

ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA - PPGE
MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

JONATHAN CULAU

CONTROLADOR MULTI-RESSONANTE PARA REJEIÇÃO DE
PERTURBAÇÕES COM FREQUÊNCIA VARIANTE NO TEMPO EM
PLATAFORMAS STEWART

Porto Alegre
2021

PÓS-GRADUAÇÃO - *STRICTO SENSU*



Pontifícia Universidade Católica
do Rio Grande do Sul

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**CONTROLADOR
MULTI-RESSONANTE PARA
REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÕES
COM FREQUÊNCIA VARIANTE
NO TEMPO EM PLATAFORMAS
STEWART**

JONATHAN CULAU

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Da Silveira Castro

**Porto Alegre
2021**

Ficha Catalográfica

C967c Culau, Jonathan

Controlador multi-ressonante para rejeição de perturbações com frequência variante no tempo em plataformas Stewart / Jonathan Culau. – 2021.

60.

Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, PUCRS.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Da Silveira Castro.

1. plataforma Stewart. 2. desigualdades matriciais lineares. 3. regulação de saída. 4. rejeição de perturbações. 5. controle multi-ressonante. I. Castro, Rafael Da Silveira. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da PUCRS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Bibliotecária responsável: Clarissa Jesinska Selbach CRB-10/2051



Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

ESCOLA POLITÉCNICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA - PPGE

CONTROLADOR MULTI-RESSONANTE PARA REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÕES COM FREQUÊNCIA VARIANTE NO TEMPO EM PLATAFORMAS STEWART

CANDIDATO: JONATHAN CULAU

Esta Dissertação de Mestrado foi julgada para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

DR. RAFAEL DA SILVEIRA CASTRO - ORIENTADOR

BANCA EXAMINADORA

DR. AURELIO TERGOLINA SALTON - UFRGS

DR. FABIAN LUIS VARGAS - PPGE - PUCRS

PUCRS

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente ao meu orientador Prof. Rafael da Silveira de Castro e ao Prof. Guilherme Araújo Pimentel que iniciou o meu mestrado como orientador, pelo conhecimento, empenho e cooperação que foram essenciais para elaboração deste trabalho. Agradeço aos colegas pela amizade construída e pelo companheirismo durante o mestrado. Agradeço especialmente aos meus pais pelo incessante apoio e incentivo nesta jornada. Também agradeço a minha esposa e companheira por todo apoio e suporte emocional durante essa jornada.

CONTROLADOR MULTI-RESSONANTE PARA REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÕES COM FREQUÊNCIA VARIANTE NO TEMPO EM PLATAFORMAS STEWART

RESUMO

Este trabalho apresenta o projeto de um esquema de controle robusto para rejeição de perturbações exógenas para plataformas Stewart. Para considerar todas as não linearidades do sistema, foi utilizada uma formulação baseada em quatérnios junto a uma representação politópica *Quasi-Linear Parameter Varying*. Para fornecer uma regulação de saída robusta na presença de perturbações harmônicas com frequência fundamental variante no tempo, foi proposto o projeto de um controlador com modelo interno multi-ressonante. A estabilidade do sistema em malha fechada é garantida através de uma lei de controle por realimentação de estados sintetizada através da solução de um problema de otimização convexa submetido a desigualdades matriciais lineares, a prova de estabilidade considera todas as não linearidades da dinâmica da plataforma e é ela válida para um conjunto de condições iniciais admissíveis \mathcal{D} . Resultados numéricos obtidos mediante simulação mostram eficácia do modelo interno multi-ressonante, por uma perspectiva prática considerou-se um cenário onde a plataforma é utilizada como um mecanismo de estabilização no oceano e as ondas oceânicas geram as perturbações harmônicas com frequência variante no tempo.

Palavras-Chave: plataforma Stewart, desigualdades matriciais lineares, regulação de saída, rejeição de perturbações, controlador multi-ressonante, quatérnios.

MULTI-RESONANT CONTROLLER FOR FREQUENCY-VARYING DISTURBANCE REJECTION IN STEWART PLATFORMS

ABSTRACT

This work presents the design of a robust disturbance rejection control scheme for Stewart platforms. To fully take into account the system nonlinearities, the quaternion based description is used along with a Quasi-Linear Parameter Varying representation. In order to provide robust output regulation, in the presence of frequency-varying disturbances, we propose the design of a multi-resonant internal model controller. The closed-loop stability is guaranteed by a state-feedback law synthesized via a convex optimization problem subject to linear matrix inequalities. The stability proof fully takes into account the platform nonlinearities and it is valid for a set of admissible initial conditions \mathcal{D} . The numerical results obtained via simulations show the effectiveness of the multi-resonant controller applied to a Stewart platform in the case that the platform is used as a stabilization device on the ocean where the ocean waves generate frequency-varying harmonic disturbances.

Keywords: Stewart platform, linear matrix inequalities, output regulation, disturbance rejection, multi-resonant controller, quaternions.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Ângulos Eulers	20
2.2	Exemplo de politopo	24
2.3	Diagrama de blocos com PMI	27
2.4	Plataforma Stewart	30
2.5	Parâmetros Geométricos e Vértices	31
2.6	Principais Vetores da Plataforma Stewart	32
2.7	Representação em malha aberta do sistema da plataforma	35
3.1	Sistema em malha fechada	39
4.1	Simulação condições iniciais zeradas e perturbações harmônicas com frequência fundamental $\delta = \underline{\delta} = 0.3rad/s$	47
4.2	Simulação condições iniciais zeradas e perturbações harmônicas com frequência fundamental $\delta = 0.4rad/s$	47
4.3	Simulação condições iniciais zeradas e perturbações harmônicas com frequência fundamental $\delta = \bar{\delta} = 0.5rad/s$	48
4.4	Simulação condições iniciais zeradas e perturbações harmônicas com frequência fundamental variando linearmente entre $\underline{\delta}$ e $\bar{\delta}$	48
4.5	Simulação condições iniciais zeradas e perturbações harmônicas com frequência fundamental variando com um sinal de degrau entre $\underline{\delta}$ e $\bar{\delta}$	49
4.6	Simulação sem perturbação com condição inicial variando a orientação no eixo x em 22° e a posição p	49
4.7	Simulação sem perturbação com condição inicial variando a velocidade angular ω e a velocidade de translação v	50
4.8	Simulação com condições iniciais diferentes de zero e perturbações harmônicas com frequência fundamental $\delta = \underline{\delta} = 0.3rad/s$	50
4.9	Simulação com condições iniciais diferentes de zero e perturbações harmônicas com frequência fundamental $\delta = 0.4rad/s$	51
4.10	Simulação com condições iniciais diferentes de zero e perturbações harmônicas com frequência fundamental $\delta = \bar{\delta} = 0.5rad/s$	51
4.11	Simulação com condições iniciais fora do Elipsóide \mathcal{D} com $V(\mathbf{z}) \approx 3.1847$. .	52

LISTA DE TABELAS

4.1	Parâmetros da Plataforma Stewart	45
4.2	Parâmetros utilizados na Síntese do Controlador	45

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LMI – *Linear Matrix Inequality*

GDL – Gaus de Liberdade

CKC – *Closed kinematic Chain*

OKC – *Opened kinematic Chain*

PMI – Princípio do Modelo Interno

SPE – Semi-Plano Complexo Esquerdo

SPD – Semi-Plano Complexo Direito

LPV – *Linear Parameter Varying*

3D – Tridimensional

LISTA DE SÍMBOLOS

I_n	Matriz identidade com n linhas e colunas
0_n	Matriz de zeros com n linhas e colunas
$0_{n \times m}$	Matriz de zeros de n linhas e m colunas
$1_{n \times m}$	Matriz de uns de n linhas e m colunas
A^\top	Transposta da matriz de A
A^{-1}	Inversa da matriz de A
$\text{diag}(A, B)$	Matriz bloco-diagonal formada pelas matrizes A e B , isto é
	$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$
$\text{rank}(A)$	Posto da Matriz A
$\text{tr}(A)$	Traço da Matriz A
\star	Utilizado em matrizes simétricas para representar o respectivo elemento transposto da matriz, isto é
	$\begin{bmatrix} A & B \\ \star & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{bmatrix}$
$\dot{x}(t)$	Derivada de $x(t)$ em relação ao tempo, isto é $\frac{dx}{dt}$
\mathbb{R}	Domínio dos números reais
\mathbb{R}^n	Espaço euclidiano real de ordem n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$
$\ x\ $	Norma euclidiana do vetor x , isto é $\sqrt{x^\top x}$
$ x $	módulo de x
\mathbb{H}	Domínio dos números Hamiltoniano
\mathbb{C}	Domínio dos números Complexos
$\text{Co}\{a, b\}$	Envelope convexo formado pelos vértices a e b
$\mathcal{V}(P)$	Vértices do Polítipo P
$\text{sgn}(k)$	Sinal do escalar k
\mathbf{q}	quatérnio no domínio Hamiltoniano
q	quatérnio na forma vetorial
x_i	i -ésimo elemento do vetor x
A_i	i -ésima linha da matriz A
$A_{i,j}$	É o elemento na i -ésima linha na j -ésima coluna da matriz A .
$A > 0$	Significa que todos os autovalores da matriz A são positivos
$A < 0$	Significa que todos os autovalores da matriz A são negativos
$\text{He}\{A\}$	$\text{He}\{A\} := A + A^\top$
\otimes	Produto de Kronecker, considerando duas matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e

$$B \in \mathbb{R}^{p \times q}, \text{ então } A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{1,1}B & \dots & BA_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1}B & \dots & BA_{m,n} \end{bmatrix}$$

$\text{Vec}(A)$ Vetorização da matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, ou seja, $\text{Vec}(A) \in \mathbb{R}^{nm} = [A_{1,1} \ \dots \ A_{n,1} \ A_{1,2} \ \dots \ A_{n,2} \ \dots \ A_{1,m} \ \dots \ A_{n,m}]^T$

$\lambda(A)$ Autovalores da matriz A

$\lambda_{\max}(A)$ Autovalor máximo da matriz A

$\lambda_{\min}(A)$ Autovalores mínimo da matriz A

□ Fim da prova

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	OBJETIVOS	17
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO	17
2	PRELIMINARES	18
2.1	QUATÉRNIOS	18
2.1.1	COMPARAÇÃO COM ÂNGULOS EULER	20
2.2	ESTABILIDADE NO SENTIDO DE LYAPUNOV	21
2.3	DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES (LMIS)	22
2.4	PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE ROBUSTO	23
2.4.1	MODELAGEM POLITÓPICA	24
2.4.2	REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS	25
2.5	PRINCIPIO DO MODELO INTERNO	26
2.6	PLATAFORMA STEWART	30
2.6.1	DESCRIÇÃO GEOMÉTRICA	30
2.6.2	MATRIZ JACOBIANA	31
2.6.3	DINÂMICA DA PLATAFORMA	34
3	METODOLOGIA PROPOSTA	36
3.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	36
3.2	FORMULAÇÃO QUASI-LPV	37
3.3	PROJETO DE CONTROLE	38
3.3.1	PROJETO DOS TERMOS DE Φ E Γ DO MODELO INTERNO DO CONTROLADOR	39
3.3.2	PROJETO BASEADO EM LMIS DOS TERMOS DE REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS H E K	41
4	EXEMPLOS NUMÉRICOS	45
4.1	SÍNTESE DA LEI DE CONTROLE	45
4.2	SIMULAÇÕES	45
4.3	ANÁLISE DO RESULTADOS	53
5	CONCLUSÃO	55

5.1 TRABALHOS FUTUROS 56

1. INTRODUÇÃO

A plataforma Stewart inicialmente foi concebida como um simulador de vôos na década de 1960 (Stewart, 1966) e até hoje se trabalha com esta aplicação (Villacis et al., 2017). Com o passar dos anos foram sendo descobertas novas aplicações para a plataforma, como por exemplo, transferências de carga offshore (de Faria et al., 2016), simulador de perturbações harmônicas (El-Badawy e Shehata, 2014) e como bases estrutural de telescópios (Huang et al., 2011).

A plataforma consiste em um sistema cinemático paralelo com seis graus de liberdade (6-GDL) fornecido por um mecanismo de cadeia cinemática fechada (CKC). Esta característica permite que o manipulador se mova em três direções lineares e três direções angulares individualmente ou com qualquer combinação. Além disso, os mecanismos conectados em paralelo são construídos de forma que os elos e as juntas de dois ou mais atuadores conectem a base do manipulador ao efetuador. Quando comparados com mecanismos de cadeia cinemática aberta (OKC), os manipuladores CKC, possuem diversas vantagens, como melhor rigidez estrutural, a carga útil é distribuída proporcionalmente para os links e erros do atuador não cumulativo (Fichter, 1986).

Desde que foi proposta por Stewart (1966), a plataforma tem sido estudada por diversos pesquisadores, devido a sua grande complexidade. Vários métodos de modelagem já foram propostos nos últimos anos com o objetivo de descrever a dinâmica deste manipulador, tais como: Newton-Euler (Do e Yang, 1988), Formulação Lagrange (Hajimirzaalian et al., 2010), equação de Kane (Liu et al., 2000), Dinâmica baseada em quatérnio (de Faria et al., 2016) e Rede recorrente de Elman (Guo et al., 2013).

Nas últimas três décadas, também foram propostas algumas estratégias de controle voltadas a seguimento de sinais (Ayas et al., 2014; Villacis et al., 2017; Kim e Lee, 1998) e diversas estratégias de controle voltadas a rejeição de perturbações periódicas, que é o escopo deste trabalho, como por exemplo controlador de dinâmica inversa com modelo aproximado (IDC) (Lee et al., 2003) ou um controlador de rejeição de auto-perturbação (ADRC) (Su et al., 2004). Normalmente, esses métodos usam modelos simplificados com algumas linearizações, desta forma, a estabilidade de todo o sistema não pode ser garantida. Por outro lado, esquemas de controle adaptativo (Nguyen et al., 1993), controle de modo deslizante de ordem superior (Kumar e Bandyopadhyay, 2012) foram propostos para lidar com estas aproximações do modelo dinâmico, no entanto, essas soluções ainda possuem o problema *chattering* das entradas.

O fenômeno de *chattering* é um problema extremamente relevante, além de acelerar a desgaste dos atuadores do sistema, pode afetar o desempenho do projeto de controle, ainda mais considerando uma aplicação onde a plataforma lida com perturbações harmônicas com frequências variantes no tempo. Na literatura encontramos algumas alternativas

para contornar esse problema, por exemplo, em Castro et al. (2017) foi proposto um controlador ressonante com frequência variável para redução de carga em turbinas eólicas. Neste estudo, é proposto um lei de controle por realimentação de estados sintetizada através da solução de um problema de otimização submetido a desigualdades matriciais lineares (LMIs - Linear Matrix Inequalities), a principal vantagem de utilizar esse framework é a propriedade da convexidade que permite encontrar de maneira eficiente soluções ótimas globais Boyd (1994). Portanto LMIs proveem uma forma sistemática de projetar uma lei de controle por realimentação de estados, seguindo esta linha já existem alguns estudos aplicando LMIs para síntese de controle em plataformas Stewart. Em de Faria et al. (2016), a plataforma foi descrita com um modelo baseados em quatérnios e o sistema foi dividido em dois subsistemas: um linear invariante no tempo de translação e um não linear de rotação, foi apresentada uma lei de controle não linear para garantir a convergência do sistema, mas a rejeição de perturbações periódicas somente foi possível através de uma linearização da plataforma.

As não linearidades da plataforma, podem ser descritas por uma representação politópica Quasi-Linear com parâmetros variantes no tempo (Quasi-LPV - Quasi-Linear Parameter Varying), onde o termo quasi é adicionado, pois os parâmetros variantes não dependem exclusivamente de sinais externos, mas também do vetor de estados do sistema. A utilização de modelagem LPV e Quasi-LPV para controle de sistemas não lineares se provou uma solução bastante atrativa no decorrer dos anos, tendo em vista que há diversos sistemas reais que podem ser representados dessa maneira e existem diversas formas de identificar o modelo de um sistema com este tipo de formulação (Wassink et al., 2005; Lee e Poolla, 1999).

