes, remetendo-se, então, ao *já-encontrado* derivada, chegaram à seguinte expressão:

$$v = \frac{dS}{dt}$$

Logo, a turma percebeu que, se realizasse um novo processo de integração, poderia, enfim, chegar à uma expressão da altura em função do tempo de queda. Dessa forma, a equação foi reescrita, substituindo-se v por $gt + C_1$, e, na sequência, foi aplicada a integral, de acordo com o exemplo da Figura 44.

Figura 44 – Integração realizada por um dos acadêmicos da turma.



The image shows handwritten mathematical work. The first line is the integral of velocity: $\int (gt + C_1)$. The second line is the resulting displacement equation: $h = \frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2$.

Fonte: A pesquisa.

A partir dessa expressão, os estudantes utilizaram as condições iniciais $v(0) = 0$ e $h(0) = 0$ para encontrar os valores das constantes reais C_1 e C_2 . Dessa forma, achando $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$, a turma estabeleceu a equação geral para descrever a queda livre dos objetos na Terra.

$$h(t) = 4,9t^2$$

Nesse contexto, iniciou-se a terceira etapa da Modelação, que é denominada por Biembengut (2016) de *Significação e Expressão* e, segundo a autora, consiste na avaliação do modelo criado e na verificação do conhecimento construído. Corroborando essa ideia, Tall (2013) afirma que, quando uma possível solução é encontrada, primeiro deve ser apreciada, e, então, deve ser verificada para confirmar se realmente se aplica ao problema original. Dessa forma, cada grupo, de posse da média do tempo de queda do seu objeto, utilizou a função encontrada para calcular a altura da passarela, conforme o Quadro 3.

Quadro 3 – Estimativas para a altura da passarela.

Grupo	Tempo (s)	Altura (m)
G1	0,84	3,46
G2	0,75	2,76
G3	0,88	3,79

Fonte: A pesquisa.

Naturalmente, surgiu a curiosidade dos estudantes em saber a altura real de onde a experiência foi realizada. Sendo assim, um acadêmico disponibilizou-se a trazer, na aula seguinte, uma trena para realizar a medição.

Além disso, solicitou-se, ao término desse encontro, que os discentes procurassem locais, próximos das suas residências, para realizar a mesma atividade, agora com alturas diferentes. Dessa forma, poderiam, então, inserir o tempo de queda na equação construída e verificar se a altura encontrada algebricamente correspondia à do local onde a experiência foi realizada. Assim, de acordo com Tall (2013), constrói-se a possibilidade de verificar se a solução encontrada em aula pode ser ampliada para uma classe mais abrangente de problemas.

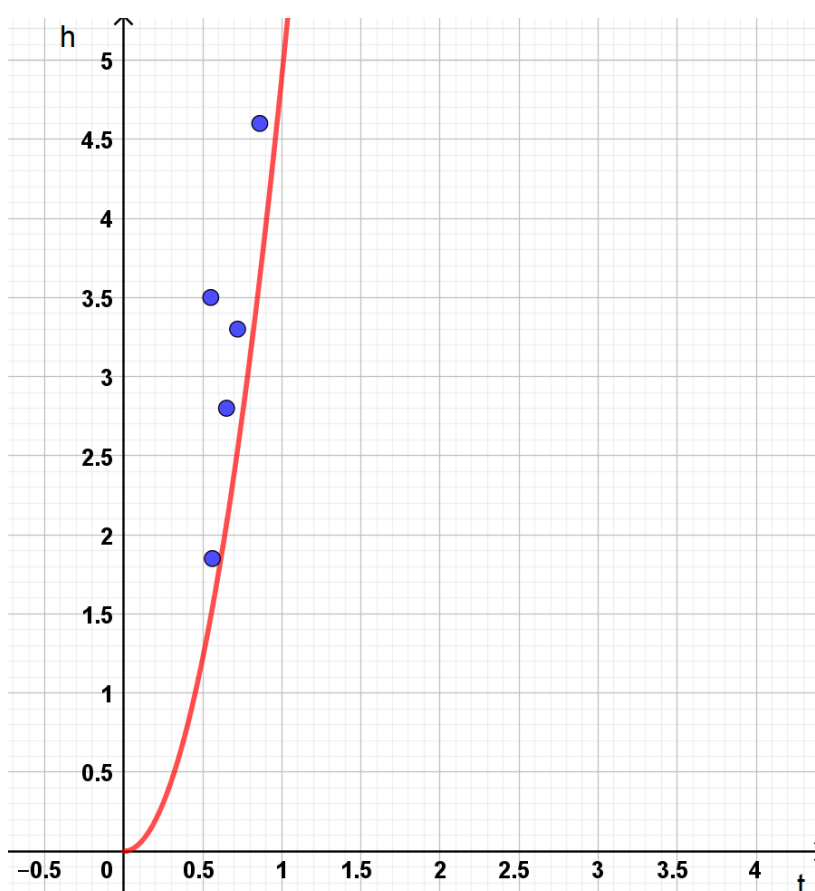
Na aula seguinte, os acadêmicos dirigiram-se à passarela, com a trena, para medir sua altura. Encontraram o valor de 3,65 metros. Dessa forma, após uma breve e acalorada discussão, chegaram ao consenso que os dados coletados por G2 deveriam estar equivocados, provavelmente por falta de habilidade com o cronômetro, e que as conclusões alcançadas por G1 e G3 eram boas aproximações da realidade.

Ademais, os três grupos trouxeram os relatos das experiências realizadas extraclasse. Informaram, então, que subiram em prédios, em pontes, em árvores e foram até janelas de

apartamentos para buscar dados que pudessem auxiliar na confirmação da validade e da possibilidade de ampliação do modelo encontrado para outras situações.

Dessa forma, o grupo G2, por exemplo, coletou dados de cinco alturas diferentes que, conforme mostra a Figura 45, foram plotados no plano cartesiano, com o auxílio do *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Assim, em vermelho, encontra-se a função construída em aula e, em azul, estão os pontos que representam as informações coletadas na atividade extraclasse.

Figura 45 – Comparação realizada pelo grupo G2.



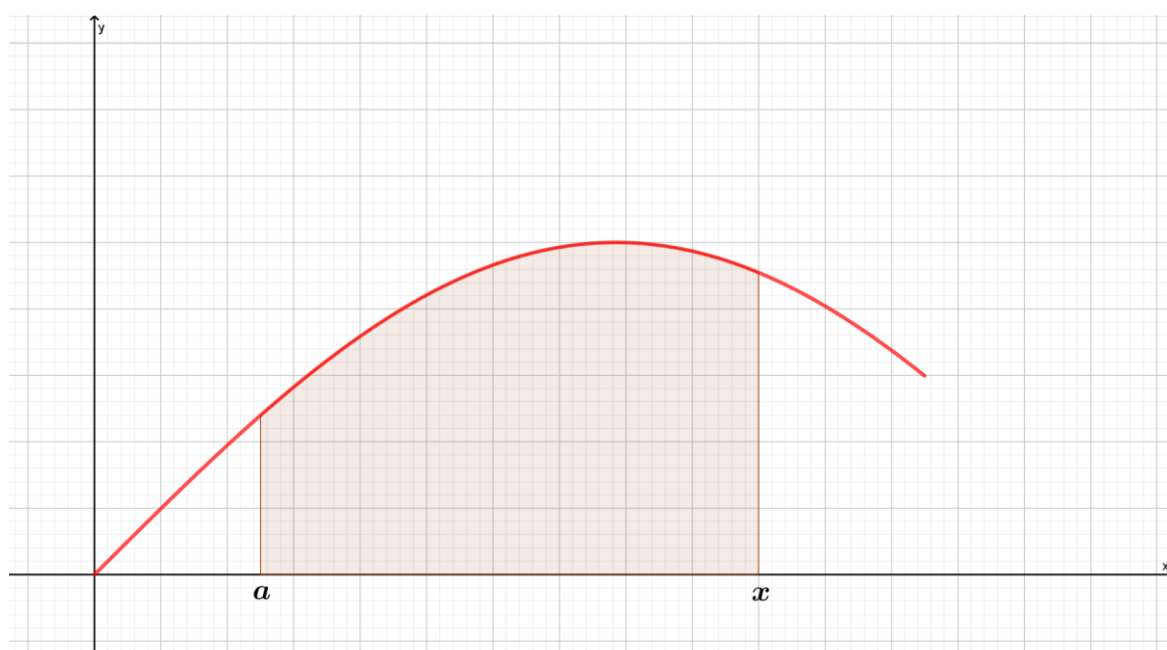
Fonte: A pesquisa.

