PUCRS

ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

EMERSON SILVA DE SOUSA

ANÁLISE DE MODELOS: UM MÉTODO DE ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Porto Alegre
2019

PÓS-GRADUAÇÃO - *STRICTO SENSU*

Pontifícia Universidade Católica
do Rio Grande do Sul

EMERSON SILVA DE SOUSA

ANÁLISE DE MODELOS: UM MÉTODO DE ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Educação em Ciências e Matemática.

Orientadora: Dra. Isabel Cristina Machado de Lara

Porto Alegre
2019

Ficha Catalográfica

S725a Sousa, Emerson Silva de

Análise de Modelos : um método de ensino de Matemática na Educação Básica / Emerson Silva de Sousa . – 2019.
396 f.
Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, PUCRS.

Orientadora: Profa. Dra. Isabel Cristina Machado de Lara.

1. Análise de Modelos. 2. Modelagem Matemática. 3. Resolução de Problemas. 4. Método de Ensino. I. Lara, Isabel Cristina Machado de. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da PUCRS
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Bibliotecária responsável: Clarissa Jesinska Selbach CRB-10/2051

Análise de Modelos: um método de ensino de Matemática na Educação Básica

CANDIDATO: EMERSON SILVA DE SOUSA

Esta Tese de Doutorado foi julgada para obtenção do título de DOUTOR EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA e aprovada em sua forma final pelo Programa de Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Isabel CM Lara

DRA. ISABEL CRISTINA MACHADO DE LARA - ORIENTADORA

BANCA EXAMINADORA

Débora da Silva Soares

DRA. DÉBORA DA SILVA SOARES - UFRGS

DR. JOSÉ RICARDO E SOUZA MAFRA - UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ

DR. LORI VIALI - PUCRS

Dedico este singelo trabalho a todos os professores que sonham e agem pela melhoria da qualidade do ensino dessa área tão nobre e bela - a *Matemática* - a qual está presente em toda parte. É preciso, porém, ter olhos para vê-la, mente para compreendê-la e alma para admirá-la! (Malba Tahan - *O Homem que calculava*)

AGRADECIMENTOS

A Deus, autor e sustentador da vida. Aquele que “Faz forte ao cansado e multiplica as forças ao que não tem nenhum vigor.” (Is 40:29).

A Jesus Cristo, meu Senhor, razão da minha existência. Aquele “que é o resplendor da glória e a expressão exata do Ser de Deus” (Hb 1:3).

Aos meus pais Antonio Mota (*in memoriam*) e Maria de Lourdes pelo amor e apoio que me deram.

À minha querida e amada esposa Lademe, presente de Deus na minha vida, sem a qual não teria chegado até aqui.

Às preciosas filhas Larissa e Alice que, cada dia, me inspiram a persistir na caminhada pela estrada da vida.

Aos colegas de curso com quem pude conviver e compartilhar experiências. Destaco as amigas Deise e Juliana que, além de tudo, me apoiaram na árdua caminhada do doutorado.

Aos professores da Educação Básica que participaram desta pesquisa e contribuíram de forma direta e indireta para o êxito da mesma. Enfatizo a participação direta dos doze colegas professores do Ensino Médio que, além de participarem do minicurso de formação sobre o método AnM, se dispuseram a implementá-lo em sua sala de aula.

Aos professores do doutorado (EDUCEM) com quem tive o privilégio de aprender lições preciosas, as quais levarei sempre comigo. Registro o nome dos professores João Harres, Lori Viali, Maurivan Ramos, Regis Lahm, Thaisa Muller, Valderez Lima e Isabel Lara.

À professora Isabel Cristina Machado de Lara, minha orientadora, que, além das lições preciosas ensinadas nas disciplinas, dedicou tempo e paciência na orientação e construção de cada etapa deste trabalho. Sem ela eu não teria conseguido.

Aos professores que constituíram a banca de qualificação - Débora da Silva Soares, José Ricardo e Souza Mafra, Lori Viali - pela disponibilidade em ler o texto de qualificação e pelas orientações que nortearam a etapa final da realização da pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da PUCRS, sua coordenação, professores e funcionários. Exalto o comprometimento e gentileza com que têm conduzido o Programa e os momentos de reflexão e aprendizagem oportunizados.

À UFOPA que me proporcionou a realização desse sonho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE APÊNDICES

SIGLAS E ABREVIAÇÕES

AnM - Análise de Modelos

ApM - Aplicação de Modelos

ATD - Análise Textual Discursiva

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

CNE - Conselho Nacional de Educação

DCNEB - Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica

DCNEM - Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio

FUNDEB - Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais de Educação

FURB - Universidade Regional de Blumenau

IDEB - Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

LDB - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

MM - Modelagem Matemática

PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

PDE - Plano de Desenvolvimento da Educação

PNE - Plano Nacional da Educação

RP - Resolução de Problemas

UFOPA - Universidade Federal do Oeste do Pará

Unesp - Universidade Estadual Paulista

RESUMO

Esta pesquisa tem como principal objetivo propor uma perspectiva da *Análise de Modelos* como um método de ensino de Matemática, que perpassa por etapas presentes nos métodos de Resolução de Problemas e de Modelagem Matemática, e que venha contribuir no processo educativo de Matemática na Educação Básica, em particular, no Ensino Médio, de modo intra e interdisciplinar. Fundamenta-se, teoricamente, em três pilares: Resolução de Problemas; Modelagem Matemática; Análise de Modelos; e, para desenvolver a pesquisa, adota uma abordagem qualitativa, naturalística-construtiva. Participaram da pesquisa 58 professores da Educação Básica e 443 estudantes do Ensino Médio. Doze desses professores, realizaram um minicurso de formação sobre o método Análise de Modelos e o aplicaram em suas turmas em março/abril de 2019, respondendo, ao final das ações, um questionário sobre o mesmo, cujas respostas foram analisadas por meio de Análise Textual Discursiva. Com base no método de ensino proposto (Análise de Modelos), foi elaborado um Material de Apoio (piloto) que serviu de referência tanto para o minicurso de formação com os professores como para auxiliá-los no planejamento e prática do método em sala de aula. A partir da análise realizada e da observação feita pelo pesquisador nessa etapa prática da pesquisa, ficou evidenciado que o método Análise de Modelos, não só tem potencial e viabilidade para ser implementado na escola, como pode contribuir, de modo prático, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Médio, favorecendo a melhoria da qualidade desses processos, ao mesmo tempo que leva em conta o currículo exigido nesse nível de ensino. Além disso, com as sugestões apontadas pelos professores, foi possível fazer uma reformulação do material proposto inicialmente, originando um Material de Apoio que pode servir de auxílio e incentivo ao professor em sua prática pedagógica, quando se usa a Análise de Modelos como um método para ensinar Matemática no Ensino Médio.

Palavras-chave: Análise de Modelos; Modelagem Matemática; Resolução de Problemas; Método de Ensino.

ABSTRACT

This research has as main objective to propose a perspective of Model Analysis as a teaching method of Mathematics, which goes through stages present in the methods of Problem Solving and Mathematical Modeling, and that will contribute to the educational process of Mathematics in Basic Education, in particular, in High School, intra and interdisciplinary. It is theoretically based on three pillars: Problem Solving; Mathematical modeling; Model Analysis; and, to develop the research, adopts a qualitative, naturalistic-constructive approach. Fifty-eight Basic Education teachers and 443 High School students participated in the research. Twelve of these teachers took a short training course on the Model Analysis method and applied it to their class in March/April 2019, answering a questionnaire about it at the end of the actions, whose answers were analyzed through Textual Analysis Discursive. Based on the proposed teaching method (Model Analysis), a Support Material (pilot) was prepared that served as a reference for both the mini-training course with teachers and to assist them in the planning and practice of the method in the classroom. From the analysis performed and the observation made by the researcher in this practical phase of the research, it was evident that the Model Analysis method not only has the potential and feasibility to be implemented in school, but can contribute, in a practical way, to the teaching processes and learning mathematics in High School, favoring the improvement of the quality of these processes, while taking into account the curriculum required at this level of education. In addition, with the suggestions made by teachers, it was possible to reformulate the material initially proposed, giving rise to a Support Material that can serve as an aid and encouragement to the teacher in his pedagogical practice, when using Model Analysis as a method for teaching Math in High School.

Keywords: Model Analysis; Mathematical Modeling; Problem Solving; Teaching Method.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Educação pode ser entendida como um pilar essencial no desenvolvimento de uma sociedade ou de um país. No caso do Brasil, com suas dimensões continentais, a busca por estabelecer diretrizes curriculares que visem aprendizagens essenciais a que todos os estudantes da Educação Básica[1] têm direito, colocando a Educação brasileira em compasso com as demandas do século XXI, tem sido tema de debates por professores, especialistas e por setores da sociedade em geral.

Esse debate não é recente. Devido às mudanças pelas quais o Brasil vem passando no campo econômico, político e social nas últimas décadas, principalmente o período de 1960 a 2010 (ARRETCHE, 2015), a reforma na Educação tem sido alvo de várias e intensas discussões que, em um sentido geral, visam ou pelo menos deveriam visar a melhoria da qualidade do ensino no país, especialmente na Educação Básica.

A Constituição Federal de 1988 aponta a Educação a serviço do pleno desenvolvimento da pessoa, de seu preparo para o exercício da cidadania e de sua qualificação para o trabalho, o que em geral, não é o que tem acontecido. Os números referentes à Educação brasileira em todos os níveis estão aí para comprovar essa triste realidade. No caso específico do Ensino Médio a situação tem se mostrado ainda mais preocupante, mesmo que “no papel”, como indica a Lei de Diretrizes e Bases da Educação brasileira - LDB/96, a finalidade desse nível de ensino seja “[...] a preparação para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo que seja capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores.” (BRASIL, 1996).

Vale ressaltar, no entanto, que esses apontamentos referentes a finalidade do Ensino Médio, refletem um certo grau de mudança do paradigma educacional dominante em décadas anteriores, tanto no Brasil como no mundo, que visava focar essencialmente nos conteúdos, quase sempre deslocados dos contextos sociais e baseados, principalmente, no treinamento sem reflexão por parte dos estudantes.

Algumas ações podem ser percebidas nesse apontamento de mudanças. Destacam-se, por exemplo, as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM), instituídas em 1998 pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) e os Parâmetros Curriculares Nacionais

---

[1] “[...] trata-se do nível da educação escolar brasileira que compreende a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio. [...] A educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores”. Disponível em: http://www.educabrasil.com.br/educacao-basica/. **Acesso em**: 18 jan. 2017.

para o Ensino Médio (PCNEM), divulgados no segundo semestre de 1999 pela Secretaria da Educação. Em 2010 é retomado o processo de atualização das DCNEM com a publicação do Parecer CNE/CEB nº. 7/2010 e da Resolução CNE/CEB nº. 4/2010 que tratam das definições concernentes às Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica (DCNEB), publicada em 2013. Como parte desse documento, estão as novas DCNEM, justificadas pelo Parecer CNE/CEB nº. 5/2011 e consolidadas pela Resolução CNE/CEB nº. 2/2012. O Parecer enfatiza a necessidade de atualização das DCNEM devido às

> [...] novas exigências educacionais decorrentes da aceleração da produção de conhecimentos, da ampliação do acesso às informações, da criação de novos meios de comunicação, das alterações do mundo do trabalho, e das mudanças de interesse dos adolescentes e jovens, sujeitos dessa etapa educacional. (BRASIL, 2011, p. 1).

De acordo com o Parecer, em virtude dessa dinâmica, a relação do jovem com a escola e com o conhecimento também tem sido afetada, e, portanto, precisa ser levada em conta no processo de atualização das DCNEM, pois: “O aprendizado dos conhecimentos escolares tem significados diferentes conforme a realidade do estudante. Vários movimentos sinalizam no sentido de que a escola precisa ser repensada para responder aos desafios colocados pelos jovens.” (BRASIL, 2011, p. 2). E mais:

> O desencaixe entre a escola e os jovens não deve ser visto como decorrente, nem de uma suposta incompetência da instituição, nem de um suposto desinteresse dos estudantes. As análises se tornam produtivas à medida que enfoquem a relação entre os sujeitos e a escola no âmbito de um quadro mais amplo, considerando as transformações sociais em curso. Essas transformações estão produzindo sujeitos com estilos de vida, valores e práticas sociais que os tornam muito distintos das gerações anteriores. Entender tal processo de transformação é relevante para a compreensão das dificuldades hoje constatadas nas relações entre os jovens e a escola. (p. 13).

Observa-se que, no interstício entre as Diretrizes de 1998 e 2013, considerando os desafios apresentados e outros que ainda permanecem, algumas iniciativas têm apontado para uma reestruturação do cenário educacional, nas suas várias possibilidades, e “[...] sinalizam para uma efetiva política pública nacional para a Educação Básica, comprometida com as múltiplas necessidades sociais e culturais da população brasileira.” (BRASIL, 2011, p. 3). Como parte dessas iniciativas, destacam-se alguns programas governamentais que vão ao encontro de uma proposta de reestruturação, como por exemplo: o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais de Educação (FUNDEB); o Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE); o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB); o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM); o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB); dentre outros.

Retomando a linha do tempo, em 2014 é publicado o Plano Nacional da Educação (PNE), devendo ser executado em dez anos (2014-2024), o qual reafirma a necessidade de estabelecer metas e diretrizes pedagógicas para a Educação Básica, de construir uma proposta de direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento dos estudantes nessa etapa de sua formação e de criar uma base nacional que oriente os currículos de todas as unidades da federação (BRASIL, 2014). Tanto as DCNEB de 2013 como o PNE de 2014, apontam para a necessidade de entendimento do papel da escola para a instrumentalização para vida, sobre aquilo que é essencial a ser aprendido por cada um. Assim, a busca desse entendimento deve estar não apenas nas conversas informais entre pais, estudantes, professores e diretores, mas nas decisões da sociedade e na agenda dos governos.

Após um processo recheado de críticas e controvérsias, publica-se em 2017 a primeira versão geral (Ensino Fundamental) da Base Nacional Comum Curricular - BNCC, completada com as orientações para o Ensino Médio em 2018. Trata-se do documento que passa a orientar a elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, descrevendo os conteúdos e saberes necessários para cada segmento e ano/série da Educação Básica. Além disso, serve para orientar as políticas públicas quanto à formação inicial e continuada de professores para atuarem nesse nível de ensino, na produção e reorganização dos materiais didáticos de apoio, nas estruturas de muitas escolas, bem como no processo de avaliação da Educação brasileira (BRASIL, 2018).

Com relação à Matemática, devido sua própria natureza, seu poder universal de quantificar e expressar em linguagem simbólica situações de diversas áreas do conhecimento, a BNCC reafirma a grande aplicabilidade que ela tem na sociedade contemporânea, indicando, com isso sua potencialidade no processo de formação do cidadão crítico e ciente do seu papel nessa sociedade. Com a Matemática estudada na Educação Básica, os estudantes "[...] devem desenvolver [...] **competências gerais da Educação Básica**, que pretendem assegurar, como resultado do seu processo de aprendizagem e desenvolvimento, uma formação humana integral que vise à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva." (BRASIL, 2018, p. 25). Além disso:

> A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos. (BRASIL, 2018, p. 265).

Percebe-se o destaque singular da Matemática em relação ao desenvolvimento de determinadas competências e habilidades que poderão contribuir para essa formação ampla dos estudantes. Conforme já havia enfatizado Godoy (2010), a contextualização e a interdisciplinaridade são potencializadas no desenvolvimento dessas competências e habilidades, uma vez que os temas que emergem no ambiente escolar permitem que se façam conexões entre os conceitos matemáticos, destacam sua relevância cultural nas aplicações dentro e/ou fora dela mesma, além de fortalecer sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. De acordo com o autor, nesse contexto, o instrumental matemático se mostra relevante tanto como modo de quantificar, quanto como expressão de linguagem, além de estar presente nas mais diversas áreas do conhecimento.

Os próprios PCNEM (BRASIL, 2000), substituídos pela BNCC (BRASIL, 2018), apontavam, além da relevância da Matemática "[...] como ciência, com suas características estruturais específicas [tendo] a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas." (BRASIL, 2000, p. 40), sua importância no papel formativo, instrumental e tecnológico para o estudante, contribuindo, de certo modo, para o cumprimento dos propósitos estabelecidos pela LDB/96 no que se refere às finalidades do Ensino Médio.

Nessa perspectiva, portanto, com relação aos processos de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio, a expectativa que se tem em relação aos documentos oficias, conforme Frainguelert e Nunes (2012), é que sejam proporcionadas ao estudante a compreensão da Matemática, a segurança em usá-la e um certo grau de satisfação pessoal por sua aplicabilidade, refletindo, assim, na formação ética de sua identidade e na promoção da autonomia. Significa que, os conteúdos Matemáticos desenvolvidos em sala de aula devem permitir aos estudantes que "[...] usufruam tanto do valor intrínseco da Matemática, quanto de seu aspecto formativo, instrumental e tecnológico." (FRAINGUELERT; NUNES, 2012, p. 13), de modo que consiga construir, analisar e aplicar esses conteúdos em outras áreas fora da Matemática. Como já evidenciavam as Orientações Curriculares do Ensino Médio, em seu volume dedicado às Ciências da Natureza, a Matemática e suas Tecnologias:

> A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático - nos aspectos de formar questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. (BRASIL, 2006, p. 69-70).

Frainguelert e Nunes (2012) enfatizam esses aspectos fundamentais, apresentando exemplos de aplicações que são percebidas em praticamente todas as áreas do conhecimento, e por isso precisam ser levadas em consideração nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática em todas as modalidades, em especial no Ensino Médio. Até mesmo nos processos seletivos de acesso ao nível superior tem havido mudanças significativas que tentam apresentar questões que proporcionam a integração e a contextualização em várias situações reais, como é o caso do ENEM. De acordo com Frainguelert e Nunes (2012, p. 16), “[...] há uma tendência cada vez mais presente nesses exames, tanto de universidades públicas como particulares, de se exigir cada vez menos a memorização de fórmulas e valorizar cada vez mais a autonomia dos alunos.”. O objetivo, segundo os autores, não é mais simplesmente medir a capacidade de assimilação e acúmulo de informações por parte dos estudantes, mas enfatizar a “[...] aferição das estruturas mentais com as quais construímos continuamente o conhecimento e não apenas na memória. A prova é interdisciplinar e contextualizada.” (p. 16).

Diante dessas considerações, portanto, é natural que se pense como meta para o ensino de Matemática, oferecer aos estudantes oportunidades para desenvolverem competências específicas de modo mais significativo, que esteja ao alcance de todos, e que busque de um modo geral, como aponta a BNCC, aplicar os conhecimentos matemáticos nas mais diversas situações do cotidiano, das ciências e do mundo do trabalho. Com isso, é oportunizado aos estudantes também a possibilidade de atuação e compreensão do mundo em seus múltiplos contextos, estabelecendo relações entre a Matemática estudada em sala de aula e a realidade onde estão inseridos. Dessa forma, utilizando os conhecimentos matemáticos em conjunto com os recursos tecnológicos digitais disponíveis, os estudantes podem melhor interpretar, avaliar e tomar decisões assertivas (BRASIL, 2018).

Assim, ao considerar essas metas e as ações políticas governamentais voltadas à Educação Básica brasileira, é possível perceber que a demanda de uma ação pedagógica que favoreça a aprendizagem e o desenvolvimento de competências por meio de estratégias adequadas, a busca por métodos alternativos de ensino de Matemática tem sido crescente desde o séc. XX. Professores e pesquisadores da área têm se preocupado com essa questão, nos debates e nas propostas alternativas de como relacionar os conteúdos estudados em sala de aula com a realidade dos estudantes (D’AMBROSIO, 2012).

De acordo com D’Ambrosio (2012), espera-se que os indivíduos envolvidos no processo educativo adquiram e produzam conhecimento, e a percepção da realidade é um dos fatores fundamentais nessa dinâmica. Isso é percebido em algumas das tendências em Educação Matemática que têm surgido com essa finalidade, isto é, tentar aproximar os conteúdos estudados em sala de aula com a realidade dos estudantes, auxiliando o professor na tentativa de tornar a Matemática na sala de aula mais significativa e motivadora à aprendizagem do estudante. Lara (2011), ao analisar os diferentes modelos pedagógicos de ensino da Matemática que emergiram a partir do séc. XX, afirma que “[...] o modo de ensinar matemática é produzido por diferentes práticas discursivas [...]” (p. 112). Além disso:

> É nas regularidades e descontinuidades desses discursos que os indivíduos se complementam, produzindo historicamente a posição central que a Matemática ocupa entre as demais ciências. As diferentes configurações assumidas pela sociedade deslocaram o modo de ver a Matemática e o seu ensino, assinalando, portanto, modificações no modo de produção de subjetividades. (LARA, 2011, p. 112).

Sendo assim, é possível destacar a *Modelagem Matemática* (MM) como um dos métodos que emergiram em alguns desses modelos pedagógicos para proporcionar essa interação da Matemática com a realidade do estudante (BASSANEZI, 1999, 2002; NISS; BLUM; GALBRAITH, 2007), e é nessa perspectiva que a BNCC aponta a MM, ao lado da *Resolução de Problemas* (RP), como um dos “processos matemáticos” que podem ser citados “[...] como formas privilegiadas da atividade matemática [que] são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático: raciocínio, representação, comunicação e argumentação.” (BRASIL, 2018, p. 266).

A MM como método de ensino, tem sido tema de muitos estudos e pesquisas em todo o mundo, e no Brasil, já vem ocorrendo a mais de quarenta anos (BIEMBENGUT, 2009; BONOTTO; LARA, 2013; TAMBARUSSI; KLÜBER, 2013, 2014). Várias atividades de Modelagem têm sido desenvolvidas na forma de projetos por todo o Brasil. Contudo, é perceptível que tais projetos quase sempre se tornam úteis e significativos apenas para o grupo de pessoas, professores e estudantes, que participam de sua elaboração. Essa percepção pode ser notada em várias pesquisas, como as encontradas em Silveira e Caldeira (2012), Magnus (2012), Ceolim e Caldeira (2015), Malheiros (2016), dentre outros, que demonstram um crescimento de pesquisas voltadas para a área, entretanto, os “[...] resultados evidenciam que ela [a Modelagem] ainda não chegou, de fato, às salas de aula de Matemática brasileiras, mesmo que muitos professores se mostrem interessados nela em espaços de formação, como cursos (de extensão, na pós-graduação, etc.) e eventos.” (MALHEIROS, 2016, p. 1152).

De acordo com Ceolim e Caldeira (2015), isso ocorre, em geral, devido aos obstáculos na implementação prática da Modelagem em sala de aula. Segundo os autores, a maioria dos professores da Educação Básica tem “(i) formação insuficiente em Modelagem Matemática, bem como nos conteúdos a ministrar; (ii) dificuldades em aplicar a Modelagem devido à postura tradicional e conservadora do sistema escolar e (iii) dificuldades em envolver os estudantes em um ambiente de Modelagem.” (CEOLIM; CALDEIRA, 2015, p. 28).

Modos diferentes, no entanto, de utilizar/envolver a MM no contexto educacional têm sido propostos com vistas a compreensão e interação de professores e estudantes envolvidos no processo educativo. É nessa perspectiva, portanto, que a abordagem pedagógica denominada *Análise de Modelos* (SOARES, 2012, 2015) se apresenta como um desses modos. A Análise de

Modelos (AnM) pode ser entendida, de um modo geral, como uma maneira de direcionar o ensino de Matemática por meio de modelos matemáticos em sala de aula, os quais podem ser analisados, aplicados e direcionados para guiar o estudo do conteúdo curricular.

Vale ressaltar ainda que a AnM, nessa perspectiva, tem sido utilizada basicamente no Ensino Superior, tendo como suporte principal na sua implementação, o auxílio de recursos tecnológicos, como planilhas e softwares - *Excel*, *Winplot*, *Maple*, *GeoGebra* e *Modellus* (JAVARONI, 2007; SOARES, 2012; SOARES; SOUTO, 2014; SOARES, 2015; SOARES; VIER, 2017). Na presente pesquisa, no entanto, a ênfase que será dada à AnM é no sentido de tentar adaptá-la e expandi-la para o ensino de Matemática na Educação Básica, em particular, no Ensino Médio, constituindo o seguinte objetivo de investigação: propor uma perspectiva da *Análise de Modelos* como um método de ensino de Matemática, que perpassa por etapas presentes nos métodos de Resolução de Problemas e de Modelagem Matemática, e que venha contribuir no processo educativo de Matemática na Educação Básica, em particular, no Ensino Médio, de modo intra e interdisciplinar.

Assim, com a intenção de apresentar a trajetória da pesquisa e o modo como o problema de investigação se constituiu, decidiu-se por uma estrutura organizada em seis capítulos.

No primeiro capítulo, *Contextualizando Minha Trajetória e a Pesquisa*, é apresentado brevemente o percurso acadêmico e profissional do pesquisador e o ponto de partida que sinaliza o desdobramento do problema de pesquisa. Levantam-se questões relacionadas ao baixo desempenho em Matemática na Educação Básica, especialmente no Ensino Médio. Também é evidenciada nesse capítulo a necessidade de ações pedagógicas que visam favorecer a aprendizagem e o desenvolvimento de competências nos estudantes por meio de estratégias adequadas, de métodos de ensino. A MM é apontada como um desses métodos, e a AnM como uma possibilidade de incentivo à MM para o ensino de Matemática. Por fim, são explicitadas *A Pergunta Diretriz*, *A Tese e os Objetivos* que evidenciam a proposta de caracterizar a AnM como um método de ensino, voltada especialmente para a Educação Básica.

No segundo capítulo, *Construindo o Caminho para a Pesquisa*, é feita uma descrição detalhada da abordagem metodológica referente à pesquisa, dos participantes da mesma, dos instrumentos utilizados na coleta de dados e dos procedimentos de análise desses dados. O capítulo termina, apresentando um panorama geral do processo de construção de um Material de Apoio (Apêndice D) baseado no método de ensino Análise de Modelos, e tem como principal finalidade, auxiliar o professor de Matemática do Ensino Médio na implementação prática desse método em sala de aula.

No terceiro capítulo, *Delineando a Trajetória Teórica: primeiros degraus*, apresentam-se as ideias centrais e definições de Modelo Matemático, Aplicação de Modelos (ApM), Resolução de Problemas (RP) e Modelagem Matemática (MM). Discute-se as percepções dos professores participantes da pesquisa sobre o termo "Aplicação de Modelos", com vistas a construção de uma base de informações que, ao lado das evidenciadas sobre RP e MM, contribua na caracterização da AnM como método de ensino, proposto nos capítulos seguintes.

O quarto capítulo, *Livro didático, Questões do ENEM e a Análise de Modelos: uma aproximação*, destaca a presença do livro didático no contexto escolar brasileiro, ênfase ao livro de matemática, e como este pode ser utilizado de modo mais eficaz para favorecer o aprendizado dessa componente curricular, em boa parte devido a melhoria (gráfica e conteúdo) que se percebe na produção de muitos desses livros. São destacadas algumas coleções de Matemática do Ensino Médio, onde se evidenciam várias situações da realidade[2] que, em geral, podem potencializar o uso do método AnM. As provas do ENEM também são enfatizadas neste capítulo, uma vez que muitas de suas questões já aparecem nos livros didáticos e, portanto, podem ser utilizadas também em sala de aula na perspectiva da AnM.

O quinto capítulo, *Análise de Modelos: uma proposta alternativa para o ensino de Matemática na Educação Básica*, aborda o tema central da pesquisa. Apresenta a concepção de AnM no contexto da MM, proposta inicialmente por Soares (2012), discutida em Soares e Javaroni (2013), sintetizada em Soares (2015). Discute-se a percepção dos professores participantes da pesquisa sobre o termo "Análise de Modelos" como possibilidade alternativa de ensino de Matemática. Em seguida é formalizada a proposta inicial de um novo direcionamento, de um novo olhar sobre a AnM. Essa formalização visa expressar uma caracterização da abordagem como um método de ensino, com uma definição e indicando etapas que a caracterizam como tal. A proposta inicial do método AnM tem por objetivo, além de apontar sugestões que possibilitem sua implementação prática em sala de aula, também orientou o pesquisador na construção de uma primeira versão (piloto) do Material de Apoio utilizado nas intervenções pedagógicas.

Por fim, no sexto capítulo, *Intervenções Pedagógicas: descrição e análises*, são evidenciados os principais resultados práticos da pesquisa, obtidos a partir de informações

[2] Não é objetivo deste trabalho discutir o conceito de *realidade*, no entanto, ao utilizar no texto, termos como *situações da realidade* ou *problemas reais*, o sentido é evidenciar situações-problema com algum tema/assunto advindo das ciências, do cotidiano e do interesse dos estudantes (principalmente). Adota-se, portanto, o entendimento simplificado apresentado em Almeida e Vertuan (2011) sobre o termo *realidade*, o qual pode ser considerado simplesmente como "[...] qualquer situação que possa ser idealizada, estruturada e simplificada com a finalidade de ser investigada sob o prisma de um problema que permita uma abordagem por meio da matemática." (p. 21).

(observação do pesquisador e questionários respondidos pelos professores e estudantes) de um minicurso sobre o método AnM oferecido a um grupo de professores de Matemática do Ensino Médio, assim como da aplicação prática deste na escola. O capítulo foi organizado em duas seções, sendo que na primeira, são apresentados o contexto, planejamento e análise das ações pedagógicas referentes às ações de formação dos professores no que diz respeito ao método de ensino AnM, o que envolve tanto o minicurso como a prática deste na escola. Na segunda seção, a partir das categorias emergentes apontados pelos professores (questionário 2 – Apêndice B) e da opinião dos estudantes (questionário 3 – Apêndice C), foi discutida a viabilidade e potencial da AnM como método para ensinar Matemática na Educação Básica no contexto educacional brasileiro vigente. Além disso, foram destacadas nessa seção, as contribuições que um Material de Apoio baseado no método AnM pode trazer à prática dos professores no contexto da sala de aula.

1 CONTEXTUALIZANDO MINHA TRAJETÓRIA E A PESQUISA

Ao iniciar uma pesquisa de doutorado, além de pensar nos privilégios pessoais que uma produção de tal magnitude proporciona, desperta tensões e reflexões acerca dos desafios e responsabilidades que isso implica dentro de um contexto mais amplo. Prodanov e Freitas (2013), nesse sentido, destacam que os trabalhos científicos produzidos nesse nível "[...] caracterizam-se pelo domínio do assunto, pela capacidade de sistematização e de pesquisa, e pelo poder criador [...]" (p. 168). No contexto educacional, especialmente na Educação Básica, onde a presente pesquisa está inserida, é preciso pensar em algo inédito, que seja um tema relevante não apenas para a educação, mas também no âmbito social e científico, e que apresente contribuições para a área de estudo. É o que sintetizam Silva e Menezes (2005, p. 98): "[...] a contribuição que se deseja da tese [de doutorado] é uma nova descoberta ou uma nova consideração de um tema velho: uma real contribuição para o progresso da ciência".

Neste primeiro capítulo, portanto, busca-se, além de descrever uma breve trajetória acadêmica e profissional do pesquisador, apresentar também o ponto de partida e os direcionamentos traçados e retraçados para se chegar ao problema de pesquisa que impulsionou o desenvolvimento da mesma.