Considerando os problemas apresentados, este trabalho propõe um projeto de controle robusto para rejeição de perturbações harmônicas com frequência fundamental variante no tempo para plataformas Stewart. Olhando por uma perspectiva prática, podemos considerar um cenário onde a plataforma é utilizada como um mecanismo de estabilização no oceano, onde as ondas oceânicas geram as principais perturbações do sistema. As não linearidades da plataforma são contornadas por uma representação quasi-LPV. Para lidar com as perturbações, o controlador deve ser capaz de replicar os estados do gerador exógenos responsável pelas mesmas, portanto este trabalho propõe um controlador baseado no Princípio do Modelo Interno (PMI), com dinâmica multi-ressoante para anular n harmônicas do gerador exógeno. O controlador tem como parâmetro variante a frequência fundamental das perturbações, portanto toma-se como premissa que essa frequência é medida. Os estados do controlador são combinados com os do sistema original, o qual pretende-se controlar, formando desta forma um sistema aumentado. O trabalho, então, descreve uma maneira sistemática para síntese de uma lei de controle por realimentação de estados utilizando LMIs baseadas nos critérios de estabilidade de Lyapunov.

1.1 Objetivos

O principal objetivo do trabalho é o desenvolvimento de um controlador robusto para plataformas Stewart visando à rejeição de perturbações periódicas com frequência fundamental variante no tempo que esteja contida dentro de um conjunto politópico predefinido. A prova de estabilidade teórica considera todas as não linearidades do sistema. Além disso, este trabalho tem como objetivo a convergência da saída do sistema com desempenho exponencial a partir de uma região de condições iniciais admissíveis \mathcal{D} .

1.2 Estrutura do Trabalho

Este trabalho foi organizado da seguinte maneira. Primeiramente um capítulo de preliminares que tem como objetivo apresentar as principais ferramentas utilizadas no desenvolvimento deste trabalho, como a representação de rotação por quatérnios, a estabilidade no sentido de Lyapunov e o Princípio do Modelo Interno. Ainda neste capítulo, é apresentada a modelagem de uma plataforma Stewart, começando pela descrição geométrica, juntamente com a formulação da matriz Jacobiana e formalização da descrição completa da dinâmica da plataforma. O capítulo 3 apresenta as principais contribuições deste trabalho, começando pela formulação de um modelo politópico Quasi-LPV da plataforma e posteriormente partindo para a definição do problema de maneira genérica, juntamente com a descrição matemática do gerador exógeno responsável pelas perturbações aplicadas a plataforma. Na sequência inicia-se, a formulação do projeto de controle e a formalização da prova de estabilidade e definição de parâmetros de desempenho da malha de controle. No capítulo 4, são apresentados os exemplos numéricos obtidos através de simulações utilizando o software MATLAB (2017) e o capítulo 5 conclui o trabalho e apresenta propostas para trabalhos futuros.

2. PRELIMINARES

Neste capítulo é introduzido os principais conceitos, teoremas e definições que foram utilizadas na metodologia proposta. Primeiramente, serão abordados os quatérnios e as ferramentas matemáticas utilizadas para manipula-los, então são apresentadas as ferramentas de análise de sistemas começando com a apresentação do conceito de estabilidade no sentido de Lyapunov. Após apresentados estes conceitos, é abordada a síntese de controladores robustos com base em Desigualdades Matriciais Lineares e o capítulo é encerrado com a descrição do Princípio do Modelo Interno, o qual é um dos conceitos mais importantes do trabalho tendo em vista a rejeição de perturbações exógenas.

2.1 Quatérnios

Um quatérnio $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$, originalmente proposto por W. R. Hamilton entre 1844 - 1850 e revisto por Wilkins (2000), pode ser definido como uma extensão dos números complexos \mathbb{C} descritos no domínio hamiltoniano \mathbb{H} . Um quatérnio pode ser representado na seguinte forma:

$$\mathbf{q} = \eta + \epsilon_1 i + \epsilon_2 j + \epsilon_3 k, \quad (2.1)$$

onde $\eta \in \mathbb{R}$ e $\epsilon \in \mathbb{R}^3$, entretanto i, j e k são identidades imaginárias (Wilkins, 2000).

Um quatérnio \mathbf{q} pode ser utilizado para expressar a rotação ou a posição de um determinado corpo em um espaço tridimensional. É necessário toda uma estrutura matemática especial para lidarmos com quatérnio $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ no domínio Hamiltoniano, todavia também é possível representá-los com uma forma algébrica vetorial, tal como:

$$\mathbf{q} \rightarrow q = \begin{bmatrix} \eta \\ \epsilon \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Neste trabalho, vamos utilizar a representação vetorial durante os capítulos remanescentes. De forma complementar, as definições 2.1.1 a 2.1.4 são necessárias para que possamos compreender o trabalho.

Definição 2.1.1 (Produto entre quatérnios). *O produto entre dois quatérnios q_a e q_b pode ser obtido através:*

$$q = D(q_a)q_b = N(q_b)q_a, \quad (2.3)$$

onde

$$D(q) = \begin{bmatrix} \eta & -\epsilon^\top \\ \epsilon & \eta I_3 + S(\epsilon) \end{bmatrix}, N(q) = \begin{bmatrix} \eta & -\epsilon^\top \\ \epsilon & \eta I_3 - S(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

onde $S(x)$ é uma função $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que define uma matriz quadrada que equivale ao produto vetorial:

$$x \times y = S(x)y \quad (2.5)$$

onde

$$S(x) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad (2.6)$$

Definição 2.1.2 (Norma de um quatérnio). *O comprimento de q é definido como sua norma:*

$$\|q\| = \sqrt{q^\top q} \quad (2.7)$$

Definição 2.1.3 (Quatérnio unitário). *Um quatérnio com norma igual a 1. Podemos utilizá-lo para representar a rotação de um ângulo θ em torno de um vetor unitário $r \in \mathbb{R}^3$ da seguinte forma:*

$$q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ r \operatorname{sen}(\theta) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Definição 2.1.4 (Matriz de rotação). *Considere um vetor $z \in \mathbb{R}^3$ nas coordenadas globais, se $z' \in \mathbb{R}^3$ é o mesmo vetor nas coordenadas locais de um determinado corpo, então podemos considerar a seguinte relação:*

$$z' = R(q)z, \quad (2.9)$$

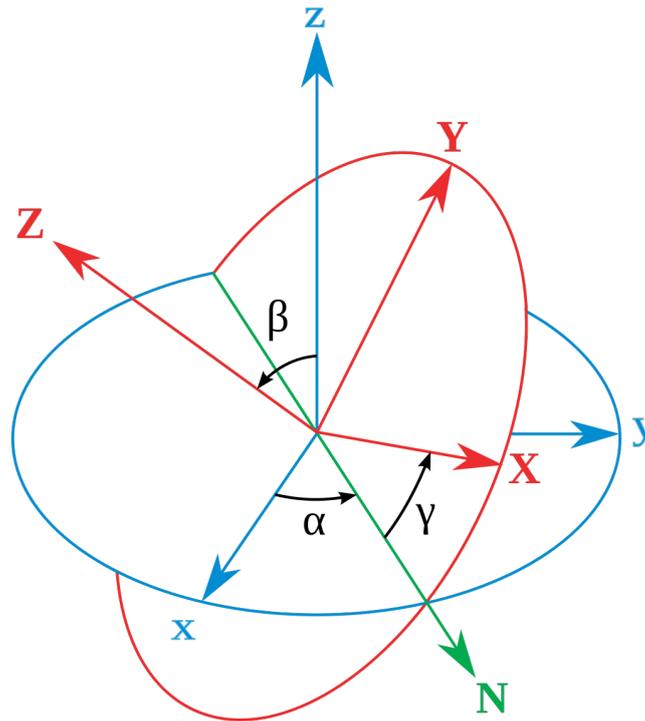
onde $R(q) \in \mathbb{R}^3$ é uma matriz de rotação definida por:

$$R(q) = I_3 + 2\eta S(\epsilon) + 2S^2(\epsilon), \quad (2.10)$$

2.1.1 Comparação com ângulos Euler

Os ângulos euler, ilustrados pela Figura 2.1, são mais conhecidos em relação aos quatérnios para representar a rotação de um corpo no espaço, pois estes são mais fáceis de compreender.

Figura 2.1: Ângulos Eulers



Considerando um quatérnio de unitário q utilizado para representar a rotação de um determinado corpo no espaço, o seu equivalente em ângulos euler poder obtido por:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{2(\eta\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_3)}{1 - 2(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)}\right) \\ \arctan(2(\eta\epsilon_2 - \epsilon_3\epsilon_1)) \\ \arctan\left(\frac{2(\eta\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_2)}{1 - 2(\epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)}\right) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

e q pode ser obtido, de maneira inversa, através:

$$q = \begin{bmatrix} \cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2) - \text{sen}(\alpha/2)\text{sen}(\beta/2)\text{sen}(\gamma/2) \\ \text{sen}(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2) - \cos(\alpha/2)\text{sen}(\beta/2)\text{sen}(\gamma/2) \\ \cos(\alpha/2)\text{sen}(\beta/2)\cos(\gamma/2) - \text{sen}(\alpha/2)\cos(\beta/2)\text{sen}(\gamma/2) \\ \cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\text{sen}(\gamma/2) - \text{sen}(\alpha/2)\text{sen}(\beta/2)\cos(\gamma/2) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Os ângulos de Euler, quando comparado com quatérnios, são mais intuitivos, logo são mais fáceis de compreender. Eles também são bons para decompor rotações em graus

de liberdade individuais, porém possuem desvantagens como ambiguidades e bloqueio de cardan (quando dois ou mais eixos se de rotação se alinham) que remove um grau de liberdade do modelo matemático.

2.2 Estabilidade no sentido de Lyapunov

O conceito de estabilidade de Lyapunov é uma generalização do conceito de energia proveniente da física. Mais precisamente, concluímos que um sistema é estável no sentido de Lyapunov se a sua energia total permanecer constante ou decrescer ao longo do tempo (Jean-Jacques Slotine, 1991).

Considere um sistema autônomo com a dinâmica definida por:

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.13)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistema. A prova de estabilidade no senso de Lyapunov é formulada utilizando uma função escalar $V(x)$ que deve satisfazer algumas condições expressas pelo Teorema 2.2.1. Para compreender o Teorema, considere as seguintes definições apresentadas a seguir.

Definição 2.2.1 (Ponto de Equilíbrio). *Um ponto de equilíbrio $x_{eq} \in \mathbb{R}^n$ do sistema (2.13) é um estado onde o sistema permanece estático, isto é, caso $x(0) = x_{eq}$ então $x(t) = x_{eq} \forall t \geq 0$.*

Definição 2.2.2 (Estabilidade de um ponto de equilíbrio). *Um ponto de equilíbrio x_{eq} é dito:*

- *Estável, se para cada $\beta > 0$, existe um $\zeta > 0$ tal que:*

$$\|x(0)\| \leq \zeta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \beta \forall t \geq 0; \quad (2.14)$$

- *Instável se não for estável;*
- *assintoticamente estável, se for estável e $\zeta > 0$ puder ser escolhido de forma que*

$$\|x(0)\| \leq \zeta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \forall t > 0; \quad (2.15)$$

- *globalmente assintoticamente estável, se a condição anterior for satisfeita para qualquer $\zeta > 0$.*

Definição 2.2.3 (Positividade de funções escalares). *Uma função $V(x)$, $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é dita:*

- *positiva definida, $V(0) = 0$ e $V(x) > 0 \forall x \neq 0$*

- *positiva semi-definida, se $V(0) \geq 0$*
- *negativa definida, se $V(0) = 0$ e $V(x) < 0 \forall x \neq 0$*
- *negativa semi-definida, se $V(0) \leq 0$*

Teorema 2.2.1 (Estabilidade de sistemas não-lineares segundo Lyapunov). *A origem do sistema (2.13) é estável se existir uma função escalar $V(x)$, $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, tal que:*

- *$V(x)$ seja positiva definida.*
- *$\dot{V}(x)$ seja negativa semi-definida.*

Além disso, a origem do sistema é assintoticamente estável se $\dot{V}(x)$ for negativa definida e globalmente assintoticamente estável se $V(x)$ for radialmente ilimitada: $V(x) \rightarrow \infty$ na medida que $\|x\| \rightarrow \infty$.

Se o sistema (2.13) for linear, o mesmo pode ser representado na forma:

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.16)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a dinâmica do sistema. Em Lyapunov (1892), mostrou-se que considerando uma função candidata quadrática $V(x) = x^T P x$, o sistema (2.16) é estável somente se existir uma matriz positiva definida P , tal que:

$$A^T P + P A < 0. \quad (2.17)$$

O requisito de que P deva ser positiva definida e $A^T P + P A$ deva ser negativa definida é o que chamamos de Desigualdade de Lyapunov, estas foram as primeiras Desigualdades Matriciais Lineares (Linear Matrix Inequalities - LMIs) utilizadas para analisar a estabilidade de um sistema (Boyd, 1994). Durante o século 20, foram descobertas novas aplicações e formas de se solucionar LMIs, na década de 1980 foram desenvolvidos algoritmos computacionais capazes de solucionar diversas LMIs através de programação convexa, isto tornou a LMI uma ferramenta extremamente atrativa para projetos de controle.

2.3 Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Uma LMI pode ser descrita como:

$$F(\mathbf{x}) = F_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i F_i > 0, \quad (2.18)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de decisão e as matrizes simétricas $F_i \in \mathbb{R}^{m \times m} \forall i \in [1, \dots, n]$ são dadas. O conjunto $\mathcal{F} \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}) > 0\}$ de LMIs é sempre convexo, o que torna as LMIs atrativas computacionalmente. Entretanto, nem todo problema é prontamente descrito por LMIs, sendo necessária a utilização de certos procedimentos matemáticos para sua tratabilidade, como os apresentados na sequência.

Lema 2.3.1 (Transformação de Congruência). *Considere uma matriz simétrica e invertível $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que satisfaça $P > 0$, então a condição:*

$$Q^T P Q > 0 \forall Q \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.19)$$

é válida para todo Q com $\text{rank}(Q) = n$.

Lema 2.3.2 (Troca de variáveis). *Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica que satisfaça:*

$$P^{-1} > 0. \quad (2.20)$$

Se existir uma matriz simétrica $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que $F > 0$, então $F = P^{-1}$ satisfaz (2.20).

Lema 2.3.3 (Complemento de Schür). *Considere as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$, tal que $A = A^T$, $C = C^T$ e $C > 0$. Então as seguintes relações são válidas:*

$$A - BC^{-1}B^T > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ \star & C \end{bmatrix} > 0, \quad (2.21)$$

$$A - BC^{-1}B^T < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ \star & C \end{bmatrix} < 0. \quad (2.22)$$

Lema 2.3.4 (Alocação Robusta de Autovalores). *Uma região LMI é qualquer subconjunto do plano complexo \mathbb{C} que pode ser descrito conforme:*

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : L + sQ + s^*Q^T < 0\} \quad (2.23)$$

onde L e Q são matrizes reais, tal que $L = L^T$. Os autovalores de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ estão contidos em (2.23) se existir uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que:

$$P > 0, \text{He}\{Q \otimes (PA)\}L \otimes P < 0. \quad (2.24)$$

2.4 Projeto de Sistemas de Controle Robusto

Esta seção apresenta metodologias tradicionais para controle robusto de sistema. Um controle robusto se caracteriza pela insensitividade do projeto de controle em relação

as diferenças entre o sistema real e o modelo do sistema utilizado para projetar a lei de controle (Postlethwaite, 2001). A metodologia proposta por este trabalho é baseado em uma lei de controle por realimentação de estados sintetizada por um problema de otimização submetido a LMIs, para que isso seja possível as não linearidades da plataforma devem ser representadas em uma forma que seja tratável por ferramentas convexas tal como a framework de LMIs. Portanto primeiramente este capítulo aborda a modelagem politópica e posteriormente leis de alimentação de estados.