Nesse contexto, os acadêmicos afirmaram, de acordo com o relato do grupo G1, que “pode-se perceber que, quanto maior a altura maior o tempo de queda” e que as medidas encontradas por meio da equação “podem não ser exatas, mas, com uma pequena margem de erro, podem corresponder à realidade”. Essas variações, conforme ressaltou o G2, ocorrem “devido a diversas variáveis” que podem influenciar nas medições, em um ambiente não controlado de pesquisa.

5.2.2 A Integral de Leibniz e a Área Sob a Curva

Após essa importante discussão inicial, a segunda aula da turma teve prosseguimento com uma outra abordagem corporificada para o estudo do conceito de integral, de acordo com o que sugere Tall (2013). Dessa forma, perguntou-se aos discentes por que razão Leibniz teria utilizado um símbolo relacionado com a palavra soma para representar a integral, que, até o momento, tinha sido estudada na disciplina como a operação inversa da derivada. Sem respostas, o gráfico da Figura 46 foi desenhado no quadro.

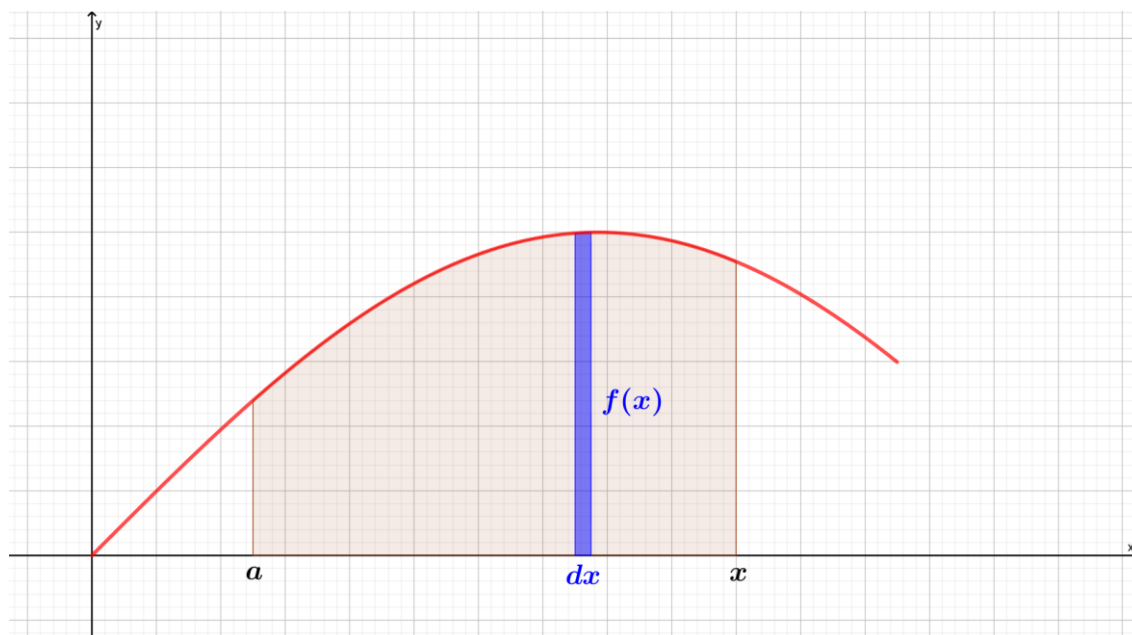
Figura 46 – Gráfico inicial.



Fonte: A pesquisa.

Nesse contexto, uma nova questão foi proposta para os acadêmicos: *como se calcular a área hachurada, que se encontra abaixo da função f , realçada em vermelho?* A primeira reação dos alunos foi indagar sobre qual a relação dessa situação com a integral, a derivada, a velocidade, a aceleração ou a altura, estudados na aula anterior. Com um pouco de calma sendo solicitada à turma, foi feito um acréscimo à representação gráfica inicial, de acordo com o que ilustra a Figura 47.

Figura 47 – Acréscimo ao gráfico inicial.



Fonte: A pesquisa.

Os alunos começaram, então, a perceber algumas nuances que lembravam a construção anterior do conceito de integral e também o estudo da derivada. Assim, perceberam que o “retângulo”¹⁰⁹ desenhado tem altura igual ao valor da função f para um determinado x e que o comprimento de sua base é um diferencial de x . Dessa forma, concluíram que a área desse “retângulo” pode ser dada pelo produto $f(x)dx$.

Nesse contexto, foi (re)construída a relação da palavra soma com o conceito de integral, a partir do raciocínio proposto por Leibniz (BOYER, 1959) que, de acordo com Tall (2013), percebeu a área procurada como a soma das áreas de todas as infinitas tiras azuis. Informou-se aos acadêmicos, então, que matemático alemão escreveu “*summa f(x)dx*” utilizando um “s” alongado para representar a palavra soma, chegando à seguinte notação para a área $A(x)$, abaixo da curva:

$$A(x) = \int f(x)dx$$

Após essa construção coletiva, que contou com a participação dos futuros professores no desenvolvimento de cada passo dado, surgiu uma nova dúvida: o que a área abaixo de uma

¹⁰⁹ Segundo Tall (2013), a faixa azul não é um exato retângulo, uma vez que o seu topo faz parte de uma curva. Entretanto, para uma função contínua, a sua largura dx pode ser feita tão pequena que o erro que ocorre, pelo fato de a linha não ser exatamente horizontal, aproxima-se de zero, tanto quanto se queira, e, por essa razão, pode ser considerado inexistente.

curva tem a ver com a derivada? Afinal, o conceito de integral havia sido abordado por dois ângulos, mas uma conexão ainda não tinha sido construída.

Dessa forma, a partir da visão de Leibniz, procurou-se desenvolver, junto aos alunos, a ideia que a área A tem uma variação dA , quando o valor de x é aumentado de dx . Esse valor dA , por sua vez, conforme concluiu a turma, representa a área de um “retângulo” infinitamente pequeno, com altura $f(x)$ e largura dx . Nesse sentido, pôde-se estabelecer a seguinte igualdade:

$$dA = f(x)dx$$

Percebendo a semelhança com a equação $dv = gdt$, construída na Modelação da aula anterior, os acadêmicos concluíram, naturalmente, que:

$$A = \int f(x)dx + C$$

Sendo assim, os discentes compreenderam a relação entre a integral como uma antiderivada, na visão de Newton (Modelação), e como uma ferramenta matemática para o cálculo da área abaixo de uma curva, partindo da percepção de Leibniz. De forma orgânica, foi possível, então, chegar à conclusão que:

$$A = \int f(x)dx + C \quad \text{e} \quad \frac{dA}{dx} = f(x)$$

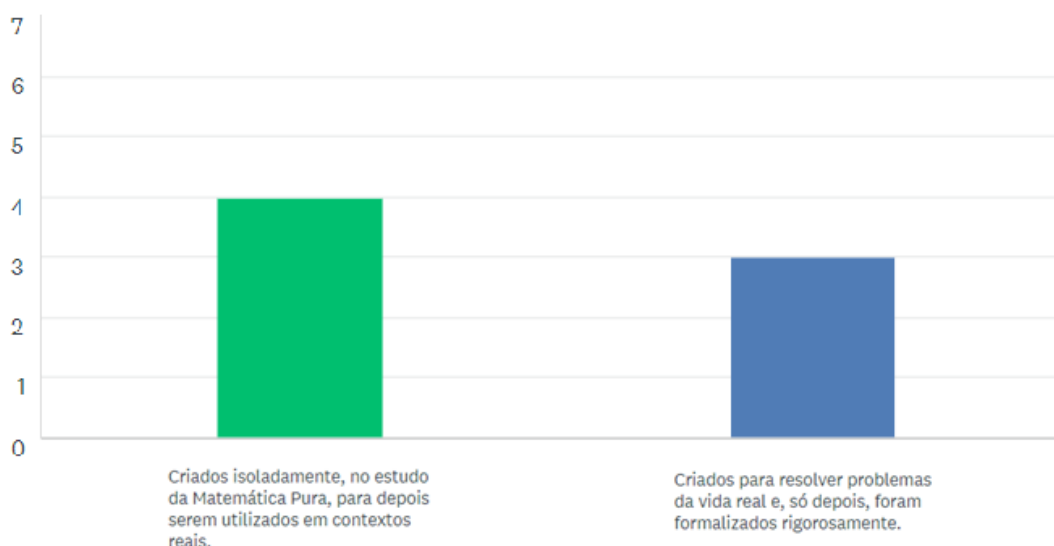
Construiu-se, assim, com a participação efetiva dos estudantes, a percepção de que essas duas equações expressam, em termos simples, que as operações de integração e diferenciação são, essencialmente, inversas (TALL, 2013). Nesse contexto, informou-se à turma que essa descoberta, feita por Newton e Leibniz, no século XVII, é denominada pelos matemáticos atuais de Teorema Fundamental do Cálculo.

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Finalizadas as aulas de introdução do conceito de integral, os futuros professores foram convidados a responder, novamente por meio da ferramenta disponibilizada pelo site *SurveyMonkey*, cinco questões sobre as atividades realizadas. A primeira pergunta retomava a busca pela percepção dos acadêmicos quanto ao desenvolvimento dos conceitos estudados no Cálculo, conforme a Figura 48.

Figura 48 – Nova concepção dos alunos sobre a criação dos conceitos do Cálculo.

Com relação ao Cálculo, você considera que seus conceitos foram:



Fonte: A pesquisa.

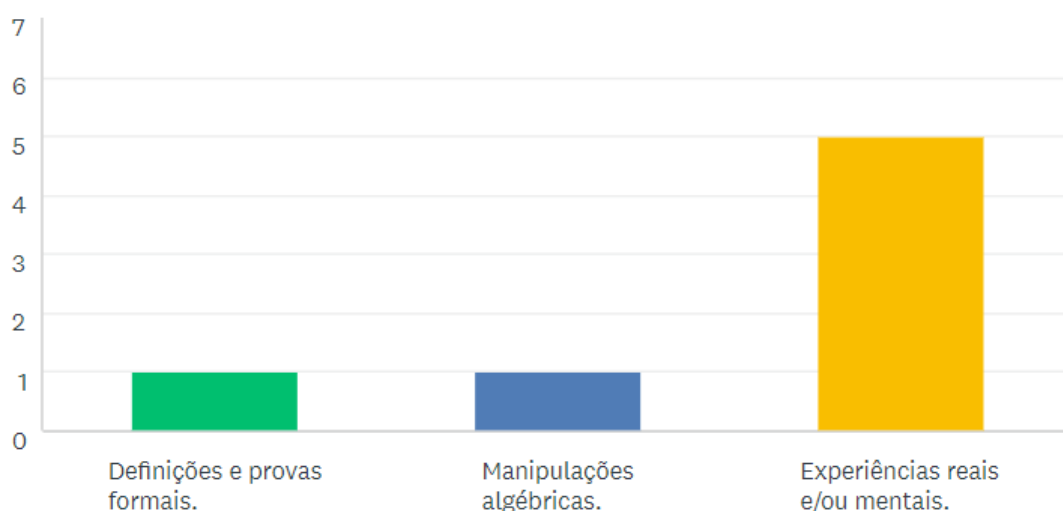
Analisando-se o resultado, pôde-se perceber que a visão de alguns acadêmicos foi alterada com as práticas realizadas. Entretanto, uma fração considerável da turma ainda entendia que a Matemática se desenvolve, inicialmente, à parte da realidade, de forma puramente abstrata. Nesse contexto, foi possível inferir que são necessários mais trabalhos corporificados para suplantare ideias sobre a Matemática que foram solidificadas ao longo de anos de formação tradicional, que prioriza técnicas algébricas, e, na qual, de acordo com Tall (2004), procedimentos são levados à rotina, com base em repetições mecânicas de operações com símbolos.

Nesse sentido, foi possível notar, conforme a Figura 49, que os alunos se mostraram receptivos em relação a práticas inovadoras, como a Modelação. Assim, externaram sua

preferência por situações que partem de experiências palpáveis para, então, generalizar o conhecimento e, enfim, construir novas ideias.

Figura 49 – Preferência dos alunos sobre abordagens para o ensino de Matemática.

Você prefere estudar Matemática a partir de:



Fonte: A pesquisa.

Por meio de suas respostas a essa questão, foi possível interpretar que os educandos abriram caminho para diferentes formas de interação pedagógica. Com essa receptividade constatada, acredita-se que há um ambiente propício para que sejam construídas transformações nas práticas de ensino e aprendizagem de Cálculo que, conforme ressalta Tall (2004), venham a contribuir para levar os acadêmicos à percepção de que muitos conceitos simbólicos, por exemplo, surgem como reflexos de corporificações naturais.

Nesse contexto, é indispensável compreender que, assim como mostra a história do Cálculo, as etapas corpóreas e algébricas precedem, normalmente, o desenvolvimento de provas formais. Corroborando essa afirmação, Stewart e Tall (2015) realçam que foi somente a partir do século XIX que o pensamento matemático deslocou-se, dos objetos e suas propriedades e das operações simbólicas, para a matemática pura, baseada em definições e provas abstratas. Essa transição, de natural para formal, assim como ocorreu historicamente com os matemáticos, envolve uma mudança radical de percepção dos acadêmicos e, portanto, deve ser realizada de forma gradual nas disciplinas iniciais de Cálculo Diferencial e Integral.

À medida que a transição da matemática escolar para a formal é iniciada na graduação, parece ser lógico começar com definições abstratas e com o desenvolvimento do aprendizado

sobre como construir deduções formais. Contudo, experiências trazidas nas últimas décadas mostram que existe uma grande falta de sensibilidade pedagógica nessa visão, pois os *já-encontrados* dos estudantes precisam, necessariamente, ser considerados para a construção de novos e mais sofisticados conhecimentos matemáticos. (STEWART; TALL, 2015).

Dessa forma, buscando compreender os *já-encontrados* mobilizados pelos sujeitos dessa pesquisa na construção do conceito de integral, foi proposta a seguinte questão aos futuros docentes: *Você precisou relembrar e utilizar conceitos estudados anteriormente para compreender o conceito de integral? Quais?* Sendo assim, todos os sete alunos afirmaram que sim, destacando como *já-encontrados*, conforme a Figura 50, principalmente ideias relativas a funções, área e derivada.

Figura 50 – Já-encontrados mobilizados na construção do conceito de integral.



Fonte: A pesquisa.

Percebe-se, então, conforme destaca Tall (2013), que o desenvolvimento intelectual matemático depende da utilização de experiências anteriores para a visualização de novas situações. O aprendizado, em um estágio, afeta, portanto, o que se aprende posteriormente. Nesse caso, os acadêmicos sinalizaram que tiveram que recorrer a ideias estudadas em Cálculo I, como o conceito de derivada, por exemplo, mas também a conteúdos trabalhados na escola básica, como plano cartesiano, funções e a concepção de área.