1.1 MINHA TRAJETÓRIA EM POUCAS PALAVRAS

Inicio[3], então, essa jornada, fazendo uma breve descrição da minha trajetória acadêmica e profissional. Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Pará - UFPA (1993-1997), mas tendo Estudos Adicionas[4] em Matemática desde 1994, comecei a atuar como professor efetivo na Rede Pública Estadual de Ensino já em 1994, na cidade de Santarém/PA, lecionando Matemática em turmas de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental (8º e 9º anos), e 1º ano do Ensino Médio. A partir de 1999, passei a atuar somente no Ensino Médio. Em 2001, já trabalhando em Manaus/AM, participei de um evento na Universidade Federal do Amazonas - UFAM, organizado pelo Departamento de Matemática daquela instituição, onde tive o

---

[3] Para melhor compreensão da trajetória acadêmica e profissional do pesquisador, optou-se por utilizar, nesse trecho, o verbo na primeira pessoa do singular. A partir da próxima seção (1.2.) será utilizado o verbo na forma impessoal.

[4] Curso adicional ao Magistério de nível médio que habilitava o professor a ministrar aulas das áreas específicas (Matemática, Ciências, História, etc.) até 8ª série do Ensino Fundamental (9º ano), conforme a Lei nº 5.692 de 11 de agosto de 1971. Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html. **Acesso em**: 17 abr. 2018.

privilégio de fazer um minicurso sobre Modelagem Matemática como método de ensino de Matemática no contexto educacional, ministrado pelo professor Rodney Carlos Bassanezi.

Foi meu primeiro contato com a Modelagem nessa perspectiva, o que me deixou interessado e motivado a utilizá-la em minhas aulas. A prática, porém, era bem mais difícil do que parecia ser. Continuei tentando, mesmo não conseguindo realizar o processo completo de Modelagem. Tentava adaptar as ideias, simplificar o processo, utilizar modelos prontos para abordar os conteúdos, etc., sempre na expectativa de conseguir desenvolver o conteúdo curricular de uma forma diferente e mais interessante para os estudantes.

Na busca por mais conhecimentos que favorecessem esse tipo de metodologia em sala de aula, especialmente sobre recursos tecnológicos, em 2002-2003 participei de um curso de especialização em Informática Educativa oferecido pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, promovido pelo Ministério da Educação - Programa Nacional de Tecnologia Educacional (ProInfo)[5]. A partir desse curso, tive a oportunidade de conhecer um pouco sobre alguns recursos tecnológicos (*softwares* - como as planilhas) que podiam auxiliar a abordagem com modelos matemáticos, com o uso de dados experimentais, representação gráfica, etc. Tal conhecimento teve papel significativo no planejamento das minhas atividades que seriam desenvolvidas em sala de aula, embora para os estudantes, o uso desses recursos ainda era bem limitado na prática.

Em 2006, deixei de atuar na Educação Básica e iniciei minhas atividades como professor de carreira no Magistério Superior, na UFAM, onde permaneci até 2012. Nesse período, mais especificamente em 2008-2009, cursei o mestrado em Matemática Pura com ênfase em Geometria Diferencial na própria UFAM e acabei me distanciando um pouco dos problemas que envolvem o ensino de Matemática na Educação Básica. No entanto, em 2010 comecei a atuar mais diretamente com formação de professores e percebi que as mesmas dificuldades que eu tinha na implementação da Modelagem Matemática em sala de aula quando atuei na Educação Básica, professores antigos e novos também tinham. Voltei a pensar no assunto, a refletir sobre a prática educativa, a ler sobre as tendências em Educação Matemática. Voltei-me para a Modelagem Matemática e passei a estudar mais sobre a área.

No final de 2012, por meio de concurso público, tive a oportunidade de retornar à minha cidade natal, Santarém/PA, como docente da Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA,

[5] "É um programa educacional com o objetivo de promover o uso pedagógico da informática na rede pública de educação básica. O programa leva às escolas computadores, recursos digitais e conteúdos educacionais. Em contrapartida, estados, Distrito Federal e municípios devem garantir a estrutura adequada para receber os laboratórios e capacitar os educadores para uso das máquinas e tecnologias.". Disponível em: http://portal.mec.gov.br/proinfo. **Acesso em**: 16 abr. 2018.

onde fui lotado no Instituto de Ciência da Educação - ICED, atuando na formação de professores dos cursos de licenciatura em Matemática, Física, Biologia e Química. Em 2013 foi criado o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Interdisciplinaridade na Amazônia - GEPEIMAZ, do qual faço parte, grupo esse que nasceu por iniciativa dos docentes vinculados aos cursos de licenciatura (Matemática, Física, Biologia e Química) do ICED/UFOPA, que tem por objetivo principal discutir a Educação Matemática e suas relações interdisciplinares com o ensino das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.

Daí, portanto, veio meu interesse pela área de pesquisa em Educação Matemática, principalmente com foco nos processos de ensino e aprendizagem, onde a Modelagem Matemática pode se inserir como possibilidade. Participei de três edições da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática - CNMEM (VIII/2013, IX/2015 e X/2017), sentindo-me muito motivado a estudar e pesquisar mais sobre a área, principalmente o tema *Análise de Modelos*. Foi na VIII CNMEM, realizada na cidade de Santa Maria/RS, que tive o contato pela primeira vez com esse termo (Análise de Modelos) como uma possibilidade de se trabalhar com modelos matemáticos prontos no contexto da MM. O tema foi apresentado em um artigo de Débora da Silva Soares, professora da UFRGS, intitulado: "Matemática e Biologia: relacionando duas áreas por meio da Análise de Modelos matemáticos". Trata-se de um recorte extraído de sua pesquisa realizada no doutorado.

Desde então, em particular, durante o desenvolvimento do curso de doutorado, no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS, tenho me dedicado ao estudo e pesquisa desse tema, vislumbrando seu potencial prático nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica, principalmente no Ensino Médio. A expectativa era que essa abordagem (Análise de Modelos), além de se configurar como um método mais prático do que a Modelagem Matemática quanto à implementação em sala de aula, viesse contribuir também com a melhoria da qualidade desses processos (ensino e aprendizagem) no contexto escolar.

É dentro dessa expectativa, portanto, que as próximas seções são detalhadas e visam, de um modo geral, direcionar um desdobramento prático para a presente investigação.

1.2 A EMERGÊNCIA DO PROBLEMA DE PESQUISA

É notório que os objetivos esperados em relação ao ensino de Matemática no Brasil têm ficado aquém daqueles previstos nos documentos oficiais. Isso se evidencia, por exemplo, no baixo desempenho dos estudantes brasileiros, tanto em suas avaliações escolares quanto em avaliações nacionais (BENASSI; SOUZA; BASQUEIRA; AZZI, 2015; SANTOS; TOLENTINO-NETO, 2015). Mesmo o ENEM, que busca trazer à tona questões que contemplam cada vez mais problemas e situações-problema de outros campos de conhecimento, das ciências e da realidade dos estudantes, pouco tem implicado para o alcance dos objetivos propostos para o ensino de Matemática no Ensino Médio.

Esse quadro pode ser evidenciado, por exemplo, em Viggiano e Mattos (2013), onde se comprova o baixo desempenho em Ciências da Natureza e Matemática no ENEM 2010, ao afirmarem: "[...] verificamos que, nacionalmente, o pior desempenho ocorre na área de Ciências da Natureza (CN), com pontuação média de 488 pontos, seguida pela área de Matemática e suas Tecnologias, com 505 pontos." (p. 425). Esse desempenho não é um resultado isolado, ao contrário, indica uma tendência que tem se repetido em exames posteriores, como destaca Szpacenkopf e Ferreira (2016) em entrevista dada ao jornal *O Globo*[6], ao comprovar que a média nacional de Matemática no ENEM teve uma queda no período de 2011 a 2015. Segundo o estudo feito pelas autoras, a média nacional diminuiu de 521 pontos, em 2011, para 475, em 2015. Mais especificamente, na rede pública, a média era de 478 pontos no ENEM 2011, e no exame de 2015, ficou em 440 pontos. Essa queda também é percebida na rede privada, quando a média caiu de 586 pontos, em 2011, para 531, em 2015.

Szpacenkopf e Ferreira (2016) destacam ainda que o desempenho do Brasil em outras avaliações, como o *Programme for International Student Assessment* (PISA – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), também mostra o baixo nível no desempenho da Matemática escolar pelos estudantes brasileiros. Segundo as autoras, na edição do PISA 2013, mesmo o Brasil tendo conseguido avançar em termos de nota entre os países que participaram da avaliação desde 2003, ainda assim, a nota 391 obtida, ficou bem abaixo da média geral dos outros países (494), oscilando entre a 57ª e 60ª posições, em um *ranking* que considerou 65 participantes. Na edição de 2015, essa tendência ainda permanece e o Brasil segue ocupando as últimas posições como destaca o *site Carta Educação*[7] ao mostrar que dentre os 72 países participantes nessa edição, o Brasil ocupa a 63ª posição em Ciências, com 401 pontos em contraste com os 493 da média geral, e a 66ª posição em Matemática, com 377 pontos contra os 490 da média geral.

---

[6] Disponível em: https://oglobo.globo.com/sociedade/educacao/enem-e-vestibular/enem-2015-rio-tem-maior-queda-na-nota-de-matematica-em-relacao-2011-20243780. **Acesso em**: 27 jun. 2017.

[7] Disponível em: http://www.cartaeducacao.com.br/reportagens/brasil-mantem-ultimas-colocacoes-no-pisa/. **Acesso em**: 27 jun. 2017.

Esse panorama geral da qualidade do ensino de Matemática no Brasil aponta indícios de que é preciso dar mais atenção ao tema, principalmente em relação aos currículos e às estratégias/abordagens de ensino dessa componente curricular. Tal atenção deve ser voltada, essencialmente, para tentar amenizar essa tendência negativa que se apresenta, e para isso, acredita-se que a proposta/discussão de novas abordagens e estratégias didático-pedagógicas diferenciadas pode ser fundamental para a mudança desse quadro (BRASIL, 2018). Além disso, o máximo envolvimento de especialistas em Educação e Educação Matemática, de professores, diretores, pais, e, destacadamente, o próprio governo, é determinante nessa árdua tarefa.

Entende-se, porém, que não somente os métodos diferenciados, como a MM, ou as ferramentas de apoio ao ensino, como o livro didático ou as tecnologias digitais, são suficientes para atender as necessidades exigidas no Ensino Médio para a formação dos nossos jovens nesse novo contexto. Acredita-se que é preciso pensar, não exclusivamente em novos métodos e ferramentas de apoio, mas em novas formas de lidar e abordar as que já se tem em vigor.

É nesse contexto de aspiração, envolvimento e busca pela melhoria da qualidade do ensino de Matemática que se vislumbra a possibilidade de uma perspectiva de método de ensino para a abordagem AnM (SOARES, 2012, 2015; SOARES; JAVARONI, 2013), direcionada, porém, para a Educação Básica. O entendimento é que a AnM, nessa perspectiva, possa incentivar o trabalho com Modelagem, considerando sua estrutura e etapas, e tenha como direcionamento, a investigação de como os modelos matemáticos encontrados nos livros didáticos e nas provas do ENEM possam ser abordados por meio desse método de ensino.

Vale ressaltar que para estabelecer o objetivo geral e o problema desta pesquisa, alguns encaminhamentos e levantamentos foram realizados. A coleta de dados foi fundamental para delinear um problema que fosse inédito e relevante para a área da Educação. Alguns pressupostos são utilizados desde o início deste relatório, com um detalhamento maior nos capítulos posteriores. Entre eles destacam-se, o capítulo 4, que evidencia a importância do livro didático e das questões do ENEM na perspectiva do método AnM, e o capítulo 5, que descreve uma análise do primeiro questionário (Apêndice A) respondido pelo grupo maior de professores participantes da pesquisa.

Com esses subsídios, verificou-se, contudo, como evidenciado no capítulo 4, que em geral os livros didáticos não oportunizam um processo completo de Modelagem nem dão subsídios teóricos e práticos que possibilitem ao estudante resolver situações-problema ou questões contextualizadas. Isso se deve ao fato, como visto nesse capítulo, que os livros didáticos, em geral, são constituídos por muitos exercícios do tipo padrão e de treinamento que não estimulam a reflexão e a criação de estratégias de resolução, além de apresentarem muitos problemas repetitivos desconectados da realidade do estudante. Por outro lado, no entanto, percebe-se que algumas coleções de livros didáticos e questões do ENEM, em menor ou maior escala, quase sempre apresentam modelos matemáticos que, a partir de uma perspectiva diferenciada poderão ser melhor explorados pelo professor e pelos estudantes.

Adicionado a isso, percebe-se que as questões do ENEM estão, a cada nova edição, mais voltadas à resolução de problemas do cotidiano que de certo modo exigem do estudante um pensar diferente, com motivações e interesses diferentes, uma vez que novas exigências educacionais são requeridas, "[...] decorrentes da aceleração da produção de conhecimentos, da ampliação do acesso às informações, da criação de novos meios de comunicação, das alterações do mundo do trabalho, e das mudanças de interesse dos adolescentes e jovens [...]" (BRASIL, 2013, p. 146).

Ao conceber a AnM na perspectiva de método de ensino para a Educação Básica, no entanto, assim como ocorre com a MM e com a própria AnM nas outras perspectivas, criam-se condições que possibilitam aproximar os conteúdos matemáticos aos problemas e situações do cotidiano e da realidade dos estudantes de Ensino Médio, instigando seu interesse. Entende-se que esse direcionamento vem ao encontro dos propósitos estabelecidos na Matriz de Referência para o novo ENEM que, em geral, visa analisar e resolver situações-problema elaboradas com base na interdisciplinaridade e na contextualização, e avaliar *competências* específicas de cada *área de conhecimento*, se desdobrando em *habilidades* que refletem conhecimentos emergentes dentro dos *eixos cognitivos*, comuns a todas as áreas (BRASIL, 2009).

Nesse sentido, percebe-se que a exploração dos modelos matemáticos encontrados nas questões do ENEM e nos livros didáticos, a partir da perspectiva da AnM proposta nesta pesquisa, pode contribuir para o desenvolvimento das competências e habilidades apontadas como meta na Matriz de Referência do ENEM para a área da Matemática.

1.2.1 Vislumbre de um novo direcionamento

Diante de tais considerações, a proposta da presente investigação é, portanto, tentar adaptar a AnM (SOARES, 2012, 2015; SOARES; JAVARONI, 2013) à prática de sala de aula como um método de ensino de Matemática para a Educação Básica. A partir das possibilidades vislumbradas no Ensino Superior, busca-se a utilização da AnM também na Educação Básica, com a finalidade de abordar modelos matemáticos prontos, clássicos ou não, encontrados, a princípio, nos livros didáticos e nas questões do ENEM.

Para evidenciar a relevância desse novo direcionamento, do qual emergiu o problema desta pesquisa e a tese a ser defendida, além de considerar a concepção iniciada por Soares (2012), buscaram-se dados que servissem como argumentos e solidificassem as hipóteses que poderiam ser levantadas durante a construção deste problema. Tais dados dizem respeito a três aspectos sobre AnM que servem como princípios para o ensino da Matemática na Educação Básica: a percepção de professores de Matemática da Educação Básica; as questões de Matemática apresentadas no ENEM; e, o livro didático.

Assim, em um primeiro momento, visando uma caracterização da AnM como método de ensino, e tentando perceber sua relação com a MM no contexto educacional, foi realizada uma pesquisa junto a um grupo de 58 professores de Matemática da Educação Básica que atuam nas cidades de Porto Alegre/RS, Santarém/PA e Uberlândia/MG. Foi aplicado um questionário (Apêndice A), por meio do qual os participantes deviam caracterizar os termos "Modelagem Matemática" (MM), "Aplicação de Modelos" (ApM) e "Análise de Modelos" (AnM), partindo do pressuposto que são alternativas de ensino. A partir das respostas dadas pelos professores, por meio de uma Análise Textual Discursiva (MORAES; GALIAZZI, 2011), procedeu-se uma fragmentação e uma busca de unidades de significados das quais emergiram algumas categorias que sinalizaram a percepção dos participantes acerca dos três termos, porém com o propósito de dar maior ênfase à investigação do termo "Análise de Modelos", tema central da pesquisa.

Vale ressaltar de antemão, uma vez que tal análise será detalhada nos próximos capítulos, que tal categorização converge para o fato de que muitos dos professores participantes da pesquisa percebem na AnM uma alternativa metodológica mais fácil de ser implementada em sala de aula do que a MM. Em geral, os professores não utilizam a MM como método de ensino em suas práticas por julgarem que uma atividade de Modelagem demanda muito tempo de planejamento e execução, o que atrapalha o cumprimento do extenso currículo estabelecido pelo sistema escolar vigente. Já a AnM, levaria menos tempo para implementar na sala de aula, até porque, para boa parte dos professores participantes da pesquisa, a AnM é percebida como inserida do processo de Modelagem, como etapa.

O segundo princípio, que serve como parâmetro para conduzir o ensino da Matemática em sala de aula é a utilização de questões da prova do ENEM, considerando que ela possa ser explorada por meio da AnM. Ao ler os enunciados das questões do ENEM, é perceptível que são apresentadas situações que vão além da simples aplicação de fórmulas sem sentido e descontextualizadas. Em exames como o ENEM, muitos modelos matemáticos são apresentados em um contexto interdisciplinar, aplicados em várias situações, permitindo avaliar a capacidade de reflexão e o raciocínio do estudante, a fim de "[...] desenvolver os conteúdos matemáticos de modo que os alunos usufruam tanto do valor intrínseco da Matemática, quanto de seu aspecto formativo, instrumental e tecnológico.” (FRAINGUELERT; NUNES, 2012, p. 13). Segundo as autoras, o ENEM é um exame que

> [...] dá ênfase na aferição das estruturas mentais com as quais construímos continuamente o conhecimento e não apenas na memória. A prova é interdisciplinar e contextualizada. E mais do que saber conceitos, esse exame exige que o estudante saiba interpretar, transferir e aplicar os conteúdos de matemática estudados em diferentes situações-problema. (p. 16-17).

Nesse sentido, partindo do pressuposto que a AnM congrega características como interpretação, aplicação, reflexão, dentre outras, é possível inferir que a resolução de algumas questões do ENEM sinaliza a ação de analisar modelos, conforme a concepção do método de ensino a ser proposto, o que aponta para a necessidade do professor desenvolver atividades que utilizem tais questões e oportunize isso aos estudantes em sala de aula.

O terceiro princípio diz respeito ao uso do livro didático, recurso que pode ser considerado nos processos de ensino e de aprendizagem quando relacionado à AnM. Entregue nas escolas públicas de forma gratuita, o livro didático ainda é a principal fonte nas aulas de Matemática e utilizado por muitos professores para direcionar o currículo (FREITAS; RODRIGUES, 2008; PERRELI; LIMA; BELMAR, 2013). De acordo com Perrelli et al. (2013, p. 253), em geral, o livro didático é utilizado pelo professor “[...] como fonte de consulta e atualização, como apoio na elaboração do planejamento e na preparação de aulas e como elemento presente nas ações desenvolvidas pelos alunos em sala de aula [...]”. E, nesse sentido, procura adequar os textos ou as situações apresentadas a sua própria realidade.

Muitos professores, porém, segundo Perrelli et al. (2013), utilizam equivocadamente ou acabam não utilizando o livro didático “[...] por considerá-lo inadequado à realidade e ao nível de seus alunos.” (p. 254). Essa postura, às vezes, esconde uma certa insegurança no uso do livro didático, de novos métodos de ensino e do próprio conhecimento de sua área (Matemática e Ciências). Nesse sentido, os autores destacam que alguns têm dificuldades com certos conteúdos, e geralmente são deixados de ser abordados, justificando-se que têm “[...] dificuldades em trabalhar com situações-problemas [e] atribuem tais dificuldades às lacunas na sua formação inicial.” (p. 254).

Contudo, de acordo com a proposta desta pesquisa, o uso do livro didático pode favorecer a implementação da AnM, uma vez que alguns desses livros que são utilizados nas escolas, além de trazerem situações contextualizadas tanto nas introduções, nos textos complementares, como nos chamados exercícios de aprendizagem, já exploram algumas questões do ENEM como parte das atividades de resolução de exercícios.

Por meio da AnM, a intenção é possibilitar o uso desses livros de modo mais eficaz, principalmente os textos complementares e atividades extras sugeridos nos mesmos, quase sempre interessantes e com potencial para desenvolver atividades de AnM ou até mesmo de Modelagem (SILVA; NOGUEIRA; KATO, 2009; SIQUEIRA, 2014). Entretanto, tais textos e atividades são geralmente negligenciados pelo professor, como afirmam Perrelli et al. (2013, p. 256): "Os textos básicos e atividades/exercícios propostos são, de modo geral, utilizados pelo professor na condução de suas aulas. Poucos [porém] utilizam os textos complementares, bem como atividades [extras] que retirem o aluno da sala de aula.".

Em alguns livros didáticos esses textos complementares e atividades extras, possibilitam a discussão de temas sociais, econômicos e culturais, além de reforçar a interdisciplinaridade e a transversalidade. Contemplam, conforme preveem as DCNEB (BRASIL, 2013) e a BNCC (BRASIL, 2018), temas transversais[8].

De acordo com as DCNEB, "A transversalidade é entendida como uma forma de organizar o trabalho didático-pedagógico em que temas, eixos temáticos são integrados às disciplinas, às áreas ditas convencionais de forma a estarem presentes em todas elas." (BRASIL, 2013, p. 29). Assim, um tema transversal, no entendimento de Mafra (2006, p. 67),

> [...] pode ser considerado um tema ou assunto a ser desenvolvido a partir de uma situação ou propriedade intrínseca ao interesse de uma determinada comunidade ou população. Em outras palavras, o tema transversal, tem o seu valor estabelecido a partir do momento em que é atribuído ao mesmo uma situação ou aspecto capaz de indicar uma possível formulação de estratégias e diagnósticos que possam motivar, mostrar e operacionalizar determinadas ações com vistas a um bem comum.

A fim de exemplificar a presença de temas transversais nos textos encontrados no livro didático, basta considerar algumas coleções de Matemática que trazem textos com essa perspectiva. É o caso da coleção *Matemática para compreender o mundo* (SMOLE; DINIZ, 2016), que apresenta textos complementares na seção intitulada "Mundo plural", onde evidencia a interação da Matemática com diversos temas e áreas do conhecimento. Nessa coleção, alguns temas são discutidos, como por exemplo: "Matemática – Tecnologia: Um Sistema de Posicionamento Global (GPS)"; "Matemática – Ciências da Natureza: Cálculo do 'tempo de vida' da radioatividade de uma substância"; "Matemática – Geociências: Ondas

[8] "Entre esses temas, destacam-se: direitos das crianças e adolescentes (Lei nº 8.069/1990), educação para o trânsito (Lei nº 9.503/1997), preservação do meio ambiente (Lei nº 9.795/1999), educação alimentar e nutricional (Lei nº 11.947/2009), processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso (Lei nº 10.741/2003), educação em direitos humanos (Decreto nº 7.037/2009), bem como saúde, sexualidade e gênero, vida familiar e social, educação para o consumo, educação financeira e fiscal, trabalho, ciência e tecnologia e diversidade cultural (Resolução CNE/CEB nº 7/2010)." (BRASIL, 2018, p. 19-20).

sísmicas em escala logarítmica"; "Matemática - Finanças: Meu primeiro salário, e agora?"; dentre outras.

Outra coleção que também apresenta vários desses textos, é a coleção *Matemática: Contexto & Aplicações* (DANTE, 2016) que discute, por exemplo, na seção "Outros contextos", vários temas transversais. Assim, a AnM, como método de ensino, pode ser favorecida em sua implementação a partir dos temas discutidos nesses textos e atividades propostas. Nessa coleção são apresentados alguns temas, como por exemplo: "Fontes de Energia elétrica"; "Redução da população vai começar em 2030"; "O maior acidente radioativo do mundo"; "Terremotos"; "O Sistema Financeiro Nacional"; "Biocombustíveis"; "A água no mundo"; dentre outros.

Ainda em relação a essa temática, embora direcionada à formação de professores na perspectiva Etnomatemática, Mafra (2006) desenvolve uma proposta de trabalho para explorar a transversalidade, denominada *Espaços Transversais em Educação Matemática* (ETEMAT's) e destaca: "[...] o desenvolvimento de propostas de cunho diferenciado, do que estamos habitualmente acostumados a presenciar como educadores, se torna essencialmente um foco de mudança de postura e de concepção, sob a consideração daquilo que se pretende realizar e manter como algo válido para o trabalho docente." (p. 61). De acordo com o autor, as propostas pedagógicas diferenciadas devem indicar "[...] um rearranjo ou um desenho alternativo das estruturas procedimentais do currículo" (p. 61).

Assim, segundo esse autor, propor novas metodologias de ensino não significa "[...] que a prática tradicional em sala de aula precisa ser superada e em seu lugar, dar lugar a outras propostas mais "atuais" [...]" (p. 157), mas sim, ampliar o leque de possibilidades das práticas pedagógicas, podendo coexistirem, pois "[...] é possível que nunca tenhamos que abandonar os aspectos tradicionais em sala de aula, mas, simultaneamente, incorporar novas propostas, capazes de "absorver" o tradicional, não deixando de lado sua necessidade de utilização no desenvolvimento de propostas outras." (p. 157).

Diante de tais considerações, em síntese, ao olhar para a AnM nessa perspectiva, torna-se relevante pensar em concebê-la como um método de ensino, que cria condições e possibilidades ao professor para que possa abordar melhor modelos matemáticos prontos encontrados na literatura, incentivando, com isso, o próprio trabalho de Modelagem em sala de aula. A intenção é tentar articular o uso de modelos matemáticos encontrados nos livros didáticos e nas questões do ENEM a fim de elaborar e executar atividades práticas para a sala de aula, de modo que esta (AnM) possa configurar-se como método de ensino, principalmente para o Ensino Médio.

1.2.2 A pergunta diretriz

Diante de todos os argumentos apontados até o momento, a questão de pesquisa que se levanta, portanto, é: **De que modo professores de Matemática do Ensino Médio podem utilizar modelos matemáticos presentes nos livros didáticos e nas questões do ENEM, adaptados à perspectiva da Análise de Modelos, como método de ensino, a fim de elaborar e executar atividades de ensino em sala de aula?**

Um desdobramento dessa questão, objetivando melhor direcionamento, pode ser expresso pelas seguintes questões auxiliares:

1) que elementos podem caracterizar a Análise de Modelos como um método de ensino no contexto geral das Aplicações, que se utiliza de etapas presentes na Resolução de Problemas e na Modelagem Matemática?

2) como adaptar, em um Material de Apoio, modelos matemáticos encontrados nos livros didáticos e nas questões do ENEM para que possam ser utilizados em atividades que use o método de ensino Análise de Modelos?

3) que desempenho pode ser percebido em professores e estudantes do Ensino Médio, nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática, ao utilizarem um Material de Apoio elaborado conforme a perspectiva do método Análise de Modelos, levando em conta o uso do livro didático e as questões do ENEM?

1.2.3 A tese e os objetivos

Portanto, o objetivo geral desta pesquisa é defender a tese de que **a Análise de Modelos pode ser adaptada como um método de ensino, que perpassa por etapas presentes nos métodos de Resolução de Problemas e de Modelagem Matemática, e pode contribuir nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio de modo intra e interdisciplinar.**

Como objetivos específicos estão elencados:

a) identificar etapas que possam caracterizar a Análise de Modelos como um método de ensino no contexto geral das Aplicações, abrangendo os métodos de Resolução de Problemas e Modelagem Matemática;

b) encontrar modelos matemáticos, em livros didáticos e nas questões do ENEM, que possam ser adaptados e utilizados em atividades que constituirão um Material de Apoio baseado no método Análise de Modelos;

c) analisar o desempenho de professores e estudantes, nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio, ao utilizarem, em sala de aula, um Material de Apoio elaborado conforme a perspectiva do método Análise de Modelos, combinado com o uso do livro didático e das questões do ENEM;

d) analisar as contribuições de um Material de Apoio, elaborado com base na concepção do método Análise de Modelos, dentro dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática no contexto da sala de aula.

2 CONSTRUIDO O CAMINHO PARA A PESQUISA

Neste capítulo são apresentadas a abordagem metodológica e a descrição do elenco de participantes que contribuiu, direta ou indiretamente, para o desenvolvimento desta pesquisa. Além disso, são indicados os instrumentos utilizados na coleta de dados e os procedimentos de análise desses dados. Por fim, é apresentado brevemente o processo utilizado para elaborar um Material de Apoio ao professor de matemática do Ensino Médio, baseado no método proposto nesta pesquisa (Análise de Modelos).

2.1 A ABORDAGEM DA PESQUISA

Segundo Marques (2006, p. 94), "[...] pesquisar é ir à procura de algo diferente, guiado pelo desejo de encontrar o novo, o inusitado, o sequer por nós suspeitado, o original porque descoberta nossa.". Para D'Ambrosio (2012), a "pesquisa" está relacionada à investigação, à busca, à procura. Sua perspectiva situa a pesquisa como sendo o elo entre teoria e prática, destacando que a ideia central é sempre "[...] a de mergulhar na busca de explicações, dos porquês e dos comos, com foco em uma prática." (p. 86).

Cruz Neto (2003, p. 52) destaca que, "[...] definindo bem o nosso campo de interesse, nos é possível partir para um rico diálogo com a realidade.". A pesquisa, nessa direção, é considerada, portanto, como "[...] uma atitude e uma prática teórica de constante busca que define um processo intrinsecamente inacabado e permanente. É uma atividade de aproximação sucessiva da realidade que nunca se esgota, fazendo uma combinação particular entre teoria e dados" (MINAYO, 1993, p. 23), e a metodologia de pesquisa escolhida para seu desenvolvimento pode ser um fator determinante nessa aproximação.

Com vistas a estabelecer esse diálogo com a realidade, é fundamental que se utilize metodologia apropriada para cada situação a ser pesquisada. Segundo Minayo (2003, p. 14), a metodologia é

> [...] o caminho do pensamento e a prática exercida na abordagem da realidade. Ou seja, a metodologia inclui simultaneamente a teoria da abordagem (o método), os instrumentos de operacionalização do conhecimento (as técnicas) e a criatividade do pesquisador (sua experiência, sua capacidade pessoal e sua sensibilidade).

Nota-se, a partir dessa perspectiva, que os métodos e as técnicas aparecem como elementos centrais dentro do processo operacional de uma pesquisa. Laville e Dionne (1999), pensando no desenvolvimento da pesquisa propriamente dita, expressam: "o *método* indica regras, propõe um procedimento [técnica] que orienta a pesquisa e auxilia a realizá-la com eficiência." (p. 11).

Assim, para a escolha de um método de pesquisa é preciso levar em conta o contexto de utilização, os objetivos estabelecidos e mais especificamente a questão a ser tratada. Para o contexto da presente pesquisa, a escolha do método levou em consideração a possibilidade de identificar, compreender e registrar percepções/caracterizações, (re)ações/expressões e desempenhos advindos dos professores e estudantes participantes da mesma.