2.4.1 Modelagem Politópica

Considere um sistema genérico com parâmetros variantes no tempo e/ou incertos (LPV - Linear Parameter Varying) descrito por:

$$\dot{x}(t) = A(\delta(t))x(t) + B(\delta(t))u(t), \quad (2.25)$$

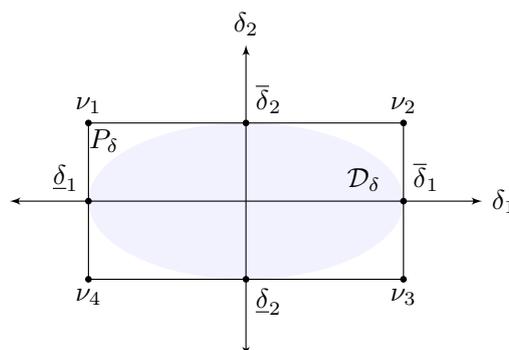
onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas e $\delta \in \mathcal{D}_\delta \subset \mathbb{R}^p$ é o vetor de parâmetros variantes no tempo e/ou incertos, estes parâmetros independem dos estados do sistema. Considere que Θ é o conjunto de valores admissíveis para θ . Suponha que as matrizes $A(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são linearmente dependentes de δ .

A modelagem politópica consistem em enquadrar o conjunto \mathcal{D}_δ em um conjunto convexo P_δ chamado de politopo que pode ser representado pela combinação convexa de vértices, definido conforme

$$\delta \in P_\delta = \text{Co}\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2^p}\} = \{\delta_i : \underline{\delta}_i \leq \delta \leq \bar{\delta}_i, i = 1, 2, \dots, p\}, \quad (2.26)$$

tal que $\underline{\delta}_i$ e $\bar{\delta}_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) denotam respectivamente o valor mínimo e máximo de δ_i . Além disso, $\nu_i \in \mathbb{R}^p$ ($i = 1, 2, \dots, 2^p$) denota o i -ésimo vértice deste politopo. A Figure 2.2 ilustra um exemplo de gráfico de um politopo no espaço \mathbb{R}^2 .

Figura 2.2: Exemplo de politopo



Fonte: Adaptado de da Silveira Castro (2015)

A representação politópica permite utilizar a propriedade da convexidade da LMIs para analisar a estabilidade de sistemas incertos.

Teorema 2.4.1 (Estabilidade de Sistemas Politópicos). *(Boyd, 1994) Suponha que exista uma matriz simétrica definida por $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que satisfaça:*

$$PA(\delta) + A(\delta)^\top P < 0 \forall \delta \in \mathcal{V}(P_\delta) \quad (2.27)$$

então esse sistema com $u(t) = 0$ é assintoticamente estável $\forall \delta \in \mathcal{D}_\delta$.

Devido ao resultado do Teorema 2.4.1, para comprovar a estabilidade de um sistema politópico, é suficiente avaliar somente os vértices do conjunto politópico.

2.4.2 Realimentação de Estados

Até o momento foram apresentadas ferramentas para análise e modelagem de sistemas, entretanto para aplicação abordada neste trabalho é necessário alterar a dinâmica natural do sistema (malha-aberta) buscando estabilizá-lo e rejeição de perturbações exógenas. Uma forma usual para controlar sistemas consiste na implementação de uma lei de realimentação de estados:

$$u = Kx. \quad (2.28)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de ganhos de realimentação. Considerando um sistema genérico, definido por (2.25), podemos definir a dinâmica em malha fechada como:

$$\dot{x} = (A(\delta) + B(\delta)K)x. \quad (2.29)$$

O problema de controle robusto é encontrar um ganho K tal que o sistema 2.29 seja assintoticamente estável para todo $\delta \in \mathcal{D}_\delta$, para isso considere o Teorema a seguir.

Teorema 2.4.2. *Suponha que exista uma matriz simétrica positiva definida $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz G que satisfaçam*

$$\text{He}\{A(\delta)F + B(\delta)G\} < 0 \forall \delta \in \mathcal{V}(P_\delta) \quad (2.30)$$

tal que $K = GF^{-1}$, então o sistema (2.29) é assintoticamente estável para todo $\delta \in \mathcal{D}_\delta$.

Demonstração. Considere a função de candidata de Lyapunov $V(x) = x^\top Px$, onde sua derivada em função de x é dada por:

$$\dot{V}(x) = x^\top (P(A(\delta) + B(\delta)K)x + (A(\delta) + B(\delta)K)^\top P)x \quad (2.31)$$

Para que o sistema seja assintoticamente estável para todo $\delta \in \mathcal{D}_\delta$, de acordo com os critérios de Lyapunov, devemos assegurar que:

1. $V(x) > 0$
2. $\dot{V}(x, \delta) < 0 \forall \delta \in \mathcal{D}_\delta$

Considere a transformação de congruência definida pelo Lema 2.3.1, logo:

$$x^\top P x > 0 \Leftrightarrow P > 0 \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} x^\top (P(A(\delta) + B(\delta)K) x + (A(\delta) + B(\delta)K)^\top P) x < 0 &\Leftrightarrow \\ (P(A(\delta) + B(\delta)K) x + (A(\delta) + B(\delta)K)^\top P) < 0 & \end{aligned} \quad (2.33)$$

Agora considere a seguinte troca de variáveis:

$$F = P^{-1}, \quad G = KP^{-1} \quad (2.34)$$

Tal que $F = F^\top > 0$. O que produz a expressão

$$\text{He}\{A(\delta)F + B(\delta)G\} < 0 \quad (2.35)$$

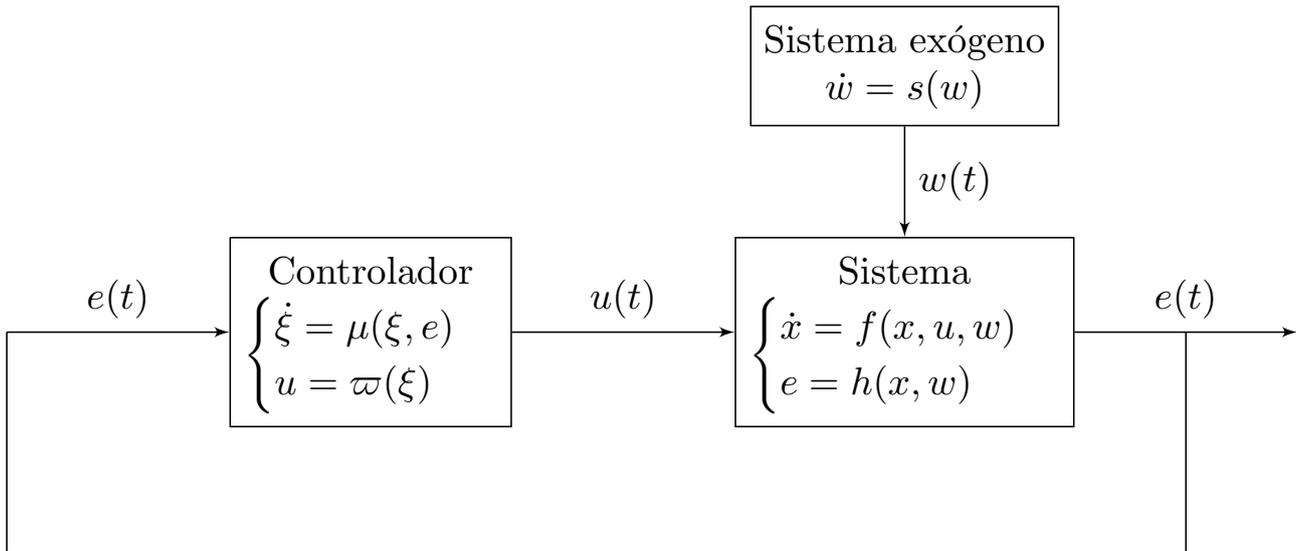
Pela propriedade da convexidade, garantindo (2.35) para todo os vértices de \mathcal{D} , consequente é garantida a estabilidade pra qualquer valor dentro do politopo. \square

2.5 Princípio do Modelo Interno

O Princípio do Modelo Interno (PMI), proposto por Francis e Wonham (1975), é um resultado teórico essencial para o projeto de sistema de controle visando o seguimento de sinais de referência e rejeição de sinais de distúrbio, visto que um determinado sinal pode ser rejeitado ou seguido, se sua dinâmica for reproduzida pelos estados do controlador (Isidori, 1986).

Considere o diagrama de blocos ilustrado pela Figura 2.3, onde o bloco ‘Controlador’ representa o modelo interno que é modelado nesta seção, o bloco ‘Sistema’ representa a dinâmica do sistema que pretende-se controlar, o sinal $e(t)$ representa o erro do sistema, $u(t)$ a entrada de controle e $w(t)$ a perturbação que não pode ser medida. Se a trajetória de $w(t)$ pertence a um conjunto de trajetórias que estão incorporadas no modelo interno do controlador, então a estabilidade assintótica do sistema pode ser garantida de maneira robusta.

Figura 2.3: Diagrama de blocos com PMI



Para compreender o conceito do PMI, considere as definições apresentadas a seguir:

Definição 2.5.1 (Imersão de Sistema). *Um sistema $\{X, f, h\}$ está imerso no sistema $\{X', f', h'\}$ se existir mapa $\rho : X \rightarrow X'$ que satisfaça $\rho(0) = 0$ e*

$$h(x) \neq h(z) \Rightarrow h'(\rho(x)) \neq h'(\rho(z)), \quad (2.36)$$

tal que

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} f(x) = f'(\rho(x)) \quad (2.37)$$

$$h(x) = h'(\rho(x)) \quad (2.38)$$

para todo $x \in X$.

Definição 2.5.2 (Superfície Central (Center Manifold)). *(Christopher I. Byrnes, 1997) Uma superfície central pode ser definida como:*

$$\mathcal{M} = \{(x, \xi, w, \delta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \Delta : x = \varpi(w), \xi = \sigma(w)\}, \quad (2.39)$$

que é dita invariante em relação a $(x(t), \xi(t), w(t))$ se

$$(x(t_0), \xi(t_0), w(t_0)) \in \mathcal{M} \Rightarrow (x(t), \xi(t), w(t)) \in \mathcal{M} \forall t > t_0, \quad (2.40)$$

e regionalmente atrativa em relação a \mathcal{D} se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), \xi(t), w(t)) \in \mathcal{M} \forall (x(0), \xi(0), w(0)) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^p. \quad (2.41)$$

Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, w) \\ e = h(x, w) \end{cases}, \quad (2.42)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é vetor de estados do sistema, $e \in \mathbb{R}^m$ é erro do sistema, $u \in \mathbb{R}^g$ é o vetor de entradas do sistema e w são os estados do modelo interno do sistema exógeno definido por:

$$\dot{w} = s(w). \quad (2.43)$$

Para garantir uma regulação de saída robusta do sistema (2.42) na presença de perturbações exógenas geradas por (2.43), é necessário garantir a existência de uma superfície central \mathcal{M} invariante e atrativa, tal que o erro seja zerado dentro dele. Portanto, assumamos que a linearização local do sistema na origem $(x, w) = (0, 0)$ é controlável e observável. Logo o princípio do modelo interno é descrito pelo seguinte Teorema.

Teorema 2.5.1 (Princípio do Modelo Interno). *(Isidori, 1986) Considere a planta definida por (2.42) com o sistema exógeno (2.43). Suponha que o sistema exógeno seja um sistema de estabilidade neutra. Portanto existe um controlador que resolve o problema de regulação de saída se existir uma mapa $x = \pi(w)$ e $u = c(w)$, com $\pi(0) = 0$ e $c(0) = 0$, ambos definidos em uma vizinhança $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$ da origem, satisfazendo as condições:*

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial w} s(w) = f(\pi(w), c(w), w) \\ 0 = h(\pi(w), w) \end{cases}, \quad (2.44)$$

para todo $w \in \mathcal{W}_0$ e tal que o sistema autônomo com saída:

$$\begin{cases} \dot{w} = s(w) \\ u = c(w) \end{cases} \quad (2.45)$$

esteja imerso no sistema:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \varphi(\xi) \\ u = \gamma(\xi) \end{cases}, \quad (2.46)$$

onde $\xi \in \Xi_0 \subseteq \mathbb{R}^\nu$, no qual $\varphi(0) = 0$ e $\gamma(0) = 0$.

Demonstração. Suponha um controlador na forma:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \mu(\xi, e) \\ u = \varpi(\xi) \end{cases} \quad (2.47)$$

solucione o problema de regulação de saída. Então deve existir um mapa $x = \pi(w)$ e $\xi = \sigma(w)$, onde $\pi(0) = 0$ e $\sigma(0) = 0$ tal que satisfaça

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial w} s(w) = f(\pi(w), c(w), w) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial w} s(w) = \mu(\sigma(w), 0) \\ 0 = h(\pi(w), w) \end{cases} \quad (2.48)$$

Forçando as seguintes relações

$$c(w) = \varpi(\sigma(w)), \quad \gamma(\xi) = \varpi(\xi), \quad \varphi(\xi) = \mu(\xi, 0), \quad (2.49)$$

observa-se que $\pi(w)$ e $c(w)$ satisfazem a condição (2.44), enquanto $\varphi(w)$ e $\gamma(w)$ satisfazem

$$\frac{\partial \sigma}{\partial w} = \varphi(\sigma(w)), \quad c(w) = \gamma(\sigma(w)) \quad (2.50)$$

portanto provando que $\{\mathcal{W}_0, s, c\}$ está imerso em $\{\Xi_0, \varphi, \gamma\}$, onde $\Xi_0 = \sigma(\mathcal{W}_0)$. \square

De acordo com o resultado do Teorema 2.5.1, somente um controlador capaz de replicar a dinâmica do sistema exógeno pode rejeitar os sinais gerados pelo mesmo. Esta teoria se aplica também a sistemas lineares, onde podemos simplificar a representação da superfície central

$$\mathcal{M} = \{(x, \xi, w, \delta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \Delta : x = \Pi w, \xi = \Sigma w\}. \quad (2.51)$$

Esta representação linear será utilizada nas seções remanescentes. Note que a invariância da superfície central \mathcal{M} na forma linear somente é garantida se a troca de x por Πw e ξ por Σw for factível, pois caso contrário o sistema exógeno não estará imerso no modelo interno do controlador, em outras palavras, o controlador não poderá replicar os sinais de perturbação e conseqüentemente não irá anulá-los. Além disto, considerando uma lei de controle por realimentação de estados, para obter as matrizes Π e Σ , as quais descrevem a superfície central \mathcal{M} , deve-se conhecer o Lema apresentado a seguir.

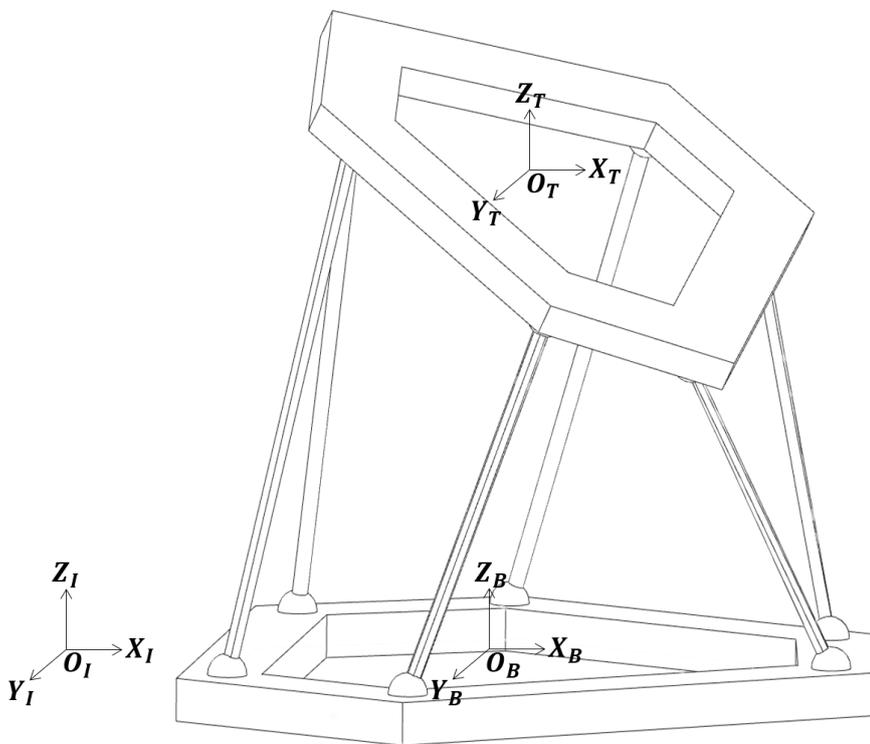
Lema 2.5.2. *Considere uma equação de Sylvester do tipo $X\Omega = \Lambda X + \Upsilon$, onde $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Lambda \in \mathbb{R}^{o \times o}$ e $\Upsilon \in \mathbb{R}^{o \times n}$ são matrizes dadas e X é uma matriz incógnita. A solução X para esta equação é existente e única se e somente se todos os autovalores de Ω sejam diferentes dos autovalores de Λ .*

Uma aplicação importante para o Teorema 2.5.1 para rejeição de perturbações periódicas é a utilização dele na forma de controlador ressonante, o qual foi utilizado posteriormente pelo trabalho.