Ampliando essa análise, destaca-se que não foi citado, por estudante algum, o conceito de limite como um *já-encontrado* necessário para a compreensão da integral. Dessa forma, é

possível conjecturar que, mesmo que seja um assunto tratado na introdução ao Cálculo I, em virtude de uma tradição, que, conforme salientam Brolezzi e Barufi (2007), remonta aos tempos de Cauchy, essa ferramenta matemática, que é obviamente um *já-encontrado* para os matemáticos profissionais, que habitam o Mundo Formal Axiomático, não é essencial para uma construção estruturada nos mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico.

Cada estudante, entretanto, apontou aspectos individuais que influenciaram sua cadeia única de pensamento, pois o raciocínio humano, de acordo com Tall (2013), envolve a utilização de ideias advindas de experiências prévias, vividas em contextos distintos. Dessa forma, de acordo com o autor, a maneira como cada indivíduo lida com seus *já-encontrados* e o resultado emocional decorrente da sua ativação são singulares e ocupam um papel importante no desenvolvimento do pensamento matemático individual.

Em virtude dessa constatação, concluiu-se que cada um dos futuros professores foi atingido de uma forma diferente pela atividade e, portanto, construiu seus próprios significados sobre a integral. Da mesma forma, pode-se afirmar que cada educando desenvolveu uma percepção singular a partir da inversão epistemológica proposta no trabalho realizado.

Assim, para buscar mais subsídios sobre o alcance dos caminhos pedagógicos percorridos, na ótica dos acadêmicos, as questões expostas a seguir tiveram suas respostas dissertativas analisadas para esse trabalho por meio de Análise Textual Discursiva (ATD), conforme sugerem Moraes e Galiazzi (2007): *O que você pensa sobre o uso de experiências que requerem observação, descrição, ação e reflexão no estudo de Matemática?; Você acredita que atividades de Modelação, como a que foi realizada em aula, são importantes para a Educação Matemática?*

Nesse contexto, adotando uma postura qualitativa de interpretação dos dados coletados, ideias foram construídas ao se traçar, de acordo com o que propõem Moraes e Galiazzi (2007), um caminho composto por três estágios ordenados: unitarização, categorização e construção de metatextos. Ressalta-se, entretanto, que esse percurso foi traçado com o intento de distanciar a interpretação construída de uma simples descrição que, conforme argumentam Souza e Galiazzi (2018, p. 806), “remete à ideia de um jogo de quebra-cabeça, cuja paisagem já está definida *a priori*, exigindo do jogador encontrar as peças certas a serem colocadas em seus devidos lugares”.

Dessa forma, com horizontes abertos, modificando-se as peças do jogo, e deixando de lado a ideia de um quebra-cabeça, foi construído, então, percorrendo as etapas da ATD, um mosaico, entendido como uma forma mais coerente de refletir a imagem do fenômeno estudado,

a partir dos óculos do pesquisador (SOUZA; GALIAZZI, 2018). Iniciou-se a ATD, portanto, pela unitarização, que se caracteriza pela desconstrução das narrativas, passou-se pela categorização, que consiste na construção de relações entre as unidades, e chegou-se, enfim, na construção de três metatextos, nos quais novas compreensões sobre os argumentos trazidos pelos acadêmicos foram comunicadas.

Esses três metatextos são intitulados de: (1) Experiência Corporificada; (2) Inspiração para a Atuação Docente; e (3) Tirar o Foco da Manipulação Algébrica e do Formalismo. Salienta-se que, para garantir o anonimato dos alunos, esses são identificados, nessa pesquisa, pelos códigos A1, A2, A3, A4, A5, A6 e A7.

6.1 EXPERIÊNCIA CORPORIFICADA

Na matemática escolar, o estudo se desenvolve a partir de um caminhar traçado paralelamente por corporificação e simbolismo. Assim, ações palpáveis originam operações simbólicas e, também, representações corporificadas (TALL, 2013). Dessa forma, entende-se que é esse o caminho que deve ser seguido na introdução de conceitos iniciais do Cálculo Diferencial e Integral, na graduação. Ademais, de acordo com o aluno A2, experiências sensoriais, como a vivida com a Modelação, tornam a aprendizagem “muito mais fácil, pois trabalhamos com algo do nosso cotidiano, com coisas que conhecemos”.

Nesse sentido, pondera-se, conforme ressaltam Stewart e Tall (2015), que a compreensão matemática se inicia com o desenvolvimento de conexões entre ideias da esfera matemática e as percepções provenientes de outras dimensões da vida humana. Nessa perspectiva, o estudante A1 afirma que “fica mais fácil compreender a teoria a partir da prática”. Dessa forma, criando uma intersecção entre o real e o abstrato, o corpóreo e o simbólico, acredita-se que o indivíduo pode construir mais sentido para os conceitos matemáticos estudados.

Corroborando essa ideia, o acadêmico A2 destaca que “o ser humano aprende mais com questões do cotidiano”. Sobre isso, Tall (2013) argumenta que a transição da matemática escolar para níveis mais sofisticados de pensamento pode ser realizada mais naturalmente, se for fundamentada em experiências corporificadas e simbólicas. Nesse sentido, Tall e Mejía-Ramos (2004) ressaltam que a corporificação envolve, inicialmente, interação prática com o mundo exterior e que um curso de Cálculo deve ser pautado por vivências capazes de gerar experiências cognitivas fundamentas nessa premissa.

Nesse contexto, a realização de atividades pedagógicas que levam em consideração o ponto de vista dos alunos, suas vivências, experiências e concepções anteriores são, de acordo com o estudante A4, “de suma importância”, uma vez que, conforme ressalta o acadêmico A2, “temos a possibilidade de usar nosso conhecimento prévio” em situações que, na perspectiva de A1, “são essenciais para a construção de um conhecimento”. Partilhando dessa ideia, Tall (2013) afirma que todo novo pensamento envolve metáforas, ou seja, envolve utilizar experiências anteriores para se referir a novos contextos. É esse processo, segundo o autor, que permite ao cérebro utilizar conexões já existentes para desenvolver, então, significados para novos fenômenos.

Dessa forma, pode-se perceber que experiências corporificadas, como a Modelação realizada, além de “despertar nossa curiosidade para sabermos se realmente vão dar certo” (A3), levam em consideração os *já-encontrados* dos acadêmicos para a construção de novas compreensões. Assim, esse tipo de prática pedagógica parte do pressuposto que um conceito matemático, de acordo com Stewart e Tall (2015), é o resultado do desenvolvimento de um padrão organizado de ideais que são, de alguma forma, interconectadas a partir de interações realizadas com conhecimentos já existentes.

Ademais, o aluno A1 afirma que “ao simular situações-problema, podemos extrair conceitos matemáticos da sua resolução” e, então, de acordo com A5, “podemos enxergar onde está a aplicação do conteúdo” estudado. Com atividades desse tipo, procura-se desenvolver, portanto, conforme destaca Tall (2013), construções mentais pessoais, dividir essas ideias com os colegas para trocar percepções construtivas e, então, mover-se para um novo estágio de compreensão.

Nesse contexto, evidencia-se, entretanto, que o foco do estudo de Matemática não deve recair estritamente sobre objetos corporificados ou operações simbólicas, isoladamente, uma vez que cada um tem sua força, mas também suas limitações. Assim, uma construção intelectual restrita a manipulações algébricas, por exemplo, pode aumentar a fluência simbólica, mas também pode acabar, em algum momento, por limitar a flexibilidade de pensamento e dificultar o avanço cognitivo dos acadêmicos (TALL, 2013).

Trazendo todas essas concepções para a formação de professores de Matemática, contribui-se, então, para desmistificar o paradigma de que essa ciência tem como finalidade apenas desenvolver o raciocínio lógico e seus aspectos intrínsecos, como postulados, teoremas, corolários e propriedades. Não se afirma, entretanto, que esses aspectos devam ser desprezados na formação inicial docente, mas sugere-se uma perspectiva menos formal e mais corpórea, que

perceba e faça uso dos *já-encontrados* dos acadêmicos. Essa visão mais abrangente, provavelmente, contribuirá para a constituição de profissionais capazes de pensar e agir matematicamente por meio de uma concepção mais ampla, voltada para o mundo exterior e para suas possíveis relações com a construção do conhecimento científico (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011).