Dos professores, buscou-se evidenciar, em um primeiro momento, suas percepções/caracterizações (pelas respostas do primeiro questionário) acerca de MM, ApM e, principalmente, sobre AnM e seu potencial para o ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica. Em um segundo momento (a partir de um Minicurso sobre o método AnM), a intenção foi equipar o professor e registrar seu desempenho/impressões no processo de ensino ao utilizar esse método (AnM) na prática. Já dos estudantes, buscou-se principalmente, acompanhar suas (re)ações/expressões (pela observação e pelas respostas de um pós-questionário) no contato com o método proposto (AnM), visando compreender e identificar elementos que possam favorecer a aprendizagem.

Entende-se, portanto, que essas percepções/caracterizações, (re)ações/expressões e desempenhos evidenciados pelos participantes da pesquisa, tanto nos questionários como nas intervenções pedagógicas, combinadas com as concepções apresentadas no referencial teórico, dão subsídios que possibilitam, a partir desta pesquisa, adaptar a abordagem AnM (SOARES, 2012; SOARES; JAVARONI, 2013) como um método de ensino de Matemática na a Educação Básica.

Diante dessas considerações, visando o alcance dos objetivos propostos, a presente pesquisa pode ser classificada como sendo uma investigação de natureza *qualitativa*, com uma abordagem *naturalística-construtiva*, do tipo *estudo de caso observacional* (BOGDAN; BIKLEN, 2013; MORAES, 2007; TRIVIÑOS, 2017; LÜDKE; ANDRÉ, 2017). Como estratégias principais de investigação, podem ser destacadas: a aplicação de um questionário a um grupo professores da Educação Básica; a elaboração de uma primeira versão (piloto) do Material de Apoio (Apêndice D) baseado nos princípios do método de ensino proposto (AnM); a realização de um minicurso sobre o método AnM para uma parte dos professores do grupo; a observação do desempenho desses professores e dos estudantes nas intervenções pedagógicas; a aplicação de pós-questionários aos professores participantes do minicurso e aos estudantes envolvidos nas intervenções pedagógicas.

Com relação a pesquisa qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (2013), é aquela que se interessa essencialmente em compreender de modo detalhado os significados e características de situações que o pesquisador apresenta, sendo este o principal responsável pela escolha dos dados. De acordo com os autores, em geral uma pesquisa qualitativa possui cinco características: a) o ambiente natural é a fonte dos dados e o investigador é o instrumento principal; b) é descritiva; c) o pesquisador tem maior interesse pelo processo; d) análise de dados de forma indutiva; e) importância do significado. Os autores destacam, porém, que não significa que toda pesquisa considerada qualitativa possui todas essas características em grau elevado. Alguns estudos podem, inclusive, ser "[...] totalmente desprovidos de uma ou mais características. A questão não é tanto a de se determinada investigação é ou não totalmente qualitativa; trata-se sim de uma questão de grau." (BOGDAN; BIKLEN, 2013, p. 47).

Considera-se, portanto, que a presente pesquisa, em geral, contempla principalmente as quatro primeiras características, cujo desdobramento pode ser descrito como segue:

- O *ambiente natural* onde se coletam os dados, na presente pesquisa, é a escola, a sala de aula. É nesse ambiente que o professor da turma aplicou a primeira versão (piloto) do Material de Apoio (Apêndice D) baseado na AnM como método de ensino. Por isso, é de vital importância que o investigador tenha contato direto com os sujeitos da pesquisa, em seu contexto, no próprio local de estudo. Essa ideia é apontada pelos autores ao afirmarem: "[...] os investigadores qualitativos assumem que o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ocorre, deslocando-se, sempre que possível, ao local de estudo." (BOGDAN; BIKLEN, 2013, p. 48);

- Os dados coletados são registrados de modo *descritivo*, por meio de palavras ou imagens (BOGDAN; BIKLEN, 2013; TRIVIÑOS, 2017). Considera-se que esta pesquisa segue nessa direção, uma vez que na coleta de dados o empenho foi por registrar detalhadamente a descrição de comportamentos, ações, atitudes, características físicas, espaços físicos, etc., conforme preveem os autores. Além disso, a opinião dos estudantes acerca do novo método de ensino foi registrada (*Wordle*) ao responderem um pós-questionário acerca do método proposto (AnM), o que contribuiu significativamente para a percepção do pesquisador acerca de sua eficiência;

- Com relação à ênfase dada ao *processo* da pesquisa, os autores apontam que em uma investigação com abordagem qualitativa, a exigência é que os dados sejam tratados, de modo geral, como elementos que possam potencializar a construção de pistas e permitir que se compreenda melhor o objeto de estudo. Essa perspectiva pode ser percebida nesta pesquisa. Essencialmente, seu foco de interesse está no processo, no sentido de evidenciar a AnM, por meio de etapas que a caracterizem como método de ensino de Matemática para a Educação Básica, de modo que esta possa contribuir para melhoria da qualidade do ensino dessa disciplina. A caracterização do método é um resultado importante, mas é o processo de investigação que vai testá-lo quanto sua eficiência ou não;

- Os dados devem ser coletados de modo que possam confirmar ou revogar as hipóteses levantadas. Por isso, deve ocorrer de forma *indutiva*, pois "[...] as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos vão se agrupando." (BOGDAN; BIKLEN, 2013, p. 50). Essa característica pode ser percebida na presente investigação, pois busca-se aqui, conforme indicam os autores, "[...] elaborar uma teoria sobre o seu objeto de estudo, [...] um quadro [...]" (p. 50), um método de ensino (AnM). No entanto, para se chegar a esse "quadro", faz-se necessário investigar de modo indutivo a concepção de autores, a percepção de professores e o desempenho de estudantes relacionados com o objeto da pesquisa (AnM). O direcionamento tomado pelo pesquisador, o tem levado a perceber os elementos, "as partes", não de "um quebra-cabeça" que se conhece de antemão o desenho formado após sua montagem, mas de "[...] um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam as partes. O processo de análise dos dados é como um funil: as coisas estão abertas de início (ou no topo) e vão-se tornando mais fechadas e específicas no extremo." (BOGDAN; BIKLEN, 2013, p. 50);

Com relação à abordagem naturalística-construtiva, considerada viável nesta pesquisa, visa compreender os fenômenos e problemas investigados a partir do próprio contexto de ocorrência destes (MORAES, 2007). Segundo Moraes (2007), essa abordagem é

> Fundamentada numa epistemologia interativa e construtiva, pretende chegar ao conhecimento por aproximações gradativas baseadas na *indução analítica*[9]. Um envolvimento intenso com os fenômenos estudados ajuda a reunir informações sobre os objetos de pesquisa. Essas informações, quando submetidas a um processo de análise indutiva, possibilitam a gradativa explicitação de categorias e de uma estrutura compreensiva dos fenômenos, resultando daí sua descrição, interpretação e teorização. (MORAES, 2007, p. 14).

O autor destaca que a realidade deve ser assumida a partir da perspectiva dos próprios sujeitos envolvidos na pesquisa. A atenção em todo o processo deve ser voltada prioritariamente para compreender as percepções dos sujeitos acerca do objeto investigado, o que valoriza, em grande medida, os conhecimentos tácitos deles.

Assim, tendo em vista que a presente pesquisa, pelo menos em certo grau, contempla as características propostas por Bogdan e Biklen (2013) e procura seguir essa abordagem "fundamentada numa epistemologia interativa e construtiva" (MORAES, 2007), onde os objetos de investigação (método de ensino AnM, professores e estudantes) são estudados dentro

[9] Trata-se do "[...] método pelo qual uma comparação constante entre as informações coletadas possibilita a emergência gradativa de categorias e teorias." (MORAES, 2007, p. 15).

do próprio contexto onde estão inseridos (escola, sala de aula), a mesma pode ser considerada uma pesquisa qualitativa com abordagem naturalística-construtiva, ou simplesmente, pesquisa qualitativa-construtiva (MORAES, 2007).

Por outro lado, pode caracterizar-se como um estudo de caso, uma vez que as pesquisas que seguem esse tipo de abordagem não têm pretensão de fazer generalizações estatísticas, mas principalmente, compreender os fenômenos investigados. De acordo com Triviños (2017, p. 110), os estudos de casos "[...] têm por objetivo aprofundarem a descrição de determinada realidade.". Segundo o autor, mesmo que os resultados obtidos por meio desse tipo de pesquisa sejam válidos apenas para o caso estudado, o grande valor atribuído a ele é que o mesmo pode "[...] favorecer o conhecimento aprofundado de uma realidade determinada que os resultados atingidos podem permitir e formular hipóteses para o encaminhamento de outras pesquisas." (p. 111). Em síntese, para o autor, o estudo de caso: "É uma categoria de pesquisa cujo objeto [de estudo] é uma *unidade*[10] que se analisa aprofundadamente." (p. 113).

Uma das principais características dos estudos de casos, conforme destacam Lüdke e André (2017), é a *interpretação em contextos*. Isto significa que o contexto onde se situa o caso deve ser tido em alta consideração, pois é aí que as realidades são retratadas de forma abrangente, mas ao mesmo tempo com profundidade. Enfatiza-se, no entanto, a complexidade das situações e por isso procura-se interpretar os diferentes pontos de vista presentes em uma determinada situação, escolhida especificamente para ter a atenção do olhar do pesquisador.

Esse é o foco da presente pesquisa: analisar de modo aprofundado o que ocorre em sala de aula, com professores e estudantes, quando uma nova abordagem para o ensino de matemática é proposta. Esse "o que ocorre em sala de aula", juntamente com o referencial teórico desenvolvido sobre os temas adjacentes ao tema principal (AnM), é que vai se desdobrar para o alcance dos objetivos específicos, e consequentemente, contemplar o objetivo geral da pesquisa. Além disso, também pode ser considerada como um estudo de caso, pois consiste na observação detalhada de um contexto e focaliza uma situação singular, isto é: a participação de um grupo de estudantes do Ensino Médio em aulas de Matemática, nas quais o professor da disciplina aplica um Material de Apoio (piloto) baseado na perspectiva da AnM como um método de ensino. Assim, o caso considerado, se refere a um contexto escolar, onde há um grupo de estudantes formado por turmas do Ensino Médio e seus respectivos professores de

[10] Por *unidade*, o autor está se referindo, por exemplo, a um **sujeito** (um professor, um estudante, etc.), uma **turma** (professores de Matemática, estudantes da 2º série do EM, etc.), uma **comunidade** (escola, associação de professores, etc.). (TRIVIÑOS, 2017).

Matemática, cuja finalidade principal é acompanhar seu desempenho nos processos de ensino e aprendizagem, na tentativa de perceber a eficiência do método de ensino proposto.

2.2 PARTICIPANTES DA PESQUISA

O elenco de participantes da pesquisa é composto por professores da Educação Básica e estudantes do Ensino Médio da rede pública.

São 58 professores de Matemática no total, sendo que 11 deles atuam na cidade de Porto Alegre/RS, 25, na cidade de Santarém/PA, e 22, são professores na cidade de Uberlândia/MG. Desses, 34 são do sexo masculino e têm idades entre 24 e 50 anos, e 24 são do sexo feminino, com idades entre 23 e 54 anos. A maioria desses professores possuía formação na área de licenciatura em Matemática. Do total de 58, apenas cinco não tinham essa formação, sendo quatro formados em Física, e um, formado em Engenharia Química. Com relação à formação em nível de pós-graduação, 32 deles possuíam especialização *lato sensu* (17 do sexo feminino e 15 do sexo masculino), 24 possuíam curso de pós-graduação *stricto sensu* em nível de mestrado (11 do sexo feminino e 13 do sexo masculino) e 8 estavam cursando mestrado (5 do sexo feminino e 3 do sexo masculino).

Vale ressaltar que esses 58 professores são os que participaram da primeira parte da pesquisa, momento que tiveram a oportunidade de responder um questionário (Apêndice A) sobre os termos "Modelagem Matemática" (MM), "Aplicação de Modelos" (ApM) e "Análise de Modelos" (AnM), partindo do pressuposto que são alternativas de ensino. Para a segunda parte da pesquisa, optou-se por realizar uma formação[11] com os professores da cidade de Santarém/PA, onde o pesquisador atua profissionalmente, sendo que, apenas 12 deles puderam participar.

Desse grupo de docentes, 7 são do sexo masculino, com idades entre 29 e 50 anos e experiência docente entre 2 e 20 anos, e 5 são do sexo feminino, com idades variando de 34 a 54 anos e experiência docente de 5 a 29 anos. Todos tinham formação na área de licenciatura em Matemática. Com relação à formação em nível de pós-graduação, 11 deles possuíam especialização *lato sensu* (5 femininos e 6 masculinos), 4 possuíam curso de pós-graduação *stricto sensu* em nível de mestrado (2 femininos e 2 masculinos) e 5 estavam cursando mestrado (1 feminino e 4 masculinos).

[11] Essa formação envolveu a participação dos professores em um minicurso sobre o método Análise de Modelos e a posterior implementação prática na sala de aula, que está detalhada no capítulo 6.

Já o grupo de estudantes, é formado por estudantes do Ensino Médio, de turmas dos professores que atuam na cidade de Santarém/PA, e participaram do minicurso sobre o método AnM, ministrado pelo pesquisador. Nessas turmas foi utilizado uma primeira versão do Material de Apoio (Apêndice D) elaborado com base na proposta do método AnM, o qual foi discutido no minicurso e posteriormente aplicado na escola pelos próprios professores participantes, sob observação do pesquisador. Participaram dessa etapa da pesquisa, portanto, doze turmas do Ensino Médio, correspondendo 246 estudantes do 1º Ano, 139 do 2º Ano e 58 do 3º Ano, totalizando 443 estudantes.

2.3 INSTRUMENTOS PARA COLETA DE DADOS

Para a coleta dos dados desta pesquisa, optou-se por utilizar os seguintes instrumentos: questionários; minicurso; observação direta; livros didáticos; questões do ENEM.

Fiorentini e Lorenzato (2012) classificam, de modo simplificado, os questionários em três categorias de acordo com os tipos de perguntas, que podem ser: "*Fechadas*, quando apresentam alternativas para respostas. [...] *abertas*, quando não apresentam alternativas para respostas, [...] *mistas*, combinando parte com perguntas fechadas e parte com perguntas abertas." (p. 116). Segundo os autores, as perguntas, em geral, traduzem as hipóteses da investigação, portanto "[...] a opção por esse instrumento de coleta de informações [questionário] exige do pesquisador conhecimento prévio sobre o tema e sobre o nível de conhecimento da população pesquisada." (p. 117).

Por isso, ao grupo de 58 professores descrito na seção anterior, primeiramente foi aplicado um questionário aberto (Apêndice A) com a finalidade de identificar e compreender como eles percebiam/caracterizavam MM, ApM, e principalmente, AnM. Aos professores de Porto Alegre/RS, o questionário foi aplicado no segundo semestre de 2016. Em 2017, no primeiro e segundo semestres, o mesmo questionário foi respondido pelos professores de Santarém/PA, e Uberlândia/MG, respectivamente. Além disso, em março/abril de 2019, foi oferecida uma formação aos professores de Santarém/PA (12 professores), cujo teor principal foi a discussão e abordagem prática desse método na Educação Básica (ênfase no Ensino Médio). Essa formação teve uma carga horária total de 30 horas, sendo dividida em uma parte teórico-prática (16 horas) que ocorreu em um minicurso sobre o método Análise de Modelos, realizado no Instituto de Ciências da Educação da UFOPA, e outra parte prática (12 horas), realizada nas próprias escolas onde os professores participantes do minicurso atuam. Para completar a carga horária prevista (2 horas), a formação foi encerrada com uma avaliação do processo como um todo (minicurso, prática na escola e Material de Apoio), que ocorreu também na UFOPA.

Dessa forma, o principal instrumento para a coleta de dados durante a formação (minicurso e prática na escola) dos 12 professores foi a *observação livre* do pesquisador (TRIVIÑOS, 2017), e, posteriormente, o questionário 2 (Apêndice B) respondido por eles.

Em relação aos estudantes, a coleta de dados foi feita a partir das observações e registro do desempenho nas aulas baseadas no método AnM (durante as intervenções pedagógicas), ministradas por seus professores (participantes do minicurso). Além disso, ao final dessas intervenções foi aplicado a eles um questionário aberto (Apêndice C), cujo objetivo principal era tentar identificar alguns pontos positivos e dificuldades sentidas por eles durante as aulas.

Na presente pesquisa a observação é voltada, essencialmente, para um fenômeno social que ocorre de modo singular dentro da sala de aula. O contexto desse fenômeno envolveu a escola, professores e estudantes, e teve como finalidade principal, avaliar a eficiência da proposta metodológica (Análise de Modelos) para ensinar Matemática no Ensino Médio. Para Triviños (2017, p. 153): "Observar um 'fenômeno social' significa, em primeiro lugar, que determinado evento social, simples ou complexo, tenha sido abstratamente separado de seu contexto para que, em sua dimensão singular, seja estudado em seus atos, atividades, significados, relações etc.".

Considerada como uma das técnicas que privilegia a pesquisa qualitativa, a *observação livre*, volta-se para o sujeito, para sua prática manifesta (TRIVIÑOS, 2017). Vale ressaltar, porém, que, o fato de ser *livre*, não significa que essa observação vai ocorrer de modo descontrolado, aleatório. É preciso planejar e sistematizar as ações, pois, como enfatiza Lüdke e André (2017, p. 29):

> [...] para que se torne um instrumento válido e fidedigno de investigação científica, a observação precisa ser antes de tudo controlada e sistemática. Isso implica a existência de um planejamento cuidadoso do trabalho e uma preparação rigorosa do observador. [...] Planejar a observação significa determinar com antecedência 'o quê' e 'o como' observar".

Trata-se, em primeiro lugar, de delimitar o objeto de estudo – "o quê". Em seguida, o planejamento da observação visa determinar a melhor forma de captar os aspectos a serem investigados desse objeto – "o como". Na presente pesquisa, "o quê" é o método de ensino AnM, e "o como", se refere à estratégia de observação para registro dos dados sobre esse método.

Segundo Triviños (2017), os registros desses dados podem ser feitos por meio de *anotações de campo*, que podem ser entendidas "[...] como todas as observações e reflexões que realizamos sobre expressões verbais e ações dos sujeitos, descrevendo-as, primeiro, e fazendo comentários críticos, em seguida, sobre as mesmas." (p. 154). Trata-se do "[...] relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiência e pensa no decurso da recolha e reflexão sobre os dados de um estudo qualitativo." (BOGDAN; BIKLEN, 2013, p. 150).

Portanto, na presente pesquisa, especialmente nas intervenções pedagógicas, para as anotações de campo, levou-se em conta, basicamente, os apontamentos sugeridos em Triviños (2017), Bogdan e Biklen (2013). Essas anotações tiveram como objetivo, em relação aos professores participantes dessa etapa da pesquisa, servir de instrumento para registrar suas ações durante a formação oferecida, tanto na parte teórico-prática (durante o minicurso), mas principalmente na parte prática, quando os professores aplicaram o método em sala de aula. Por outro lado, em relação aos estudantes, serviram para registrar sua participação nas aulas, quando submetidos a essa proposta de ensino (método AnM).

2.4 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS DADOS

Para analisar os dados coletados nesta pesquisa, mais especificamente, as respostas dos questionários 1 e 2 (Apêndices A e B) aplicados aos professores participantes, optou-se pela Análise Textual Discursiva (MORAES; GALIAZZI, 2011). De acordo com Moraes e Galiazzi (2011), trata-se de um procedimento metodológico que busca analisar dados qualitativos, e compreende algumas etapas a serem seguidas. A etapa inicial desse processo refere-se ao momento de conhecer a base de dados, o que requer leitura e releitura constante dos materiais a serem analisados, pois a qualidade e a profundidade do metatexto[12] produzido a partir da ATD estão diretamente relacionadas ao nível de compreensão e internalização do material de análise pelo pesquisador.

O primeiro questionário (Apêndice A) foi aplicado aos 58 professores (de Porto Alegre/RS, Uberlândia/MG, Santarém/PA), por meio do qual os participantes deviam caracterizar os termos "Modelagem Matemática", "Aplicação de Modelos" e "Análise de Modelos", partindo do pressuposto que são alternativas metodológicas de ensino. A ênfase, no entanto, foi investigar os termos "Aplicação de Modelos" e, principalmente, "Análise de Modelos", que é a temática central da pesquisa. Já o segundo questionário (Apêndice B), foi aplicado a 12 professores de Santarém/PA (participantes da formação), por meio do qual, entre as questões propostas, deveriam citar pontos positivos do método AnM que eles consideravam

[12] "texto literário que está na base de uma crítica ou de um novo texto; texto que descreve ou explica outro texto.". Disponível em: https://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/metatexto. **Acesso em**: 25 out. 2016.

que poderiam contribuir para a aprendizagem dos estudantes, e dificuldades sentidas ao aplicarem na prática o método AnM em sua sala de aula.

Assim, partindo das respostas dadas pelos professores nos dois questionários (Apêndices A e B), na primeira etapa do processo de análise procedeu-se a leitura e releitura dos textos para familiarização dos mesmos. Após essa tomada de conhecimento do material, a próxima etapa foi a desmontagem dos textos, que Moraes e Galiazzi (2011) denominam de “unitarização”, a qual deve ser feita com atenção e cuidado para não perder o sentido original das ideias. Nessa etapa, conforme os autores, destacam-se os diversos significados contidos no texto, o que nem sempre é possível contemplar a todos, e que possibilitam a desconstrução do texto original, levando à unitarização.

Após a leitura dos textos, para a presente pesquisa, foi feita uma fragmentação dos mesmos com vistas à identificação das unidades de significados que surgiram dessa “quebra”. De acordo com Moraes e Galiazzi (2011), as unidades que surgem do material inicial podem gerar outros conjuntos de unidades a partir de interlocução empírica e teórica ou da própria interpretação do pesquisador. Nesse sentido, a etapa seguinte da ATD consiste na “categorização”, onde são estabelecidas relações de semelhanças entre as unidades que aparecem na etapa de unitarização. Essas categorias podem emergir tanto do processo de análise ou definidas *a priori*.

Na presente pesquisa, as categorias emergiram a partir da própria análise dos textos, das unidades de significados, sendo direcionadas pelas perguntas: Do questionário 1 - “Considerando que Modelagem Matemática, Análise de Modelos e Aplicação de Modelos são alternativas metodológicas para ensinar Matemática na Educação Básica, como você caracteriza cada uma delas?”; do questionário 2 - “Partindo do pressuposto que a Análise de Modelos é um método que pode ser usado para ensinar Matemática na Educação Básica (Ensino Médio), que elementos se destacam como pontos positivos (do método) que podem contribuir para a aprendizagem dos estudantes?”. Assim, partindo desse direcionamento, foi possível identificar as categorias emergentes que sinalizam respostas às perguntas levantadas.

Por fim, chega-se a última etapa da ATD, denominada de “captação do novo emergente”. É nessa etapa que ocorre a expressão daquilo que foi compreendido a partir da etapa de categorização, por meio da construção de um metatexto no qual o pesquisador se assume autor dos próprios argumentos. Segundo Moraes e Galiazzi (2011), os textos provenientes da ATD devem sempre ser considerados em um estado de incompletude e de permanente crítica, no intuito de atingir uma compreensão maior do que está sendo estudado.

A partir das questões levantadas nos dois questionários, buscou-se captar esse "novo emergente" e expressá-lo por meio de textos explicativos e interpretativos (metatextos). Esses textos, por um lado, construídos "[...] a partir das análises e interpretações de uma investigação, [...] representa construções pessoais do pesquisador, tendo sempre como referência uma fidelidade e respeito às informações obtidas com os sujeitos da pesquisa." (MORAES; GALIAZZI, 2011, p. 94). Por outro lado, eles levam em consideração que as categorias emergentes representam uma síntese das informações relativas ao objeto em estudo. De acordo com os autores: "Essas sínteses são as teorizações do pesquisador, produzidas a partir de perspectivas teóricas implícitas dos sujeitos da pesquisa e do próprio pesquisador, sempre em interlocução com outros teóricos." (p. 90).

Nesta pesquisa vale destacar que o processo de análise dos dados advindos dos questionários permitiu a produção de três metatextos. O primeiro metatexto se refere ao termo "Aplicação de Modelos", detalhado na seção 3.1.4. O segundo evidencia o entendimento dos professores acerca do termo "Análise de Modelos", detalhado na seção 5.1.2. Já o terceiro, expressa, principalmente, a opinião do grupo de professores participantes da formação (12 professores) sobre elementos percebidos no método AnM que têm potencial de contribuir para a aprendizagem dos estudantes. Os detalhes desse terceiro texto está descrito no capítulo 6.

Vale ressaltar que, na produção desse terceiro texto, as respostas do questionário aplicado aos estudantes (Apêndice C) também foram consideradas, principalmente a questão Q5, que têm relação direta com as respostas dos professores. Para facilitar uma visualização das respostas dos estudantes, optou-se por evidenciar as principais expressões-chave apontadas por eles, que indicavam os pontos positivos e as dificuldades sentidas em relação ao método AnM durante as aulas. Para isso, utilizou-se o aplicativo *Wordle*[13] que permitiu essa visualização fácil e rápida das expressões-chave, destacadas no capítulo 6.

Diante de todas essas considerações, entende-se que na presente pesquisa, o "novo emergente", além de sua inserção particular dentro dos metatextos produzidos como parte (seções 3.1.4, 5.1.2, 6.2 e 6.3) de um texto maior (tese), também é evidenciado de modo geral na investigação como um todo. Para isso, foi necessário articular: as ideias dos professores participantes, advindas naturalmente das categorias emergentes das respostas dos dois questionários; as concepções dos autores, vistas no referencial teórico; e, as observações/concepções do próprio pesquisador, as quais vêm sendo construídas (e estão em

[13] **Wordle** é um aplicativo capaz de gerar nuvens de palavras. Nuvem de palavras é uma ferramenta virtual que dá maior destaque a palavras que aparecem mais vezes no texto. Disponível em: https://www.techtudo.com.br/tudo-sobre/wordle.html. **Acesso em**: 06 abr. 2019.

constante construção) ao longo do tempo. Entende-se, portanto, que é a partir dessa articulação, que o "novo emergente" (o método de ensino AnM) pode ser percebido, ampliado e teorizado (MORAES; GALIAZZI, 2011).

Com relação ao desempenho dos professores e estudantes nos processos de ensino e aprendizagem ao utilizarem o Material de Apoio (piloto) baseado na AnM, além dos questionários respondidos por eles (Apêndices B e C), buscou-se analisar os registros feitos pelo pesquisador a partir das observações em campo (durante a formação), o que ajudou também na composição do texto gerado no capítulo 6 deste relatório.

Já a avaliação do Material de Apoio (piloto) foi feita em dois momentos no decorrer da formação. O primeiro ocorreu durante o minicurso, nas discussões reservadas especificamente para esse fim, momento em que os professores manifestaram suas primeiras impressões e sugestões. Já o segundo momento, ocorreu a partir da avaliação feita no encerramento da formação (descrito no capítulo 6) e também das respostas do questionário 2 (Apêndice B) respondido pelos professores, após o uso prático do material em sua sala de aula. Essa avaliação serviu de parâmetro para uma (re)elaboração desse material e permitiu alguns ajustes, na tentativa de melhorá-lo/aperfeiçoá-lo, gerando assim, um material com elementos sugeridos pelos próprios professores, denominado apenas Material de Apoio (Apêndice D).

Portanto, ao final das intervenções pedagógicas, foi possível ter uma percepção mais ampla acerca da eficiência e dificuldades do método proposto (AnM), possibilitando organizar, ampliar e formalizar o método na perspectiva proposta nesta pesquisa, visando, assim, sua aplicação prática em sala de aula, em particular, no Ensino Médio, da Educação Básica.

2.5 SOBRE O MATERIAL DE APOIO

Para a elaboração do Material de Apoio (Apêndice D), além do referencial teórico levantado (nos próximos capítulos) e a avaliação da primeira versão (piloto) desse Material feita pelos professores participantes, as principais fontes utilizadas foram o livro didático de Matemática do Ensino Médio e as questões de Matemática do ENEM.

Os livros didáticos escolhidos fazem parte da lista indicada no Guia do Livro Didático de Matemática para o Ensino Médio - PNLD2018 (BRASIL, 2017). Optou-se pelas seguintes coleções: [C1] *Matemática: Contexto & Aplicações* (DANTE, 2016); [C2] *Matemática: ciência e aplicações* (IEZZI; et al., 2016); [C3] *Matemática para compreender o mundo* (SMOLE; DINIZ, 2016); [C4] *#Contato matemática* (SOUZA; GARCIA, 2016); [C5] *Matemática Paiva* (PAIVA, 2016). A opção pela escolha dessas coleções e não outras, é devido serem as únicas que estão presentes nas três últimas edições do PNLD, isto é, em 2012, 2015 e 2018. Já as questões de Matemática do ENEM consideradas como fonte, são as que fazem parte dos exames de 2009 até 2018, pois é a partir de 2009 que há uma reformulação do ENEM, quando esse exame passa a ser utilizado também como forma de seleção aos cursos de instituições públicas de ensino superior.

Ao considerar essas fontes (livros didáticos e questões do ENEM), a ideia foi realizar uma busca minuciosa e criteriosa por modelos matemáticos que tratam das diversas áreas de conhecimento, situações e temas, e servissem como modelos-base para a elaboração de uma primeira versão do Material de Apoio (Apêndice D). Todo esse processo de elaboração devia ser direcionado pelos princípios e etapas que caracterizam o método proposto (AnM).

Portanto, a partir de uma articulação entre a concepção dos 58 professores acerca do tema (AnM) e o referencial teórico construído a partir dos autores, chega-se à seção 5.2 com uma proposta inicial da AnM como um método de ensino. É a partir dessa caracterização, com seus princípios e etapas, que foi elaborado o Material de Apoio (piloto) que serviu de referência no minicurso sobre o método AnM e também na sua implementação prática na sala de aula pelos 12 professores de Santarém/PA, conforme descrito nas seções anteriores.

3 DELINEANDO A TRAJETÓRIA TEÓRICA: PRIMEIROS DEGRAUS

Este capítulo apresenta uma abordagem teórica dos principais conceitos que servem como alicerce desta pesquisa. São eles: Modelo matemático; Aplicação de Modelos (ApM); Resolução de Problemas (RP); Modelagem Matemática (MM). Vale destacar, que dentre esses conceitos, o conceito de modelo torna-se necessário para o entendimento dos demais, uma vez que está relacionado a todos.

O objetivo é discutir as principais concepções acerca dos métodos RP e MM no contexto educacional, apontando com destaque àquelas que são adotadas como referenciais na concepção da AnM como método de ensino, foco principal desta pesquisa.

3.1 MODELO MATEMÁTICO E APLICAÇÃO DE MODELOS

Conforme a etimologia da palavra[14], o termo "modelo" vem do latim *modulos* e significa molde, forma, medida, padrão. De acordo com Bassanezi (2002), trata-se de um sistema artificial que representa uma porção da realidade e tem como propósito refletir sobre a mesma, tentando explicar, entender e agir sobre ela. O modelo é entendido como uma representação (símbolo, signo, ícone, etc.) das mais diversas situações e se faz presente em todos os campos do conhecimento, como afirma Biembengut (2016, p. 65): trata-se da "[...] representação de algo que se pretende realizar, entender, explicar e/ou inferir, imitar, alcançar. O modelo é o ícone, literalmente incorporando características de interesse no original.".