2.6 Plataforma Stewart

Este capítulo aborda a descrição matemática da plataforma Stewart, ilustrada pela Figura 2.4, utilizando um modelo baseado em quatérnios, o qual já foi validado contra o modelo mais clássico obtido por Euler-Lagrange (de Faria et al., 2016). Este capítulo é organizado da seguinte forma: primeiro, é apresentada descrição geométrica da plataforma junto aos principais parâmetros construtivos da mesma. Em seguida, é apresentada a descrição matemática da dinâmica do sistema juntamente com a matriz jacobiana descrita através de quatérnios.

Figura 2.4: Plataforma Stewart



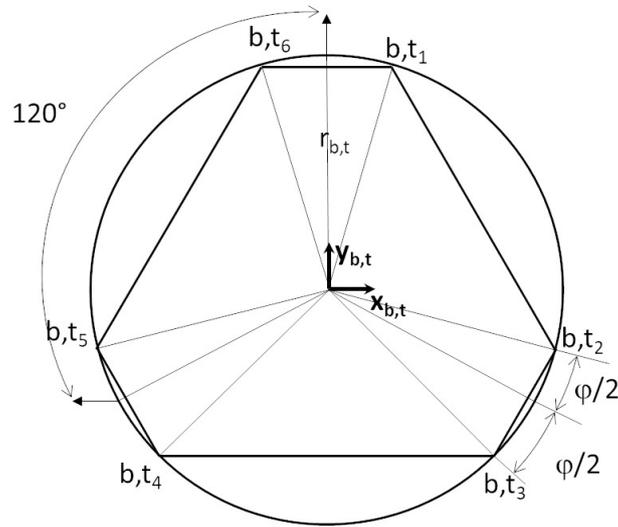
Fonte: Adaptado de de Faria et al. (2016)

2.6.1 Descrição Geométrica

Considere a plataforma da Figura 2.4, onde há três sistemas de referência: um sistema de coordenadas global O_I , um local na plataforma de base O_B e outro local na plataforma de topo O_T . A origem de ambos os sistemas de coordenadas locais coincide com o centro de massa de seu respectivo corpo. O seis graus de liberdade da plataforma são providos pelos seus seis atuadores $\ell \in \mathbb{R}^6$ chamadas de pernas do sistema. Cada junta do sistema b_i e t_i é um vértice de um hexágono localizado dentro de um círculo com raio r_b

e r_t , como ilustrado pela Figura 2.5, onde os subscritos t e b serão utilizados de agora em diante para referenciar a plataforma de topo e de base respectivamente.

Figura 2.5: Parâmetros Geométricos e Vértices



Fonte: Adaptado de de Faria et al. (2016)

As posição das juntas considerando as referencias locais são definidas por:

$$B_i = \begin{bmatrix} r_b \cos(\gamma_i) \\ r_b \sin(\gamma_i) \\ 0 \end{bmatrix}, T_i = \begin{bmatrix} r_t \cos(\nu_i) \\ r_t \sin(\nu_i) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

sendo

$$\gamma_i = \begin{cases} \frac{i\pi}{3} - \frac{\varphi_b}{2}, & i = (1, 3, 5) \\ \gamma_{i-1} - \varphi_b, & i = (2, 4, 6) \end{cases}, \nu_i = \begin{cases} \frac{i\pi}{3} - \frac{\varphi_t}{2}, & i = (1, 3, 5) \\ \nu_{i-1} - \varphi_t, & i = (2, 4, 6) \end{cases}, \quad (2.53)$$

onde os parâmetros r_b , r_t , φ_b e φ_t definem a estrutura geométrica de uma plataforma Stewart. Os valores φ_b e φ_t são os ângulos entre a posição da junta e o eixo x do plano de coordenadas locais da plataforma de base e de topo respectivamente.

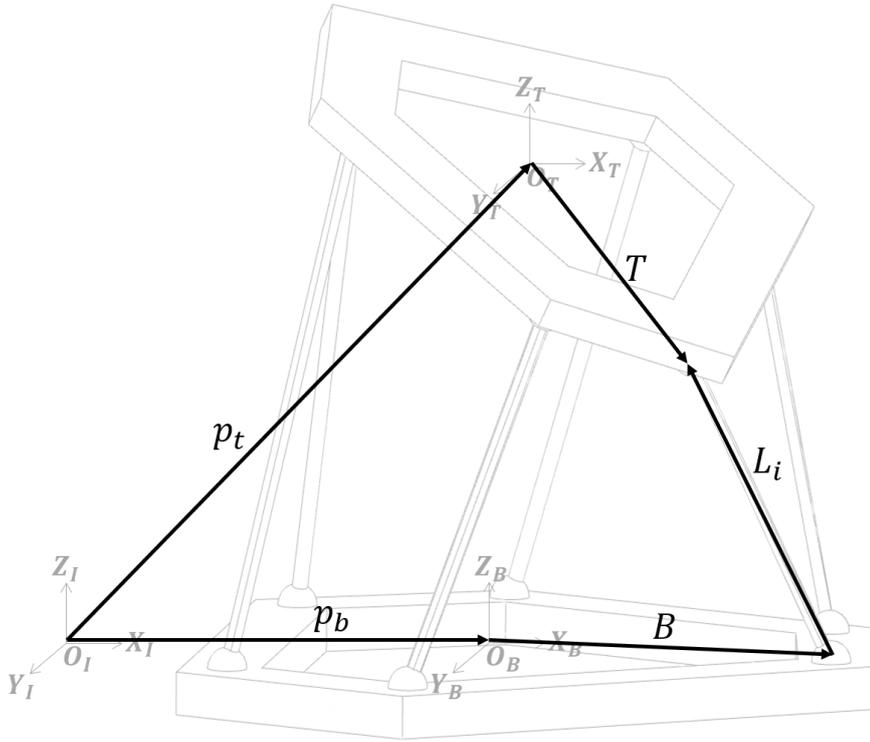
2.6.2 Matriz Jacobiana

A matriz Jacobiana transforma as velocidades lineares dos seis atuadores $\dot{\ell} \in \mathbb{R}^6$ para a velocidade linear e angular aplicadas no centro de massa das plataformas de base e de topo.

$$\dot{\ell} = J \begin{bmatrix} \dot{p}_t \\ \omega_t \\ \dot{p}_b \\ \omega_b \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

onde $\dot{p}_b \in \mathbb{R}^3$ e $\dot{p}_t \in \mathbb{R}^3$ são as velocidades lineares das plataformas considerando o sistema de coordenadas global, a Figura 2.6 ilustra os vetores p_t e p_b , $\omega_b \in \mathbb{R}^3$ e $\omega_t \in \mathbb{R}^3$ são as velocidades angulares considerando o plano de coordenadas local dos suas respectivas plataformas.

Figura 2.6: Principais Vetores da Plataforma Stewart



Fonte: Adaptado de de Faria et al. (2016)

Considere a plataforma e seus principais vetores ilustrados pela Figura 2.6. existe uma matriz Jacobiana $J \in \mathbb{R}^{6 \times 12}$ na forma:

$$J = \begin{bmatrix} n_1^\top & (S(R_t^I T_1) n_1)^\top & -n_1^\top & -(S(R_b^I B_1) n_1)^\top \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_6^\top & (S(R_t^I T_6) n_6)^\top & -n_6^\top & -(S(R_b^I B_6) n_6)^\top \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

onde

$$n_i = \frac{L_i}{\|L_i\|} \quad (2.56)$$

é um vetor unitário com a mesma direção i -ésima perna L_i

$$L_i = R_t^I T_i + p_t - (R_b^I B_i + p_b) \quad (2.57)$$

onde R_t^I e R_b^I são as matrizes de rotação (definição 2.1.4) considerando o plano de coordenadas global da plataforma. Note que a derivada de L e ℓ podem ser descritas como:

$$\dot{L}_i = S(\omega_t)R_t^I T_i + \dot{p}_t - (S(\omega_b)R_b^I B_i + \dot{p}_b) \quad (2.58)$$

$$\dot{\ell}_i = \dot{L}_i n_i = S(\omega_t)R_t^I T_i + \dot{p}_t - (S(\omega_b)R_b^I B_i + \dot{p}_b) n_i \quad (2.59)$$

Utilizando a propriedade que o produto escalar entre vetores é o mesmo valor de um vetor transposto:

$$a \cdot b = b^\top a \quad (2.60)$$

e a seguinte propriedade de produto vetorial

$$u \cdot (S(v)w) = (S(u)v) \cdot w, \quad (2.61)$$

então

$$\dot{\ell}_i = n_i^\top \dot{p}_t - n_i^\top \dot{p}_t + (S(R_t^I T_i) n_i)^\top \omega_t - (S(R_b^I B_i) n_i)^\top \omega_b. \quad (2.62)$$

Finalmente, (2.62) pode ser reescrita como (2.54)

Considere que a origem do plano de coordenadas globais coincide com a origem do plano de coordenadas local na plataforma de base e assuma que as perturbações aplicadas na plataforma de base naturalmente se propagam para a plataforma de topo, então a matriz jacobiana (2.55) pode ser simplificada:

$$J = \begin{bmatrix} n_1^\top & (S(R_t^I) n_1)^\top \\ \vdots & \vdots \\ n_6^\top & (S(R_t^I) n_6)^\top \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

onde

$$L_i = R_i^\top T_i + p_t - B_i \quad \forall i = \{1, \dots, 6\}, \quad (2.64)$$

então a matriz jacobiana assume uma forma quadrática e inversível, onde:

$$\dot{\ell} = J \begin{bmatrix} \dot{p}_t \\ \dot{\omega}_t \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Também podemos realizar o mesmo procedimento para relacionar as forças e torques do sistema, isto é pode-se utilizar a transposta de J para relacionar as forças dos seis atuadores com as forças e torques aplicados no centro de massa da plataforma de topo.

$$F = \begin{bmatrix} F_t \\ \tau_t \end{bmatrix} = J^\top f_t. \quad (2.66)$$

Esta conclusão vem da definição de potência e trabalho:

$$W = \int_0^{\infty} F^{\top} dt. \quad (2.67)$$

$$P = \frac{dW}{dt} = F^{\top} v, \quad (2.68)$$

onde W é o trabalho, P é a potência e v é a velocidade. Sabemos, pelo princípio da conservação de energia, o resultado da potência P produzida pelas forças e torques aplicados na plataforma deve ser o mesmo que o resultado da potência produzida por f_l :

$$P = P_l. \quad (2.69)$$

Expandindo as equações, obtemos:

$$F^{\top} v = f_l^{\top} \hat{l} \therefore F^{\top} v = f_l^{\top} J v \therefore F = J^{\top} f_l \quad (2.70)$$

Agora estamos em posição para descrever a dinâmica do sistema. Para simplificar a notação, de agora em diante vamos ocultar o subscrito t .

2.6.3 Dinâmica da plataforma

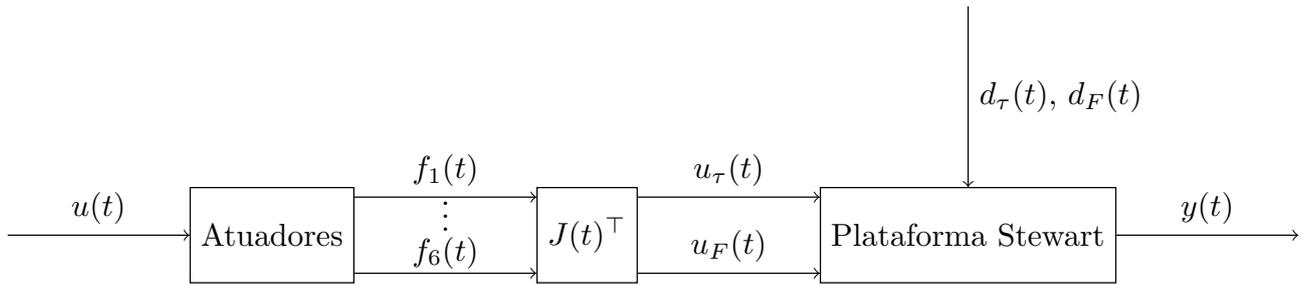
A matriz jacobiana simplificada (2.65) nos permite modelar a dinâmica do sistema sem levar em consideração as propriedades geométricas da plataforma, a Figura 2.7 ilustra a dinâmica do sistema em malha aberta. Nesse esquemático o bloco de “Atuadores” representa a dinâmica linear das pernas da plataforma, o bloco $J(t)^{-\top}$ representa a inversa da matriz Jacobiana, o bloco “Plataforma Stewart” representa a dinâmica da plataforma, a qual é modelada nessa seção. Os sinais $u_F \in \mathbb{R}^3$, $u_{\tau} \in \mathbb{R}^3$ são as entradas respectivamente de força e torque aplicadas no centro de massa da plataforma, $d_F \in \mathbb{R}^3$, $d_{\tau} \in \mathbb{R}^3$ são as respectivamente as perturbações de força e torque aplicadas na plataforma e $y \in \mathbb{R}^6$ é a saída do sistema. É importante ressaltar que a descrição matemática da dinâmica da plataforma abordada nessa seção não considera a saturação dos atuadores, pois a mesma não faz parte do escopo deste trabalho.

A dinâmica da plataforma pode ser descrita através de um modelo de um corpo 3D genérico baseado em quatérnios, onde o plano de coordenadas coincide com o seu centro de massa:

$$\tau = M\dot{\omega} + S(\omega)M\omega, \quad (2.71)$$

$$F = m\dot{v}, \quad (2.72)$$

Figura 2.7: Representação em malha aberta do sistema da plataforma



onde $F \in \mathbb{R}^3$ e $\tau \in \mathbb{R}^3$ são os vetores de força e torque aplicados no centro de massa respectivamente, $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é a matriz de inércia, m é a massa, $S(\omega)M\omega$ representa o torque pelo efeito giroscópico, $\omega \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade angular e $v \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade linear. As equações da velocidade são dadas por:

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\epsilon \\ \eta I_3 + S(\epsilon) \end{bmatrix} \omega, \quad (2.73)$$

$$\dot{p} = v, \quad (2.74)$$

onde $p = [p_x \ p_y \ p_z] \in \mathbb{R}^3$ é o vetor de posição considerando o plano de coordenadas global, onde os subscritos são relacionado aos eixos cartesianos globais. $q = [\eta \ \epsilon^\top]^\top$ é um quatérnio unitário (Definição 2.1.1), que representa a orientação do corpo no espaço. A derivada no tempo deste quatérnio unitário é dada por (Diebel, 2006):

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \eta & -\epsilon^\top \\ \epsilon & \eta I_3 + S(\epsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

Observe que devido a restrição do quatérnio unitário $\epsilon^\top \epsilon + \eta^2 = 1$, podemos remover representação da dinâmica de η sem nenhuma perda de generalidade. Com isto, a dinâmica completa da plataforma de topo pode ser descrita por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\omega} \\ \dot{p} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (\eta I_3 + S(\epsilon)) \omega \\ M^{-1} (u_\tau + d_\tau - S(\omega) M \omega) \\ v \\ m^{-1} (u_F + d_F) \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

onde $u = [u_\tau^\top \ u_F^\top]^\top \in \mathbb{R}^6$ é o vetor de entradas de controle, $d = [d_\tau^\top \ d_F^\top] \in \mathbb{R}^6$ é o vetor de perturbações exógenas, $u_\tau \in \mathbb{R}^3$ e $d_\tau \in \mathbb{R}^3$ são respectivamente o Torque de Entrada e perturbação considerando o sistema de coordenadas local, $u_F \in \mathbb{R}^3$ e $d_F \in \mathbb{R}^3$ são respectivamente a força de entrada e perturbação considerando o sistema de coordenadas global.