6.2 INSPIRAÇÃO PARA A ATUAÇÃO DOCENTE

A relevância do professor para a Educação é indiscutível, uma vez que esse profissional trabalha para possibilitar que seus alunos construam conhecimentos importantes para a sua constituição como sujeitos capazes de perceber, interpretar e, por ventura, transformar a realidade que se apresenta. Entretanto, de acordo com D'Ambrósio (1996), se o docente atual insistir em ocupar o papel central na sala de aula, percebendo-se como a única fonte de informações, como um transmissor de conteúdos, sua legitimidade será questionada, em breve, por educandos, instituições de ensino e, por fim, pela sociedade. Para evitar essa obsolescência pedagógica, um novo roteiro precisa ser abraçado pelos educadores, que devem transformar o panorama do ensino, facilitando a aprendizagem a partir da interação dos estudantes com experiências reais, com seus pares, com o docente e, sobretudo, com o conhecimento.

Nesse sentido, interpretando o resultado desse cenário de educação formal, Stewart e Tall (2015) afirmam que simplesmente aprender como fazer algo, sem desenvolver uma compreensão ampla das relações estabelecidas entre os conceitos estudados, pode limitar o pensamento matemático. Entendendo a importância de uma postura docente inovadora para o potencial sucesso dos processos de ensino e aprendizagem, o acadêmico A3 argumenta, referindo-se à atividade de Modelação, que “o tipo de aula realizada na semana passada nos faz sair da zona de conforto”.

Dessa forma, acredita-se que a percepção dos futuros professores sobre o seu trabalho pode ser modificada para, enfim, transcender as práticas com as quais foram acostumados na sua formação básica, e alcançar novas formas de interação escolar. Nesse contexto, com as atividades realizadas nas aulas iniciais de Cálculo II, os acadêmicos puderam perceber que, como observa Tall (2013), há uma relação intrínseca entre as emoções dos alunos e o pensamento matemático, pois, de acordo com A6, situações corporificadas “instigam o aluno a pensar”, uma vez que “fica nítido que o conteúdo estudado permite aplicações no cotidiano” (A4).

É importante para a motivação do aluno, então, perceber que “o professor pensou em algo diferente” (A3), capaz de, conforme ressalta Dewey (1979), direcionar a curiosidade orgânica dos estudantes para fins intelectuais. Assim, é possível engajar os educandos em atividades que vislumbram a sofisticação de um conhecimento prévio, de forma que essa construção anterior possa dar conta de novas ideias. Ou seja, procura-se desenvolver um conhecimento pessoal prévio para construir significado e interpretar situações mais gerais e complexas (SETWART; TALL, 2015).

Dessa forma, entende-se que é possível catalisar a compreensão dos futuros professores sobre como o simbolismo corporificado cresce, a partir de ações físicas, até alcançar conceitos simbólicos mais amplos, como aqueles usados para representar uma integral, por exemplo. Em alguns casos, de acordo com Tall e Gray (1991), pode-se, inclusive, chegar a procedimentos matemáticos mais sofisticados, a partir do desenvolvimento de uma flexibilidade de pensamento denominada de *proceito*, que habilita o discente a transitar entre o processo de resolver uma expressão e o conceito de manipulá-la para fins mais abrangentes. Nesse sentido, mesmo que cada aluno construa suas percepções mentais diferentemente, as experiências desenvolvem-se como estruturas que precisam ser reconhecidas e descritas para, então, serem definidas de forma matematicamente apropriada (TALL, 2013).

Assim, a prática da Modelação pode, como salienta A1, “mostrar que a Matemática não surgiu por acaso” e, ainda, evidenciar que, “através de uma necessidade ou um problema real”, a corporificação inicial pode levar a descobertas de estruturas simbólicas importantes. Ademais, leva os futuros professores a perceber que, à medida que essas ideias iniciais são generalizadas, representações corporificadas podem se tornar problemáticas e limitadas, enquanto o simbolismo algébrico surge como uma forma de tradução cada vez mais poderosa da realidade.

Também é importante perceber que, com as atividades realizadas, os acadêmicos visualizaram novas formas para sua atuação, o que, de acordo com A6 “é renovador”, pois, conforme destaca A7, “vimos que podemos sair do método tradicional”. Nesse contexto, os futuros professores tiveram a oportunidade de entender que “uma situação-problema pode ser o ponto de partida da aula” e que essa “não precisa iniciar sempre com definições” (A7).

Com essa abordagem pedagógica, Tall (2013) afirma que, assim como ocorreu historicamente, parte-se da corporificação e do simbolismo prático para, só então, rumar para a construção de ideias mais gerais, sofisticadas e abstratas. Indo ao encontro desse argumento, Batista, Gouveia e Carmo (2016) salientam que (re)pensar a relação entre o corpóreo e o teórico

pode, enfim, contribuir para melhorar a educação, a partir da evolução da prática docente na direção de uma epistemologia profissional mais atual.

6.3 TIRAR O FOCO DA MANIPULAÇÃO ALGÉBRICA E DO FORMALISMO

Dewey (1979) destaca que, simplesmente solicitar a um aluno que pense, abstraindo-o de sua existência, de suas experiências anteriores, sem trazer-lhe qualquer situação tangível, que perturbe seu equilíbrio, é tão improdutivo quanto exigir que um estudante erga, a si mesmo, puxando os cordões dos próprios sapatos. Em um raciocínio consonante, Tall (2013) afirma que, em Matemática, as construções conceituais desenvolvem-se sobre as percepções humanas e ações reais, que originam imagens mentais, que, por sua vez, são verbalizadas de forma cada vez mais sofisticada até tornarem-se entidades abstratas, perfeitas na imaginação.

Tirando, portanto, o foco da atuação docente de aspectos estritamente formais e das manipulações algébricas mecânicas, de acordo com A3, pode-se enfim “usar coisas que estão no nosso cotidiano” e, desse modo, “não ficamos apenas resolvendo exercícios de uma forma correta, mas sem saber exatamente o que estamos fazendo” (A4). Nesse contexto, Tall (2013) argumenta que aprender rotinas pode levar ao sucesso em testes repetitivos, mas, provavelmente, não vai contribuir para o desenvolvimento de sofisticadas matemáticas futuras.

Ademais, um estudante que tem seu aprendizado concentrado apenas em procedimentos que o habilitam a passar em exames imediatos e repetitivos, irá, provavelmente, falhar na tentativa de construir estruturas mais complexas e flexíveis de pensamento. O aluno inserido nesse cenário pedagógico acaba, portanto, aprendendo o que fazer, sem nunca saber por que o faz (TALL, 2013).

Compreender a razão da aprendizagem, construir um panorama abrangente sobre o conhecimento matemático desenvolvido é, portanto, fundamental para que os estudantes saibam aplicá-lo, posteriormente, em situações distintas da sua vida pessoal ou acadêmica. Nesse contexto, conforme destaca A4, “quando nos depararmos com uma situação que requer o conhecimento estudado, saberemos como utilizá-lo”.

Assim, de acordo com Stewart e Tall (2015), com uma interpretação mais ampla da Matemática, um possível erro, por exemplo, que pode levar a uma conclusão equivocada, que não se encaixa no contexto geral, pode alertar um sujeito sobre um engano e evitar que uma

decisão incorreta seja tomada. Esse cenário só é viável, contudo, se os alunos, além de aprenderem o que fazer, entenderem o que e por que o fazem.

Além disso, Stewart e Tall (2015) enfatizam que, apesar de ser possível desenvolver toda a Matemática por métodos formais e axiomáticos, sem utilizar qualquer recurso externo, esse contexto será absolutamente incompreensível para qualquer pessoa que não conheça previamente os conceitos construídos. Ou seja, uma abordagem estritamente formal é ineficaz na transição da matemática escolar para a matemática universitária, traduzida, inicialmente, no Cálculo Diferencial e Integral.