Essa representação, conforme Biembengut (2016), é expressa por meio de um conjunto de enunciados menos complexos, comparando com a realidade em que foi baseado, mas é suficiente para aproximar dessa realidade aquilo que se busca compreender, imitar, inferir. Segundo a autora, é o

> Modelo que nos permite processar informações, estimular novas ideia e compreensões, prover de uma visão estruturada e global o que inclui relações abstratas. Capacita-nos ainda a observar e a refletir sobre um propósito, um fenômeno e, mais, a comunicar as ideias a outrem [...]. O valor de um modelo está na utilidade, na adequação ao fenômeno observado, na aplicação de dados que conduza a uma solução, a um resultado, a um produto, a uma teoria. (p. 66).

A ênfase da autora, é que o modelo pode ser considerado tanto como meio de estimular o processo mental, cognitivo, que auxilia nas percepções e na construção do conhecimento, quanto como meio de interpretar fenômenos presentes nas mais diversas áreas do conhecimento

---

[14] Origem da palavra modelo. Disponível em: http://origemdapalavra.com.br/site/palavras/modelo/. **Acesso em**: 06 dez. 2016.

e resolver alguma situação-problema, evidenciando seu papel prático e útil nas ações diárias, nas Ciências e na Matemática.

Para melhor entendimento da ideia de modelo nesse contexto, ao considerá-lo como uma representação artificial de um sistema, Bassanezi (2002) distingue dois tipos: *Modelo Objeto* - cuja representação pode ser por meio de imagens (desenhos, fotos, esquemas, mapas, etc.), fórmulas matemáticas (equações, inequações, etc.) ou símbolos (representação do átomo, molécula de DNA, etc.); *Modelo Teórico* - "[...] vinculado a uma teoria geral existente - construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. [...] deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais)." (p. 20). O modelo econômico de Leontief (1906-1999), os modelos acerca do processo cognitivo de Immanuel Kant (1724-1804) e das estruturas mentais de Jean Piaget (1896-1980), dentre outros, podem ser citados como exemplos de modelos teóricos.

Seguindo essa mesma concepção, Biembengut (2016) organiza os modelos em dois grupos: *Modelos Físicos* - que podem ser de *escala* (maquetes, moldes de roupas, fotografias, mapas, etc.) ou de *analogia* (gráficos, curvas de nível, sistema material, etc.); *Modelos Simbólicos* - podendo ser *teórico*, o qual "[...] muitas vezes é expresso por meio de relações matemáticas, permite efetuar manipulações experimentais e, assim, resolver uma situação-problema, descobrir ou inventar algo." (p. 86), ou *filosófico*, que "[...] apresenta fundamentos, pressupostos, implicações sobre alguma proposição, tese ou questão." (p. 86).

As duas concepções, visando uma classificação de modelos, basicamente, são as mesmas. Modelo objeto (Bassanezi) equivale ao modelo físico (Biembengut), e modelo teórico (Bassanezi) é equivalente ao modelo simbólico (Biembengut). De um modo geral, os modelos, físicos ou simbólicos, visam interpretar um fenômeno ou resolver alguma situação-problema, e podem ser utilizados em uma certa ordem conforme o grau de complexidade do fenômeno ou situação em estudo.

Em síntese, modelo pode ser entendido como um meio utilizado para representar alguma coisa, seja ela concreta ou abstrata, e cujo propósito é possibilitar direcionamento, explicação, inspiração, ação pedagógica, fazer previsões, tomada de decisão, dentre outros.

No contexto específico da Matemática, os *modelos matemáticos*, segundo a classificação apresentada (BASSANEZI, 2002; BIEMBENGUT, 2016), podem ser identificados na perspectiva de alguns autores, como será visto a seguir.

3.1.1 Definindo modelo matemático

Os modelos matemáticos estão presentes nas diversas áreas do conhecimento, como por exemplo nas Engenharias, Arquitetura, Matemática, Ciências da Natureza, Indústria, Economia, Moda, Artes, Literatura, etc. Assim, além de representar, os modelos matemáticos também possibilitam a interpretação de fenômenos e a resolução de situações-problema advindos dessas áreas. Como afirma Biembengut (2016, p. 83):

> O modelo matemático de algum fenômeno das Ciências reflete propriedades intrínsecas deste fenômeno e permite prever novas propriedades, organizar teorias mais gerais [...]. E também nos permite compreender o fenômeno que o gerou, fazer uso para solucionar uma situação-problema; encadeia muitas revelações significativas.

Não há uma definição única para modelo matemático. Segundo Carreira (1998), vários autores descrevem-no de diferentes modos, mas, essencialmente trazem uma base comum: um modelo matemático é uma representação matemática de uma dada situação do mundo real.

Bassanezi (2002), considerando sua inserção dentro das categorias propostas no tópico anterior, afirma simplesmente que "*Modelo Matemático* é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. [...] a importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades [...]" (p. 20).

Essencialmente, Burak (1992) também adota essa concepção. De acordo com o autor, os modelos matemáticos têm como objetivo explicar matematicamente situações do cotidiano das pessoas, ajudando-as a fazer predições e tomar decisões. Seu entendimento é que modelo matemático tem uma representação em linguagem matemática, geralmente sob a forma de uma equação, inequação, sistema de equações, podendo, inclusive, ser a planta baixa de uma casa ou um mapa, uma tabela, etc.

Já Barbosa (2007, p. 161), sendo um pouco mais abrangente, propõe que modelo matemático é "[...] qualquer representação matemática da situação em estudo". Sinaliza que um modelo matemático não precisa ser composto exclusivamente por equações ou inequações que representem relações entre variáveis. Sua defesa é que os modelos matemáticos devem ser concebidos em uma perspectiva *sociocrítica*[15] da MM (BARBOSA, 2003), isto é, discutir o papel e a natureza dos modelos matemáticos na sociedade. Segundo o autor, os modelos

---

[15] Essa perspectiva, apoia-se na concepção de Educação Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2000), a qual "[...] inclui o interesse pelo desenvolvimento da educação matemática como suporte da democracia, implicando que as micro sociedades de salas de aulas de matemática devem também mostrar aspectos de democracia. [...] enfatiza que a matemática como tal não é somente um assunto a ser ensinado e aprendido (não importa se os processos de aprendizagem são organizados de acordo com uma abordagem construtivista ou sociocultural." (p. 2).

matemáticos têm uma “função social” quando destaca que os mesmos precisam desenvolver um papel na sociedade como balizadores de decisões. É “[...] necessário ultrapassar as dimensões técnicas da Modelagem e realizar uma análise crítica do papel dos modelos matemáticos na vida social. As questões ‘Como são usados?’, ‘O que representam?’, ‘Quem os constrói?’, ‘A quem servem?’ etc. merecem atenção.” (BARBOSA, 2001a, p. 19).

Biembengut (2014) corrobora com essa ideia ao afirmar: “O valor do modelo vai além dos motivos de quem o modelou, mas essencialmente dos motivos daqueles que dele se servirão. Nenhum modelo ou forma de representar é casual ou rudimentar. É, antes, a expressão das percepções da realidade, do desejo, da aplicação [...].” (p. 21). Nessa perspectiva, portanto, a autora entende que um modelo matemático pode ter sua representação de modo simbólico ou físico. Significa que, para ela, assim como para Burak (1992), uma expressão ou lei matemática, um desenho ou imagem, um projeto ou esquema, gráfico ou mapa, dentre outras formas, podem ser meios de representar um modelo matemático.

Diante dessas ideias, portanto, o uso prático dos modelos matemáticos nas diversas áreas do conhecimento, na sociedade e nas situações do cotidiano, é evidenciado, isto é, há uma indicação de sua aplicabilidade nos vários contextos. É nessa direção que, nas seções seguintes, esse aspecto aplicativo dos modelos matemáticos será enfatizado, primeiramente contextualizando o ambiente geral das Aplicações e em seguida, identificando os modos de aplicá-los nesse contexto.

3.1.2 Contexto geral das Aplicações

No decorrer da História, o desenvolvimento do conhecimento humano quase sempre passou pela necessidade de encontrar respostas e resolver algum problema prático. Na Matemática esse desenvolvimento é nitidamente percebido. Inspirada, às vezes nos fenômenos da natureza, a Matemática se apresenta como uma “[...] criação humana a partir da contemplação da natureza e da tentativa de compreendê-la, imitá-la e modificá-la, [que] permite-nos produzir outras tantas coisas, formar ou combinar outros sons, outras imagens e até outras naturezas.” (BIEMBENGUT, 2016, p. 89).

A maior parte do ferramental matemático foi desenvolvido com esse propósito, isto é, aplicar os conhecimentos matemáticos na generalização e resolução de problemas oriundos de situações reais, auxiliando as pessoas na tomada de decisões adequadas. Esse aspecto aplicativo da Matemática tem se delineado, ao longo dos tempos, como fator relevante tanto para o desenvolvimento das diversas áreas do conhecimento como da própria Matemática, como afirma D`Ambrosio, citado em Bassanezi (1999, p. 11):

> Este caráter surpreendente de aplicabilidade da Matemática tem sido uma constante do seu desenvolvimento. Uma das razões parece ser que o desenvolvimento da Matemática não se processa de uma maneira isolada, mas recebe influências frequentes das próprias mudanças que ela ajudou a realizar.

Bassanezi (1999) destaca que esse aspecto aplicativo da Matemática em áreas como Economia, Química, Biologia, entre outras, é percebido fortemente, em um modo de aplicar que chama de "perspectiva da utilização de modelos". Esse "uso" da Matemática, segundo o autor, já é percebido também em outras áreas que aparentemente não teriam muita relação com a Matemática. É o caso da Sociologia, a Psicologia, a Medicina, a Linguística, a Música, e outras.

Ao se referir a essa aplicabilidade da Matemática, seu uso prático nas situações-problema, Bassanezi (2002, p. 18) enfatiza:

> O objetivo fundamental do "uso" da matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância.

Esse "uso" ou aplicabilidade da Matemática se harmoniza bem à concepção de *Matemática Aplicada* (BASSANEZI, 2002). Segundo esse autor, a Matemática Aplicada "pode ser considerada como a *arte de aplicar matemática a situações problemáticas* [...], e consiste, essencialmente, *na atitude de pensar e fazer matemática*." (p.32). Em outras palavras, trata-se de uma disposição voltada à interdisciplinaridade que tem como uma de suas ações principais, aplicar alguma estrutura própria da Matemática em outros campos e áreas do conhecimento externo à Matemática. Portanto, a fim de expressar um termo que represente o conjunto geral das aplicações matemáticas e da Matemática, as atitudes ou abordagens metodológicas que facilite essa aplicabilidade em contextos variados, será utilizado para isso simplesmente o termo "Aplicações".

Niss, Blum e Galbraith (2007), dentro desse contexto geral das Aplicações, afirmam que toda vez que se utiliza algum conteúdo matemático com a finalidade de compreender ou lidar com algum domínio do mundo externo à Matemática, ocorre aí uma aplicação. Segundo os autores, a aplicação é um instrumento útil para entender melhor situações que se encontram no âmbito externo à Matemática, possibilitando "[...] investigar questões, para explicar fenômenos, para resolver problemas, para preparar o caminho para as decisões, etc." (p. 3). Esse "[...]

mundo externo à Matemática pode ser outro conteúdo ou disciplina, uma área de prática, uma esfera da vida privada ou social, etc." (p. 3).

De acordo com os autores, duas abordagens distintas podem ser identificadas no contexto geral das Aplicações. Segundo eles:

> Ao usar matemática para resolver problemas do mundo real, no sentido amplo aqui adotada, é muitas vezes chamado de *aplicação* matemática, e um problema do mundo real que tem sido abordado por meio da matemática é chamado de uma *aplicação* da matemática. Às vezes, porém, as noções de "aplicação" [nos dois sentidos] são usados para qualquer tipo de ligação entre o mundo real e matemática.[16] (NISS; BLUM; GALBRAITH, 2007, p. 10, tradução nossa).

Segundo os autores, a primeira concepção, "aplicação matemática" para resolver problemas do mundo real, indica uma abordagem que valoriza a direção "Realidade → Matemática", isto é, os próprios fenômenos e os processos a serem desenvolvidos para a resolução dos problemas são a motivação principal. Já a segunda concepção, resolver os problemas do mundo real por meio de "aplicação da Matemática", sinaliza a direção oposta, isto é, "Matemática → Realidade", de modo que a ênfase agora recai sobre a própria Matemática e os objetos matemáticos envolvidos, como os modelos por exemplo, que devem dar o direcionamento para o estudo dos fenômenos encontrados na natureza e de outras áreas do conhecimento. Conforme os autores, dentro do contexto geral das Aplicações, a primeira abordagem, "aplicação matemática", pode ser identificada com a *Modelagem*, enquanto que a segunda, isto é, "aplicação da Matemática", pode ser chamada simplesmente de *aplicação*. Sintetizam a ideia, afirmando:

> [...] com a **modelagem** estamos de pé fora da matemática perguntando: "Onde posso encontrar um pouco de matemática para me ajudar com este problema?". [...] com **aplicação** estamos parados dentro matemática olhando para fora: "Onde eu posso usar esta parte particular do conhecimento matemático?".[17] (NISS; BLUM; GALBRAITH, 2007, p. 11, tradução nossa).

Essa concepção é encontrada também em Bassanezi (1999, 2002, 2015). De acordo com esse autor, a atividade de aplicar "[...] é tão antiga quanto a própria Matemática. Muitas ideias matemáticas surgiram a partir de problemas práticos, assim como a Matemática já desenvolvida passou a ser usada em situações novas e diversas." (BASSANEZI, 2015, p. 10).

---

[16] "Using mathematics to solve real world problems, in the broad sense adopted here, is often called applying mathematics, and a real-world problem which has been addressed by means of mathematics is called an application of mathematics. Sometimes, though, the notions of "applying" or "application" are used for any kind of linking of the real world and mathematics." (NISS; BLUM; GALBRAITH, 2007, p. 10).

[17] "[...] with modelling we are standing outside mathematics looking in: "Where can I find some mathematics to help me with this problem?" […] with applications, we are standing inside mathematics looking out: "Where can I use this particular piece of mathematical knowledge?" (NISS; BLUM; GALBRAITH, 2007, p. 11).

Mais especificamente, Bassanezi (1999) destaca as duas alternativas de abordagens das Aplicações. A primeira consiste em "[...] adaptar conceitos, configurações ou estruturas matemáticas aos fenômenos da realidade - muitas vezes, sujeitando aspectos da realidade, físico-sociais e outros" (p. 11), cuja finalidade é tratar dos modelos matemáticos que emergem dessa realidade da melhor forma possível. A outra, partindo de situações da realidade que sirvam "[...] como fonte para a obtenção de novos conceitos e estruturas matemáticas - com efeito, neste sentido, os paradigmas da construção científica, já estabelecidos, dão lugar a novos paradigmas e a Matemática evolui como um retrato do universo." (p. 12), mostrando de certa forma, o potencial da existência e aplicabilidade da Matemática.

Nota-se que o autor está se referindo na primeira abordagem, à ideia de *aplicação* (de modelos), quando o ponto de partida é a Matemática e suas "ferramentas" para resolver problemas da realidade, enquanto que na segunda, a referência é a *Modelagem*, que percorre o caminho inverso.

Soares (2012), na tentativa de caracterizar o uso de modelos matemáticos dentro do contexto geral da Aplicações, onde a abordagem estivesse voltada para o modo de trabalhar modelos matemáticos em sala de aula, faz uma pesquisa na literatura e identifica dois direcionamentos. O primeiro, indica um papel mais *ilustrativo* dos modelos, pois afirma:

> [...] um trabalho com aplicações parece se restringir à **ilustração** do uso de um conteúdo matemático. [...] o principal objetivo atrelado ao trabalho com aplicações é a **ilustração** de como utilizar determinado conteúdo. Neste caso, o conteúdo matemático é ensinado previamente e posteriormente utilizado pelos estudantes para resolver problemas vinculados ao mundo exterior à Matemática" (SOARES, 2012, p. 111, grifo nosso).

Por outro lado, o segundo direcionamento identificado por Soares (2012), aponta para um papel mais *reflexivo* dos modelos. Segundo a autora, essa perspectiva indica que o professor propõe um exame crítico de modelos matemáticos prontos de alguma situação real. Esses modelos podem ser apresentados na forma de tabelas de informações, com acesso às hipóteses e cálculos completos referentes aos modelos propostos, e têm como finalidade "[...] compreender sua elaboração, seus cálculos e determinar suas limitações." (p. 112). Essa perspectiva, segundo a autora, vem ao encontro da abordagem proposta por ela em sua pesquisa (SOARES, 2012), a qual será vista em detalhes no capítulo 5.

Em síntese, no contexto geral das Aplicações, voltada para o ensino de Matemática, é possível identificar dois tipos de estratégias para se trabalhar com modelos matemáticos em sala de aula. Uma, é a utilização de modelos matemáticos prontos para ilustrar ou exemplificar o conteúdo já abordado. A outra, é o uso de modelos matemáticos prontos em uma perspetiva mais reflexiva, inclusive para trabalhar um novo conteúdo. A primeira estratégia se encaixa na abordagem da *aplicação* (de modelos), que parte de dentro da própria Matemática, utiliza suas “ferramentas”, os modelos prontos para lidar com as situações-problema, com a realidade. Já a segunda estratégia, mesmo fazendo uso de modelos prontos, pode transcender o simples papel ilustrativo deles, e ganha um peso mais reflexivo, se aproximando muito mais da *Modelagem*, pois esta, parte das situações-problema, da realidade dos estudantes, de fora da Matemática, e se utiliza dela para chegar aos modelos a fim de resolver os problemas.

Assim, os modelos matemáticos, como representações de fenômenos do mundo real, estão presentes de alguma forma no campo geral das Aplicações. Pensando no âmbito educacional, é possível inferir que os modelos matemáticos, assim como outros conceitos e conteúdos matemáticos já desenvolvidos, são ou podem ser relacionados à realidade dos estudantes. Para tanto, a fim de tentar estabelecer essa relação e percebê-la dentro do ambiente das Aplicações, será identificado como uma abordagem pedagógica para esse fim, o termo “Aplicação de Modelos”, o qual será definido e terá um enfoque destacado na próxima seção.

3.1.3 Definindo Aplicação de Modelos

Os diversos fenômenos naturais e sociais apresentam problemas e situações-problema que podem ser traduzidos por meio de modelos matemáticos, e nesse sentido busca-se compreender a melhor forma de aplicá-los com fins educacionais. Devido a relação da Matemática com outras Ciências, quando o assunto se refere às Aplicações, o ensino e a aprendizagem ganham significativo sentido como parte relevante do currículo, especialmente na Educação Básica. Além do mais, essa relação oportuniza aos estudantes perceberem a importância do conteúdo desenvolvido em sala de aula de modo que a contextualização se torna uma importante ferramenta nesses processos a fim de resolver problemas reais.

Diante dessas considerações, e levando em conta as concepções acerca de *modelo matemático* e *aplicação* vistas anteriormente, será discutido nessa seção o termo *Aplicação de Modelos* (matemáticos) como uma abordagem pedagógica que pode ser utilizada em sala de aula com vistas a aprendizagem de Matemática. Assim, ao lado da MM, a ApM está inserida no contexto geral das Aplicações e se configura como um caso particular de *aplicação* (NISS; BLUM; GALBRAITH, 2007).

Nesse sentido, a abordagem ApM segue o mesmo direcionamento “Matemática → Realidade”, que na prática indica o uso específico dos modelos matemáticos presentes nos vários contextos para lidar e/ou resolver os problemas da realidade.

Assim, ao analisarem as ideias e explicações de Niss et al. (2007), Soares (2012), Soares e Javaroni (2013) identificam aí, basicamente o papel *ilustrativo* da ApM. Percebem, nesse caso, que a ênfase não é a reflexão sobre qual Matemática utilizar para resolver determinado problema, e sim em quais situações é possível utilizar determinado conceito matemático, como os modelos matemáticos, por exemplo. Entendem que:

> [...] um trabalho com aplicação [de modelos] iniciaria com a definição de um conteúdo matemático para depois seguir com a apreciação de uma situação ou problema para o qual aquele conteúdo seria utilizado. [...] um modelo é apresentado como um exemplo para um conteúdo já trabalhado. [...] um modelo apresentado para ilustrar a utilidade de um determinado conteúdo pode despertar a curiosidade dos alunos sobre determinada situação [...]. (SOARES; JAVARONI, 2013, p. 211-212).

Para que haja esse despertar da curiosidade dos estudantes, é necessário, porém, que o professor esteja atento na escolha dos modelos a serem tralhados em sala de aula, objetivando sempre a manutenção do vínculo com a realidade deles (BASSANEZI, 2002). Se a ênfase da ApM, no entanto, for simplesmente ilustrar ou exemplificar, esse objetivo estará em risco, e tal abordagem não passaria de uma exposição tradicional do conteúdo. Essas estruturas tradicionais, que segundo o autor seguem o mesmo esquema utilizado no ensino de um teorema, isto é, "**enunciado → demonstração → aplicação**", "[...] acabaram conduzindo seu ensino [da Matemática] nas escolas de maneira desvinculadas da realidade, e mesmo do processo histórico de construção da matemática." (p. 36).

Baseado em Soares (2012), Soares e Javaroni (2013), infere-se que a abordagem dos modelos matemáticos na perspectiva da ApM ocorre quando o professor, no seu planejamento, partindo de um conteúdo matemático previamente determinado, busca em seguida por algum fenômeno ou situação-problema que possa ser representada por modelos que os estudantes possam lidar e que envolva o conteúdo abordado. Um cuidado que se deve ter nessa abordagem é que a escolha do fenômeno ou da situação-problema seja estreitamente relacionada com um tema de interesse dos estudantes, seja ele focado em situações do cotidiano ou até mesmo em situações relacionadas ao trabalho deles em seu futuro profissional.

Assim, diante do que foi ventilado em relação à ApM, em síntese, pode-se dizer que se trata de uma abordagem de ensino do conteúdo curricular que parte de dentro da própria Matemática e visa lidar e resolver problemas e situações-problema por meio do uso de modelos matemáticos prontos associados de alguma forma à realidade e interesse dos estudantes. Essa abordagem tem como principal objetivo ilustrar e exemplificar os conteúdos matemáticos já estudados.

A seguir, será visto como um grupo de professores da Educação Básica caracteriza essa abordagem e qual a relação com a perspectiva aqui indicada.

3.1.4 Aplicação de Modelos na perspectiva de professores da Educação Básica

O grupo participante desta pesquisa, como já descrito no segundo capítulo, é composto por 58 professores de Matemática da Educação Básica. Foi aplicado um questionário com seis perguntas, dentre as quais foi escolhida uma para compor os relatos desta seção: "Considerando que Modelagem Matemática, Análise de Modelos e Aplicação de Modelos são alternativas metodológicas para ensinar Matemática na Educação Básica, como você caracteriza cada uma delas?". Para delimitar o tema, nesta seção, enfatiza-se a investigação apenas do termo "Aplicação de Modelos". Desse modo, o recorte dos relatos tem a intenção de responder à pergunta: Como um grupo de professores de Matemática concebe ou caracteriza o termo "Aplicação de Modelos"?

O procedimento adotado para análise das respostas foi a Análise Textual Discursiva definida por Moraes e Galiazzi (2011) como uma metodologia que busca analisar dados qualitativos constituída pelas seguintes etapas: reconhecimento da base de dados; desmontagem dos textos, denominado de "unitarização"; "categorização", que pode emergir tanto do processo de análise ou definidas *a priori*; e por fim, a "captação do novo emergente". Na última etapa ocorre a expressão daquilo que foi compreendido a partir da etapa de categorização, por meio da construção de um metatexto no qual o pesquisador se assume autor dos próprios argumentos.

A partir desse direcionamento, realizou-se, a leitura dos relatos, "quebrou-se" os textos em fragmentos que expressam uma ideia coesa, procedendo em seguida à organização dessas ideias, identificou-se os temas centrais ou unidades de significados presentes, e as categorias emergentes que, de certo modo, respondem à pergunta relativa ao termo "Aplicação de Modelos".

Dessa forma, a caracterização do termo "Aplicação de Modelos" (ApM) pelos participantes[18], ao responderem à pergunta: "Como você concebe ou caracteriza o termo Aplicação de Modelos?", aponta que a ApM pode ser caracterizada de seis maneiras, que de forma direta ou indireta, estão relacionadas ao contexto geral das Aplicações.

O relato dos professores sinaliza, conforme a ATD desenvolvida, as seguintes categorias emergentes que caracterizam o termo "Aplicação de Modelos" como: ApM_1 - **Abordagem que se utiliza da linguagem matemática para aplicar e aprofundar os conceitos e conteúdos estudados**; ApM_2 - **Abordagem que pode ser aplicada em diversas situações e áreas do conhecimento**; ApM_3 - **Etapa do processo de Modelagem Matemática**; ApM_4 - **Abordagem**

[18] São os 58 professores participantes da pesquisa, que serão identificados por P1, P2, ..., P58.

que se utiliza de modelos matemáticos prontos; ApM_5 **- Estratégia que facilita os processos de ensino e aprendizagem**; ApM_6 **- Abordagem que possibilita a resolução de problemas oriundos de situações da realidade ou do cotidiano dos estudantes**.

A fim de sintetizar o processo da ATD realizado que levou a essas categorias (ApM_i) emergentes, serão apresentados a seguir, quadros referentes a cada categoria que resumem o processo, e destacam nas três colunas, respectivamente: **Exemplos de fragmentos** dos relatos; **Unidades de significados** emergentes a partir da unitarização; **Número de ocorrências** de cada uma dessas unidades.

Quadro 1: ApM_1 - Abordagem que se utiliza da linguagem matemática para aplicar e aprofundar os conceitos e conteúdos estudados

Exemplos de fragmentos	Unid. de significados	Nº Oc.
"No livro didático existe aplicação de modelos matemáticos." (P1).	Encontrado no livro didático	2
"[...] pautando na discussão de conceitos matemáticos." (P48).	Discutindo os conceitos matemáticos	2
"[...] para aprofundar o conhecimento matemático [...]" (P36).	Aprofundando o conhecimento matemático	2
"Transforma esses problemas numa 'equação' ou 'fórmula matemática'". (P20). *"Utilização das propriedades matemáticas, deixando o especifico e aplicando no geral."* (P15). *"É execução [de] fórmulas matemáticas, passando do concreto para o abstrato."* (P23).	Fazendo uso da linguagem matemática para generalizar e representar uma situação-problema	6
"[...] a aplicação de modelos consiste na interpretação de um problema [...]" (P2). *"As diversas situações problema farão com que a capacidade de interpretação (dos estudantes) melhore [...]"* (P47). *"É utilizar modelos para simplificar a situação real."* (P58).	Interpretando e simplificando os problemas da realidade	7
"Seria colocar em prática conceitos e conteúdos matemáticos." (P4). *"A aplicação de modelos deve estar voltada para situações cotidianas de nossos alunos para dar significado ao que está sendo ensinado. Assim a aplicação do modelo matemático serve para contextualizar o conteúdo da disciplina."* (P28). *"[...] trazer para dentro de sala a realidade do aluno, uma vez que a matemática só fará sentido para os educandos quando ela se tornar significativa e prazerosa."* (P47).	Aplicando os conceitos e conteúdos matemáticos na prática, contextualizando-os e dando significado aos mesmos	12

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com um total de 31 ocorrências, nessa categoria, percebe-se que o uso da linguagem matemática para generalizar, representar, interpretar e simplificar as situações-problema (13 ocorrências) e a aplicação prática dos conceitos e conteúdos matemáticos para contextualizá-los e dar significado aos mesmos (12 ocorrências), são as unidades significativas que têm a maior frequência do número de ocorrências. Por outro lado, apenas dois professores apresentam o livro didático dentro dessa categoria como uma fonte de exemplos de ApM, mas que pode, talvez, potencializar o desenvolvimento de competências dos estudantes.

A interpretação, de acordo com os professores, perpassa pela simplificação da situação-problema, apontando o uso da linguagem matemática para traduzir os fenômenos reais. Isso indica que a ApM, nessa perspectiva, além de ser apontada como uma abordagem que discute (2 ocorrências), aprofunda (2 ocorrências) e mostra na prática o conteúdo curricular estudado em sala de aula de modo contextualizado e significativo, enfatiza a importância do ensino e uso adequados da linguagem matemática nas suas variadas formas representativas, que traduzem e permitem aos estudantes compreenderem com mais clareza as situações-problema advindas de sua própria realidade, de seu cotidiano.

Com isso, os estudantes podem perceber que essa linguagem está presente em diversas situações e áreas de conhecimento, como será destacado na próxima categoria.

Quadro 2: ApM_2 - Abordagem que pode ser aplicada em diversas situações e áreas de conhecimento e promove a Interdisciplinaridade

Exemplos de fragmentos	Unid. de significados	Nº Oc.
"Favorece processos interdisciplinares [...]" (P21).	Interdisciplinaridade	2
"[Os modelos] podem ser aplicados às mais diversas situações problema [...]" (P4). *"[...] restringe-se à aplicação do modelo nas diferentes situações possíveis."* (P6).	Aplicando em diversas situações-problema	3
"Quanto a aplicação de modelos, as áreas são diversas. Difícil é descrever algo que não dependa de um modelo." (P9). *"[...] envolve a aplicação de conceitos matemáticos em problemas envolvendo as mais diferentes áreas [...]"* (P43). *"[...] relaciona a matemática a outras áreas do conhecimento e ilustra o "para que serve isso" tão comentado pelos estudantes [...]"* (P10).	Aplicando em diversas áreas de conhecimento	9

Fonte: dados coletados pelo autor

Essa categoria sinaliza a ApM como abordagem potencializadora de interdisciplinaridade. Prevista nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, a interdisciplinaridade é "[...] entendida aqui como abordagem teórico-metodológica em que a ênfase incide sobre o trabalho de integração das diferentes áreas do conhecimento, um real trabalho de cooperação e troca, aberto ao diálogo e ao planejamento." (BRASIL, 2013, p. 28). Os próprios PCNEM já destacavam que a pretensão da interdisciplinaridade era "[...] utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver um problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista." (BRASIL, 2000, p. 21).

Essa relação da Matemática com as situações do cotidiano dos estudantes e com outras áreas do conhecimento, apontada pelos professores, se configura como fator essencial para estabelecer a interdisciplinaridade no contexto escolar, e a ApM, dentro dessa perspectiva, pode ser percebida em praticamente todos os relatos apresentados. É o que expressa explicitamente o professor P33 ao afirmar que a ApM promove: *"Interdisciplinaridade, pois vê o mundo real sendo interpretado em modelos matemáticos."*.

A próxima categoria relaciona a ApM com a MM.