3. METODOLOGIA PROPOSTA

Este capítulo descreve a metodologia proposta por este trabalho, onde o objetivo é projetar uma lei de controle para plataformas Stewart que garanta a regulação de saída robusta na presença de perturbações harmônicas com frequência fundamental variante no tempo. Primeiramente é apresentada a formulação do problema, então é desenvolvida a dinâmica da plataforma através de um modelo Quasi-Linear com Parâmetros Variantes (Quasi-LPV), o qual nos permite solucionar o problema descrito considerando todas as não linearidades da plataforma. Concluí-se o capítulo apresentando a arquitetura do projeto de controle.

3.1 Descrição do Problema

Considerando a dinâmica em malha aberta descrita por (2.76), os sinais de perturbação $d \in \mathbb{R}^6$ são gerados pelo sistema exógeno dado por:

$$\begin{cases} \dot{w} = \Psi(\delta)w \\ d = \Omega w \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $w \in \mathbb{R}^{12h}$, $\Psi(\delta) \in \mathbb{R}^{12h \times 12h}$, $\Omega \in \mathbb{R}^{6 \times 12h}$ e $\delta \in \Delta$ é um parâmetro variante no tempo, o qual assumimos que é limitado pelo seguinte politopo $\forall t > 0$:

$$\Delta = \{\delta \in \mathbb{R} : \delta \in [\underline{\delta}, \bar{\delta}]\} \quad (3.2)$$

É essencial identificar o sistema exógeno (3.1) associado a produção de perturbações exógenas. Neste estudo assumimos que a força peso é pré-compensada e consideramos uma perturbação periódica ressonante com frequência fundamental δ variante no tempo, como por exemplo, ondas oceânicas, as quais podemos descrever da seguinte maneira:

$$\Psi(\delta) = \text{diag} (\Psi_r(\delta), 2\Psi_r(\delta), \dots, h\Psi_r(\delta)) \quad (3.3)$$

$$\Omega = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (3.4)$$

onde

$$\Psi_r(\delta) = \text{diag} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{pmatrix}}_{6 \text{ vezes}} \right), \quad (3.5)$$

$\delta \in \Delta$ assumimos ser medida, $h \in \mathbb{R}$ é o número de harmônicas consideradas. A dinâmica interna de Ψ_r é diagonalizada seis vezes, pois este é o número de entradas do sistema, ou

seja, a perturbação é replicada em todas as entradas do mesmo. A matriz Ω foi modelada de tal forma que todos os estados do sistema exógeno influenciem o sinal de perturbação aplicado na entrada do sistema. Portanto este trabalho tem como objetivo resolver o seguinte problema.

Problema 3.1.1. *Projetar uma lei de controle tal que as trajetórias $x(t)$ do sistema em malha fechada assintoticamente convirjam para origem a partir de uma região admissível de condições iniciais $(x(0), w(0)) \in \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_w \subseteq \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^{12h}$.*

3.2 Formulação Quasi-LPV

A representação Quasi-LPV pode ser definida como uma planta linear variante no tempo onde as matrizes do modelo no espaço de estados são funções que dependem do seu próprio vetor de estados. Neste trabalho, pretende-se adequar o modelo original (2.76) conforme a seguinte estrutura:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta(x))x + B(u + d) \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.6)$$

onde $A(\theta(x)) \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$, $B \in \mathbb{R}^{12 \times 6}$, $C \in \mathbb{R}^{6 \times 12}$ são as matrizes de espaço de estados, $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{12}$ é o vetor de estados do sistema, $y \in \mathbb{R}^6$ é o vetor de saídas do sistema, $u = \begin{bmatrix} u_\tau^\top & u_F^\top \end{bmatrix}^\top$ é o vetor de entradas de controle, $d = \begin{bmatrix} d_\tau^\top & d_F^\top \end{bmatrix}^\top$ é o vetor de perturbações exógenas não medidas e $\theta(x) : \mathcal{X} \rightarrow \Theta$ é um vetor dependente dos estados do sistema limitados pelo polítopo Θ . Podemos reescrever (2.76) da seguinte forma:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\omega} \\ \dot{p} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}S(\omega) & \frac{1}{2}\eta I_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & M^{-1}S(\omega)M & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \omega \\ p \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_3 & 0_3 \\ M^{-1} & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & mI_3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} u_\tau \\ u_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_\tau \\ d_F \end{bmatrix} \right), \quad (3.7)$$

note que $S(\eta)\omega = -S(\omega)\eta$. Logo, é conveniente neste caso considerar $\theta(x) = \begin{bmatrix} \eta & \omega^\top \end{bmatrix}^\top$. Portanto as matrizes de espaço de estados (3.6) podem ser definidas por:

$$A(\theta(x)) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}S(\omega) & \frac{1}{2}\eta I_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & M^{-1}S(\omega)M & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_3 & 0_3 \\ M^{-1} & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & m^{-1}I_3 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$C = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

A lei de controle pode ser projetada utilizando LMIs, desde que seja garantida que as trajetórias de x estejam contidas no seguinte conjunto $\forall t > 0$:

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^{12} : |x_i| \leq \text{sen}(\bar{\phi}/2) \forall i = 1, 2, 3, |x_i| \leq \bar{\omega} \forall i = 4, 5, 6\}, \quad (3.10)$$

onde $\bar{\phi}$ é o ângulo admissível máximo de orientação da plataforma de topo e $\bar{\omega}$ representa a velocidade angular máxima admissível para cada eixo do sistema. Conseqüentemente para cada parâmetro de θ é calculado seu valor mínimo e máximo sobre os valores admissíveis de x :

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^4 : \cos(\bar{\phi}/2) \leq \theta_1 \leq 1, |\theta_i| \leq \bar{\omega} \forall i = 2, 3, 4\} \forall t > 0. \quad (3.11)$$

Note que o politopo Θ somente é válido para um ângulo $0 \leq \bar{\phi} < \pi$, portanto vamos limitar nossa análise nesse sentido. A lei de controle que é apresentada na próxima seção deve garantir que os valores de x estejam contidos em \mathcal{X} , conseqüentemente será garantido que os valores de θ estejam contidos em Θ . Desta forma as não linearidades do sistema foram representadas através de uma modelagem politópica e portanto solucionáveis pelas ferramentas apresentadas no capítulo 2.

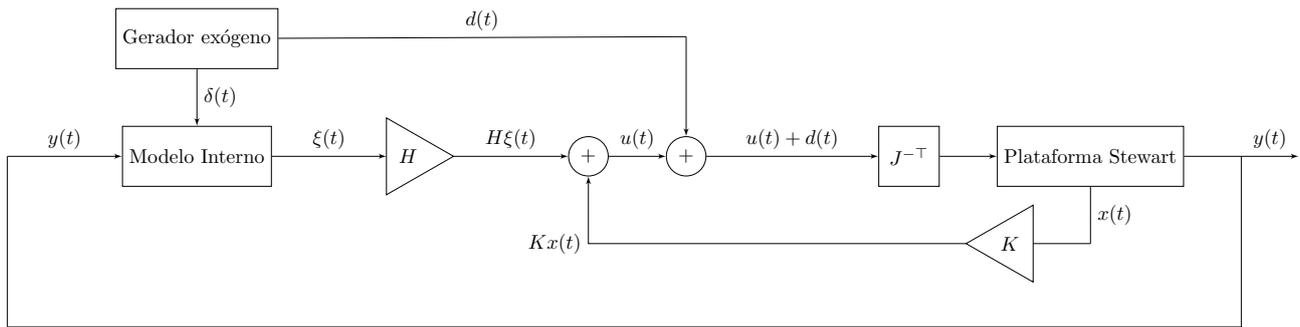
3.3 Projeto de Controle

Um determinado sinal pode ser rejeitado ou seguido, se sua dinâmica for reproduzida pelos estados do controlador (Isidori, 1986). O esquema de controle proposto para a plataforma Stewart por este trabalho é ilustrado pela Figure 3.1. Neste esquema o bloco “Modelo Interno” representa a dinâmica interna do controlador dada por:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \Phi(\delta)x + \Gamma y \\ u = H\xi + Kx, \end{cases} \quad (3.12)$$

onde $\xi \in \mathbb{R}^{12h}$ é o vetor de estados do controlador, $\Phi(\delta) \in \mathbb{R}^{12h \times 12h}$ e $\Gamma \in \mathbb{R}^{12h \times 6}$ são as matrizes de ganho internas do controlador. As matrizes de ganho $K \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ e $H \in \mathbb{R}^{6 \times 12h}$ são obtidas através da solução de um problema de otimização submetido a LMIs. O bloco “Plataforma Stewart” representa a dinâmica da plataforma, “ $J^{-\top}$ ” representa a matriz jacobiana e o bloco “Gerador exógeno” é responsável é o mesmo definido em (3.1).

Figura 3.1: Sistema em malha fechada



Combinando o sistema (3.6) com o esquema de controle (3.12), temos um sistema aumentado dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta(x)) & 0_{6 \times 12h} \\ \Gamma C & \Phi(\delta) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{12h \times 6} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} B\Omega \\ 0_{12h \times 6} \end{bmatrix} w. \quad (3.13)$$

Onde $\mathbf{x} = [x^\top \ \xi^\top]^\top$ e as matrizes aumentadas que descrevem a dinâmica do sistema são definidas por:

$$\mathbf{A}(\theta(x), \delta) = \begin{bmatrix} A(\theta(x)) & 0_{6 \times 12h} \\ \Gamma C & \Phi(\delta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0_{12h \times 6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} B\Omega \\ 0_{12h \times 6} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

considerando a lei de controle $u = Kx + H\xi$, logo pode-se descrever a dinâmica do sistema em malha fechada da seguinte maneira:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} A(\theta(x)) + BK & BH \\ \Gamma C & \Phi(\delta) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{E}w, \quad (3.15)$$

Para simplificar a notação considere $\mathbf{K} = [K \ H]$, desta forma podemos reescrever (3.15) como:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}(\theta(x), \delta) + \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{E}w. \quad (3.16)$$

3.3.1 Projeto dos termos de Φ e Γ do modelo interno do controlador

Esta seção apresenta o projeto das matrizes internas do controlador, essas matrizes buscam replicar a dinâmica do gerador exógeno para que o controlador seja capaz de rejeitar os sinais de perturbação.

Para garantir uma regulação de saída robusta na presença de perturbações exógenas d , é necessário garantir a existência de uma superfície central \mathcal{M} invariante e atra-

tiva, tal que a saída de interesse y seja zerada dentro de \mathcal{M} , em outras palavras, $y = 0 \forall (x, \xi, w) \in \mathcal{M}$. Considere o Teorema apresentado a seguir para a solução das matrizes de ganho $\Phi(\delta)$ e Γ que garantem a invariância de \mathcal{M} , tal que a saída y zere dentro dele.

Teorema 3.3.1 (Síntese das matrizes de ganho Φ e Γ). *Considere o sistema aumentado (3.16), é possível garantir que \mathcal{M} seja invariante, tal que a saída de interesse y seja nele zerada, com o seguinte modelo interno do controlador:*

$$\begin{cases} \Phi(\delta) = \Psi(\delta) \\ \Gamma = \mathbf{1}_{12h \times 6} \end{cases} . \quad (3.17)$$

Demonstração. Considere sistema aumentado definido por (3.13), a invariância de \mathcal{M} é garantida se a troca de x por Πw e ξ por Σw for factível, formando as seguintes equações do regulador de saída:

$$\begin{cases} \Pi\Psi(\delta) = A(\theta(x))\Pi + BU + B\Omega \\ \Sigma\Psi(\delta) = \Phi\Sigma(\delta) + \Gamma C\Pi \\ U = H\Sigma + K\Pi \end{cases} \quad \forall \delta \in \Delta, \forall \theta \in \Theta \quad (3.18)$$

onde U é uma variável auxiliar e Π é o mapa dos estados em regime permanente que para aplicação deste trabalho deve ser zero, já que o sistema não deve seguir nenhum tipo de sinal.

Considere o sistema dado pela equação (3.16), suponha que o sistema não forçado seja estabilizado de forma robusta, ou seja, a matriz $(\mathbf{A}(\theta, \delta) + \mathbf{BK})$ contém todos os autovalores no SPE para todo $\delta \in \Delta$ e $\theta(x) \in \Theta$. Também considere que por definição geradores exógenos possuem autovalores puramente imaginários. Note que Π e Σ podem ser obtidos pela solução da seguinte equação de Sylvester (Lema 2.5.2):

$$\begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} \Psi(\delta) = \begin{bmatrix} A(\theta(x)) + BK & BH \\ \Gamma C & \Phi(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B\Omega \\ 0_{12h} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Pelo Lema 2.5.2, a estabilização do sistema não-forçado leva a existência e unicidade de um \mathcal{M} descrito por Σ e Π . Note que forçando $\Phi(\delta) = \Psi(\delta)$, temos:

$$\Sigma\Psi(\delta) = \Psi(\delta)\Sigma + \Gamma C\Pi, \quad (3.20)$$

desta forma a única solução possível para (3.20) é com $\Pi = 0$, ou seja

$$\Sigma\Psi(\delta) = \Psi(\delta)\Sigma, \quad (3.21)$$

portanto a saída do sistema é zerada dentro da superfície central \mathcal{M} e Σ é uma solução única para todo $\delta \in \Delta$. Com $\Gamma = \begin{bmatrix} 1_{12h \times 6} \end{bmatrix}$ temos um modelo interno com as saídas totalmente controláveis em relação as suas entradas.

□

3.3.2 Projeto baseado em LMIs dos termos de realimentação de estados H e K

Nessa seção é apresentada a formulação dos termos K e H do projeto de controle, busca-se garantir a estabilidade assintótica do sistema para um conjunto de condições iniciais \mathcal{D} . É importante ressaltar que a prova de estabilidade apresentada nesta seção leva em consideração todas as não linearidades da plataforma. Para iniciarmos considere a seguinte troca de variáveis:

$$\mathbf{z} \triangleq \begin{bmatrix} x \\ \xi - \Sigma w \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

Assumindo que a superfície central \mathcal{M} é invariante em relação a $(x(t), \xi(t), \omega(t))$, isto é a troca de ξ por Σw é factível, podemos descrever a dinâmica do sistema (3.16) como:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} A(\theta(x)) + BK & BH \\ \Gamma C & \Phi(\delta) \end{bmatrix} \mathbf{z} = (\mathbf{A}(\theta(x), \delta) + \mathbf{BK})\mathbf{z}. \quad (3.23)$$

Com objetivo de garantir que \mathcal{M} é regionalmente atrativo em \mathcal{D} , deve-se garantir a estabilidade assintótica do sistema (3.23) para toda condição inicial $\mathbf{z}(0)$ que esteja contida em \mathcal{D} . Assumindo que o modelo interno do sistema exógeno está imerso ao modelo interno do controlador, a prova de estabilidade para o sistema (3.23) também é válida para o sistema original (3.16). Além da estabilidade do sistema, deseja-se garantir um decaimento exponencial com uma taxa mínima $\alpha > 0$, ou seja, de forma que exista um escalar positivo γ tal que:

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq \gamma \|\mathbf{z}(0)\| e^{-\alpha t}, t > 0. \quad (3.24)$$

Portanto considere o Teorema a seguir.