Essa ideia, torna-se mais evidente quando se compreende que o Cálculo, assim como qualquer outra construção humana, é baseado em experiência corpóreas, reais ou mentais. Ademais, o Cálculo tem origens históricas basicamente geométricas, que, séculos depois, foram desenvolvidas simbolicamente, por meio de manipulações algébricas, para, apenas recentemente¹¹⁰, ganhar definições e provas formais (TALL; MEJÍA-RAMOS, 2004).

Parece não fazer sentido, então, introduzir o estudo dessa disciplina com abordagens totalmente abstratas que, além de caracterizarem uma ruptura radical do modo como a Matemática é percebida pelos acadêmicos, contraria a construção humana desse conhecimento ao longo do tempo. Dessa forma, de acordo com A2, “ao trabalharmos com algo muito distante da nossa realidade, podemos não ter a mesma compreensão do que querem nos ensinar”.

Uma abordagem mais corporificada do Cálculo, portanto, “é muito importante para desenvolvermos nosso conhecimento” (A4), pois, conforme ressalta A3, “não ficamos só em teorias e mais teorias” e, enfim, de acordo com A4, “podemos visualizar e compreender o que estamos fazendo”. Nesse sentido, Batista, Gouveia e Carmo (2016) argumentam que o professor, em qualquer nível de atuação, deve ser capaz de mobilizar seus saberes, técnicos e pedagógicos, para propor práticas educativas produtivas e significativas para seus alunos.

Assim, é possível, conforme destaca A4, “nos tirar da teoria e nos levar para o lado mais prático do que aprendemos”, o que, na percepção de A7, “traz uma motivação maior aos alunos” e “ajuda na compreensão dos conceitos ensinados” (A5). Ademais, Stewart e Tall (2015) afirmam que, dessa forma, o indivíduo pode construir mais sentido para a Matemática e, assim, o que é bem compreendido em um estágio será, provavelmente, aproveitado como um *já-encontrado* positivo em desenvolvimentos futuros.

¹¹⁰ Se for levado em conta todos os séculos percorridos desde a Mesopotâmia e o Antigo Egito.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisando a construção histórica do Cálculo e, em especial, do conceito de integral, pôde-se perceber que sua gênese está associada à vontade do ser humano de explicar e resolver situações corpóreas do seu tempo. Assim, diversas experiências foram realizadas ao longo dos séculos de evolução desse campo do conhecimento matemático. Algumas dessas foram feitas a partir de artefatos palpáveis, como os barris de vinho de Kepler, enquanto outras encontraram subsídios em situações imaginárias, como as finas fatias de sólidos, criadas por Arquimedes, para a aplicação do método de alavancas.

Foi apenas no século XVII, contudo, que Isaac Newton e Gottfried Leibniz trouxeram uma nova realidade para o Cálculo Diferencial e Integral, a partir da construção de métodos algébricos algorítmicos para o cálculo de taxas de variação, máximos, mínimos, áreas e volumes. A partir desse período, essa área da Matemática passou a ser percebida, de forma mais considerável, no Mundo Operacional Simbólico e, sendo assim, difundiu-se cada vez mais rapidamente.

Dúvidas sobre as quantidades arbitrariamente pequenas e os processos infinitos, entretanto, ainda pairavam no ar e insistiam em tirar o sono de muitos pensadores da época, como Euler, D'Alembert, Lagrange e Cauchy, por exemplo. Esses problemas acabaram sendo resolvidos no final século XIX, cerca de cem anos após Newton e Leibniz terem publicado seus primeiros trabalhos na área e decifrado o Teorema Fundamental do Cálculo.

O maior responsável por construir a solução para essas dúvidas, que permeavam as maiores mentes matemáticas daquele tempo, foi Karl Weierstrass que, seguindo o movimento de formalização do Cálculo, iniciado por Bolzano e, principalmente, por Cauchy, introduziu a definição rigorosa do conceito de limite, por meio de épsilon e deltas. Dessa forma, cerca de dois mil e cem anos depois das primeiras ideias sobre integração criadas por Arquimedes, o Cálculo adentrou no Mundo Formal Axiomático e a Análise Matemática entrou, definitivamente, em cena.

Em contrassenso com esse panorama histórico construído, percebeu-se que as aulas contemporâneas de Cálculo são conduzidas, de acordo com a análise dos livros didáticos de Stewart (2014), Leithold (1994) e Anton, Bivens e Davis (2014), com uma lógica matemática inversa, abordando, nessa ordem: limites, derivadas e, só então, integrais. Essa realidade, conforme apontam Brojezi e Barufi (2007), remonta aos cursos de Cálculo propostos por Cauchy, na *École Polytechnique*, há cerca de duzentos anos.

Além disso, quando foi analisada especificamente a introdução ao conceito de integral, percebeu-se que, apesar de essa ser inicialmente ilustrada com algumas situações reais, o estudo se direciona, rapidamente, para a ideia de limite. Assim, somas aproximantes, direitas e esquerdas, são construídas, de tal maneira que, em poucas páginas, chega-se à definição de integral como o limite da soma de Riemann, uma ideia altamente sofisticada e complexa.

Seguindo esse paradigma dominante de ensino, acredita-se, entretanto, que se contribui para criar uma barreira cognitiva considerável entre os mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico, habitados pelos acadêmicos que ingressam nas universidades, e o Mundo Formal Axiomático, habitado pelos Professores de Cálculo. Dessa forma, concordando com Tall e Mejía-Ramos (2004), entende-se que a introdução ao estudo do conceito de integral não deve ser feita a partir de um mundo muito sofisticado, que enxerga o Cálculo pelas lentes do conceito de limite, um *já-encontrado* típico dos matemáticos, mas complexo demais para quem nunca realizou uma incursão, sequer, ao Mundo Formal Axiomático.

Sendo assim, procurou-se construir um cenário no qual o estudo do conceito de integral fosse realizado com base na realidade corpórea dos discentes, caracterizada, em grande parte, pelas concepções de Newton e Leibniz. Nesse sentido, buscou-se criar condições, com o auxílio da Modelação, para que os futuros professores percebessem a ideia de integral a partir de *já-encontrados* vindos da geometria, aritmética e álgebra, que pertencem aos mundos onde eles ainda residem, ao ingressar no Curso de Licenciatura em Matemática.

Nesse contexto, pôde-se notar que a abordagem proposta e aplicada junto aos futuros professores de Matemática foi bem aceita pela turma, que, conforme entendeu-se com o questionário inicial, estava habituada com realidades pedagógicas pautadas pelo paradigma: definição, teorema, exemplos e exercícios. Sendo assim, os alunos trouxeram sua percepção sobre a prática alternativa, construída nos mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico, destacando, nos metatextos elaborados por meio da ATD, que experiências palpáveis são mais significativas, trazendo, portanto, mais sentido para o que se estuda. Ademais, frisaram que uma postura docente que não prioriza as manipulações algébricas e as definições formais é capaz de trazer mais motivação aos educandos, servindo, inclusive, como uma inspiração para sua futura atuação profissional.

Considera-se, portanto, que os resultados dessa pesquisa apontam que os acadêmicos puderam construir uma introdução alternativa ao estudo do conceito de integral, a partir de seus *já-encontrados*, provenientes dos mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico.

Assim, a definição de limite, que pertence ao Mundo Formal Axiomático, ainda inabitado por esses estudantes, não foi necessária e a turma pôde percorrer caminhos diferentes dos tradicionais, que levaram a estradas (talvez) mais tortuosas, mas também mais semelhantes às aquelas percorridas pela humanidade e, portanto, provavelmente mais naturais.