Quadro 3: ApM_3 - Etapa do processo de Modelagem Matemática

Exemplos de fragmentos	Unid. de significados	Nº Oc.
"[...] é encontrar os limites de onde suas soluções são válidas para o fenômeno físico." (P46). *"[...] consista na verificação da veracidade dos modelos matemáticos em comparação com o real."* (P34).	Validação	8
"[...] é a última fase (do processo de modelagem) e a mais importante, pois a partir da aplicação do modelo podem ser feitas projeções ou inferências sobre o objeto de estudo." (P18). *"A aplicação é o resultado (fase) final [...]"* (P51). *"[...] a aplicação deste modelo é feita para prever eventos futuros."* (P49). *"[...] a fase da aplicação [...] busca apresentar soluções, fazer inferências, tomada de decisões, etc."* (P43).	Aplicação	16

Fonte: dados coletados pelo autor

Sendo essa uma das categorias com maior número de ocorrências (24), é perceptível com certa facilidade a relação que se estabelece entre a ApM e a MM. Na maioria dos relatos essa relação não está indicada explicitamente. No entanto, pelo contexto analisado, é possível inferir que em geral os participantes sinalizam para essa caracterização.

Em um processo de MM de uma situação-problema, etapas ou fases são desenvolvidas para se completar um ciclo do processo e atender aos objetivos propostos no início do estudo. Essas etapas são estabelecidas conforme a concepção de Modelagem adotada, e são várias as concepções (detalhadas na seção 3.3). Para evidenciar a presente categoria, a MM considerada aqui é a concepção de Bassanezi (1999, 2002), que vem da Matemática Aplicada, "[...]

considerada como a *arte de aplicar matemática a situações problemáticas*, usando como processo comum a modelagem matemática." (BASSANEZI, 2002, p. 32). Como será visto posteriormente, para esse autor as etapas do processo de Modelagem são: 1ª - *Experimentação*; 2ª - *Abstração*; 3ª - *Resolução*; 4ª - *Validação*; 5ª - *Modificação*; 6ª - *Aplicação*.

Nota-se que as etapas do processo de Modelagem sinalizadas pelos professores que podem caracterizar a ApM são a 5ª e 6ª etapas, isto é, a *Validação* (8 ocorrências) e a *Aplicação* (16 ocorrências). Nessa perspectiva, portanto, infere-se que a ApM não se configura como uma abordagem isolada no ensino de Matemática em sala de aula, mas é sinalizada como etapa ou fase de um processo maior, de um ciclo de MM.

Pensando na etapa da *Aplicação*, de modo geral, segundo o professor P31, a ApM pode levar o estudante a modificar e fazer melhorias no próprio contexto social em que vive. É o que indica também o professor P18 ao afirmar: "[...] a partir da aplicação do modelo, podem ser feitas projeções ou inferências sobre o objeto de estudo", pois a ApM "Permite, a partir do modelo, realização de previsões e extrapolações que dificilmente seriam possíveis na situação real" (P19).

A próxima categoria é aquela que têm menor número de ocorrências (11), não significando com isso que tem menor valor na caracterização da ApM. Pelo contrário, considerando a ApM como uma abordagem prática em sala de aula, talvez seja essa uma das características peculiares que podem defini-la como alternativa metodológica para ensinar Matemática na Educação Básica.

Quadro 4: ApM_4 - Abordagem que se utiliza de modelos matemáticos prontos

Exemplos de fragmentos	**Unid. de significados**	**Nº Oc.**
"É a aplicação de um modelo já construído [...]" (P2).	Fazendo uso de modelos já construídos ou elaborados	4
"[...] utilizando algum modelo já existente ou elaborado [...]" (P5). *"A aplicação de modelos [...] me parece que parte do pressuposto que o modelo já tenha sido obtido, que já exista."* (P11).	Fazendo uso de modelos já existentes	5
"[ApM] são trabalhos em sala de aula para exemplificar uma situação da realidade." (P8).	Fazendo uso de modelos prontos para exemplificar uma situação da realidade	2

Fonte: Elaborado pelo autor

Diferente da MM, que visa a construção/elaboração de um modelo matemático, a ApM, de acordo com essa caracterização, se utiliza de modelos matemáticos já construídos, prontos, tendo como finalidade o ensino do conteúdo curricular.

Percebe-se, mesmo de modo implícito, um aspecto apenas ilustrativo do conteúdo, como forma de simples exemplificação, sem refletir acerca do processo utilizado para chegar ao modelo. É o que expressa o professor P6 ao afirmar que a ApM *"[...] toma um modelo pronto, mas restringe-se à aplicação do modelo nas diferentes situações possíveis. Não há uma reflexão sobre o processo de construção/elaboração do modelo."*. Essa ideia é sintetizada por P58 quando afirma: *"[...] a aplicação de modelos vai apenas citar exemplos de várias aplicações da matemática."*.

Por outro lado, para ensinar e/ou aprofundar determinado conteúdo, utilizando a ApM, o professor precisa fazer uma seleção minuciosa de modelos matemáticos de várias áreas e situações que contenham esse conteúdo. Para isso, é importante que os modelos escolhidos pelo professor para serem abordados em sala de aula estejam em harmonia com os interesses dos estudantes. Isso vem ao encontro da proposta de Biembengut (2016) quanto ao início de uma atividade de *Modelação* (detalhada na seção 3.3). A autora sugere a utilização de modelos matemáticos conhecidos já nessa fase preliminar, visando explicitar o conteúdo matemático dentro das várias situações e áreas do conhecimento. Com isso, os estudantes têm oportunidade de "manusear" conteúdos curriculares em contextos de seu interesse, de sua própria realidade.

Assim, dentro dessa perspectiva, é possível inferir que a ApM pode ser percebida como uma abordagem que faz uso de modelos matemáticos prontos para exemplificar os conteúdos matemáticos, mas que, além disso, se apresenta como uma atividade introdutória ou preliminar à Modelação.

Quadro 5: ApM_5 - Estratégia que facilita os processos de ensino e aprendizagem

Exemplos de fragmentos	**Unid. de significados**	**Nº Oc.**
"É uma alternativa metodológica para aprofundar o conhecimento matemático." (P36).	Alternativa metodológica para aprofundar o conhecimento matemático	1
"É importante para fazer o aluno pensar e criar [...]" (P31). *"[...] faz com que o aluno possa explorar sua criatividade e lógica."* (P7).	Desenvolvendo nos estudantes a criatividade e o pensamento lógico	3
"É uma prática metodológica [...]" (P3). *"É a execução do modelo matemático que se propôs para aquele ensino em sala de aula."* (P41). *"[...] uma alternativa que favorece o aprendizado do aluno [...]"* (P7). *"[...] pode ser utilizada nos processos de ensino e aprendizagem de matemática [...]"* (P48).	Alternativa metodológica para o ensino e aprendizagem de Matemática	9

Fonte: Elaborado pelo autor

A ênfase dessa categoria é a inserção da ApM como estratégia metodológica alternativa nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática. Isso é perceptível, mesmo de modo implícito, em cada unidade de significado, pois aprofundar o conhecimento matemático, desenvolver a criatividade e o pensamento lógico dos estudantes apontam nessa direção.

De acordo com os professores, a prática da ApM no contexto escolar pode constituir-se realmente como uma estratégia alternativa (P7; P36), como *“[...] uma alternativa às aulas [...]”* (P45). É o que expressa o professor P51 ao indicar que essa alternativa pode inclusive *“[...] suprir uma carência no ensino da matemática atual.”*.

Essa perspectiva vem ao encontro do que propõe a BNCC acerca de estratégias para o ensino dos conteúdos nos diferentes componentes curriculares, cuja finalidade é “[...] assegurar as aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da Educação Básica, uma vez que tais aprendizagens só se materializam mediante o conjunto de decisões que caracterizam o currículo em ação.” (BRASIL, 2018, p.16). Algumas ações referentes a tais decisões valem ser destacadas, como:

> [...] contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando **estratégias** para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas; [...] adotar **estratégias** mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem; selecionar e aplicar **metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas**, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares [...]. (BRASIL, 2018, p.16-17, grifo nosso).

Tais ações se harmonizam com a perspectiva de ApM apontada na presente categoria, uma vez que é sinalizada pelos professores como uma estratégia alternativa com potencial para se trabalhar com modelos matemáticos de modo mais dinâmico, oportunizando a interatividade da Matemática com outras áreas do conhecimento, assim como os processos de ensino e aprendizagem da Matemática na prática em sala de aula.

A seguir, apresenta-se a última categoria emergente, com o maior número de ocorrências (33), destacando a resolução de problemas como foco principal da ApM.

Quadro 6: ApM_6 - Abordagem que possibilita a resolução de problemas oriundos de situações da realidade ou do cotidiano dos estudantes

Exemplos de fragmentos	**Unid. de significados**	**Nº Oc.**
“É fazer o aluno interagir com a situação problema.” (P22). *“[...] pode levar o aluno a perceber com maior clareza o valor da matemática no dia-a-dia.”* (P51).	Possibilitando a interação dos estudantes com situações-problema de seu cotidiano	4

"[...] consiste na utilização de um modelo matemático em sala de aula para estudar certo fenômeno da realidade [...]" (P24). *"[...] a fim de estudar, o que pode ser a realidade dos alunos [...]"* (P44).	Possibilitando o estudo de fenômenos da realidade dos estudantes	8
"[...] possibilita o desenvolvimento de resoluções de problemas." (P3). *"Resolver os problemas propostos pelos modelos apresentados."* (P33). *"[...] basicamente trata-se de resolver determinada situação problema."* (P5). *"[...] diz respeito a utilização deles para resolver uma determinada situação."* (P11).	Possibilitando a resolução de problemas e situações-problema	21

Fonte: Elaborado pelo autor

Nessa caracterização, a ênfase é dada à resolução de problemas reais, do cotidiano dos estudantes. Alguns professores, considerando a ApM dentro dessa perspectiva, destacam o interesse e a motivação dos estudantes no processo educativo. É o que expressa o professor P12 ao afirmar que a ApM *"[...] pode aumentar a motivação do aluno em estudar [...]"*, e o professor P43 ao enfatizar que a ApM *"[...] é de suma importância para a motivação e interesse pela aprendizagem por parte dos alunos [...]"*.

Como visto na seção anterior, a partir dos estudos de vários autores, a ApM pode ser definida como uma abordagem de ensino do conteúdo curricular que parte de dentro da própria Matemática, visando lidar e resolver problemas e situações-problema por meio do uso de modelos matemáticos prontos associados, de algum modo, à realidade e ao interesse dos estudantes, cujo objetivo primordial é tentar ilustrar e exemplificar os conteúdos matemáticos, mas que pode servir de incentivo à reflexão sobre esses conteúdos (BASSANEZI, 2002; NISS; BLUM; GALBRAITH, 2007; SOARES, 2012; SOARES; JAVARONI, 2013).

Essa definição[19] pode ser dividida em cinco partes, a fim de evidenciar com mais nitidez sua relação com a "concepção dos professores", ficando do seguinte modo: 1ª) "Resolver problemas e situações-problema"; 2ª) "por meio do uso de modelos matemáticos prontos"; 3ª) "associados à realidade e ao interesse dos estudantes"; 4ª) "podendo ser utilizada para ilustrar e exemplificar os conteúdos matemáticos"; 5ª) "servir de incentivo à reflexão acerca deles.". Assim, ao comparar as caracterizações da ApM, tomadas como a "Concepção dos professores" (*CP*), com essa definição (*CA*), percebe-se aproximações evidentes. O quadro a seguir (Quadro 7) evidencia essa relação:

19 Entendida como a "Concepção dos autores" e indicada por "CA" para simplificar a escrita.

Quadro 7: Relação entre a *CA* e a *CP* acerca da ApM

Concepção dos autores (*CA*)	**Concepção dos professores (*CP*)**
1ª) "Resolver problemas e situações-problema"	ApM_6 - Abordagem que possibilita a resolução de problemas oriundos de situações da realidade ou do cotidiano dos estudantes ApM_3 - Etapa do processo de Modelagem Matemática
2ª) "por meio do uso de modelos matemáticos prontos"	ApM_4 - Abordagem que se utiliza de modelos matemáticos prontos
3ª) "associados à realidade e ao interesse dos estudantes"	ApM_1 - Abordagem que se utiliza da linguagem matemática para aplicar e aprofundar os conceitos e conteúdos estudados ApM_2 - Abordagem que pode ser aplicada em diversas situações e áreas de conhecimento e promove a Interdisciplinaridade
4ª) "podendo ser utilizada para ilustrar e exemplificar os conteúdos matemáticos"	ApM_1 - Abordagem que se utiliza da linguagem matemática para aplicar e aprofundar os conceitos e conteúdos estudados ApM_4 - Abordagem que se utiliza de modelos matemáticos prontos
5ª) "servir de incentivo à reflexão acerca deles."	ApM_1 - Abordagem que se utiliza da linguagem matemática para aplicar e aprofundar os conceitos e conteúdos estudados ApM_5 - Estratégia alternativa que pode facilitar os processos de ensino e aprendizagem da Matemática

Fonte: Elaborado pelo autor.

A 1ª parte da *CA*, **Resolver problemas e situações-problema**, é percebido como um ponto central de convergência entre as duas concepções, embora na *CA* fique explícita a direção "Matemática → Realidade" no tratamento dos problemas, na *CP* (ApM_6), esse direcionamento é variado, sendo, às vezes, sinalizado na direção "Matemática → Realidade" (P22; P28; P40; P44; P47; P49; P56; etc.) e outras vezes, na direção oposta "Realidade → Matemática" (P2; P7; P10; P14; P17; P29; P32; P48; P57; etc.). Mesmo de modo implícito, essa perspectiva da *CA* também se aproxima da categoria emergente ApM_3, a qual aponta a ApM como parte ou advinda de um processo de Modelagem.

A 2ª parte da *CA*, **por meio do uso de modelos matemáticos prontos**, está diretamente relacionada à categoria emergente ApM_4, que aponta a ApM como uma abordagem que faz uso de modelos matemáticos prontos para ensinar os conteúdos matemáticos, e pode ser utilizada como atividade introdutória ou preliminar à *Modelação* (BIEMBENGUT, 2016).

A 3ª parte da *CA*, **associados à realidade e interesse dos estudantes**, pode ser percebida tanto na categoria emergente ApM_1, especialmente nas unidades "Interpretando e simplificando os problemas da realidade" e "Aplicando os conceitos e conteúdos matemáticos na prática, contextualizando-os e dando significado", como na categoria ApM_2, onde a ApM é caracterizada como abordagem que relaciona a Matemática com as situações do cotidiano dos estudantes e com outras áreas do conhecimento, configurando-se como fator essencial para estabelecer a interdisciplinaridade no contexto escolar. Além dessas, a categoria $ApM_{\mathbf{6}}$ tem proximidade com essa parte da CA, principalmente as unidades que apontam a ApM como possibilidade de estudo e interação dos estudantes com as situações-problema de seu cotidiano.

O papel de **ilustrar e exemplificar os conteúdos matemáticos,** 4ª parte da *CA* da ApM, pode ser percebido na categoria $ApM_{\mathbf{4}}$, dentro da unidade de significado "Fazendo uso de modelos prontos para exemplificar uma situação da realidade". Além disso, na categoria $ApM_{\mathbf{1}}$, as unidades de significados "Encontrado no livro didático" e "Aprofundando o conhecimento matemático" também sinalizam para essa perspectiva.

Por fim, a 5ª parte da *CA*, **proporcionar reflexão acerca dos conteúdos matemáticos**, pode ser percebida nas categorias $ApM_{\mathbf{1}}$ e $ApM_{\mathbf{5}}$. Na categoria $ApM_{\mathbf{1}}$, essa *reflexão* pode ser notada nas unidades que tratam da discussão, interpretação, contextualização e significação dos conceitos e conteúdos matemáticos. Já na categoria $ApM_{\mathbf{5}}$, a ideia de *reflexão* aparece na unidade que aponta a ApM como estratégia alternativa que possibilita o desenvolvimento da capacidade de criar e pensar logicamente dos estudantes.

Diante de tais considerações, na tentativa de estabelecer uma síntese relativa à caracterização do termo "Aplicação de Modelos", infere-se que os participantes da pesquisa, além de caracterizá-la como uma abordagem alternativa de ensino que faz uso de modelos matemáticos prontos ou advindos de algum projeto de Modelagem já realizado, apontam sua potencialidade em estabelecer uma conexão da Matemática escolar com a realidade dos estudantes. Essa caracterização vem ao encontro da *CA* apontada na seção anterior, que tem a resolução de problemas como objetivo evidente, a partir do ensino e aprofundamento do conteúdo curricular que pode ser contextualizado em diversas situações, que leva em conta o interesse dos estudantes e possibilita interação reflexiva com os fenômenos reais estudados. Assim, a *CA* é ratificada como possibilidade no ensino de Matemática na Educação Básica. Portanto, essa será a perspectiva adotada acerca da ApM nesta pesquisa.

Ao considerar os elementos identificados nessa definição de ApM, o aspecto específico relativo à resolução de situações-problema apresenta-se como tema que demanda discussão mais detalhada. Nesse sentido, a RP, como uma das tendências em Educação Matemática e como método de ensino, vem subsidiar essa discussão e facilitar o uso de modelos matemáticos no ensino do conteúdo curricular de Matemática em sala de aula.

Esse é o direcionamento proposto para o desenvolvimento da próxima seção, isto é, discutir o método RP, apresentando as principais concepções, os processos para seu desenvolvimento, e por fim, sintetizando as etapas que possibilitam a prática em sala de aula que servem como suporte para a definição da AnM como método de ensino, ênfase desta investigação.

3.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A História tem mostrado que o desenvolvimento do conhecimento humano quase sempre passou pela necessidade e curiosidade de se encontrar respostas a alguma situação ou problema prático. Na Matemática, esse desenvolvimento é nitidamente percebido, pois "[...] foi criada e desenvolvida [a Matemática] em outros tempos em virtude dos **problemas** de então, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências [...]" (D'AMBROSIO, 2012, p. 29, grifo nosso).

Conforme D`Ambrosio (2012), o desenvolvimento do conhecimento matemático foi motivado, a princípio, pela busca de solução dos problemas oriundos de situações práticas (repartição de terras férteis, distribuição de recursos, técnicas de construção, etc.), das outras ciências emergentes (Física, Química, Astronomia, dentre outras), chegando aos problemas surgidos internamente à própria Matemática.

O *problema*, portanto, pode ser identificado como elemento potencializador para o desenvolvimento do conhecimento matemático, que vai desde o conceito mais elementar até a teoria mais sofisticada e complexa. Nesse sentido, conforme apontado nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, as situações-problema podem levar os estudantes à construção de novos conhecimentos matemáticos. Portanto, uma *situação-problema* pode ser caracterizada "[...] como uma situação geradora de um problema cujo conceito, necessário à sua resolução, é aquele que queremos que o aluno construa." (BRASIL, 2006, p. 84).

No campo educacional, principalmente no contexto escolar, o *problema* e o uso de situações-problema tem se configurado como objeto e meio de motivar os estudantes, e a RP tem sido apontada como um dos métodos de ensino mais utilizados e pesquisados em todo o mundo, visando a aprendizagem de Matemática (FIORENTINI; LORENZATO, 2012). É o que Dante (2011, p. 11) percebe e reafirma:

> Os estudos e pesquisas em educação matemática apontam que é necessário enfatizar mais a compreensão, o envolvimento do aluno e a aprendizagem por descoberta. Ambos, compreensão e descoberta, exigem mais pensamento. E mais pensamento implica maior uso de atividades de resolução de problemas.

Segundo Dante (2011), Allevato e Onuchic (2014), a ênfase dada à RP como método de ensino de Matemática no âmbito escolar se firma, principalmente a partir de 1980, quando as principais teorias de aprendizagem vigentes[20] eram voltadas aos processos de pensamento, à aprendizagem por descoberta. Nesse contexto, a formulação e a resolução de problemas, conforme Dante (2011, p. 11), é considerada por especialistas da área "[...] a principal razão para se aprender e ensinar Matemática, por que é por meio dela que se inicia o aluno no modo de pensar matemático e nas aplicações dessa disciplina no nível elementar.". Segundo Allevato e Onuchic (2014), é nesse período que se passa "[...] a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção." (p. 36).

No contexto da Educação brasileira, a RP passa, então, a fazer parte do rol das atuais tendências da Educação Matemática, e traz em sua essência o objetivo de propor aos estudantes o desenvolvimento dos conceitos matemáticos em situações potencialmente significativas para eles. É nessa perspectiva que a Matemática pode se tornar um componente escolar que seja ao mesmo tempo prazeroso e desafiador, instigando a capacidade geral de raciocínio desses estudantes. É o que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) de Matemática para o Ensino Fundamental já destacavam em 1998: por um lado, indicando a RP "[...] como ponto de partida da atividade matemática e discutem caminhos para 'fazer matemática' na sala de aula." (BRASIL, 1998, p. 16), por outro, enfatizando que essa "[...] convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução" (p. 40).

Adicionado a isso, as Orientações Curriculares para Ensino Médio igualmente enfatizam essa concepção da RP, agregando ao desenvolvimento do pensamento matemático um valor formativo, isto é:

> [...] colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a **resolução de problemas** interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica. [...] a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma **situação-problema** ao aluno, ficando a formalização do conceito como a última etapa do processo de aprendizagem. Nesse caso, caberia ao aluno a construção do conhecimento matemático que permite **resolver o problema**, tendo o professor como um mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do novo conhecimento (BRASIL, 2006, p. 70 e 81, grifos nossos).

Nessa mesma direção, a atual BNCC (BRASIL, 2018) aponta competências gerais e habilidades que, à parte as críticas e controvérsias sobre esse documento, visam em um sentido

[20] Construtivismo, Psicologia Cognitiva e Teoria Sociocultural de Vygotsky.

geral a resolução de problemas reais do contexto dos estudantes, inclusive como meio para o *letramento matemático*, o qual visa desenvolver competências e habilidades "[...] de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas." (p. 266).

Tendo em vista esse quadro geral, será encaminhado a seguir, de modo mais específico, como se dá os processos de ensino e aprendizagem por meio da RP, primeiramente refletindo um pouco acerca do que se entende por *problema* no contexto educacional, quais as principais concepções e influências para sua utilização, e quais etapas seguir no processo.

3.2.1 Definindo problema

O dicionário da Língua Portuguesa *Houaiss* se refere a um "problema" como sendo um obstáculo ou contratempo, uma dificuldade que ainda não foi satisfatoriamente respondida e que desafia a capacidade de alguém solucionar. Pode ocorrer em qualquer campo do conhecimento. Segundo Dante (2011, p. 14), um problema pode ser entendido de modo geral como "[...] um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo.". É o que Polya (1980) já havia entendido ao afirmar que: "[...] ter um problema significa procurar conscienciosamente alguma ação apropriada para atingir um objetivo claramente definido, mas não imediatamente atingível" (p. 1).

Para Van de Walle (2009, p. 57), no contexto escolar, "problema" pode ser definido "[...] como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método específico de solução". Segundo Dante (2011), há uma variedade de tipos de problemas no contexto educacional, mas um consenso entre os educadores matemáticos acerca da definição de "problema" é a seguinte: "Problema é uma situação que um individuo ou grupo quer ou precisa resolver e para qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução." (LESTER JR, 1982 apud DANTE, 2011, p. 14).

Nesse sentido, Onuchic e Allevato (2011) ao refletirem sobre os diversos adjetivos empregados para classificar os problemas, afirmam que esses diferentes tipos indicam apenas modos diferentes de proceder na resolução dos mesmos, mas que, essencialmente, todos são problemas.

Nota-se que, a menos de variações textuais, os autores convergem na definição de "problema", apontando para aspectos relativos ao desconhecimento de alguma situação, para a qual não se tem resposta, o desejo de encontrá-la e o processo de busca para alcançar esse objetivo. O entendimento de tais aspectos pode ser decisivo no trabalho docente em sala de aula se o objetivo for a utilização da resolução de problemas para ensinar Matemática.

3.2.2 Concepções acerca da Resolução de Problemas

Apesar da RP, como método de ensino, começar se firmar no contexto educacional brasileiro por volta da década de 1980 (DANTE, 2011; ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), o tema não é assunto novo no cenário internacional. De acordo com Valente e Neto (1989), John Dewey (1859-1952)[21], considerado um dos mais influentes pensadores norte-americanos do século XX no campo educacional, foi o pioneiro a introduzir a temática acerca do ato de pensamento reflexivo na resolução de problemas. Sua proposta era que o desenvolvimento dessa capacidade de pensamento deveria ser o principal objetivo da educação.

Conforme Pereira et. al (2009, p. 154), John Dewey deixa

> [...] imensas contribuições educacionais distribuídas em diversas publicações científicas. Com a teoria Escola Nova, o autor contrapôs ao sistema tradicional de educação, propondo o modelo de ensino-aprendizagem focado no aluno como sujeito da mesma. A teoria prevê ainda, que a aprendizagem deve partir da problematização dos conhecimentos prévios do aluno.

Para Dewey, segundo Pereira et. al (2009), a problematização ou utilização da resolução de problemas nos processos de ensino e aprendizagem, tem influência direta para ocorrência de conhecimento significativo, e assim desenvolver o estudante de forma integral. Significa que "[...] dessa forma a escola atingiria o seu real objetivo que é o de formar cidadãos e indivíduos autônomos, intelectualmente preparados para a convivência em sociedade de uma forma plena." (p. 159).

Destaca-se, porém que, quando o assunto em pauta se refere à resolução de problemas no âmbito da sala de aula, o maior referencial da área é o trabalho de George Polya (1887-1985)[22], principalmente o livro intitulado *How to solve it?*, publicado pela primeira vez em

[21] "Dewey, professor de 1904 a 1931 na Universidade de Colúmbia em Nova York, é um dos representantes mais significativos do pragmatismo norte-americano. Partindo das ciências naturais, do materialismo, do behaviorismo e da experiência prática, concebeu o pensamento como um instrumento para o intercâmbio, definindo, por isso, sua filosofia como instrumentalista. O crescimento e o desenvolvimento são os termos-chave de seu pensamento filosófico, cujo objetivo primordial é a solução das tensões e a melhoria das relações sociais. Dewey defendeu uma humanização da sociedade capitalista, e sua obra pedagógica *Democracia e Educação* (1916) foi determinante para o que neste século se evoluiu no sistema educativo norte-americano. Como psicólogo, sustentou a ideia de que todas as formas de relação conduziam basicamente a uma adaptação ao meio (funcionalismo).". Disponível em: https://educacao.uol.com.br/biografias/john-dewey.htm. **Acesso em**: 13 ago. 2019.

[22] "George Pólya, foi um matemático, nasceu em Budapeste, Hungria, no dia 13 de dezembro de 1887. Ele fez contribuições fundamentais para a análise combinatória, teoria dos números, análise numérica e teoria da

1944 pela Princeton University Press, sendo reeditado e traduzido em pelo menos 21 idiomas (ALMEIDA, 2012). No Brasil, foi traduzido e adaptado pelo professor Heitor Lisboa de Araújo com o título *A arte de resolver problemas*, publicado em 1977 pela Editora Interciência.

Para Polya, segundo Dante (2011, p. 17): "A resolução de problemas foi e é a coluna vertebral da instrução matemática desde o Papiro de 'Rhind'.". Nesse sentido, a fim de estabelecer como deve ser pensado o ensino da Matemática, Polya (1978, p. 3) indica:

> A resolução de problemas é uma habilitação prática como [...] a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os.

Esse aspecto prático da resolução de problemas tem o potencial de estreitar uma interação mais consciente dos estudantes com a Matemática. Isso pode ocorrer, tanto na compreensão de sua importância como ciência, como no conhecimento significativo de suas aplicações, permitindo o exercício de pensamento dos estudantes. É o que se percebe nas palavras de Onuchic (1999), quando afirma que para George Polya "[...] 'resolver problemas' era o tema mais importante para se fazer matemática e 'ensinar o aluno a pensar' era a sua importância primeira. Um tema que fundamenta a investigação e resolução de problemas em matemática é 'como pensar'." (p. 210).

É possível notar que essa abordagem tem a intenção de proporcionar o desenvolvimento cognitivo do estudante, possibilitando-o resolver situações-problema da sua própria realidade, do seu cotidiano. Dessa forma, a metodologia de ensino que tinha o professor como o elemento central para a aprendizagem, seria deslocada, agora, para uma prática mais reflexiva, centrada no estudante. Segundo Polya (1978, p. v), por meio da resolução de problemas:

> É possível [que o estudante] chegue a perceber que um problema de Matemática pode ser tão divertido quanto um jogo de palavras cruzadas, ou que intenso trabalho mental pode ser um exercício tão agradável quanto uma animada partida de tênis. Tendo experimentado prazer no estudo da Matemática, ele não a esquecerá facilmente e haverá, então, uma boa probabilidade de que ela se torne alguma coisa mais: um hobby, um instrumento profissional, a própria profissão ou uma grande ambição.

A comparação que Polya faz do problema matemático com "um jogo de palavras cruzadas" ou "uma animada partida de tênis", atividades que considerava divertidas e prazerosas na sua época, retrata a importância que dava à resolução de problemas no processo educativo. Essencialmente, o trabalho de Polya tinha como preocupação "[...] descobrir como

---

probabilidade. Ele também é conhecido por seu trabalho em heurística e educação matemática.". Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/b_bpascal-2/. **Acesso em**: 13 ago. 2019.

resolver problemas e como ensinar estratégias que levassem a enxergar caminhos para resolver problemas." (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 78), combinando assim os aspectos cognitivos da estrutura de pensamento e o metodológico; o modo de pensar dos estudantes e estratégias apontando caminhos de resolução. Para Polya (1978), esse processo podia ser desenvolvido em etapas, em um estudo dos métodos de resolução, por meio de uma heurística[23].

Biembengut (2016) destaca a existência de diferentes heurísticas, apropriadas para se chegar à solução de diferentes tipos de problemas. Para ilustrar, a autora aponta os nomes de Wallas (1858-1932), John Dewey (1859-1952) e George Polya (1887-1985), cujo reflexo de suas concepções e trabalhos ainda aparece nas produções atuais no campo da Educação Matemática. É o que se percebe nas discussões e esforços realizados que visam o trabalho prático em sala de aula, o desenvolvimento de currículos e materiais instrucionais tanto para professores como para estudantes nos últimos anos, principalmente a partir da década de 1980 (ONUCHIC, 1999).

Nesse sentido, foi exatamente em 1980 que o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) publicou, nos Estados Unidos, o documento intitulado *An Agenda for Action: Recommandations for School Mathematics of the 1980's*, indicando que "[...] resolver problemas deve ser o foco da matemática escolar." (ONUCHIC, 1999, p. 204).

Segundo Onuchic e Allevato (2011), a partir desse direcionamento, muito foi feito em favor da RP como prática em sala de aula, tendo como principais pressupostos o construtivismo e a teoria sociocultural de Vygotsky. A ênfase do trabalho, nessa fase, era voltada principalmente para os processos de pensamento matemático e para a aprendizagem por descoberta. Nessa fase, de acordo com Onuchic (1999, p. 206):

> [...] muitos recursos foram desenvolvidos na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividade e orientações para avaliar o desempenho dos alunos nessa área, sempre visando ao trabalho em sala de aula. Muito desse material contribuiu para que os professores fizessem da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho.