Teorema 3.3.2. *Considere a dinâmica do sistema em malha fechada descrita por (3.23), um escalar predefinido $\alpha > 0$ e κ . Suponha que exista uma matriz simétrica positiva definida $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, onde $n = 12h + 12$ totalizando os estados do sistema mais os estados do controlador e uma matriz genérica \mathbf{G} , tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas:*

$$\mathbf{F} > 0, \quad (3.25)$$

$$He\{\mathbf{A}(\theta, \delta)\mathbf{F} + \mathbf{BG}\} + \alpha\mathbf{F} < 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}(\Delta), \theta \in \mathcal{V}(\Theta) \quad (3.26)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_i^2 & \mathbf{F}_i \\ \star & \mathbf{F} \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, 6\}, \quad (3.27)$$

$$\begin{bmatrix} -\kappa\mathbf{F} & \mathbf{A}(\theta, \delta)\mathbf{F} + \mathbf{B}\mathbf{G} \\ \star & -\kappa\mathbf{F} \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}(\Delta), \theta \in \mathcal{V}(\Theta), \quad (3.28)$$

onde $\sigma = [\text{sen}(\bar{\phi}/2) \quad \text{sen}(\bar{\phi}/2) \quad \text{sen}(\bar{\phi}/2) \quad \bar{\omega} \quad \bar{\omega} \quad \bar{\omega}]^\top$. Então considere que a matriz de ganho de realimentação de estados é obtida por

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}\mathbf{F}^{-1}. \quad (3.29)$$

Logo, as trajetórias de $x(t)$ do sistema convergem exponencialmente para a origem com taxa de decaimento α para toda condição inicial $\mathbf{z}(0) \in \mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z}^\top \mathbf{P} \mathbf{z} \leq 1\}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1}. \quad (3.30)$$

Demonstração. Considere a seguinte equação candidata de Lyapunov

$$V(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^\top \mathbf{P} \mathbf{z}, \quad (3.31)$$

para que $V(\mathbf{z})$ seja positiva definida:

$$P > 0, \quad (3.32)$$

, onde $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A convergência exponencial de $x(t)$ para zero dentro de um taxa mínima de decaimento $\alpha > 0$ pode ser satisfeita se existir uma constante γ que satisfaça (3.24), onde γ é dado por (Khalil, 2002):

$$\gamma = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}. \quad (3.33)$$

Expandindo (3.24), temos:

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})} \|\mathbf{z}(0)\| e^{-\alpha t}. \quad (3.34)$$

Logo a seguinte relação é verdadeira

$$\|\mathbf{z}(t)\| \lambda_{\min}(\mathbf{P}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\mathbf{z}(0)\| e^{-\alpha t}. \quad (3.35)$$

Note que a seguinte relação é válida:

$$\|\mathbf{z}(t)\|^2 \lambda_{\min}(\mathbf{P}) \leq V(\mathbf{z}(t)) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\mathbf{z}(t)\|^2. \quad (3.36)$$

A resolução de $\dot{V}(\mathbf{z}, \delta) < -\alpha V(\mathbf{z})$ fornece $V(\mathbf{z}(t)) \leq V(\mathbf{z}(0)) e^{-\alpha t}$, portanto a seguinte relação fornece a estabilidade do sistema em malha fechada com convergência exponencial da saída:

$$\alpha V(\mathbf{z}) + \dot{V}(\mathbf{z}, \delta) < 0 \quad \forall \mathbf{z} \neq 0. \quad (3.37)$$

Considerando o sistema (3.13) para o cálculo de $\dot{V}(\mathbf{z}, \delta)$, podemos rescrever (3.37) como:

$$\text{He}\{\mathbf{P}(\mathbf{A}(\theta, \delta) + \mathbf{BK}) + \alpha\mathbf{P}\} < 0, \quad (3.38)$$

Desta forma garantimos o critério de desempenho do controlador. Agora assumamos que $\mathbf{z} \in \mathcal{X} \forall t \geq 0$, onde:

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{z}_i| < \sigma_i\} \forall i \in \{1, \dots, 6\}, \quad (3.39)$$

e σ é um vetor com os valores máximos admissíveis para o vetor de estado \mathbf{z} . Para garantir que esta última condição seja sempre verdadeira, considere que as condições iniciais dos estados do sistema $\mathbf{z}(0)$ estão contidas dentro de um conjunto positivo e invariante $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$, onde

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{z}) \leq 1\}, \quad (3.40)$$

considere a relação dada por $\mathbf{z}_i = p_i \mathbf{z}$, então esta última condição é garantida se:

$$\left(\frac{\mathbf{z}_i}{\sigma_i}\right)^2 < \mathbf{z}^\top \mathbf{P} \mathbf{z} \leq 1 \Leftrightarrow \mathbf{z}^\top \left(\frac{p_i^\top p_i}{\sigma_i^2}\right) \mathbf{z} < \mathbf{z}^\top \mathbf{P} \mathbf{z} \leq 1. \quad (3.41)$$

Utilizando o complemento de Schür's, podemos reescrever esta condição da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_i^2 & p_i \\ \star & \mathbf{P} \end{bmatrix} > 0 \forall i \in \{1, \dots, 6\}. \quad (3.42)$$

Portanto, as trajetórias $x(t)$ do sistema em malha fechada (3.13) exponencialmente se aproximam da origem $\forall \mathbf{z}(0) \in \mathcal{D}$ se as desigualdades matriciais (3.38) e (3.42) são atendidas. Além dos critérios previamente citados, os autovalores do sistema λ podem ser alocados de maneira robusta para um raio κ visando um controle menos agressivo. Portanto considere o seguinte conjunto:

$$\mathcal{D}_r = \{\lambda_i \in \mathbb{C} : |\lambda_i| < \kappa\} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.43)$$

Considerando o Lema 2.3.4, deve-se colocar \mathcal{D}_r na forma $\{\lambda \in \mathbb{C} : L + sQ + s^*Q^\top < 0\}$:

$$|\lambda| < \kappa \Leftrightarrow \lambda\lambda^* < \kappa^2 \Leftrightarrow < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\kappa & \lambda \\ \lambda^* & -\kappa \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Portanto, a matriz L e Q podem ser descritas como:

$$L = \begin{bmatrix} -\kappa & 0 \\ 0 & -\kappa \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Considerando o Lema 2.3.4, pode-se garantir que os autovalores do sistema estão contido em \mathcal{D}_r desde que \mathbf{P} satisfaça:

$$\begin{bmatrix} -\kappa\mathbf{P} & \mathbf{P}(\mathbf{A}(\theta, \delta) + \mathbf{BK}) \\ \star & -\kappa\mathbf{P} \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \delta \in \Delta, \theta \in \Theta. \quad (3.47)$$

Pela propriedade da convexidade, as relações (3.38), (3.42) e (3.47) também são verdadeiras se forem garantidas para os vértices de Θ e Δ . Também, estas relações não são LMIs considerando as variáveis de decisão \mathbf{P} e \mathbf{K} . Para contornar este problema, considere a seguinte troca de variáveis:

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{KP}^{-1}. \quad (3.48)$$

Desta forma se obtém as LMIs apresentadas pelo teorema. □

Baseado no Teorema 3.3.2, o projeto das matrizes de realimentação de estados \mathbf{K} e \mathbf{H} , tal que a região de condições iniciais \mathcal{D} seja maximizada, pode ser alcançada solucionando o seguinte problema de otimização convexo:

$$\underset{\mathbf{F}, \mathbf{G}}{\text{minimize}} \text{tr}(\mathbf{P}) \text{ sujeito a } \{(3.25) (3.26), (3.27), (3.28)\}. \quad (3.49)$$

Com isso estamos em posição para apresentar os resultados numéricos obtidos neste trabalho.

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Os exemplos numéricos desse trabalho foram obtidos mediante simulação obtidos utilizando o software MATLAB (2017).

4.1 Síntese da Lei de Controle

Os parâmetros construtivos da plataforma utilizado durante as simulações para calcular a matriz jacobiana $J(t)$ são apresentados pela tabela 4.1.

Tabela 4.1: Parâmetros da Plataforma Stewart

Parâmetro	Símbolo	Valor
Massa da Plataforma de Topo [kg]	m	1.36
Matriz de Inércia [kgm^2]	M	$\begin{bmatrix} 1.705 & 0 & 0 \\ 0 & 1.705 & 0 \\ 0 & 0 & 3.408 \end{bmatrix} 10^{-4}$
Raio da plataforma de topo [m]	r_T	0.25
Raio da Plataforma de base [m]	r_b	0.35
Ângulo entre par de atuadores de topo [rad]	φ_T	$\pi/2$
Ângulo entre par de atuadores de base [rad]	φ_B	$\pi/6$

Para síntese das matrizes de ganho de realimentação de estados foram selecionados os parâmetros apresentados pela tabela 4.2.

Tabela 4.2: Parâmetros utilizados na Síntese do Controlador

Parâmetro	Símbolo	Valor
Taxa mínima de decaimento	α	0.05
Valor máximo dos autovalores em malha fechada	κ	15
Ângulo máximo admissível em cada eixo [$^\circ$]	$\bar{\phi}$	25
Velocidade angular máxima admissível em cada eixo [rad/s]	$\bar{\omega}$	5
Número de harmônicas consideradas	h	3
Frequência fundamental ressonante mínima [rad/s]	$\bar{\delta}$	0.3
Frequência fundamental ressonante máxima [rad/s]	$\underline{\delta}$	0.5

4.2 Simulações

Primeiramente foram realizadas três simulações ilustradas pelas Figuras 4.1 a 4.3, onde a única diferença entre elas é a frequência δ da perturbação, os valores simulados

foram selecionados considerando os vértices de Δ e um valor intermediário. Nestas simulações, as condições iniciais do sistema foram zeradas, e o valor inicial dos estados do sistema exógeno foi:

$$w = 0.00056[1_{12h \times 1}], \quad (4.1)$$

com isso obtemos $V(\mathbf{z}) \approx 0.9987$, o qual está próximo da borda de \mathcal{D} , ou seja, simulações buscando os casos de maior criticidade da prova de estabilidade. Note que como as não linearidades do sistemas são todas relacionadas a dinâmica de rotação da plataforma, a amplitude das perturbações de força não influenciam de maneira significativa no valor de $V(\mathbf{z})$.

Posteriormente foram realizadas mais duas simulações com as condições iniciais zeradas e com o sistema exógenos com os estados dados por (4.1). Na simulação ilustrada pela Figura 4.4 a frequência fundamental δ inicia como $0.3rad/s$ e cresce linearmente até atingir $0.5rad/s$. A Figura 4.5 ilustra uma simulação variando a frequência δ iniciando como $0.3rad/s$ e atingindo o valor $0.5rad/s$ através de um sinal de degrau.

Posteriormente foram realizadas mais duas simulações buscando a borda do conjunto \mathcal{D} ilustradas pelas Figuras 4.6 e 4.7. Primeiro com $V(\mathbf{z}) \approx 0.9989$ considerando as condições iniciais da plataforma zeradas, exceto pela orientação no eixo x que foi deslocado 22° e a posição $p = [0.05 \ 0.05 \ 0.05]^\top$, estas simulação está ilustrada pela Figura 4.6. Já a figura 4.7 realiza uma simulação com todas as condições iniciais de \mathbf{z} zeradas, exceto a velocidade angular $\omega = [3.98 \ 0 \ 0]^\top$ e a velocidade linear $v = [10 \ 10 \ 10]^\top$, neste caso obteve-se $V(\mathbf{z}) \approx 0.9972$. Note que os parâmetros $p \in \mathbb{R}^3$ e $v \in \mathbb{R}^3$ não influenciam de maneira significativa o valor de $V(\mathbf{z})$. Em ambas simulações não foram aplicadas perturbações.

Por fim foram realizadas mais três simulações ilustradas pelas Figuras 4.8 a 4.10 variando a frequência fundamental das perturbações e com condições iniciais iguais a:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0.0633 & 0.0562 & 0.0633 & 0.1500 & 0.1500 & 0.1450 & \dots \\ -0.1000 & -0.1000 & 0.4715 & 5.0000 & 5.0000 & 5.0000 & \dots \\ 0.0082 & -0.0427 & -0.0056 & -0.0416 & -0.0207 & -0.0377 & \dots \\ 0.0082 & -0.0427 & -0.0056 & -0.0416 & -0.0207 & -0.0377 & \dots \\ 0.0111 & -0.0427 & -0.0002 & -0.0415 & -0.0124 & -0.0386 & \dots \\ 0.0000 & -0.0001 & 0.0000 & -0.0001 & -0.0000 & -0.0001 & \dots \\ 0.0000 & -0.0001 & 0.0000 & -0.0001 & -0.0000 & -0.0001 & \dots \\ 0.0000 & -0.0001 & 0.0000 & -0.0001 & -0.0000 & -0.0001 & \dots \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

com esses valores obteve-se $V(\mathbf{z}) \approx 0.9981$. Essas simulações foram realizadas para verificar o comportamento do sistema quando o mesmo deve convergir a saída y para zero concomitantemente rejeitando perturbações harmônicas exógenas.

A simulação ilustrada pela Figura 4.11 mostra o resultado obtido com condições iniciais fora do elipsóide \mathcal{D} , é importante ressaltar que a prova de estabilidade teórica formulada na seção anterior não é válida para esta simulação.

Figura 4.1: Simulação condições iniciais zeradas e perturbações harmônicas com frequência fundamental $\delta = \underline{\delta} = 0.3rad/s$

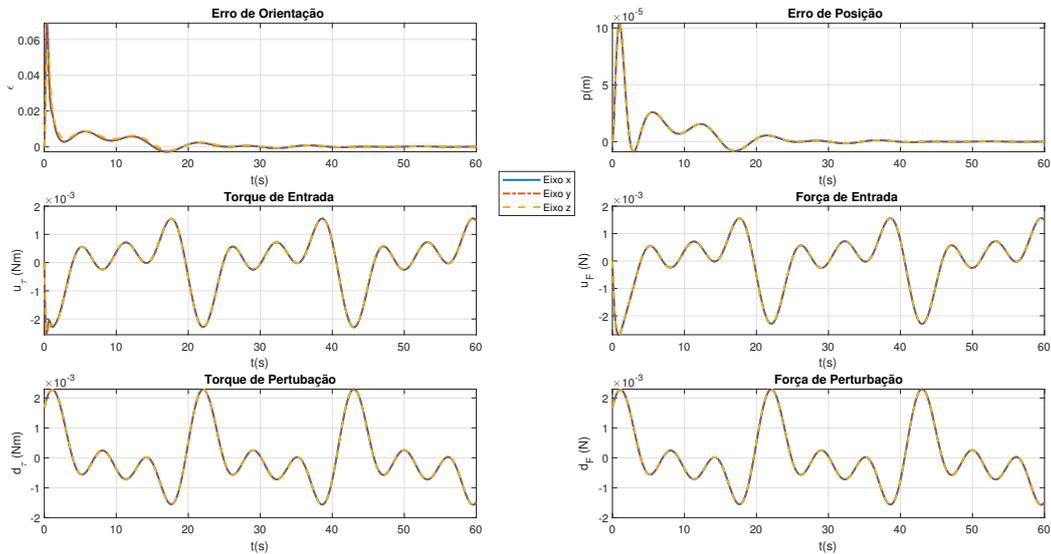


Figura 4.2: Simulação condições iniciais zeradas e perturbações harmônicas com frequência fundamental $\delta = 0.4rad/s$

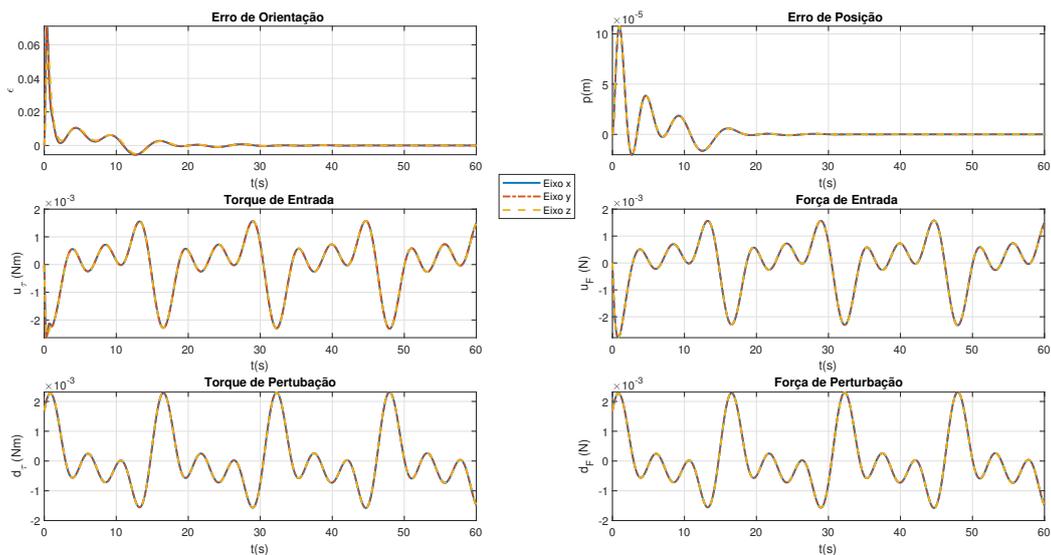


Figura 4.3: Simulação condições iniciais zeradas e perturbações harmônicas com frequência fundamental $\delta = \bar{\delta} = 0.5rad/s$