Ademais, acredita-se que essa investigação pode levar a pesquisas futuras sobre a construção pedagógica de conceitos do Cálculo, provenientes do Mundo Conceitual Corporificado e do Mundo Operacional Simbólico. Para tanto, diversas metodologias e diferentes recursos existentes podem ser considerados, como o uso de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação e a Resolução de Problemas, por exemplo. Espera-se, também, que esse trabalho, que faz uso da Modelação para a construção do conceito de integral, atinja docentes de Cálculo que, considerando as particularidades de suas realidades, possam se inspirar para buscar formas de ensino e de aprendizagem mais convergentes com os mundos habitados pelos acadêmicos que frequentam suas aulas.

REFERÊNCIAS

- ABOTT, S. *Understanding Analysis*. New York: Springer, 2016.
- ALEXANDER, A. *Infinitesimal: a teoria matemática que revolucionou o mundo*. 1 ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.
- ALMEIDA, M. V. *Material para o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral: referências de Tall, Gueudet e Trouche*. 2017. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.
- ALMEIDA, L. M. W.; FATORI, L. H.; SOUZA, L. G. S. Ensino de Cálculo: uma abordagem usando Modelagem Matemática. *Revista Ciência e Tecnologia*, v. 10, n. 16, 2010.
- ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo*, v.1. Porto Alegre: Bookman, 2007.
- ARMITAGE, A. René Descartes (1596-1650) and the Early Royal Society. *Notes and Records of the Royal Society of London*, v. 8, n. 1, 1950.
- ARTIGUE, M. La Enseñanza de los Principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, M. et. al. *Ingeniería Didáctica em Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial IberoAmérica, 1995. p. 97-140.
- BACKENDORF, V. R.; BASSO, M. V. A. GeoGebra na Aprendizagem de Conceitos de Matemática Avançada. *Novas Tecnologias na Educação*, v. 16, n. 1, 2018.
- BALL, W. W. R. *A Short Account of the History of Mathematics*. New York: Dover Publications, 1960.
- BARDI, J. S. *A guerra do cálculo*. Rio de Janeiro: Record, 2008.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.
- BATISTA, G. S.; GOUVEIA, R. A.; CARMO, R. O. S. A Epistemologia da Prática Profissional Docente: observações acerca de alguns desafios atuais. *Ensino em Re-Vista*, v. 23, n. 1, 2016.
- BERKELEY, G. *The Analyst, or A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*. London: Tonson, 1734.
- BIEMBENGUT, M. S. *Modelagem Matemática e Implicações no Ensino e na Aprendizagem de Matemática*. 2ª ed. Blumenau: Edfurb, 2004.
- BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de Modelagem Matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *ALEXANDRIA – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v. 2, n. 2, 2009.
- BIEMBENGUT, M. S. *Modelagem na Educação Matemática e na Ciência*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino*. 3ª ed. São Paulo: Contexto, 2003.
- BONFIM, S. H.; CALÁBRIA, A. R. *O Cálculo Diferencial e Integral de Newton e Leibniz: aproximações e distanciamentos no método*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.
- BORBA, M. A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. In: 27ª Reunião Anual da Anped, *Anais*, 2004, Caxambu, MG.

- BOYER, C. B. *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover Publications, 1959.
- BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BRADLEY, R. E.; SANDIFER, C. E. *Cauchy's Cours d'analyse: an annotated translation*. New York: Springer, 2009.
- BRANDEMBERG, J. C. *Uma História da Integral: de Arquimedes a Lebesgue*. São Paulo: Livraria da Física, 2017.
- BROLEZZI, A. C.; BARUFI, M. C. B. *História da Matemática e o Ensino de Cálculo: reflexões sobre o pensamento reverso*. Guarapuava: SBHMat, 2007.
- BUENO, R. W. S.; BALLEJO, C. C.; VIALI, L. Entrando na Zona de Risco: utilizando as TDIC para ensino e aprendizagem de conceitos de Estatística Descritiva. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, n. 1, p. 71-88, 2020.
- BUENO, R. W. S.; VIALI, L. A Construção Histórica do Conceito de Função. *Educação Matemática em Revista – RS*, v. 1, n. 10, 2009.
- CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradativa, 2003.
- CARVALHO, T. F.; MORAES, P.; FERREIRA, D. H. L. Descartes; de sua passagem pelo colégio jesuíta royal Henry-le-Grand à criação da geometria analítica. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 16, n. 31, 2016.
- COHEN, B.; WESTFALL, R. S. *Newton: textos, antecedentes e comentários*. Rio de Janeiro: Contraponto, 2002.
- CONTADOR, P. R. M. *Matemática: uma breve história*, v. 2. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- COOK, A. G. The 350th Anniversary of the Birth of G. W. Leibniz. *The Royal Society Journal of the History of Science*, n. 2, v. 50, 1996.
- D'ALEMBERT, J. R. *The Encyclopedia of Diderot e D'Alembert Collaborative Translation Project*. 2012. Disponível em <https://quod.lib.umich.edu/d/did/did2222.0001.091>. Acesso em 09, de abril, de 2020.
- D'AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1996.
- D'AMBROSIO, U. *Transdisciplinaridade*. São Paulo: Palas Athenas, 1997.
- D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: Bassanezi, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.
- D'AMBRÓSIO, U.; VALENTE, C. Os Primórdios da Epistemologia do Cálculo: dos babilônios a Arquimedes. In: FONSECA, L. *Didática do Cálculo: epistemologia, ensino e aprendizagem*. São Paulo: Livraria da Física, 2016.
- D'AMORE, B. *Epistemologia e Didática da Matemática*. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.
- DEMO, P. *Educar pela Pesquisa*. 7 ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2005.
- DESLANDES, S. F. A Construção do Projeto de Pesquisa. In: MINAYO, M. C. S (org.). *Pesquisa Social: teoria, método e criatividade*. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2002.
- DEWEY, J. *Vida e Educação*. 10 ed. São Paulo: Melhoramentos, 1978.
- DEWEY, J. *Como Pensamos: como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo*. São Paulo: Editora Nacional, 1979.

- DIAS, R. R. *Aspectos Cognitivos e Conceituais Mobilizados na Resolução de Problemas de Otimização por Estudantes de Engenharia*. Tese. (Doutorado em Educação matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.
- DUVAL, R. *Semiósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- DUVAL, R. *Ver e Ensinar a Matemática de Outra Forma - Entrar no Modo Matemático de Pensar: os registros de representação semiótica*. São Paulo: PROEM, 2011.
- EDWARDS, C. H. *The historical development of calculus*. New York: Springer, 1979.
- EULER, L. *Introduction to Analysis of the Infinite*. New York: Springer, 1988.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.
- FEINGOLD, M. *Before Newton: the life and times of Isaac Barrow*. Melbourne: Cambridge University Press, 1990.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3 ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.
- FONSECA, D. S. S. M. *Convergência de Sequências e Séries Numéricas no Cálculo: um trabalho visando a corporificação de conceitos*. Dissertação. (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.
- GARBI, G. G. *A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.
- GARBI, G. G. *O Romance das Equações Algébricas*. São Paulo: Makron Books, 1997.
- GARNICA, A. V. M. Pesquisa Qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. *Mimesis*, Bauru, v. 22, n. 1, p. 35-48, 2001.
- GIL, A. C. *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social*. 5 ed. São Paulo: Atlas, 1999.
- GIRALDO, V. *Descrições e Conflitos Computacionais: o caso da derivada*. Tese. (Engenharia de Sistemas e Computação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.
- GLEICK, J. *Isaac Newton*. São Paulo: Companhia das Letras, 2004.
- GRABINER, J. V. *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Cambridge: MIT Press, 1981.
- GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, v. 71, n. 3, p. 199-218, 2009.
- GUICCIARDINI, N. John Wallis as Editor of Newton's Mathematical Work. *Notes and Records of the Royal Society*, 2011.
- HALL, M. B. The Royal Society's role in the diffusion of information in the seventeenth century. *The Royal Society Journal of the History of Science*, n. 2, v. 29, 1975.
- HARARI, Y. N. *Sapiens – uma breve história da humanidade*. 1 ed. Porto Alegre: L&PM, 2015.
- LEITE, M. B. F. Reflexões sobre a Disciplina de Modelagem Matemática na Formação de Professores. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 10, n. 1, 2008.
- LEME, J. C. M. *Aprendizagem da Derivada: uma perspectiva de análise pelos fluxos de pensamento*. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.
- LOVITTS, B. E. *Making the implicit explicit: creating performance expectations for the dissertation*. Virginia: Stylus, 2007.