A autora destaca, porém, que mesmo com muitos avanços, o processo de resolução de problemas continuou enraizado na busca por solução. Havia ainda muitas dúvidas e divergências quanto à forma prática de alcançar o objetivo proposto. Para Onuchic (1999, p. 206): "Essa falta de concordância ocorreu, possivelmente, pelas grandes diferenças existentes

[23] "Este termo se tornou popular com a publicação de um livro chamado "How to Solve it" do autor e matemático húngaro George Pólya. O mesmo está focado em uma metodologia para resolver certos problemas e apresentar demonstrações.". Disponível em: https://conceitos.com/heuristica/. **Acesso em**: 10 abr. 2018.

entre as concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de 'resolução de problemas ser o foco da matemática escolar'.".

A obscuridade nessa questão começa a diminuir, conforme Onuchic (1999), quando Schroeder e Lester (1989) apresentam três concepções diferentes de abordagem da RP, que de certo modo, ajudou na reflexão acerca de tais diferenças. Essas concepções foram classificadas em: "(1) ensinar **sobre** resolução de problemas; (2) ensinar matemática **para** resolver problemas; e (3) ensinar matemática **através** da resolução de problemas." (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 79, grifo nosso). A primeira concepção tem o objetivo de "teorizar" sobre resolução de problemas conforme o modelo de Polya (1978), a segunda, visa a aplicabilidade da Matemática em situações-problema de acordo com o direcionamento "ensinar-então-praticar", e a terceira, tem a finalidade de ensinar Matemática partindo das situações-problema.

Essa última abordagem, foi considerada, inicialmente, no sentido de ensinar Matemática "via" ou "por meio de" resolução de problemas. De acordo com Nunes (2010), essa perspectiva indicava o uso de um problema apenas como recurso. Já a expressão "através" indica o uso de problemas no processo todo, do início ao fim, de modo que o estudante se torna coparticipante na construção de seu próprio conhecimento. Assim, os problemas propostos nessa abordagem permitem gerar conceitos novos, caminhos novos e até mesmo conteúdos novos.

Onuchic e Allevato (2011) explicam que, a partir da década de 1980, há uma evolução nas discussões sobre o tema, busca-se uma reforma na Educação Matemática e os educadores matemáticos passam a enfatizar o ensino e aprendizagem de Matemática **através** da resolução de problemas, como metodologia de ensino. E afirmam:

> [...] o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo. Esse é o ponto central de interesse dos trabalhos que temos desenvolvido atualmente, isto é, o trabalho com matemática **através** da resolução de problemas. Esse trabalho se apoia na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino-aprendizagem é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro das atividades feitas em cada unidade temática e de que o ensino pode ser feito por meio da resolução de problemas. (p. 80, grifo nosso).

Diversos autores têm se debruçado diante da temática *resolução de problemas* nessa perspectiva, trazendo significativas contribuições ao campo educacional, especialmente ao ensino de Matemática. É o que se vê em Krulik e Reys (1997), Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2004, 2011), Allevato e Onuchic (2014), Van de Walle (2009), dentre outros.

A seguir, busca-se apresentar de um modo sintético, a heurística ou etapas do método RP nessa perspectiva (ensinar Matemática **através** da resolução de problemas) que será inspiração ao propósito dos objetivos desta pesquisa.

3.2.3 Resolução de Problemas: prática em sala de aula

Na prática em sala de aula, segundo Van de Walle (2009), é fundamental que a utilização de problemas que visam à aprendizagem de Matemática considere três princípios: partir dos conhecimentos prévios dos estudantes; ter clareza dos conteúdos pretendidos que os estudantes aprendam; justificar e explicar as respostas e os métodos utilizados para chegar nelas. Para esse autor, uma aula baseada na RP perpassa três fases: antes, durante e depois. Essencialmente, o professor propõe um problema à turma, em seguida os estudantes passam a investigar e trabalhar para resolvê-lo, por fim, discutem e formalizam os resultados.

De acordo com o autor, a **fase inicial** é o momento de preparar a turma, e as ações do professor devem ser direcionadas para ativar os conhecimentos prévios, verificar se o problema foi compreendido, e estabelecer expectativas claras quanto ao trabalho a ser desenvolvido pelos estudantes e o que será avaliado pelo professor. Na **fase intermediária**, enquanto os estudantes investigam e dedicam-se em resolver o problema, o professor deve dar chance aos estudantes de trabalharem sozinhos, tentar descobrir o pensamento matemático apresentado por eles, fornecer suporte apropriado para apoiar seu pensamento, e fornecer extensões vantajosas, algo preparado para aqueles que consigam terminar as atividades mais rápido e tenham como ampliar seu pensamento. Por fim, na **fase final**, é o momento de discutir e formalizar os resultados. O professor deve promover uma comunidade matemática de aprendizes, escutar as respostas encontradas pelos estudantes, sem julgá-los, sintetizar as ideias principais e identificar futuros problemas a serem explorados (VAN DE WALLE, 2009).

Outras propostas para essa prática em sala de aula têm sido sugeridas por vários autores, como o roteiro básico apresentado por Onuchic (1999), e posteriormente, ampliado por Zuffi e Onuchic (2007), Allevato e Onuchic (2009), Onuchic e Allevato (2011). Segundo as autoras, na prática de sala de aula, ao utilizar a RP como meio para ensinar Matemática,

> [...] os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 85).

Nessa perspectiva, uma das propostas mais recentes com relação à prática em sala de aula da RP consiste em organizar as atividades em dez etapas, conforme a sugestão de Allevato e Onuchic (2014), esquematizada no quadro a seguir:

Quadro 8: Resolução de Problemas na prática de sala de aula

Etapas	Descrição
1) *Proposição do problema*	O professor seleciona/elabora e propõe um problema gerador aos estudantes, que visa, essencialmente, o estudo do novo conteúdo curricular necessário ou mais adequado à resolução desse problema. Nessa etapa, o professor também pode instigar os próprios estudantes a proporem um problema.
2) *Leitura individual*	Ação exclusiva dos estudantes e tem como objetivo a reflexão e compreensão do problema, tendo o primeiro contato com a linguagem matemática.
3) *Leitura em conjunto*	Ação essencialmente dos estudantes, só que agora, em grupos. O papel do professore é auxiliá-los na compreensão do problema e tirar dúvidas adjacentes (notações, tradução da linguagem escrita para a linguagem matemática, técnicas operacionais, etc.). Nessa etapa, os estudantes são incentivados a expressarem suas ideias e aprimorarem a linguagem.
4) *Resolução do problema*	Os estudantes tentam resolver o problema de modo cooperativo e colaborativo. Essa ação os conduzirá à construção de conhecimentos sobre o conteúdo curricular proposto pelo professor. Nessa etapa, os estudantes começam a se expressar de forma escrita, utilizando linguagem corrente e/ou matemática (desenhos, gráficos, tabelas, esquemas, etc.).
5) *Observação e incentivo*	O professor observa o andamento do trabalho dos estudantes, incentivando o resgate de conhecimentos prévios e auxiliando nas dificuldades com vistas a autonomia deles.
6) *Registro das resoluções*	Representantes dos grupos apresentam suas resoluções e os procedimentos utilizados para chegar a elas.
7) *Plenária*	O professor estimula os estudantes a defender suas ideias, esclarecer dúvidas e se auto avaliarem. Essa etapa, visa o aprimoramento da apresentação escrita das resoluções.
8) *Busca do consenso*	Os estudantes têm a oportunidade de validar respostas de consenso junto aos colegas, aperfeiçoar a leitura e escrita matemática, além de evidenciar o conteúdo curricular previsto para a construção de conhecimento relativo ao problema.
9) *Formalização do conteúdo*	O professor formaliza o conteúdo curricular, expondo-o, de modo organizado e estruturado, na linguagem matemática. Essa exposição, visa padronizar os conceitos, princípios e procedimentos que emergiram "através" da resolução do problema, enfatizando e apresentando "diferentes técnicas operatórias" de resolução, justificativas e demonstrações, se necessário for.
10) *Proposição e resolução de novos problemas*	Momento de avaliar a compreensão dos estudantes acerca do conteúdo matemático introduzido, e consolidar o que aprenderam nas etapas anteriores. O objetivo é tentar aprofundar e ampliar essa compreensão, tendo em vista a construção de novos conhecimentos.

Fonte: Elaborado pelo autor conforme a proposta de Allevato e Onuchic (2014, p. 45-46).

Nota-se, com certa nitidez, que essas etapas propostas por Allevato e Onuchic (2014), podem ser facilmente vistas dentro do roteiro geral apontado por Van de Walle (2009), em três fases. Para melhor visualização desse roteiro, levando em conta as dez etapas acima descritas, organizou-se o seguinte quadro:

Quadro 9: Roteiro para ensinar Matemática através da RP

Van de Walle (2009)	Allevato e Onuchic (2014)
1 - *Fase inicial*	1) *Proposição do problema* (professor) 2) *Leitura individual* (estudantes) 3) *Leitura em conjunto* (estudantes)
2 - *Fase intermediária*	4) *Resolução do problema* (estudantes) 5) *Observação e incentivo* (professor) 6) *Registros das resoluções* (estudantes)
3 - *Fase final*	7) *Plenária* (professor e estudantes) 8) *Busca do consenso* (professor e estudantes) 9) *Formalização do conteúdo* (professor) 10) *Proposição e resolução de novos problemas* (professor e estudantes)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, diante do que foi exposto sobre o tema (resolução de problemas), considera-se que esse último quadro sintetiza uma boa proposta de ensino de Matemática **através** da RP e que tem potencial para contribuir, de modo bastante significativo, para o propósito central da presente pesquisa, que é adaptar a abordagem AnM à perspectiva de método de ensino de Matemática para a Educação Básica.

Para isso, um dos aspectos considerados mais relevantes para essa perspectiva, é ter como referência e inspiração, etapas que caracterizam os métodos de RP, como as que foram apresentadas nesta seção, e da MM, método que será abordado na próxima seção, cujo processo de desenvolvimento pode ser organizado em etapas. A intenção, portanto, é evidenciar na próxima seção, a perspectiva de Modelagem na Educação que será adotada como referência e inspiração para o alcance do objetivo da pesquisa.

3.3 MODELAGEM MATEMÁTICA

O termo “modelagem”, de acordo com o dicionário *Houaiss* de Língua Portuguesa representa o ato de modelar, que por sua vez significa fazer um molde ou modelo. Tem o sentido de dar forma a algo segundo um modelo. No dicionário brasileiro de Língua Portuguesa *Michaellis* o termo “modelagem” significa o processo pelo qual se obtém o modelo. No caso de um escultor, o modelo obtido é geralmente feito de argila ou cera que será posteriormente fundido (processo de endurecimento). É nesse sentido que Biembengut (2016) descreve o termo "modelagem", indicando que a ideia que vem ao pensamento é a "[...] de um escultor trabalhando com argila, manuseando-a a fim de produzir algo, um objeto que tem maior ou menor afinidade com um objeto físico ou algo que traz em sua mente." (p. 97).

Nessa perspectiva, quando se fala de "Modelagem Matemática" é possível concebê-la como um processo que "[...] visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos. O modelo matemático, nesse caso, é o que 'dá forma' à solução do problema e a Modelagem Matemática é a 'atividade' de busca por essa solução" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 15).

Em um contexto mais geral, a MM, concebida como parte do processo construtivo da chamada *Matemática Aplicada*, busca utilizar e relacionar os conceitos e argumentos matemáticos para entender fenômenos do mundo real, e possibilitar ação (fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender, etc.) sobre a realidade onde esses fenômenos estão inseridos (BASSANEZI, 2002).

Caracterizada por sua abrangência e ao mesmo tempo pelo poder de síntese, de acordo com Bassanezi (2002), a MM no âmbito da Matemática Aplicada ganha o *status* de "método científico" tanto para o uso nas ciências físicas, onde a Matemática deu e continua dando considerável auxílio à valorização e evolução das teorias formuladas, assim como em outras ciências.

Desde que teve seu início declarado nas ciências não-físicas, como a Biologia, Química, Psicologia, Economia, etc., no começo do século XX, a Matemática Aplicada ganha "[...] força após a segunda guerra mundial com o interesse marcado pelo aprofundamento das pesquisas na busca da teorização em campos mais diversos." (BASSANEZI, 2002, p. 18). A partir daí o autor destaca que a atividade essencial do *matemático aplicado* é a construção e análise do modelo advindo de um processo de Modelagem. A aplicação e validação do modelo são atividades que cabem mais diretamente aos pesquisadores de outras áreas, sendo que "[...] o intercâmbio do matemático com estes pesquisadores é que proporciona a obtenção de modelos coerentes e úteis." (p. 31).

No contexto educacional, percebe-se o potencial da MM no processo de interdisciplinaridade ao aliar a Matemática as outras ciências, possibilitando compreensão e possíveis modificações da realidade. Almeida et al. (2012, p. 19) entendem que um "[...] problema da realidade [é] uma situação que pode ser idealizada, estruturada e simplificada com a finalidade de ser investigada em 'um problema que permite uma abordagem por meio da matemática'.".

Nessa perspectiva, muitos professores/pesquisadores têm se destacado com a proposta de mostrar a Matemática com um enfoque aplicado em situações ou fenômenos reais do cotidiano, utilizando a Modelagem como instrumento nos processos de ensino e aprendizagem. Alguns destaques brasileiros, além de Bassanezi (2002), podem ser citados como: Biembengut (2014, 2016); Burak (1992, 2004); Barbosa (2001, 2003, 2004); Almeida e Dias (2004); Caldeira (2009); Araújo (2009); dentre outros. Autores não brasileiros, como Blum e Leiß (2007), Niss, Blum e Galbraith (2007), também têm sido referências nesse enfoque.

A seguir, serão feitas considerações sobre algumas das concepções acerca da MM no contexto educacional brasileiro.

3.3.1 Concepções de Modelagem Matemática na Educação

No âmbito da Educação Matemática, a MM tem sido apontada como estratégia que pode favorecer os processos ensino e aprendizagem. Vários modos de utilizá-la como parte do processo educativo têm surgido para proporcionar melhor interação dos estudantes e professores envolvidos nesse processo. Conforme levantamento de produções brasileiras (teses e dissertações) feito por Silveira (2007), Biembengut (2009), Bonotto e Lara (2013), e Tambarussi e Klüber (2013, 2014), o número de pesquisas sobre Modelagem como método de ensino, vem crescendo nos últimos anos (de 1976 a 2011).

De acordo com Biembengut (2009), no Brasil, a MM começa a se configurar como uma prática educativa por volta do final da década de 1970 e início dos anos de 1980. Segundo a autora, no período de 1976 até 2006 são consideradas três fases da concepção de Modelagem como prática educativa do ensino de Matemática no contexto da sala de aula. Na primeira fase (1976 - 1986), a Modelagem é tratada como um refazer de modelos clássicos, como se percebe nos trabalhos produzidos e orientados por Aristides Camargo Barreto; na segunda fase (1987 - 1990), como Modelagem clássica, segundo os moldes da Matemática Aplicada, conforme os trabalhos orientados por Rodney Carlos Bassanezi; e na terceira fase (a partir de 1990), proposto por Biembengut (1990) a concepção de *Modelação*, Modelagem no Ensino regular com currículo.

Biembengut (2009) destaca os nomes de Aristides Camargo Barreto e Rodney Carlos Bassanezi, por entender que esses professores foram os precursores brasileiros no uso da MM e das aplicações de modelos em suas práticas de sala de aula.

> **Aristides C. Barreto**, pois, pelo que temos em registro, foi o primeiro a realizar experiências de modelagem na educação brasileira e, ainda, a representar o Brasil em congressos internacionais apresentando trabalhos sobre o tema, além de divulgar seus trabalhos em cursos de pós-graduação, artigos em revistas e anais de congressos; e **Rodney C. Bassanezi**, um dos maiores disseminadores, em especial por meio dos cursos de formação continuada que ministrou e de pós-graduação de modelagem que coordenou em diversas instituições de quase todos estados brasileiros. Foram identificados 23 cursos de pós-graduação lato sensu e mais de 50 de formação continuada. (BIEMBENGUT, 2009, p. 10, grifos nossos).

Segundo Biembengut (2009), os cursos de formação com enfoque na MM, coordenados e/ou ministrados pelo professor Rodney C. Bassanezi, o impulsionaram a defender a Modelagem como uma estratégia de ensino de Matemática, embora já conhecesse a Modelagem no viés da Matemática Aplicada desde o início da década de 1980. Com as experiências vivenciadas nesses cursos e as dezenas de orientações realizadas ao longo dos anos, tanto em nível de iniciação científica como de pós-graduação, conduziram-no "[...] a (re) orientar o método, as estratégias, os instrumentos e a própria pesquisa" (BIEMBENGUT, 2009, p. 12), culminando com a publicação, em 2002, do livro *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*, o qual se tornou uma grande referência brasileira na área, tanto em cursos de graduação e pós-graduação, em cursos de formação de professores, como também para aqueles que se interessam pela área.

A contribuição dada por esses dois precursores, Barreto e Bassanezi, para implementação e divulgação da MM no cenário educacional brasileiro foi, e ainda é, relevante para incentivar a melhoria do ensino de Matemática em nossas escolas. Suas propostas, de certo modo, revolucionaram a forma tradicional de lidar com o ensino e a aprendizagem de Matemática vigente até então. Biembengut (2009) ressalta, porém, que a atuação prática desses professores se limitava ao ensino superior, nos cursos de graduação e de pós-graduação. Deixam, no entanto, a oportunidade para que seus "seguidores", inspirados a querer melhorar a atuação em sala de aula, adaptem suas ideias e busquem colocá-las em prática também na Educação Básica.

Desde então, devido algumas dessas adaptações e de outras influências, tem surgido diferentes concepções de MM, tendo como finalidade dar conta prioritariamente desse nível de ensino. Assim, quando se pergunta o que é MM, ou, como desenvolvê-la em sala de aula, não há uma resposta única, pois depende da concepção adotada. Há uma multiplicidade de olhares fundamentados em diferentes pressupostos teóricos que nem sempre produzem caminhos e/ou métodos convergentes (ALMEIDA; VERTUAN, 2011). De acordo com Meyer, Caldeira e Malheiros (2011, p. 79), "[...] pequenas sutilezas fazem com que as definições de Modelagem adotadas por diferentes pesquisadores apresentem aspectos diferenciados.".

Como uma das tendências atuais em Educação Matemática, a MM, segundo Meyer et al. (2011) pode ser identificada pelo menos em três perspectivas. Por alguns autores, ela tem sido defendida como um **método**, por outros como um **ambiente de aprendizagem**, e por outros, ainda, como uma forma de **educar matematicamente**.

Nessa mesma direção, Biembengut (2009), ao realizar um mapeamento de produções brasileiras, identificou três perspectivas de MM na Educação. Tomando como referência as perspectivas apresentadas por Kaiser, Lederich e Rau (2010), Biembengut (2016) reagrupa-as e aponta as três seguintes perspectivas: **método** ou **estratégia** (realística e epistemológica), **alternativa pedagógica** (contextual e educacional) e **ambiente de aprendizagem** (sociocrítica). Tais perspectivas podem ser caracterizadas pela seguinte descrição:

> - ***Realística*** ou ***aplicada***, os objetivos são pragmáticos, isto é, resolver situações-problema autênticas de indústria, comércio ou ciência, permitindo aos estudantes desenvolver habilidades e competências para resolvê-las. - ***Contextual***, o objetivo centra-se em metas psicológicas, isto é, resolver situações-problema efetuando práticas e experiências a fim de que a matemática necessária à resolução destas situações faça sentido aos estudantes. - ***Educacional***, o objetivo é pedagógico, isto é, estruturar os processos de aprendizagem para introduzir e desenvolver conceitos matemáticos, motivar a aprender matemática, promover entendimento crítico do processo e do modelo desenvolvido. Os problemas são autênticos e integrados com o desenvolvimento das teorias matemáticas. - ***Sociocrítica***, os objetivos centram-se no reconhecimento da relação entre a matemática e sociedade e na necessidade de compreensão crítica desta relação sobre o meio circundante; as situações-problema são pontos de partida para analisar a natureza e a relação do modelo matemático na sociedade, reconhecendo a dependência cultural. - ***Epistemológica*** ou ***teórica***, o objetivo é desenvolver teoria matemática, promovendo conexões entre atividades de modelagem e de matemática; situações-problema são designadas a levar o estudante a entender teoria matemática. (BIEMBENGUT, 2016, p. 167-168, grifos nossos).

A fim de exemplificar, identificam-se alguns representantes dessas concepções. Como **método**, Burak (1992) a vê como "[...] um conjunto de procedimentos, cujo objetivo é estabelecer um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões" (BURAK, 1992, p. 62). Para esse autor, dois princípios direcionam sua adoção: o *interesse do grupo* de pessoas envolvidas, e obter as informações e os dados no *ambiente* onde se localiza esse interesse.

Em sua perspectiva, o autor afirma que os problemas é que determinam o conteúdo a ser estudado, isto é, os problemas são eleitos em primeiro lugar, e, posteriormente, os conteúdos matemáticos são selecionados para resolvê-los. Sua concepção de Modelagem, que na fase do seu mestrado, realizado em 1987 baseava-se essencialmente nas ideias da Matemática Aplicada, conforme a metodologia proposta nas Ciências Naturais (KLÜBER; BURAK, 2008), na fase do seu doutorado, em 1992, toma como referencial a Educação Matemática, concebendo-a como uma Ciência Humana e Social, a qual

> [...] permite considerar que a Matemática está condicionada à Educação e que, sob essa orientação, não é irrelevante fazer um ensino de Matemática, considerando-se contribuições da área da Educação, ou seja, por bases epistemológicas que não sejam exclusivas da disciplina. [...] significa dizer que no ato de se ensinar matemática faz-se necessário considerar os componentes indicados no modelo, para que se possa oportunizar uma aprendizagem mais efetiva por meio de um ensino mais consciente e crítico pelo professor, em relação ao complexo ato de ensinar, especificamente, Matemática. (BURAK; KLÜBER, 2013, p. 35).

A concepção de MM vista no contexto das Ciências Humanas e Sociais, de acordo com Burak, deve proporcionar atividades que consideram os sujeitos, o ambiente social, o ambiente cultural e outras variáveis (BURAK, 1992; BURAK, 2004; BURAK; KLÜBER, 2013).

Na concepção de **alternativa pedagógica**, como forma de **educar matematicamente**, destaca-se Caldeira (2009), que a sinaliza como um modo de conceber ou criar uma nova forma de educar por intermédio da Matemática, não considerando "apenas" como um método de ensino, mas como uma concepção de ensino e aprendizagem. Nessa concepção, o currículo não deve ser apresentado pronto e acabado, mas gerado no decorrer do processo, devendo "[...] ser incorporadas também, além da Matemática dita universal, outras que por ventura possam advir de situações vivenciadas no processo de sua consecução. Assim, ele deve ser programado, flexível e em espiral, e não rígido e linear." (MAYER et al., 2011, p. 81).

Para Caldeira (2009), a MM deve ser compreendida à luz da concepção de Matemática, vista como um conjunto de "[...] regras e convenções que são estabelecidas dentro de determinado contexto social, histórico e cultural, permeado pelas relações de poder, diferentemente daquela vista como uma descoberta." (MAYER et al., 2011, p. 33). Segue, portanto, em uma vertente sociocultural, tendo aproximações daquilo que D'Ambrosio (2013) denomina de "Programa Etnomatemática".

Já a concepção daqueles que veem a MM como um **ambiente de aprendizagem**, baseado nas ideias de Skovsmose (2000), cita-se Barbosa (2001a, 2001b), que define a MM na Educação como um ambiente de aprendizagem no qual os estudantes são convidados a questionar, a problematizar e a investigar situações com referências à realidade por meio da Matemática. Por ambiente de aprendizagem, o autor se refere "[...] às condições nas quais os alunos são estimulados a desenvolverem determinadas atividades. [...] diz respeito a um lugar ou espaço que cerca, envolve." (BARBOSA, 2001b, p. 6).

A concepção desse autor baseia-se na perspectiva *sociocrítica*[24] de MM que, por sua vez, tem a *Educação Matemática Crítica*[25] (SKOVSMOSE, 2001) como referencial nas discussões e no trabalho. Isso significa que "[...] as atividades de Modelagem são consideradas como oportunidades para explorar os papéis que a matemática desenvolve na sociedade contemporânea. Nem Matemática nem Modelagem são 'fins', mas sim 'meios' para questionar a realidade vivida." (BARBOSA, 2001b, p. 4).

Muitos outros autores poderiam ser citados que apresentam perspectivas de MM na Educação em sintonia com essas apresentadas, e outros tantos que a definem de formas distintas. Percebe-se, porém, que apesar da multiplicidade de perspectivas quanto ao entendimento acerca da MM na Educação Matemática, há uma certa convergência quanto ao objetivo da atividade, que é compreender situações da realidade utilizando-se dos pressupostos teóricos e metodológicos da Matemática (ARAÚJO, 2002; MALHEIROS, 2004).

Para Mayer et al. (2011), uma das diferenças básicas entre as várias perspectivas "[...] é a ênfase na escolha do problema a ser investigado, que pode partir do professor, pode ser um acordo entre professor e alunos ou, então, os estudantes podem escolher o assunto que pretendem investigar [...]" (p. 81).

Segundo Biembengut (2016), nas três concepções apontadas, há um interesse comum em tentar contribuir para a melhoria da aprendizagem escolar, no aprimoramento do conhecimento e na melhoria do viver e agir na sociedade. Nesse sentido, sintetiza essas concepções destacando que elas

> [...] convergem no entendimento de que a Educação, seja na disciplina de Matemática ou de outra disciplina do Curso, a modelagem contribui não somente para aprimorar o ensino e a aprendizagem matemática e de outras áreas do conhecimento, como também para provocar uma reação e interação entre corpo docente e discente envolvidos na contínua e necessária produção do conhecimento. Uma partilha mútua de experiências adquiridas. [...] A concepção de modelagem adotada pelos autores nas experiências de ensino tem um preceito comum: tornar os estudantes mais interessados nas aulas de matemática a partir do que entendem, vivenciam e possam participar, seja com base em seus conhecimentos prévios, ou em suas crenças. E as tendências identificadas sugerem que nas praticas em sala de aula as propostas têm buscado encorajar os estudantes a se envolverem ativamente na sua aprendizagem, produzirem trabalhos a partir de necessidades, interesses e metas pessoais de forma desafiadora e talentosa e levar a ricos compromissos humanitários. (p. 170).

[24] "Esta corrente, sugerida pelo pesquisador, seria uma terceira via que ampliou a categorização proposta por Kaiser-Messmer (1991), em que a pesquisadora classificava os trabalhos desenvolvidos sob a bandeira da Modelagem em dois grandes grupos: pragmáticos e científicos." (CALDEIRA et al., 2011, p. 66).

[25] Nessa concepção, Ole Skovsmose defende que o objetivo da Educação Matemática deve ir além da preocupação com as habilidades de cálculos matemáticos, mas com a promoção da participação crítica dos estudantes/cidadãos na sociedade, para que estes se envolvam nas questões políticas, econômicas, ambientais, nas quais a Matemática serve como suporte tecnológico. (CALDEIRA et al., 2011).

A professora Maria Salett Biembengut, experiente como pesquisadora e orientadora no campo da Educação Matemática, em especial na área de MM, também propôs uma concepção de MM na Educação, denominada *Modelação* Matemática (BIEMBENGUT, 2014, 2016). Nesta pesquisa adota-se principalmente essa concepção de MM na Educação, levando em conta, porém, ideias que outros autores também apontam e que servem aos propósitos da investigação. Tal postura justifica-se pela empatia e simpatia às ideias propostas pela autora e por entender que essa concepção vai ao encontro das necessidades práticas dos professores, principalmente em relação ao cumprimento dos conteúdos curriculares estabelecidos. Uma das ênfases dessa concepção (Modelação) segundo a autora, é justamente o estudo do conteúdo curricular como parte do sistema escolar vigente.

3.3.2 Definindo Modelação Matemática

O professor Rodney C. Bassanezi, instigado e motivado por sua volumosa experiência no campo da Matemática Pura e Aplicada, além do ensino de Matemática em níveis de graduação e pós-graduação, propõe sua concepção de MM a fim de direcionar o trabalho de professores/educadores que desejam utilizá-la como método de ensino em suas aulas. Para Bassanezi (2002, p. 16):

> A Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. [...] pressupõe multidisciplinaridade. E, nesse sentido, vai ao encontro das novas tendências que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas de pesquisa.

É perceptível que as várias concepções de MM já apresentadas anteriormente têm em sua essência algo do que Bassanezi indica aqui. Na Modelação não é diferente, pois por meio dela, a possibilidade de se concretizar a proposta de utilizar a MM como meio de ensinar e aprender Matemática, especialmente na Educação Básica, parece bem promissora, pois uma de suas propostas é o desenvolvimento do conteúdo curricular. De acordo com Bassanezi (2002), ao comentar acerca dos objetivos de seu livro[26], destaca: “A proposta deste texto é sugerir a modelagem matemática como uma estratégia a ser usada para o ensino e aprendizagem de Matemática em cursos regulares ou não - e neste contexto recebe o nome de *Modelação Matemática* (modelagem em Educação).” (p. 38).

Entendido como um método, a partir de 1990 quando Biembengut começa a atuar no Departamento de Matemática da Universidade de Blumenau - FURB, passa a fazer parte de sua

[26] Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática.

prática regular também em disciplinas como *Cálculo Diferencial e Integral* em cursos de graduação, assim como em cursos de formação para professores em nível de extensão, pós-graduação *lato sensu* e *stricto sensu* (BIEMBENGUT, 2016). Assim, de acordo com a autora,

> A Modelação é um método de ensino com pesquisa nos limites e espaços escolares [...] em que se utiliza a essência do processo da Modelagem no ensino e na aprendizagem da Educação formal. Orienta-se pelo ensino do conteúdo do programa curricular da disciplina (e não curricular) a partir de um tema/assunto e, paralelamente, pela orientação dos estudantes à pesquisa sobre algo que lhe possa interessar. (p. 176).

Segundo a autora, o método, como já frisado anteriormente, pode ser aplicado em qualquer disciplina, com ou sem um programa curricular pré-definido, indo desde os anos iniciais da Educação Básica até às atividades finais do Ensino Superior (monografias, TCC's, etc.), além dos cursos de pós-graduação (*lato sensu* e/ou *stricto sensu*), e em cursos de formação continuada para professores. Nesse método, a ideia é que os estudantes escolham temas ou assuntos de seu interesse, levantem questões e dados, e a partir daí o professor desenvolva o conteúdo programático conforme o desenrolar do processo, ao elaborar o modelo matemático em conjunto com os estudantes. No entanto, a autora destaca que o propósito da Modelação também é ensinar os estudantes a fazerem pesquisa sobre assuntos de seu interesse, o que segundo ela, tem sido pouco frequente no dia a dia em sala de aula.

Para Biembengut (2016), pesquisar, nessa perspectiva, oportuniza ao estudante

> [...] entender uma situação e seu respectivo contexto; conhecer as linguagens envolvidas, incluídas as da matemática e/ou das ciências, que lhes permita descrever, representar, resolver a situação; e interpretar/validar o resultado dentro desse contexto - *aprender a arte de modelar, a pesquisar*. Permite ainda propiciar ao estudante o gosto e o interesse por alguma área do conhecimento [...]. (p. 178).