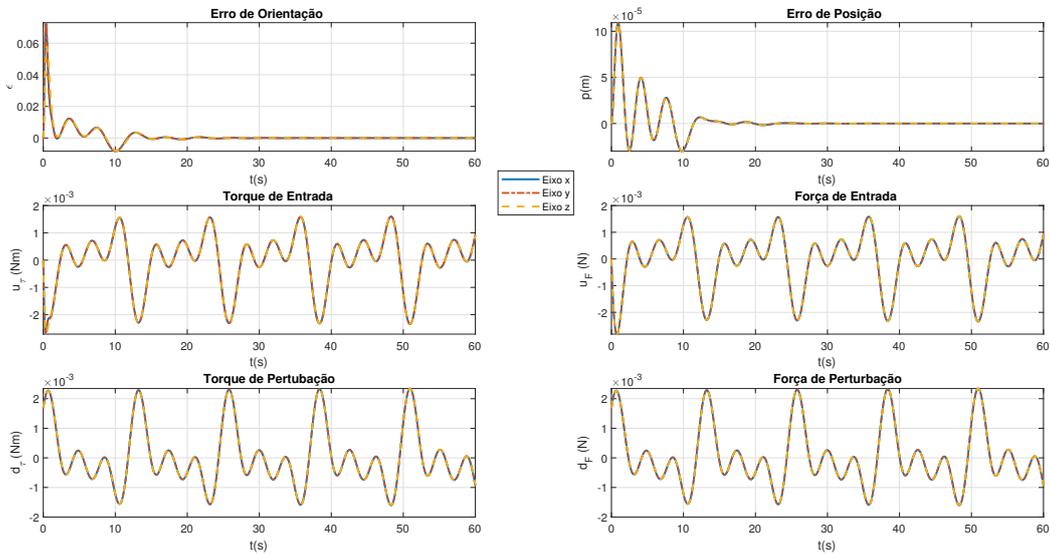


Figura 4.4: Simulação condições iniciais zeradas e perturbações harmônicas com frequência fundamental variando linearmente entre $\underline{\delta}$ e $\bar{\delta}$

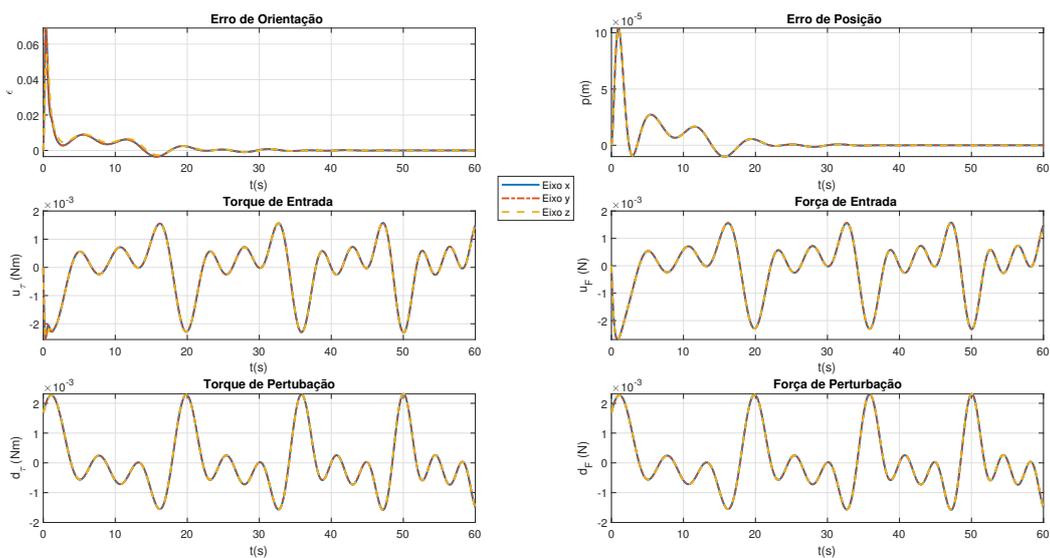


Figura 4.5: Simulação condições iniciais zeradas e perturbações harmônicas com frequência fundamental variando com um sinal de degrau entre $\underline{\delta}$ e $\bar{\delta}$

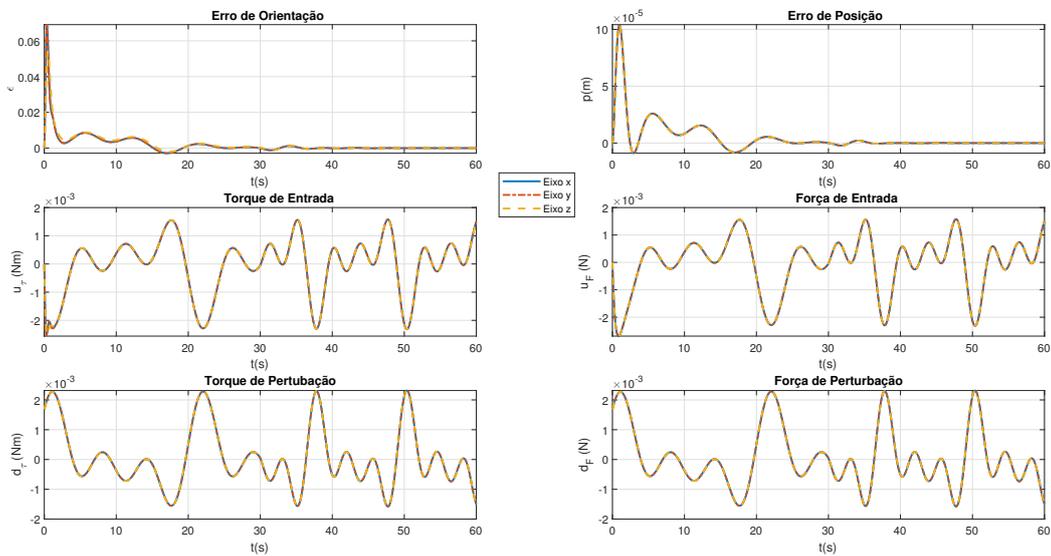


Figura 4.6: Simulação sem perturbação com condição inicial variando a orientação no eixo x em 22° e a posição p

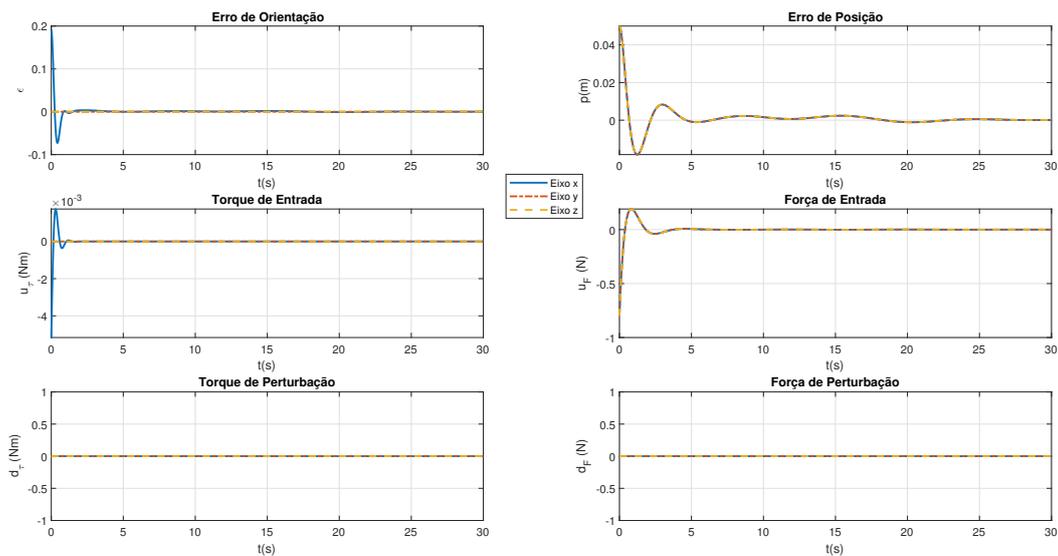


Figura 4.7: Simulação sem perturbação com condição inicial variando a velocidade angular ω e a velocidade de translação v

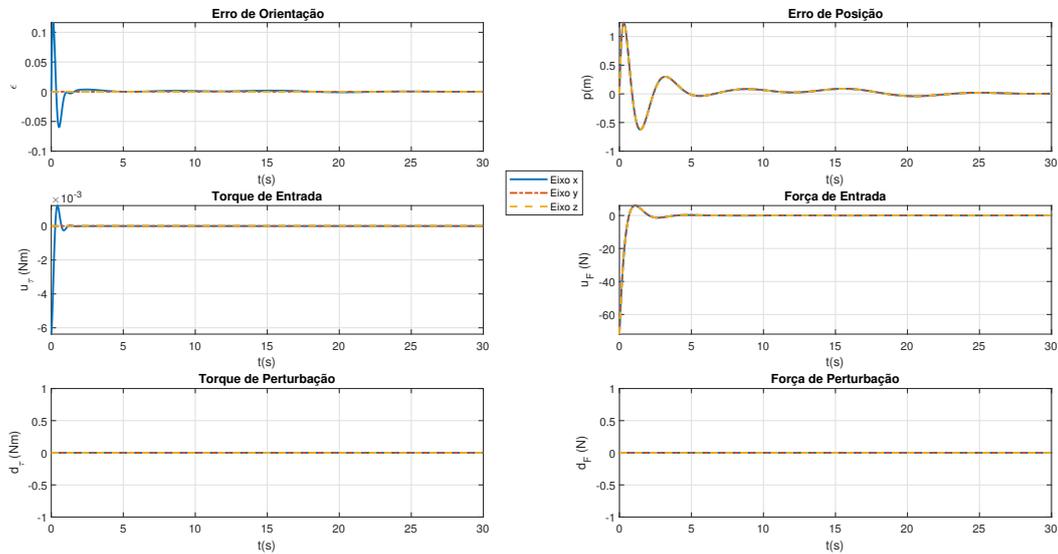


Figura 4.8: Simulação com condições iniciais diferentes de zero e perturbações harmônicas com frequência fundamental $\delta = \underline{\delta} = 0.3rad/s$

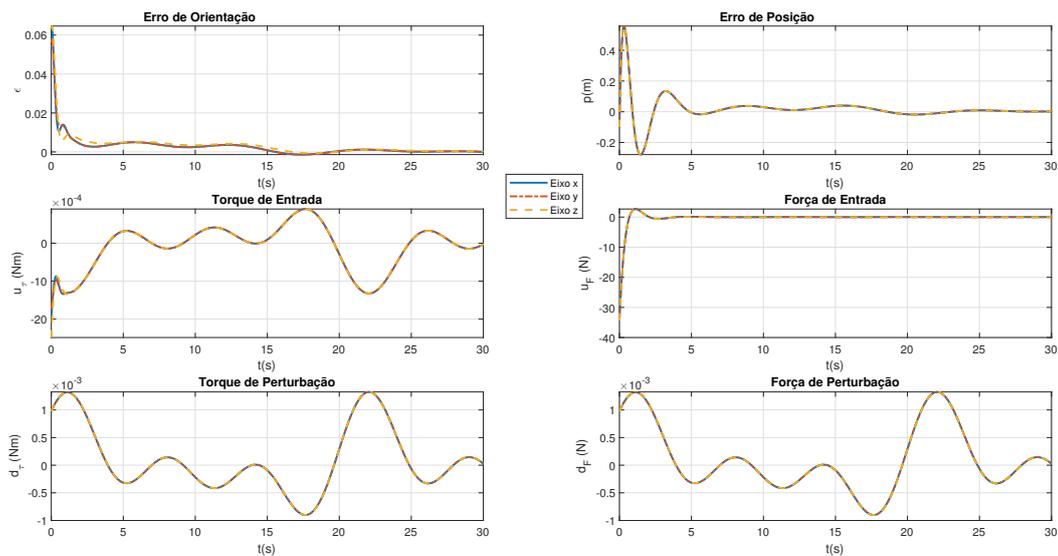


Figura 4.9: Simulação com condições iniciais diferentes de zero e perturbações harmônicas com frequência fundamental $\delta = 0.4rad/s$

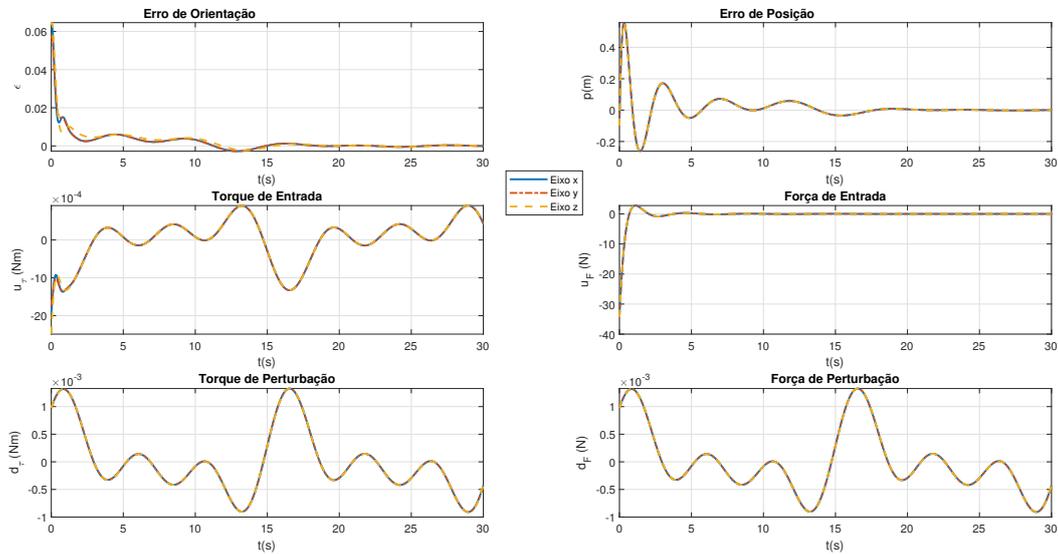


Figura 4.10: Simulação com condições iniciais diferentes de zero e perturbações harmônicas com frequência fundamental $\delta = \bar{\delta} = 0.5rad/s$