- LIMA, R. N. *Equações Algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da matemática*. 2007. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.
- LIMA, R. N.; TALL, D. Procedural Embodiment and Magic in Linear Equations. *Educational Studies in Mathematics*, v. 67, p. 3-18, 2008.
- MAÇÃO, D. P. *Uma Proposta de Ensino para o Conceito de Derivada*. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014.
- MACHADO, N. J. *Matemática e Realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática*. 2 ed. São Paulo: Autores Associados, 1991.
- MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.
- MINAYO, M. C. S. Ciência, Técnica e Arte: o desafio da pesquisa social. In: MINAYO, M. C. S (org.). *Pesquisa Social: teoria, método e criatividade*. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2002.
- MORAES, R. Uma Tempestade de Luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. *Ciência e Educação*, n. 9, v. 2, p. 191-211, 2003.
- MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. *Análise Textual Discursiva*. 3 ed. Ijuí: Ed. Unijuí, 2016.
- MOROSINI, M. da C; NASCIMENTO, L. M do. Internacionalização da Educação Superior no Brasil. *Educação em Revista*. Belo Horizonte, n. 33, 2017.
- MOROSINI, M. Estado do conhecimento e questões de campo científico. *Revista da Educação*. Santa Maria, v. 40, n. 1, p. 101-116, jan./abr. 2015.
- MÜLLER, T. J. *Objetos de Aprendizagem Multimodais e o Ensino de Cálculo: uma proposta baseada em análise de erros*. 2015. Tese. (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.
- MÜLLER, T. J.; AMARAL, E. M. H. Uma Concepção Motivacional para o Ensino de Cálculo a Proposta E₂D. In: *Segunda Conferência Latinoamericana sobre el Abandono en la Educación Superior*. 2012. Porto Alegre. Anais.
- PAULA, M. C.; MENEZES, A. L. S.; GUIMARÃES, G. T. D. Análise Textual Discursiva: possibilidades de imersão. In: *Resinificando os Labirintos da Pesquisa Qualitativa: exercícios práticos de análise de discurso*. GUIMARÃES, G. T. D. (org.). Porto Alegre: EDIPUCRS, 2015.
- PIMENTA, A. S.; FERREIRA, J. V. Estudo de Caso: uma proposta de escopo. *Interação*, n. 12, v. 12, 2010.
- PONTE, J. P. Estudos de Caso em Educação Matemática. *BoleMa*, n. 25, p. 1-23, 2006.
- QUIVY, R.; CAMPENHOUDT, L. V. *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. 4 ed. Lisboa: Gradativa, 2005.
- RACHELLI, J.; BISOGNIN, V. Construções históricas e o conceito de derivada: um estudo com base na teoria APOS. *Educação Matemática em Revista – RS*, n. 20, v. 1, 2019.
- ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- SEVERINO, A. J. *Metodologia do Trabalho Científico*. São Paulo: Cortez, 2007.
- SINGH, S. *O Último Teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos*. Rio de Janeiro: Record, 1999.

SINKEVICH, G. I. Karl Weierstrass' Bicentenary. *Cornel University*, Ithaca, 2015. Disponível em: < <https://arxiv.org/abs/1508.02928>>. Acesso em: 17 de abril de 2020.

SOARES, G. O. *O Conceito de Limite na Formação Inicial de Professores de Matemática: um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática*. 2018. Dissertação. (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2018.

SOUZA, R. S.; GALIAZZI, M. C. O Jogo da Compreensão na Análise Textual Discursiva em Pesquisas na Educação em Ciências: revisitando quebra-cabeças e mosaicos. *Ciência & Educação (Bauru)*, v. 24, n. 3, 2018.

STEWART, I. *Dezessete equações que mudaram o mundo*. Zahar: Rio de Janeiro, 2013.

STEWART, I. *Em busca do infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos*. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

STEWART, I.; TALL, D. *The Foundations of Mathematics*. Oxford: University Press, 2015.

STEWART, J. *Cálculo*. v. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

TALL, D. *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics*. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) – University of Warwick, Inglaterra, 1986.

TALL, D. Real Mathematics, Rational Computers and Complex People. In: Annual International Conference on Technology in College Mathematics Teaching, 5, 1993. *Proceedings*. Addison-Wesley, p. 243-258, 1993.

TALL, D. Computer Environments for the Learning of Mathematics. In: BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; WINKLEMANN, B. *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 189-199, 1994.

TALL, D. Advanced Mathematical Thinking and the Computer. In: *20th University Mathematics Teaching Conference*. 1996. Nottingham. Proceedings.

TALL, D. Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. In: CARVALHO, L. M.; GUIMARÃES, L. C. *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, v. 1, p. 1-28. Rio de Janeiro, Brasil, 2003.

TALL, D. Thinking through three worlds of mathematics. In: *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 28, 2004, Bergen, Norway, 2004.

TALL, D. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. In: *Mathematics Education Research Journal*, p. 5-24, 2008.

TALL, D. A Sensible Approach to the Calculus. In: *National and International Meeting on the Teaching of Calculus*. Puebla, México, 2010.

TALL, D. *How Humans Learn to Think Mathematically: exploring the three worlds of mathematics*. New York: Cambridge, 2013.

TALL, D.; GRAY, E. Duality, Ambiguity, and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. In: International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 15, 1991, Assisi. *Proceedings*. Assisi: PME, 1991, p. 72-79.

TALL, D.; LI, L. Constructing Different Concepts Images of Sequence & Limits by Programming. In: International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 17, 1992, Tsukuba. *Proceedings*. Tsukuba: PME, 1992, p. 41-48.

- TALL, D.; LIMA, R. N.; HEALY, L. Evolving a Three-World Framework for Solving Algebraic Equations in the Light of What Student Has Met Before. *Journal of Mathematics Behavior*, 34, p. 1-13, 2014.
- TALL, D.; MEJÍA-RAMOS, J. P. Reflecting on Post-Calculus Reform. In: International Congress of Mathematics Education, 2004, Copenhagen, DK. *Proceedings*. Plenary for Topic Group 12: Calculus. Copenhagen, DK, 2004.
- TALL, D.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Special Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, n. 12, p. 151-169, 1981.
- TAVARES, P. T.; SCHELLER, M. Modelagem Matemática como Método de Ensino no Estágio de Docência. In: *Vivências e Experiências na formação inicial de Matemática*. Blumenau: Editora do Instituto Federal Catarinense, 2019.
- THURSTON, W. P. On the Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin on the American Mathematical Society*, v. 30, n. 2, p. 161-177, 1994.
- YOUSCHKEVITCH, A. P. The Concept of Function up to the middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 16, n. 1, p. 37-85, 1976.
- YIN, R. K. *Estudo de Caso: planejamento e métodos*. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- WESTFALL, R. S. *A vida de Isaac Newton*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.
- WHITE, M. *Isaac Newton: o último feiticeiro*. Rio de Janeiro: Record, 2000.
- WHITESIDE, D. T. Newton, o matemático. In: COHEN, I. B.; WESTFALL, R. S. (Orgs.). *Newton: textos, antecedentes, comentários*. Rio de Janeiro: Contraponto, 2002.



Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
Pró-Reitoria de Graduação
Av. Ipiranga, 6681 - Prédio 1 - 3º. andar
Porto Alegre - RS - Brasil
Fone: (51) 3320-3500 - Fax: (51) 3339-1564
E-mail: prograd@pucrs.br
Site: www.pucrs.br