Na Modelação, ao desenvolver pesquisa, a prioridade transcende a construção e validação de um modelo, direcionando sua importância ao "[...] processo utilizado, à análise crítica e sua inserção no contexto sociocultural. O fenômeno modelado deve servir de pano de fundo ou **motivação** para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria matemática." (BASSANEZI, 2002, p. 38, grifo nosso). De acordo com esse autor, o próprio professor precisa estar motivado nos processos de ensino e de aprendizagem, caso contrário, nenhuma estratégia será eficaz. Nesse sentido, afirma que "[...] os professores devem valorizar o que ensinam de modo que o conhecimento seja ao mesmo tempo interessante, por ser útil, e estimulante, por ser fonte de prazer." (p. 16). Logo, a busca de uma estratégia de ensino e aprendizagem de Matemática em cursos regulares (ou não) se faz necessária, e

> [...] a **modelação** tem sido aplicada com algum êxito em diversos tipos de situações: em cursos *regulares*, isto é, com programas pré-estabelecidos, em *treinamento e aperfeiçoamento de professores* de Matemática, em *programas de reciclagem de*

> *adultos*, em *cursos de serviço*, como *disciplina do curso de licenciatura* e em programas de Iniciação Científica. (BASSANEZI, 2002, p. 38, grifo nosso).

Portanto, a Modelação como método de ensino com pesquisa, se configura como uma alternativa potencializadora para a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem de Matemática na prática de sala de aula, tendo como foco a Educação Básica. Para tanto, serão apresentadas na próxima seção, as etapas que caracterizam esse método, cuja finalidade é direcionar sua implementação de modo prático no contexto escolar.

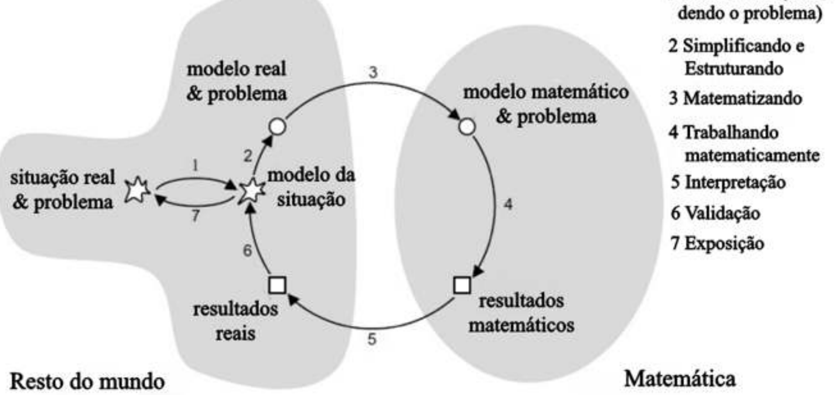
3.3.3 Caracterizando etapas da Modelagem Matemática na Educação

Ao se referir às atividades práticas de MM no contexto da Matemática Aplicada, Bassanezi (2002) aponta seis etapas que podem direcionar o processo, que vai do problema original até chegar ao modelo matemático, e a partir daí aplicá-lo em outras situações. Segundo o autor, partindo de um problema não matemático de algum tema/assunto que se deseja estudar, a modelagem dessa situação ou problema real passa pelas seguintes etapas: 1ª) *Experimentação*; 2ª) *Abstração*; 3ª) *Resolução*; 4ª) *Validação*; 5ª) *Modificação*; 6ª) *Aplicação*.

No contexto educacional, o processo MM segue basicamente essa mesma direção. É o que se percebe, por exemplo, nas etapas sugeridas por Burak (2004): 1ª - A *escolha do tema*; 2ª - A *pesquisa exploratória*; 3ª - O *levantamento dos problemas*; 4ª - A *resolução dos problemas e desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema*; 5ª **-** A *análise crítica da solução***.** Essa última etapa é "[...] marcada pela criticidade, não apenas em relação à Matemática, mas também em relação a outros aspectos, como viabilidade e coerência das resoluções apresentadas" (KLÜBER; BURAK, 2006, p. 5).

No cenário internacional, o ciclo de modelagem proposto por Blum e Leiß (2007) (Figura 1) é um dos mais conhecidos e usados para caracterizar as etapas desse processo.

Figura 1: Diagrama cíclico do processo de MM para o contexto educacional



Fonte: Blum e Leiß (2007, p. 225, tradução nossa).

Outra proposta do processo de MM no contexto educacional, seguindo etapas para seu desenvolvimento, é apresentada por Biembengut (2016). Para essa proposição, a autora buscou embasamento, principalmente na filosofia da ciência e na Neurociência (GEORGE, 1973; KANT, 1995; SACKS, 1995; KOVACS, 1997; TEIXEIRA, 2000 apud BIEMBENGUT, 2016), a fim de entender como relacionar o processo de Modelagem (em especial a Modelação) e suas etapas, ao modo como se dá a aprendizagem. Essa busca por saber como se conhece, como se processam os estímulos internos a partir dos estímulos externos e como se manifestam as percepções na mente humana, levaram a autora a investigar sobre sistema nervoso, e afirmar:

> Graças ao sistema nervoso, podemos adquirir conhecimento do mundo que nos cerca e a partir deste efetuar uma representação [do mesmo], num contínuo conhecer e representar - essência de nosso processo cognitivo. Cada sensação ou percepção que temos do meio faz gerar em nossa mente imaginação e ideias, que a partir da compreensão e do entendimento, podem transformar-se em significado, modelo, portanto, conhecimento. Conhecimento que nos permite formar imagens, conceitos; criar objetos; dar a forma, a cor, o sentido ao mundo que vivemos. (p. 70).

Assim, com base nos estudos de Immanuel Kant (1724-1800)[27] acerca dos processos mentais, denominado por ele de "faculdade do conhecimento", e da Neurociência sobre modelos de pensamento, os quais dividem o processo cognitivo em estágios, Biembengut (2016) percebe, então, que as etapas do processo de MM propostas por Bassanezi (2002) e por outros autores, têm semelhança com esses estágios, e afirma: "Esse processo de perceber o contexto, compreender e explicar por meio de uma linguagem ou sistemas de símbolos e, a seguir, descrever ou representar externamente, é semelhante às fases de nossos processos mentais que se realizam para construir o percebido." (p. 103).

A autora indica, portanto, que o processo de modelar, que perfaz o caminho da pesquisa científica, pode ser desenvolvido seguindo os três estágios do processo cognitivo, e propõe as seguintes fases do processo de *Modelação*, conforme o quadro abaixo:

Quadro 10: Fases do processo de Modelação

Etapas	Descrição
1ª) ***Percepção*** e ***Apreensão***	A *percepção* ocorre no reconhecimento da situação-problema, e a *apreensão*, na familiarização com o tema/assunto a ser modelado.
2ª) ***Compreensão*** e ***Explicitação***	A *compreensão* ocorre na formulação do problema (no contexto real), e a *explicitação*, na formulação do modelo e na resolução do problema a partir do modelo (no contexto matemático).
3ª) ***Significação*** e ***Expressão***	A *significação* ocorre na interpretação da solução e na validação do modelo (avaliação no contexto real), e a *expressão* ocorre na divulgação do processo e do resultado, modelo.

[27] KANT, I. **Duas introduções à Crítica do Juízo**. (Org.) Ricardo R. Terra. São Paulo: Iluminuras, 1995.

Fonte: Elaborado pelo autor, baseado em Biembengut (2016).

De acordo com a autora, na 1ª fase, a **percepção** ocorre no reconhecimento da situação-problema. Para isso, o professor deve primeiramente *explanar* sobre o tema/assunto aos estudantes, destacando o contexto de origem do mesmo e utilizando-se de linguagens distintas e acessíveis a fim de ganhar a atenção deles. Uma atividade experimental e/ou uma visita *in loco* onde o tema/assunto é contextualizado também são sugestões para esse momento, caso haja espaço, materiais e tempo. Depois dessa explanação, o professor deve instigar/incentivar os estudantes a *levantar* questões e/ou sugestões acerca do tema/assunto. Nesse momento, os estudantes podem evidenciar, por meio de linguagem (oral, escrita, gestual e gráfica), seus pressupostos, suas percepções, sobre o tema/assunto abordado, e a interação (professor ↔ estudantes, estudantes ↔ grupo, grupos ↔ grupos) tem papel fundamental para tal evidência (BIEMBENGUT, 2016).

A **apreensão** ocorre na familiarização com o tema/assunto a ser modelado. Há, porém, a necessidade de *selecionar*, dentre as questões e sugestões levantadas pelos estudantes, aquelas que possibilitam o desenvolvimento o conteúdo curricular. Para isso, o professor deve ser capaz de articular de forma convincente tais questões/sugestões para se chegar na questão central. O professor precisa "[...] levar os estudantes a reconhecer configurações, símbolos, relações entre um assunto e outro. O propósito neste contexto estrutural é sensibilizar os estudantes sobre a abrangência da questão, as noções que eles já possuem e o que ainda precisam saber." (BIEMBENGUT, 2016, p. 195). Feita a seleção adequada das questões/sugestões para o desenvolvimento do conteúdo, o professor propõe aos estudantes *levantar* dados/informações relacionados ao tema/assunto, sendo que o próprio professor pode fazer também esse levantamento, cujo propósito é cooperar e enriquecer o trabalho dos estudantes (BIEMBENGUT, 2016).

Na 2ª fase, a **compreensão** ocorre na formulação do problema. De posse dos dados/informações disponíveis, o professor incentiva e orienta os estudantes a formular o problema a ser resolvido, instigando-os a *levantar* hipóteses ou pressupostos e a indagar (bases da pesquisa); otimizar, organizar e expressar os dados/informações com vistas a preparar o "terreno" para *desenvolver* o conteúdo do programa da disciplina (conceitos, definições, propriedades, etc.). O conteúdo deve ser apresentado/ensinado, sempre que possível, em conexão com a questão que gerou o processo. Além disso, a complementação do ensino com a utilização de exemplos análogos propicia a ampliação do conjunto de aplicações e ajuda o estudante melhor compreender o problema, e consequentemente a resolvê-lo (BIEMBENGUT, 2016).

A **explicitação**, nessa fase, ocorre na formulação do modelo e na resolução do problema a partir do modelo. Uma vez desenvolvido o conteúdo, compreendido o problema e os conceitos envolvidos, os estudantes podem agora explicitar externamente o que compreenderam ao formular do modelo. Isso ocorre quando os estudantes conseguem "[...] reorganizar variedades de situações, passíveis de serem traduzidas em linguagem Matemática ou das Ciências (Humanas ou da Natureza) e representar os diversos dados obtidos de cada atividade proposta" (BIEMBENGUT, 2016, p. 201). O estudante que já apreendeu (hipóteses, pressupostos, dados, informações, etc.), compreendeu (conteúdos, conceitos, linguagens, etc.), de posse do modelo, agora deve ser capaz de explicitar o conhecimento adquirido/construído, resolvendo o problema. Espera-se que ao final dessa etapa, segundo a autora,

> [...] os estudantes saibam, pelo menos, o conteúdo curricular envolvido nesse processo e tenham habilidade em aplicá-lo não apenas na situação-problema estudada, mas em outras similares. E ainda tenham vivenciado e se inteirado do contexto e da linguagem científica: das ideias às criações e como são formalizadas. (p. 202).

Na 3ª fase, a **significação** ocorre na interpretação da solução e na validação do modelo (avaliação). A partir do modelo formulado, utilizando-se dos conceitos e conteúdos curriculares e não curriculares aprendidos, os estudantes devem ser capazes de r*esolver* a(s) questão(ões), tendo melhor entendimento da situação-problema relacionada ao tema/assunto modelado e da linguagem matemática envolvida no processo. Para isso, cada grupo de estudantes retoma os dados iniciais, e de posse do modelo formulado e das soluções encontradas, discute, compara e pode agora *interpretar* as soluções e *avaliar* se estas são válidas ou não no contexto envolvido. De acordo com a autora:

> Significa construir relações entre os conteúdos curriculares (e não curriculares) e o modelo formulado a partir de uma subjacente concepção de matemática e ciências com a qual provém a integração deste conhecimento. [...] fazer uso deste [modelo] para aprender mais sobre outras tantas coisas de seu entorno fora do contexto escolar e ainda reconhecer conteúdos aprendidos em outros assuntos, outras questões, baseados no conhecimento e nas referencias dos aportes sobre o tema estudado. (BIEMBENGUT, 2016, p. 205).

Por fim, a **expressão**, que é o fechamento do ciclo do processo de Modelação nessa fase, ocorre na divulgação do processo e do resultado, o modelo. Para isso, a realização de um seminário ou de uma exposição dos trabalhos é de fundamental importância, pois nesse momento, além de expressarem o que compreenderam/aprenderam dos conteúdos programáticos, desde a teoria até às aplicações, os estudantes também podem compartilhar com os demais colegas e com a comunidade escolar como efetuaram suas pesquisas, "[...] seus registros, suas formas de representar os dados e suas considerações sobre a validade do resultado da questão" (BIEMBENGUT, 2016, p. 206). De acordo com a autora, esse momento de reconhecimento pela comunidade escolar "[...] pode instigar estes estudantes a seguirem nesse caminho e estudantes de outras turmas quererem aprender sob este método de modelação." (BIEMBENGUT, 2014, p. 46).

Existe uma certa relação de dependência entre essas etapas. De acordo com a autora, no processo de modelar, essas fases não são disjuntas. Há um constante movimento de "ir e vir" entre elas na medida em que o processo vai se desdobrando. É o que a autora ilustra ao afirmar:

> [...] na segunda [fase], na medida em que estamos comparando, analisando os dados a fim de formulá-los, por muitas vezes, temos que retornar à primeira. De igual forma, durante a terceira [fase], precisamos retornar à segunda para prever ou gerar ideias, ou ainda, retornar à primeira [etapa] para melhor entender os fatos e reunir o restante dos elementos para se chegar a uma conclusão. Conhecimento e habilidades que aquilatam a cada pesquisa que realizamos: em cada atividade experimental, em cada estudo, em cada questão que queremos entender, aprimorar, inferir, produzir outros entendimentos. (BIEMBENGUT, 2014, p. 25).

Percebe-se aí a necessidade de atenção por parte do professor que se propõe a realizar atividades dessa natureza em sala de aula (Modelagem Matemática na Educação, como é o caso da Modelação). Seu desenvolvimento, conforme apontado anteriormente, não deve ser realizado de modo "engessado", rígido ou estático, mas com flexibilidade e dinamismo, sempre levando em conta o principal agente desse processo, o estudante.

Assim, diante das perspectivas de MM apresentadas (BASSANEZI, 2002; BURAK, 2004; BLUM; LEIß, 2007; BIEMBENGUT, 2014, 2016), a fim de sintetizar um roteiro que engloba e compara essas propostas, com relação as etapas do processo de MM que será adotado como referência e inspiração para o alcance dos objetivos da presente pesquisa, apresenta-se no quadro a seguir, esse entendimento.

Quadro 11: Roteiro para um processo de MM na Educação

Biembengut (2016)		**Bassanezi (2002)**	**Burak (2004)**	**Blum e Leiß (2007)**	**Descrição das Fases/Etapas**
1ª)	***Percepção***	1 - *Experimentação*	1 - *Escolha do tema* 2 - *Pesquisa exploratória*	1 - *Entendendo o problema* (pesquisa e coleta de dados)	A partir da escolha de uma situação real de algum tema/assunto que se deseja investigar, o primeiro passo é construir uma base de informações para entender a situação-problema. Nessa etapa os estudantes pesquisam sobre o tema/assunto, coletam dados e formulam as primeiras ideias sobre a situação a ser estudada.

	Apreensão	2.1 - *Abstração* (sel. variáveis)	3.1 - *Levantamento dos problemas* (sel. de dados)	2.1 - *Simplificando* (sel. variáveis)	Ocorre a seleção das variáveis essências, visando simplificar o problema ou a situação-problema real, organizando os dados a partir das informações coletadas. Esse é um momento de interpretar e dar sentido a essas informações, além de identificar elementos matemáticos que aí aparecem.
2ª)	***Compreensão***	2.2 - *Abstração* (prob. no contexto real)	3.2 - *Levantamento dos problemas* (problematizar)	2.2 - *Estruturando*	Formula-se em linguagem natural, própria da área em estudo, o problema ou a situação-problema real. Nessa etapa os estudantes têm a oportunidade refletir e elaborar questões e situações que envolvam o tema/assunto em estudo. Além disso, indicam o quanto já sabem ou conhecem sobre esse tema/assunto.
	Explicitação	2.3 - *Abstração* (elab. modelo) 3 - *Resolução*	4 - *Resolução do problema e desenvolvimento do conteúdo matemático*	3 - *Matematizando* 4 - *Trabalhando matematicamente*	O problema da realidade, da linguagem natural, é transformado para a linguagem matemática. Agora, é momento de produzir resultados matemáticos por meio das ferramentas que a Matemática pode oferecer. É nessa etapa que o conteúdo curricular pode ser explorado, seja ele já conhecido dos estudantes ou que ainda será estudado.
3ª)	***Significação***	4 - *Validação* 5 - *Modificação*	5.1 - *Análise crítica da solução* (comparação)	5 - *Interpretação* 6 - *Validação*	Faz-se uma transição do mundo da Matemática para o mundo real. Nessa etapa os resultados obtidos por meio do modelo e de todo o ferramental matemático utilizado vão ser comparados e interpretados no contexto real da situação-problema em estudo.
	Expressão	6 - *Aplicação*	5.2 - *Análise crítica da solução* (discussões)	7 - *Exposição*	Após ajustes, o uso do modelo agora permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender a situação em estudo. Essa etapa permite a participação no mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças. É momento de apresentar/expor os resultados obtidos e as aplicações em outros contextos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na próxima seção, busca-se discutir um pouco mais o método MM no contexto educacional, enfatizando mais especificamente, sua implementação prática em sala de aula.

3.3.4 Modelagem Matemática: prática em sala de aula

Como fazer MM na prática em sala de aula? Quanto tempo deve durar uma atividade de Modelagem? Como lidar com os conteúdos curriculares em atividade de Modelagem? Quem deve ser o responsável por definir os problemas (professor ou estudantes)? Esses e outros, têm sido os questionamentos recorrentes entre professores que se propõem e ousam transpor a barreira do ensino tradicional em favor de uma opção pedagógica mais criativa e motivadora (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Essas dúvidas e a insegurança quanto à implementação prática da Modelagem em sala de aula, ainda tem sido um obstáculo para sua integração no currículo escolar. Vários autores têm se debruçado sobre essas questões, investigando e refletindo sobre como melhor resolvê-las. Destacam-se, conforme Almeida e Vertuan (2011): Barbosa (2001); Bassanezi (2002); Almeida e Dias (2004); Caldeira (2009); Klüber (2010), dentre outros. Nessa lista, pode-se acrescentar também Biembengut (2014, 2016).

Mesmo diante da multiplicidade de orientações e argumentos que apontam para a inserção da MM como prática educativa no currículo escolar, não se deve tentar fazer isso a qualquer custo, nem por entender que o método traz benefícios aos processos de ensino e aprendizagem de Matemática, nem por se apegar ao simples fato de ser “um método inovador”. Como enfatiza Almeida e Vertuan (2011) ao refletirem sobre a implementação da Modelagem em sala de aula:

> [...] não se deve fazer tentativas de importar um pacote curricular pronto para ser usado, independente de seus benefícios ou potencialidades, ou mesmo em temos dos sucessos ou fracassos previamente vislumbrados. A incorporação das atividades de modelagem deve levar em consideração especificidades do contexto educacional, dando atenção aos professores, aos alunos e à própria estrutura escolar. (ALMEIDA; VERTUAN, 2011, p. 24).

Esse pensamento está de acordo com aspectos relacionados aos obstáculos que Bassanezi (2002) já havia apontado para a implementação da MM em cursos regulares, como no caso da Educação Básica. Segundo Bassanezi (2002, p. 37), há três tipos de obstáculos:

> *Obstáculos instrucionais* - [tem a ver com a estrutura escolar, onde] os cursos regulares possuem um programa que deve ser desenvolvido completamente. A modelagem pode ser um processo muito demorado não dando tempo para cumprir o programa todo. [...] *Obstáculos para os estudantes* - O uso da Modelagem foge da rotina do ensino tradicional e os estudantes, não acostumados ao processo, podem se perder e se tornar apáticos nas aulas. [...] quando [os estudantes] são colocados no centro do processo de ensino-aprendizagem, sendo responsáveis pelos resultados obtidos e pela dinâmica do processo, a aula passa a caminhar em ritmo mais lento. [...] *Obstáculos para os professores* - Muitos professores não se sentem habilitados a desenvolver modelagem em seus cursos, por falta de conhecimento do processo ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas quanto às aplicações de matemática em áreas que desconhecem. Acreditam que perderão muito tempo para preparar as aulas e também não terão tempo para cumprir todo o programa do curso.

Diante dessas considerações, ao defender a *Modelação* como método de ensino com pesquisa nos limites e espaços da escola, Biembengut (2014, 2016) explicita que esses obstáculos podem ser amenizados, uma vez que o objetivo desse método é “[...] promover conhecimento ao estudante em qualquer período de escolaridade, e ensiná-lo a fazer pesquisa nessa estrutura escolar, isto é: no espaço físico e no período concernente a este propósito.”

(BIEMBENGUT, 2016, p. 175). Além disso, "[...] é possível, por meio da pesquisa acadêmica aqui defendida, tornar a aprendizagem inter e transdisciplinar, mesmo nos limites 'impostos' pela estrutura escolar." (BIEMBENGUT, 2014, p. 12).

A pesquisa, aqui destacada pela autora, não é entendida como "a pesquisa científica", em sua concepção mais ampla e formal, e nem tão pouco como uma simples busca de dados ou informações, mas refere-se, como já visto anteriormente, à *arte de modelar*. Trata-se de "[...] levar os estudantes a *aprender a pesquisar*, chegando a um modelo matemático aplicado à área de conhecimento afim." (BIEMBENGUT, 2014, p. 29). Significa que os estudantes desenvolvem a *arte de modelar*, um processo de MM, e *aprendem a pesquisar* sobre temas/assuntos ou situações-problema de seu interesse, de sua realidade. É o que afirma:

> A arte de modelar requer aguçar no estudante alguns sensos como: observação, atenção, análise, julgamento, previsão, geração de ideias. Ideias que possam surgir na mente do estudante, quanto mais ele perceber e apreender assuntos que lhe interessa. Trata-se de um processo cíclico, mas em espiral, ao combinar uma ideia com outra, dotando-a de condições, qualidades, símbolos, dentre outros. (p. 31).

A pesquisa em sala de aula, nesse sentido, constitui-se um fator importante na articulação da Matemática com a realidade dos estudantes. De acordo com Moraes, Galiazzi e Ramos (2012, p. 12), esta pode envolver os participantes, estudantes e professores, "[...] num processo de questionamento do discurso, das verdades implícitas e explícitas nas formações discursivas, propiciando a partir disto a construção de argumentos que levem a novas verdades.". Em síntese, afirmam que a pesquisa em sala de aula

> [...] pode ser compreendida como um movimento dialético, em espiral, que se inicia com o **questionar** dos estados do ser, fazer, e conhecer dos participantes, construindo-se a partir disso novos **argumentos** que possibilitam atingir novos patamares deste ser, fazer e conhecer, estágios esses então **comunicados** a todos os participantes do processo. (p. 12, grifo nosso).

Com respeito à MM no âmbito educacional, como a Modelação, percebe-se sua relação bem próxima da pesquisa em sala de aula, uma vez que as atividades de MM têm como maior contribuição, proporcionar o desenvolvimento de

> [...] investigações em sala de aula, as quais têm o problema como ponto de partida, a intencionalidade na busca, a formulação de hipóteses como fatores que se colocam no caminho para indicar direções e as diferentes resoluções matemáticas são empreendidas com vistas a resolver um problema. (ALMEIDA; SILVA, 2015, p. 209).

Cargnin-Stieler e Bisognin (2009) reforçam essas ideias quando afirmam: "A modelagem matemática, por sua natureza, envolve uma aprendizagem significativa e contextualizada ao contemplar pesquisa e investigação, a partir de temas propostos pelos alunos e professores, em um processo de diálogo permanente." (p. 3).

Voltando à questão central concernente à implementação da MM na Educação Básica, ou seja, como, na prática, tornar a MM um método de ensino de Matemática quando existe um programa curricular a ser cumprido? Biembengut (2014, 2016) propõe a Modelação como alternativa a essa questão. Adicionado a isso, sugere como o professor pode se preparar para utilizá-la na prática de sala de aula, mesmo sem ter aprendido durante sua formação acadêmica.

A atuação em sala de aula ao utilizar a Modelação, na sua essência, se dá em duas abordagens, *ensino* e *pesquisa* (BIEMBENGUT, 2016). Com ênfase no *ensino*, a Modelação permite ao professor "[...] desenvolver o conteúdo curricular (e não curricular sempre que necessário), a partir da **reelaboração de modelos** (sobre temas/assuntos que possam interessar aos estudantes) e da mostra de aplicações às mais diversas áreas do conhecimento." (p. 179, grifo nosso). Por outro lado, com foco na *pesquisa*, a Modelação permite ao estudante "[...] pesquisar sobre algum tema/assunto ou situação-problema de interesse deles." (p. 179), desenvolve o processo da Modelagem e aprende a modelar, a *arte de modelar*. As duas abordagens, enfatiza a autora, não ocorrem de forma disjunta, mas integradas e simultâneas.

Assim, para desenvolver o ensino do conteúdo curricular de um período letivo (semana, mês, bimestre, quadrimestre, etc.) parte-se de um tema/assunto, situação-problema ou mesmo de um modelo já conhecido, que servirá para "extrair" esse conteúdo curricular (e não curricular).

Biembengut (2014, 2016) destaca que a escolha do tema/assunto (situação-problema ou modelo já pronto) é um dos momentos fundamentais para o bom êxito do trabalho em sala de aula, no uso da Modelação, uma vez que é nesse momento que o interesse dos estudantes precisa ser levado em conta. Desse modo, a escolha dos temas, a elaboração de problemas e a formulação de perguntas, devem ser dadas prioritariamente aos estudantes (BIEMBENGUT, 2014, 2016; BASSANEZI, 2002; MORAES et. al., 2012). O professor pode e deve orientar os estudantes nessa escolha, mas nunca impor. É o que Bassanezi (2002, p. 46) enfatiza:

> É muito importante que os temas sejam escolhidos pelos alunos que, desta forma, se sentirão corresponsáveis pelo processo de aprendizagem, tornando sua participação mais efetiva. É claro que a escolha final dependerá muito da orientação do professor que discursará sobre a exequibilidade de cada tema, facilidade na obtenção de dados, visitas, bibliografia etc. [...] os alunos devem trabalhar em pequenos grupos com problemas específicos do tema comum de cada grupo. Assim, o levantamento de problemas deve ser feito em grupos já definidos – o professor não deve propor problemas, mas deve atuar como monitor em cada grupo, sugerindo situações globais que devem ser incorporados pelos alunos.

Essa escolha, no entanto, nem sempre é uma atividade muito simples, nem para o professor e muito menos para os estudantes (BASSANEZI, 2002; BIEMBENGUT, 2014). No caso da Modelação, dependendo do tema/assunto escolhido, há o risco de não se dispor de tempo suficiente para o professor se inteirar sobre o mesmo a fim de saber orientar os estudantes. Outro risco que pode surgir é se o tema/assunto escolhido exigir uma "[...] matemática ou ciência avançada, ou ainda, ser tão simples que não levem a modelar, criar algo. Nesse caso, eles podem se desmotivar e preferir o ensino de técnicas e regras [...]" (BIEMBENGUT, 2014, p. 42).

A fim de evitar maiores dificuldades na fase inicial da atividade de Modelação e garantir que seu objetivo seja alcançado, Biembengut (2014) sugere que seja escolhido pelo professor "[...] um ou mais trabalhos de modelagem que já temos conhecimento e sabemos conduzi-lo e, então, solicitamos aos estudantes elegerem qual destes querem melhor aprimorá-lo [...]." (p. 43). Nesse sentido, utilizando-se algum modelo matemático já conhecido, o professor deve "[...] apresentar o modelo, passo a passo, de tal forma que requeira explicitação do conteúdo que precisamos tratar (conhecimentos das áreas envolvidas)." (BIEMBENGUT, 2016, p. 180). Com isso, os estudantes têm a oportunidade de "manusear" conteúdos curriculares em contextos de seu interesse, de sua própria realidade. Além do mais, podem perceber como se dá o processo de MM, a pesquisa, a *arte de modelar*.

É nessa perspectiva que o professor, tanto em sua preparação para implementar Modelação em sala de aula como incentivando os estudantes a pelo menos considerarem a importância da Matemática contida no programa curricular, deve ter consciência do caminho a ser seguido. O que deve saber? Onde buscar? Como?

Biembengut (2014) aponta, então, que:

> [...] antes de tudo, temos que saber matemática - das ideias às teorias, das teorias às aplicações. E dispor de um conjunto de exemplos interessantes de como os diversos conceitos matemáticos se fazem presentes nas atividades diárias das pessoas, sejam no lazer, sejam na atuação profissional em qualquer área do conhecimento. (p. 38).

A ênfase aqui é que, só é possível "dar" aquilo que se "tem". A autora sugere que o professor precisa primeiro "aprender" (Matemática, Modelação, modelos, exemplos práticos etc.) para, então, "ensinar". De acordo com Bassanezi (2002, p. 125), "[...] quando se conhece bem os modelos clássicos tem-se muito mais facilidade em modelar situações novas, [pois] pode servir de modelo para situações de naturezas diversas, mas análogas em termos evolutivos.". Percebe-se a ênfase do autor, dando importância à analogia como instrumento marcante na produção de conhecimentos em qualquer situação de aprendizagem, ao exemplificar: "[...] aprende-se uma língua nova muito mais facilmente quando já se conhece bem outras línguas." (p. 125).

Nesse sentido, Bassanezi (2015) corrobora a perspectiva de Biembengut (2014) ao afirmar: "A matematização de uma realidade pode começar com o uso de modelos conhecidos, modificados para se adaptar ao novo tema ou área, introduzindo variáveis ou hipóteses de acordo com as necessidades do novo desafio." (p. 13). E mais, "[...] sempre um elenco de exemplos pode facilitar a caminhada [uso da Modelação], pois cada situação analisada tem suas características próprias e uma analogia com situações novas sempre pode ser interessante." (p. 110).

A ênfase desse autor é que o uso de modelos, clássicos ou não, pode minimizar as dificuldades do professor em sua inexperiência com a Modelagem, além de ajudá-lo na condução da atividade no momento da sistematização do conteúdo curricular em sala de aula por meio do uso de analogia nas várias situações-problema.

Portanto, em termos práticos, a fim de "aprender para ensinar", Biembengut (2014, 2016) sugere:

> [...] escolhemos um modelo matemático e/ou o processo de modelar - modelagem que seja de fácil compreensão, relevado interesse e que nos possa atender às condições quanto ao conteúdo matemático do programa curricular. Esse modelo e/ou o processo escolhido nos servirá de roteiro, de mapa, de itinerário para tomar conhecimento da modelagem matemática: tema, conceitos, dados, formulação, dentre outros. (BIEMBENGUT, 2014, p. 49).