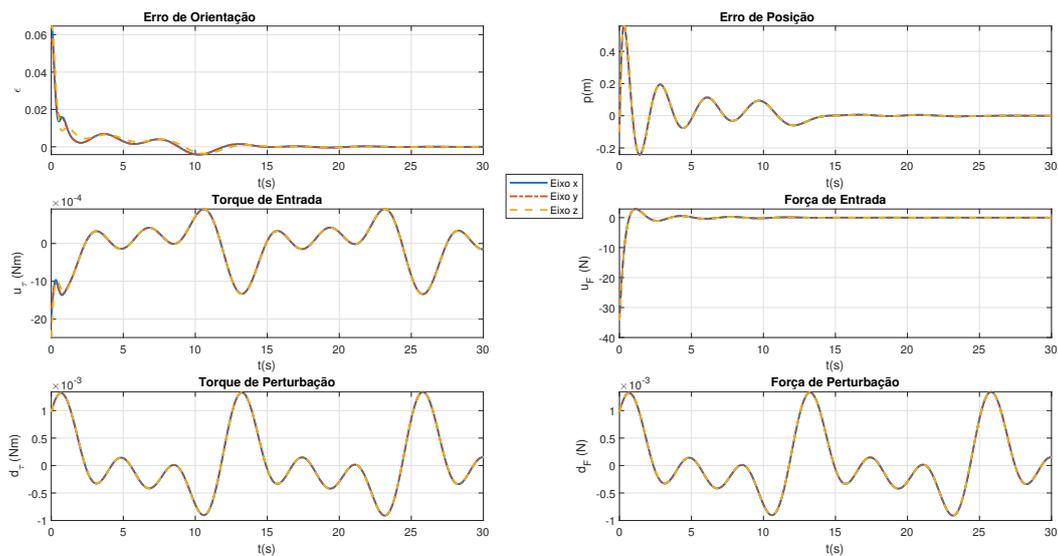
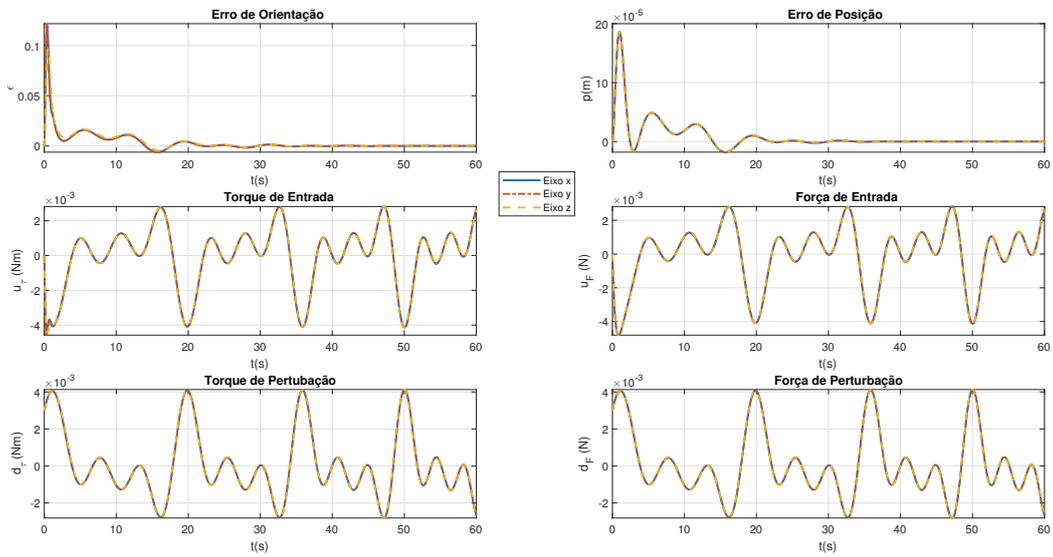


Figura 4.11: Simulação com condições iniciais fora do Elipsóide \mathcal{D} com $V(\mathbf{z}) \approx 3.1847$



4.3 Análise do Resultados

Em todas as simulações realizadas a convergência de $y(t)$ para zero foi em menos de trinta segundos, cumprindo o decaimento exponencial mínimo definido em projeto.

A constante $\kappa = 15$ definida em projeto por ser um valor bastante restritivo, limitou bastante a velocidade de resposta do sistema tornando as entradas de controle bastante suaves, um valor muito alto para este parâmetro tornaria o controle rápido demais e consequentemente resultaria em um problema de *chattering* das entradas. Além disso como pode ser visto pelas simulações das Figuras 4.1 a 4.3, a lei de controle com parâmetros bastante restritivos limitou de maneira significativa a amplitude máxima das perturbações. Para obter uma resposta mais rápida mantendo o problema da síntese de controle factível, seria necessário aumentar o valor de κ para tornar as entrada de controle mais agressivas e/ou o valor de α para aumentar a taxa de decaimento exponencial do sistema. Note que um α muito elevado com um valor de κ muito baixo resultaria em uma solução não factível, acontecendo isto deve-se aumentar o valor de κ de tal forma que solução seja factível com desempenho desejado sem criar um problema de *chattering* das entradas.

As simulações ilustradas pelas Figuras 4.4 e 4.5 mostram que a convergência do sinal de saída $y(t)$ é garantida mesmo com a variação da frequência fundamental δ , esta variação foi realizada dentro do politopo Δ e a alteração da frequência foi realizada apenas com um sinal de degrau e um sinal de rampa, outras dinâmicas não foram testadas.

As Figuras 4.8 a 4.10 mostram que a lei de controle é capaz deslocar o sistema de volta a origem e rejeitar perturbações exógenas de maneira simultânea. Os exemplos apresentados consideram três componentes harmônicas, quanto mais componentes deseja-se considerar menos restritivos devem ser os parâmetros κ e α para manter a solução factível, também o aumento de κ e redução de α podem aumentar tamanho da região de valor iniciais admissíveis contidas no elipsóide \mathcal{D} . Note que mesmo com os valores máximos dos autovalores do sistema em malha fechada bastante restritivos o elipsóide \mathcal{D} ficou próximo dos limites de \mathcal{X} , isso fica evidente nas simulações com $V(\mathbf{z}) \approx 0.9989$ ilustradas pelas Figuras 4.6 e 4.7, onde somente um estado do sistema relacionado ao aspecto de rotação da plataforma continha condições iniciais diferente de zero e o mesmo ficou próximo aos limites estabelecidos pela Tabela 4.2.

Apesar de a estabilidade ser garantida para qualquer $\delta \in \Delta$ e estabelecermos um parâmetro mínimo de desempenho para a convergência do sistema, as simulações ilustradas pelas Figuras 4.1 e 4.8 com a frequência fundamental $\delta = \underline{\delta}$, tiveram tempos de acomodação maiores quando comparadas com as simulações ilustradas pelas Figuras 4.3 e 4.10, onde $\delta = \bar{\delta}$, ou seja, considerando frequências contidas no politopo Δ , o sistema possui um tempo de acomodação menor na presença de perturbações com frequência fundamental maiores.

A prova de estabilidade teórica é válida para qualquer condição inicial contida no elipsóide \mathcal{D} , mas a última simulação ilustrada pela Figura 4.11, onde $V(\mathbf{z}) \approx 3.1847$, prova que o sistema também converge com algumas condições fora deste elipsóide.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho propõe uma forma sistemática de sintetizar uma lei de controle para rejeição de perturbações periódicas de forma robusta para plataformas Stewart considerando todas as não linearidades do sistema. Além disso foi garantida convergência exponencial da saída $y(t)$ para zero sem nenhum problema de *chattering* das entradas mesmo na presença de perturbações harmônicas com frequência fundamental variante no tempo, onde a única premissa considerada é que assumimos que esta frequência é o conhecimento em tempo real das frequências harmônicas que compõe os sinais de perturbação.

O esquema de controle proposto por esse trabalho, começa por uma formulação de Newton-Euler baseada em quatérnios apresentada pelo Capítulo 2.6. O modelo é composto pela cinemática inversa da plataforma de topo descrita através de uma matriz jacobiana $J(t)$, isto permite descrever matematicamente a dinâmica da plataforma com três entradas de forças mais três entradas de torques completamente desacopladas ao invés de modelar o sistema em função das entradas lineares de cada atuador. Esse modelo nos permite separar a dinâmica de translação e rotação em dois subsistemas separados (de Faria et al., 2016), todavia como a proposta deste trabalho consiste na mesma estratégia de controle para ambos, preferiu-se tratá-los de maneira unificada para tornar a solução mais elegante. Como ambos os subsistemas possuem características diferentes, é possível melhorar o desempenho da estratégia de controle apresentada tratando-os separados, pois desta maneira é possível parametrizar a lei de controle conforme a especificação de cada um. A representação apresentada neste capítulo descreve a plataforma por completo, exceto pela saturação dos atuadores que não fazem parte do escopo deste trabalho, mas esta representação não é tratável por ferramentas convexas, portanto não é possível sintetizar uma lei de controle utilizando LMIs.

Por este motivo, no capítulo 3 é apresentada uma modelagem politópica da plataforma, o que permitiu sintetizar a lei de controle de forma sistemática utilizando desigualdades matriciais lineares. Neste capítulo também é abordado o projeto de controle para a plataforma, onde há uma prova teórica de estabilidade considerando todas as não linearidades do sistema, provendo ao sistema uma regulação de saída robusta na presença de perturbações exógenas harmônicas com frequência variante no tempo para um conjunto de condições iniciais admissíveis. Também neste capítulo está descrito o sistema exógeno responsável pela geração destas perturbações que não são medidas, mas neste trabalho assumimos que a frequência fundamental δ é medida. A solução proposta para provar estabilidade da plataforma consiste na modelagem de uma superfície central \mathcal{M} invariante e atrativa tal que a saída do sistema seja zerada dentro dela. Para isto, foi utilizado o principio do modelo interno, no qual se garantiu a invariância da superfície central, onde a dinâmica interna do controlador basicamente replica a dinâmica do sistema exógeno para que os

sinais gerados pelo mesmo possam ser rejeitadas. Esta metodologia viabilizou uma troca de coordenadas do sistema em função de Σ , matriz que descreve \mathcal{M} , tornando possível sintetizar os ganhos de realimentação de estados K e H da lei de controle $u = Kx + H\xi$ utilizando LMIs que não consideraram a entrada de perturbações do sistema em nenhuma das desigualdades utilizadas. Devido a troca de coordenadas, é necessário considerar a amplitude das perturbações na verificação das condições iniciais, isso fica evidente nas primeiras simulações apresentadas pelo trabalho, já que mesmo com os estados do sistema zerados, o valor de $V(\mathbf{z})$ ficou próximo da borda de \mathcal{D} .

No capítulo 4 são apresentados os exemplos numéricos obtidos aplicando a metodologia proposta pelo capítulo 3. Os resultados apresentados mediante simulação provam que o sistema converge exponencialmente seguindo os critérios de performance utilizados na síntese do controlador. Além disso, ilustrou-se que o sistema convergiu para qualquer condição inicial contida em \mathcal{D} , esta prova é verdadeira considerando a propriedade de convexidade da representação politópica, já que há um número infinito de combinações possíveis dentro de \mathcal{D} . A estratégia de controle anulou completamente qualquer perturbação gerada por um sistema com autovalores iguais ao do modelo interno do controlador, em outras palavras, a proposta deste trabalho depende de um modelo matemático fidedigno ao sistema responsável pela geração de perturbações.

Um gerador de perturbações exógeno real possui infinitas harmônicas e portanto é impossível anular completamente as perturbações pela metodologia proposta neste trabalho, ou seja, sempre haverá um erro residual causado pelas harmônicas não consideradas no projeto de controle. Um ponto importante é que a região de condições iniciais admissíveis diminui na medida que consideramos mais harmônicas no projeto, até o ponto onde encontra-se uma solução infactível. É importante ressaltar, a prova de estabilidade teórica apresentada neste trabalho só é válida para um sistema exógeno com os mesmos autovalores do sistema interno do controlador.

5.1 Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuros, recomenda-se adicionar a saturação dos atuadores no projeto de controle e na prova de estabilidade. Também seria uma importante contribuição uma maneira de estimar a frequência fundamental das perturbações exógenas aplicadas a plataforma. A estratégia de controle também pode ser aprimorada utilizando algumas técnicas adicionais que viabilizem a adição da matriz jacobiana na prova de estabilidade.

Também pode-se explorar uma abordagem separada para dinâmica de rotação e translação, melhorando o controle do sistema de translação utilizando uma síntese com custo garantindo \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ para obter um desempenho transitório robusto. Pode-se con-

siderar a massa e o momento de inércia do sistema como incertos, para assim tornar a síntese de controle ainda mais robusta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ayas, M. S., Sahin, E. e Altas, I. H. (2014). Trajectory tracking control of a stewart platform. In: *2014 16th International Power Electronics and Motion Control Conference and Exposition*. IEEE.
- Boyd, S. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Castro, R., Salton, A., Flores, J., Kinnaert, M. e Coutinho, D. (2017). Variable frequency resonant controller for load reduction in wind turbines. *Control Engineering Practice*, vol. 66, pp. 76–88.
- Christopher I. Byrnes, Francesco Delli Priscoli, A. I. (1997). *Output regulation of uncertain nonlinear systems*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, 1 ed..
- da Silveira Castro, R. (2015). Controladores ressonante e repetitivo modificados para o tratamento de sinais com período variante no tempo. Dissertação de Mestrado, PUCRS.
- de Faria, P. F. S. R., Castro, R. S., Salton, A. T. e Flores, J. V. (2016). Quaternion-based dynamic control of a 6-DOF stewart platform for periodic disturbance rejection. In: *2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*. IEEE.
- Diebel, J. (2006). Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors. *Matrix*, vol. 58.
- Do, W. Q. D. e Yang, D. C. H. (1988). Inverse dynamic analysis and simulation of a platform type of robot. *Journal of Robotic Systems*, vol. 5, pp. 209–227.
- El-Badawy, A. A. e Shehata, M. M. G. (2014). Anti-sway control of marine cranes under the disturbance of a parallel manipulator. In: *2014 International Conference on Engineering and Technology (ICET)*. IEEE.
- Fichter, E. (1986). A stewart platform- based manipulator: General theory and practical construction. *The International Journal of Robotics Research*, vol. 5, pp. 157–182.
- Francis, B. A. e Wonham, W. M. (1975). The internal model principle for linear multivariable regulators. *Applied Mathematics & Optimization*, vol. 2, pp. 170–194.
- Guo, X., Ke, G., Zheng, F. e Zhang, L. (2013). Forward kinematics analysis of the stewart parallel platform based on the elman recurrent network. In: *2013 5th International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics*. IEEE.

- Hajimirzaalian, H., Moosavi, H. e Massah, M. (2010). Dynamics analysis and simulation of parallel robot stewart platform. In: *2010 The 2nd International Conference on Computer and Automation Engineering (ICCAE)*. IEEE.
- Huang, Y.-D., Raffin, P. e Chen, M.-T. (2011). Stiffness study of a hexapod telescope platform. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 59, pp. 2022–2028.
- Isidori, A. (1986). *Nonlinear Control Systems: An Introduction*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 1 ed..
- Jean-Jacques Slotine, W. L. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Pearson.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice Hall, 3rd ed ed..
- Kim, N.-I. e Lee, C.-W. (1998). High speed tracking control of stewart platform manipulator via enhanced sliding mode control. In: *Proceedings. 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.98CH36146)*. IEEE.
- Kumar, P. e Bandyopadhyay, B. (2012). Stabilization of stewart platform using higher order sliding mode control. In: *2012 7th International Conference on Electrical and Computer Engineering*. IEEE.
- Lee, L. H. e Poolla, K. (1999). Identification of linear parameter-varying systems using nonlinear programming. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control- transactions of The Asme*, vol. 121, pp. 71–78.
- Lee, S.-H., Song, J.-B., Choi, W.-C. e Hong, D. (2003). Position control of a stewart platform using inverse dynamics control with approximate dynamics. *Mechatronics*, vol. 13, pp. 605–619.
- Liu, M.-J., Li, C.-X. e Li, C.-N. (2000). Dynamics analysis of the gough-stewart platform manipulator. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 16, pp. 94–98.
- Lyapunov, A. M. (1892). *The General Problem of the Stability of Motion*. Univ. Kharkov, 1 ed..
- MATLAB (2017). *9.2.0.538062 (R2017a)*. The MathWorks Inc.
- Nguyen, C. C., Antrazi, S. S., Zhou, Z.-L. e Campbell, C. E. (1993). Adaptive control of a stewart platform-based manipulator. *Journal of Robotic Systems*, vol. 10, pp. 657–687.
- Postlethwaite, S. S. I. (2001). *Multivariable Feedback Control*, vol. 41. 2.
- Stewart, D. (1966). A platform with six degrees of freedom. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, vol. 38, pp. 30–35.

- Su, Y., Duan, B., Zheng, C., Zhang, Y., Chen, G. e Mi, J. (2004). Disturbance-rejection high-precision motion control of a stewart platform. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 12, pp. 364–374.
- Villacis, C., Navarrete, M., Rodriguez, I., Romero, F., Escobar, L., Fuertes, W., Chamorro, S., Benavides, R., Zambrano, M. e Burns, C. (2017). Real-time flight simulator construction with a network for training pilots using mechatronics and cyber-physical system approaches. In: *2017 IEEE International Conference on Power, Control, Signals and Instrumentation Engineering (ICPCSI)*. IEEE.
- Wassink, M. G., van de Wal, M., Scherer, C. e Bosgra, O. (2005). LPV control for a wafer stage: beyond the theoretical solution. *Control Engineering Practice*, vol. 13, pp. 231–245.
- Wilkins, D. R. (2000). On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra. In: by H. Halberstam, R. e Ingram, R. E., editores, *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*, vol. iii. Cambridge University Press.