Adicionado a isso, afirma:

> De acordo com o conteúdo que objetivamos desenvolver, elaboramos um modelo ou tomamos um **modelo pronto** de alguma área do conhecimento que nos permite adaptá-lo para o ensino de alguma turma de estudantes. Isto é, adaptamos o processo para que os estudantes aprendam o conteúdo do programa curricular e, ao mesmo tempo, a elaborar um modelo – *modelagem*. Este modelo valerá como guia para ensinar. (BIEMBENGUT, 2016, p. 189, grifo nosso).

De acordo com a autora, para escolha adequada dos modelos e/ou processos de Modelagem com objetivo de "aprender para ensinar", após breve leitura dos textos, o professor deve buscar perceber os conteúdos curriculares de Matemática nos vários contextos e áreas, mesmo aqueles que "aparecem" de forma implícita. Para essa percepção, Biembengut (2014) aponta alguns direcionamentos no estudo do modelo escolhido. São eles: "Leitura atenta dos dados sobre o tema do modelo; Análise cuidadosa sobre a(s) fórmula(s) matemática(s) contida(s) no texto; Identificação de quais teorias não matemáticas fazem parte do modelo; Levantamento [e estudo] de quais teorias são pré-requisitos." (p. 49-50).

Diante da diversidade de modelos que podem ser encontrados nas várias áreas do conhecimento, essa autora afirma ainda que o professor pode facilmente adaptá-los e apresentá-los aos estudantes, explorando os passos do processo de modelar, a partir de uma das condições seguintes, dependendo do propósito: "[...] explanar sobre o *tema* que trata o modelo [...]; expor o modelo, indicando os conteúdos envolvidos e ensiná-los [...]; organizar uma atividade experimental e, a partir dos dados, guiar a um modelo." (BIEMBENGUT, 2016, p. 190).

Nesse sentido, conforme a autora, o estudo detalhado do modelo escolhido, levando em conta esses direcionamentos e abordagens, permite ao professor ter mais segurança no preparo de suas aulas, no planejamento, a fim de ter êxito agora na proposta de "ensinar para aprender". Trata-se do momento em que o modelo escolhido pelo professor vai ser traduzido e/ou adaptado, de uma forma didática, com o propósito de desenvolver o conteúdo curricular, ao mesmo tempo que permite ao estudante inteirar-se de temas relacionados a outras áreas do conhecimento onde se percebe a presença da Matemática.

Esse planejamento que tem como meta "ensinar para aprender", deve ser pensado de tal forma que busque: estabelecer objetivos claros; elaborar texto de fácil compreensão sobre o modelo a ser apresentado aos estudantes; elaborar questões/problemas cuja formulação/resolução conduza ao conteúdo que se pretende ensinar; estimar o tempo e determinar o momento para abordagem do(s) modelo(s) e para o ensino do conteúdo curricular; elaborar exemplos análogos com várias aplicações do conteúdo; preparar atividades que permitam os estudantes apresentarem exemplos aplicados a outras áreas de conhecimento; prever a retomada às questões e problemas iniciais para conclusão do modelo proposto; planejar a orientação dos estudantes na elaboração do trabalho de modelagem (formação de grupos, organização e seleção de questões, utilização de materiais e promoção de discussões sobre o tema) (BIEMBENGUT, 2016).

Todas essas diretrizes precisam, no entanto, ser postas em prática de forma dinâmica tanto na atuação individual do professor como na/para orientação dos grupos. Conforme a autora, o momento de "ensinar para aprender" é quando os estudantes são incentivados a fazerem questionamentos e críticas, a elaborarem seus próprios modelos, compreendendo conceitos e significados por formas alternativas. Mesmo de maneira lenta, quase imperceptível, é nesse contexto que a aprendizagem ocorre, pois:

> Esse é um momento mais sutil da aprendizagem, não apenas ao estudante, mas especialmente para nós professores. É a forma de aprimorarmos nosso conhecimento, declarando nova postura diante deste conhecer. [...] Aprendizado que se aperfeiçoa na medida em que percebemos o quão importante tem sido esse ensinar. (BIEMBENGUT, 2014, p. 51).

Em síntese, as ações de "aprender para ensinar" e "ensinar para aprender" que permeiam o trabalho de Modelação, evidenciam que nesse processo tanto os estudantes como o professor aprendem e ensinam à medida que interagem no ambiente onde estão inseridos (espaço escolar, sala de aula). Essa é a ênfase dada por Bassanezi (2002), que por meio da Modelação, "[...] o processo de ensino e aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com seu ambiente natural." (p. 38). É aquilo que

Paulo Freire já havia sintetizado: “[...] Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender” (FREIRE, 1996, p. 25).

Dessa forma, o binômio “ensinar ↔ aprender” parece nortear o trabalho de Modelação como um método prático para sala de aula, “[...] onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem-sucedido, mas caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado.” (BASSANEZI, 2002, p. 38).

Assim, no planejamento de um trabalho de Modelação, além das diretrizes já citadas anteriormente (BIEMBENGUT, 2016), os estudantes precisam reconhecer os atributos (características, etapas, etc.) de um processo completo. É imprescindível, para isso, que eles possam vivenciar as etapas desse processo dentro do contexto escolar, enfatiza a autora.

Portanto, levando em conta todos esses apontamentos, primeiro em relação à RP (seção 3.2.) e agora (seção 3.3.) em relação à MM (destaque para Modelação) como métodos de ensino potencialmente viáveis no contexto educacional brasileiro, pretende-se utilizar todo esse potencial na proposta central da presente pesquisa, que é tentar adaptar a abordagem pedagógica denominada Análise de Modelos (SOARES, 2012) à perspectiva de um método que também possa favorecer a prática de sala de aula quanto aos processos de ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica. Esse é o direcionamento enfatizado nos próximos capítulos.

4 LIVRO DIDÁTICO, QUESTÕES DO ENEM E A ANÁLISE DE MODELOS: UMA APROXIMAÇÃO

Neste capítulo, destaca-se a presença do livro didático no cenário escolar brasileiro, especialmente o livro de Matemática, e como esse pode ser utilizado de modo mais eficiente para favorecer o aprendizado dessa disciplina via AnM. São destacadas também algumas coleções de Matemática do Ensino Médio, onde buscou-se identificar nas introduções, nos textos complementares e nos "exercícios de aprendizagem" várias situações da realidade que potencializem o uso do método AnM Além disso, são enfatizadas as provas do ENEM, uma vez que muitas questões desse exame já aparecem nos livros didáticos. A intenção é identificar como as questões de Matemática do ENEM podem ser utilizadas em sala de aula na perspectiva da AnM.

4.1 O LIVRO DIDÁTICO

Os livros didáticos, também designados por "livros textos", "textos escolares", "manuais escolares", dentre outros, podem ser entendidos como aqueles que são utilizados no contexto escolar, organizados e articulados em uma sequência pedagógica com fins ao ensino em sala de aula (BIANCHI, 2006). Conforme essa autora, no contexto educacional brasileiro, geralmente é empregado o termo "livro didático" para indicar os livros utilizados na Educação Básica e "livro-texto" para se referir aos livros no Ensino Superior, no âmbito universitário.

O livro didático tem sido tema de várias pesquisas tanto no Brasil como no exterior. No cenário internacional, pode ser citado o nome de Alain Choppin (CHOPPIN, 1992, 2004), "[...] um dos mais importantes pesquisadores franceses sobre o livro didático" de acordo com Salles (2010, p. 116). Já no contexto brasileiro, o nome de Circe Maria Fernandes Bittencourt (BITTENCOURT, 1993, 2008) é apontado como referência em relação à pesquisa historiográfica sobre o livro didático. Defendeu sua tese de doutorado em 1993[28], intitulada *Livro didático e conhecimento histórico: uma história do saber escolar*, publicada como livro

[28] Nesse trabalho, Circe Bittencourt aborda a história do livro didático no processo de constituição do ensino escolar brasileiro no decorrer do século XIX e no início do século XX. A proposta é pensar o livro didático de forma ampla, acompanhando desde a sua concepção até a sua utilização em sala de aula. Esta é uma reflexão sobre o papel do livro didático na construção do saber escolar, que deve ser considerado em um conjunto mais geral no qual aspectos sociais, culturais, políticos e econômicos se articulem, conferindo-lhe dimensão específica. Como os conteúdos dos manuais de História do Brasil e dos manuais de leitura, que prolongam seu discurso, contribuíram para forjar a identidade da nação? De que forma os manuais foram utilizados pelos professores e pelos alunos, tanto na sala de aula quanto fora dela? Essas são algumas das questões elucidadas nesta publicação, que trata da relação entre o livro didático e a construção do saber escolar. Disponível em: https://books.google.com.br/books/about/Livro_did%C3%A1tico_e_saber_escolar_1810_191.html?id=HXWqPgAACAAJ&redir_esc=y&hl=pt-BR. **Acesso em**: 13 abr. 2017.

em 2008, sob o título *Livro Didático e Saber Escolar (1810-1910)*, prefaciado por Alain Choppin. De acordo com Salles (2010, p. 116), o trabalho realizado por Bittencourt:

> Seria um divisor de águas em relação às pesquisas anteriores: aquelas realizadas, mormente, em fins de 1970 e em toda a extensão da década de 1980, que valorizavam, sobretudo, questões ideológicas, erros conceituais e preconceitos de toda ordem veiculados nos textos didáticos. [Essas pesquisas] via de regra, intencionavam denunciar ideologias nos livros didáticos, entendendo que estes tinham o intuito de mascarar o mundo real, sendo um veículo portador da ideologia burguesa: serviriam para reproduzi-la, transmitindo os interesses de classe burgueses como interesses universais. Tal corrente de pensamento trazia, muitas vezes de maneira explícita, a ideologia como uma elaboração realizada conscientemente pela classe detentora do poder no intuito de dissimular as contradições sociais existentes.

A partir desse trabalho, de um modo geral, as pesquisas passam a apontar o livro didático inserido no contexto educacional, no ambiente da escola contemporânea, como elemento diferencial nos aspectos relacionados aos processos de ensino e aprendizagem (BITTENCOURT, 2004). Ademais, há os aspectos políticos e culturais do livro didático, identificado como instrumento de reprodução e representação dos "[...] valores da sociedade, a visão da ciência, da história, da interpretação dos fatos e do próprio processo de transmissão do conhecimento [...]", como destaca Perrelli et. al. (2013, p. 243). Para esses autores, "[...] o livro didático é concebido como um artefato cultural, isto é, suas condições sociais de produção, circulação e recepção estão definidas como referência a práticas sociais estabelecidas na sociedade." (p. 244).

Nesse sentido, Freitas e Ortigão (2012) já haviam destacado que o livro didático, além de organizar o saber estabelecido e aceito na sociedade onde se insere, pode se configurar como um instrumento de destaque para auxiliar no trabalho do professor, em seu planejamento, desde a preparação das aulas, passando pela avaliação da aprendizagem dos estudantes, até o momento de uma auto-avaliação no processo de ensinar. Destacam ainda, que o livro didático tem servido, inclusive, como instrumento de formação do professor e "[...] como fonte de difusão de ideias defendidas por especialistas em Currículo nas diversas áreas do conhecimento." (FREITAS; ORTIGÃO, 2012, p. 2).

Com relação aos livros didáticos específicos da área de Ciências Naturais e de Matemática, de acordo com Perrelli et al. (2013), os principais focos de investigação encontrados nas pesquisas (teses e dissertações de 1987 até 2012) sobre o tema vão desde questões relacionadas ao mercado, passando pelas políticas públicas, programas governamentais, aspectos educacionais, até questões mais específicas relacionadas aos conteúdos presentes no livro didático. Esse último, segundo os autores, aparece com muito mais frequência nas publicações, onde se enfatiza os aspectos conceituais, temas, concepções de ensino e ideologias dos métodos de ensino.

Quanto ao uso do livro didático de Matemática pelo professor, os autores apontam que, em geral, ele é utilizado "[...] como fonte de consulta e atualização, como apoio na elaboração do planejamento e na preparação de aulas e como elemento presente nas ações desenvolvidas pelos alunos em sala de aula [...]" (PERRELLI et al., 2013, p. 253). Destacam que, quase sempre, é no livro didático que o professor faz as únicas leituras acerca dos conteúdos a serem desenvolvidos em sala de aula. É a partir do livro didático que o professor elabora os resumos dos conteúdos para as aulas, tira exercícios de fixação e aplicação desses conteúdos e encontra imagens ilustrativas de situações que envolvem o conteúdo. Além disso, o livro didático é identificado pelos autores "[...] como um apoio importante na gestão do tempo das aulas, na distribuição dos conteúdos ao longo do ano letivo, na orientação da sequência didática e no balizamento da profundidade do tratamento dos conteúdos." (p. 254). Em geral, segundo os autores, o professor procura adequar os textos ou as situações apresentadas no livro didático à sua própria realidade.

Por outro lado, muitos professores, segundo Perrelli et al. (2013), utilizam equivocadamente ou acabam nem utilizando o livro didático "[...] por considerá-lo inadequado à realidade e ao nível de seus alunos." (p. 254). Essa postura, às vezes, esconde uma certa insegurança ao uso do livro didático, de novos métodos de ensino e do próprio conhecimento de sua área (Matemática e Ciências Naturais). Nesse sentido, os autores destacam que alguns têm dificuldades com certos conteúdos, e geralmente são deixados de ser abordados, justificando-se que têm "[...] dificuldades em trabalhar com situações-problemas [e] atribuem tais dificuldades às lacunas na sua formação inicial." (PERRELLI et al., 2013, p. 254).

Entende-se, portanto, que é diante de dificuldades como essa que se faz necessário discutir propostas metodológicas de ensino que, entre outros fatores, levem em conta o uso do livro didático em sala de aula como aliado ao professor e aos estudantes, cujo propósito seja favorecer a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem de Matemática na Educação Básica, especialmente no Ensino Médio. Essa é, portanto, a expectativa de abrangência que se espera atingir ao indicar a AnM como um método de ensino. De acordo com a proposta desta pesquisa, o uso do livro didático pode favorecer sua implementação em sala de aula, uma vez que alguns desses livros[29], que são utilizados nas escolas, já trazem situações contextualizadas

[29] Livros de Matemática do Ensino Médio indicados no Guia de Livros Didáticos 2018 (PNLD 2018) que foram aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático - PNLD (BRASIL, 2017).

tanto nas introduções, nos textos complementares, como nos "exercícios de aprendizagem", e são, geralmente, parte das atividades de resolução de exercícios (BRASIL, 2017).

Segundo Perrelli et al. (2013, p. 256): "Os textos básicos e atividades/exercícios propostos são, de modo geral, utilizados pelo professor na condução de suas aulas. Poucos [porém] utilizam os textos complementares, bem como atividades [extras] que retirem o aluno da sala de aula.". A impressão que se tem é que o professor não consegue trabalha-los de modo diferenciado, que instigue o interesse dos estudantes. Primeiro porque esses "[...] textos complementares, em geral, não são trabalhados com os alunos e não são cobrados nas avaliações. Eles apenas são indicados como leitura para o aluno fazer em casa." (p. 254), e segundo, porque o professor geralmente consulta/estuda muito pouco o manual dedicado a ele, que acompanha o livro didático. É o que expressam claramente os autores ao afirmarem: "O manual do professor também raramente é consultado pelo professor." (p. 254).

Por outro lado, a própria concepção metodológica de ensino e aprendizagem apresentada nos livros didáticos, mesmo naqueles aprovados/indicados nos guias oficiais, não tem favorecido muito para uma abordagem diferenciada dos textos e atividades complementares presentes nesses livros. De acordo com o Guia de Livros Didáticos PNLD 2018, específico da área de Matemática para o Ensino Médio, a avaliação das coleções aprovadas, assim como em outras edições anteriores,

> [...] revelou certa uniformidade no que diz respeito às propostas metodológicas desenvolvidas. Embora possam ser identificadas particularidades em cada obra específica, há um traço geral que as caracteriza: nos capítulos (ou nas unidades) há uma ou duas páginas de abertura que incluem textos, imagens, questões, ou informações gerais, relacionadas com conteúdo a ser estudado. Os textos iniciais objetivam contextualizar os conteúdos e mobilizar o interesse dos estudantes para refletir sobre o que será estudado. Seguem-se as explanações teóricas, com apoio em exemplos ou exercícios resolvidos, que são completados por exercícios propostos. (BRASIL, 2017, p. 38).

A ênfase, segundo esse documento, é que nos últimos anos, tem havido uma "limitação pedagógica" nos livros didáticos para o Ensino Médio (especialmente nos de Matemática), por conta desse tipo de escolha metodológica. Isso significa, de acordo com o documento, que geralmente não há uma conexão adequada entre os temas apresentados nas aberturas de cada capítulo ou unidades e os conteúdos desenvolvidos ao longo deles. Adicionado a isso, é apontado que raramente esses temas são revisitados em outros momentos e contextos apropriados, embora muitos desses temas sejam bem "instigantes". De modo sintético, o documento expressa: "[...] em geral, as sistematizações são apresentadas muito rapidamente, por meio de definições, seguidas de exemplos ou de exercícios resolvidos, que são tratados como modelos a serem considerados na resolução dos exercícios propostos." (BRASIL, 2017, p. 39).

Nota-se que, embora tenha havido avanços consideráveis nos processos de produção, reestruturação e distribuição do livro didático nos últimos anos no Brasil, inclusive com influência das tendências pedagógicas advindas da Educação Matemática, ainda assim, traços de um ensino tradicional são percebidos nas propostas metodológicas contidas nesses livros, seja de forma direta ou indireta. Esse, talvez, seja um dos fatores que causa desestímulo nos estudantes, limitando suas potencialidades no aprender.

Assim, de acordo com o Guia PNLD 2018, ao expressar acerca dessa metodologia de ensino e aprendizagem que é geralmente encontrada intrinsecamente nas coleções atuais:

> Essa opção [metodológica] não é muito estimulante e limita as possibilidades de o estudante acompanhar o texto didático com suas próprias reflexões e indagações. Além disso, pouco contribui para um trabalho de sala de aula que favoreça a reflexão sobre os conteúdos e as discussões de possíveis soluções para as questões propostas, e que possibilite a atribuição de significados aos conhecimentos estudados. (BRASIL, 2017, p. 39).

Além desses aspectos, é destacado no documento, que mesmo nos livros de Matemática aprovados/indicados, geralmente há uma quantidade exagerada de exercícios propostos, a maioria deles repetitivos e padronizados de acordo com exemplos resolvidos. Desse modo, além de dificultar o genuíno interesse dos estudantes pela Matemática, não favorecem a reflexão e nem atribuem significados aos conteúdos que eles veem em sala de aula, o próprio professor passa a ser mais exigido na escolha cuidadosa dos exercícios mais significativos e abrangentes dos tópicos a serem estudados. Além do mais, esse tipo de proposta metodológica não fortalece a capacidade dos estudantes de decidir sobre quais conceitos e estratégia podem ser escolhidos para resolver determinada situação-problema, embora essa capacidade seja essencial para que os estudantes realizem, com compreensão, as atividades matemáticas propostas em sala de aula (BRASIL, 2017).

No entanto, de acordo com o Guia PNLD 2018,

> [...] são poucos os livros didáticos destinados ao Ensino Médio que exploram, de forma satisfatória, a utilização de diferentes estratégias na resolução de problemas e a verificação de processos e de resultados pelos estudantes. Igualmente, não são frequentes as atividades propostas que favorecem o desenvolvimento de capacidades básicas de inferir, conjecturar, argumentar e provar. E mais, as competências para organizar, analisar e sintetizar são insuficientemente demandadas em muitas obras didáticas. Além disso, na maioria das coleções não são exploradas questões nas quais haja falta ou excesso de dados e, também, aquelas com várias soluções, que são bons momentos para discussão e enriquecem a aprendizagem. (BRASIL, 2017, p. 39).

Assim, diante de todas essas considerações, com a AnM entende-se que o uso do livro didático de Matemática pode ser melhor explorado e com mais eficiência, principalmente aqueles textos complementares e as atividades extras sugeridos nos mesmos, quase sempre interessantes/instigantes, como apontado no Guia PNLD 2018, e com potencial para se elaborar e aplicar atividades baseadas no método AnM.

Nessa perspectiva, portanto, é relevante que se faça nesse momento, uma breve descrição de como aparecem os modelos matemáticos nesses livros didáticos escolhidos para serem consultados na elaboração dessas atividades, e como podem ser melhor explorados em sala de aula na perspectiva da AnM. Para isso, entende-se que a escolha do livro didático a ser utilizado na investigação é de vital importância para o sucesso dessa elaboração, ao fazer uso de modelos matemáticos prontos.

É natural que essa escolha, no entanto, seja feita dentre as coleções aprovadas no PNLD, pois essas é que são distribuídas gratuitamente nas escolas públicas de todo o país. Em geral, essas coleções apresentam conteúdos atualizados e contextualizados. Visam integrar e articular esses conteúdos a fim de privilegiarem "[...] a exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas" (BRASIL, 2017, p. 14). Essa "[...] integração e articulação de conteúdos atende a diversas finalidades. Uma delas é possibilitar o desenvolvimento da habilidade de construir, ou selecionar, o modelo matemático adequado à resolução de um problema dado." (BRASIL, 2017, p. 18). Significa, portanto, que essa escolha das coleções de Matemática, a partir do Guia indicado no PNLD, vem ao encontro dos propósitos almejados pela AnM como método de ensino.

Assim, as coleções escolhidas para compor esta investigação, fazem parte da lista aprovada e indicada no Guia do Livro Didático de Matemática para o Ensino Médio - PNLD 2018 (BRASIL, 2017). A escolha foi feita quando, ao observar as três últimas edições do PNLD, ou seja, as edições de 2012 (7 coleções), 2015 (6 coleções) e 2018 (8 coleções), constatou-se que cinco dessas coleções estavam presentes nas três edições do PNLD. Entendeu-se, portanto, que essas seriam as coleções mais apropriadas para serem consultadas na elaboração do Material de Apoio (Apêndice D). São elas: [C1] *Matemática: Contexto & Aplicações* (DANTE, 2016); [C2] *Matemática: ciência e aplicações* (IEZZI; et al., 2016); [C3] *Matemática para compreender o mundo* (SMOLE; DINIZ, 2016); [C4] *#Contato matemática* (SOUZA; GARCIA, 2016); [C5] *Matemática Paiva* (PAIVA, 2016).

A fim de exemplificar a presença de modelos matemáticos nesses livros didáticos, apresentam-se nos quadros a seguir, algumas situações onde esses modelos aparecem, podendo ser explorados na abordagem de determinados conteúdos, e com potencial para a elaboração de atividades baseadas no método AnM. Limitou-se, nessa exemplificação, selecionar somente alguns modelos presentes no volume 1 (1º ano) das três primeiras coleções destacadas acima.

Quadro 12: Modelos matemáticos na coleção - [C1] *Matemática: Contexto & Aplicações*

<table>
<tr><th>Situações</th><th>Modelos matemáticos</th><th>Conteúdos abordados</th></tr>
<tr>
<td>S1: Serviços de transporte particular na cidade de São Paulo - maio de 2015

Seção: Pensando no ENEM

(p. 143)</td>
<td>Modelo matemático representado pelo quadro que indicam os serviços de Uber e Táxi na cidade de São Paulo em maio de 2015 e seus respectivos preços.

</td>
<td>• Valor Numérico
• Função Afim
• Função de duas variáveis
• Função definida por mais de uma sentença
• Etc.</td>
</tr>
<tr>
<td>S2: Biologia - Altura e taxa de crescimento de uma criança em idade pré-escolar.

Seção: Exercícios, Q. 59

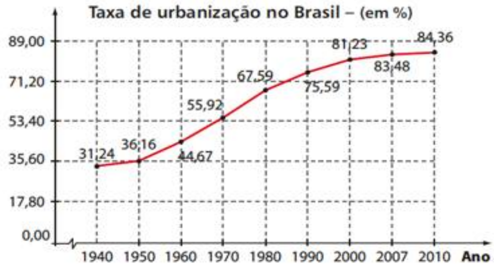
(p. 173)</td>
<td>Modelo matemático de Jenss-Bayley - avalia a altura de uma criança em idade pré-escolar.
$\boldsymbol{h(x) = 79,041 + 6,39x - e^{3,261 - 0,993x}}$
• $\boldsymbol{h(x)}$ é a altura (em cm) na idade x (em anos) para $\frac{1}{4} \leq x \leq 6$.
A taxa de crescimento $\boldsymbol{v(x)}$ (em cm/ano) de uma criança na mesma faixa de idade é:
$\boldsymbol{v(x) = 6,39 + 0,993 \cdot e^{3,261 - 0,993x}}$</td>
<td>• Valor numérico
• Intervalos
• Função Exponencial
• Equação Exponencial
• Cálculo numérico (uso de calculadora científica)
• Número de Euler
• Taxa de variação (média e instantânea)
• Etc.</td>
</tr>
<tr>
<td>S3: Poluição sonora.
“Poluição sonora é todo ruído que pode causar danos à saúde humana ou animal. Existem diversas situações que causam desconforto acústico, como uma pessoa falando alto ao celular e um indivíduo ouvindo música sem fones.”.
Inimigos do ouvido
Trânsito congestionado: 80 a 90 dB; Latidos: 95 dB; Liquidificador: 85 dB; Avenida em obras c/ britadeiras: 120 dB; Secador de cabelos: 95 dB; Fogos de artifício: 125 dB; Feira livre: 90 dB; Avião decolando: 140 dB; Trios elétricos: 110 dB; Banda de rock: 100 dB.
Seção: Outros contextos
(p. 202)</td>
<td>Modelo matemático que mede o nível de intensidade sonora de onda ($\boldsymbol{I_{db}}$) e é uma grandeza medida em decibels (dB)
$$\boldsymbol{I_{db} = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$$
• I é a intensidade sonora, definida por $\boldsymbol{I = \frac{P}{A}}$, sendo P, a potência (em watts W) e A, a área da superfície considerada (em m^2). Essa unidade (W/m^2) fornece dados que nos permitem avaliar se o som é forte ou fraco, podendo classificar se o som emitido é suportável ou não;
• $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$ é uma constante que indica o mínimo de intensidade sonora que ativa a percepção humana.
Audição e os logaritmos
• A audição humana: de $10^{-12}\ W/m^2$ até $1\ W/m^2$ (limiar da dor);
• Exposição diária máxima permitida com o nível de ruído (dB):
<table>
<tr><th>Nível de ruído (dB)</th><th>Máxima exposição diária permissível</th></tr>
<tr><td>85</td><td>8 horas</td></tr>
<tr><td>90</td><td>4 horas</td></tr>
<tr><td>95</td><td>2 horas</td></tr>
<tr><td>100</td><td>1 hora</td></tr>
<tr><td>105</td><td>30 minutos</td></tr>
<tr><td>110</td><td>15 minutos</td></tr>
<tr><td>115</td><td>7 minutos</td></tr>
</table></td>
<td>• Valor numérico
• Cálculo numérico (uso de calculadora científica)
• Grandezas físicas
• Ondas sonoras
• Logaritmos
• Função Exponencial
• Equação Exponencial
• Etc.</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Dante (2016a), volume 1.

Quadro 13: Modelos matemáticos na coleção - [C2] *Matemática: ciência e aplicações*

<table>
<tr><th>Situações</th><th>Modelos matemáticos</th><th>Conteúdos abordados</th></tr>
<tr>
<td>S1: Urbanização no Brasil.

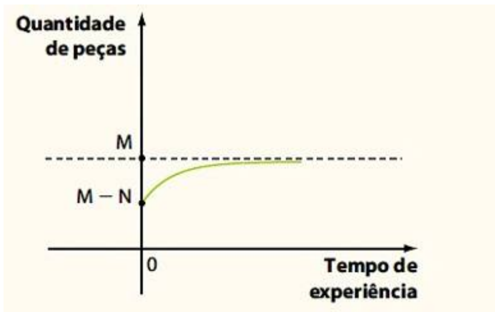
Seção: Exemplos, Q. 11

(p. 50)</td>
<td>Modelo matemático da taxa percentual do número de habitantes nas regiões urbanas do Brasil em função do tempo.


Fonte: IBGE - Censo demográfico 1940-2010</td>
<td>• Porcentagem
• Sistema cartesiano ortogonal
• Interpretação de gráficos
• Função
• Etc.</td>
</tr>
<tr>
<td>S2: Área da superfície corporal de uma pessoa.

Seção: Exemplos, Q. 16
(p. 135)</td>
<td>Modelo matemático (fórmula de Mosteller) que estima a área da superfície corporal ($\boldsymbol{ASC}$) de uma pessoa em função de sua altura $\boldsymbol{h}$ (cm) e massa $\boldsymbol{m}$ (kg).
$$\boldsymbol{ASC} = \left(\frac{\boldsymbol{h \cdot m}}{\boldsymbol{3600}}\right)^{\frac{1}{2}}$$</td>
<td>• Valor numérico
• Área de figuras planas regulares e irregulares
• Potenciação e Radiciação
• Função de duas variáveis
• Etc.</td>
</tr>
<tr>
<td>S3: Mundo do trabalho e as curvas de aprendizagem.

“Em vários ramos da atividade humana relacionada ao mundo do trabalho, é possível verificar que, à medida que um trabalhador executa uma tarefa contínua e repetitivamente, sua eficiência de produção aumenta e o tempo de execução se reduz. As curvas de aprendizagem relacionam a eficiência de um trabalhador de acordo com seu tempo de experiência na execução de uma tarefa.”.

Seção: Aplicações
(p. 142)</td>
<td>Modelo matemático que indica a eficiência de um trabalhador realizar determinada tarefa.
$$\boldsymbol{f(t) = M - N \cdot e^{-k.t}}$$
• $\boldsymbol{f(t)}$: eficiência do trabalhador (quantidade de peças ou materiais produzidos);
• $\boldsymbol{t}$: tempo de experiência na tarefa (dia, mês, semana, etc.);
• $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{k}$: constantes positivas que dependem da natureza da atividade;
• $\boldsymbol{e}$: número irracional (Euler).
Representação gráfica da eficiência (nº peças) de um trabalhador conforme sua experiência (tempo):

</td>
<td>• Valor numérico
• Potenciação
• Função Exponencial
• Equação Exponencial
• Logaritmos
• Cálculo numérico (uso de calculadora científica)
• Etc.</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Iezzi et. al (2016a), volume 1.

Quadro 14: Modelos matemáticos na coleção - [C3] *Matemática para compreender o mundo*

<table>
<tr><th>Situações</th><th>Modelos Matemáticos</th><th>Conteúdos abordados</th></tr>
<tr>
<td>S1: Projeção da população urbana e rural no mundo.

Seção: Introdução, Ex. 1 - sobre gráfico de linhas e curvas

(p. 39)</td>
<td>Modelo matemático que indica a população urbana e rural no mundo, de 1950 a 2014, e com projeção até 2050


Fonte: ONU. Departamento de Economia e Assuntos Sociais, Divisão de População. 2014</td>
<td>
• Interpretação de gráficos
• Sistema cartesiano ortogonal
• Função
• Etc.</td>
</tr>
<tr>
<td>S2: Quanto você calça?

Seção: Introdução, Ex. 3

(p. 76)</td>
<td>Modelo matemático que relaciona o comprimento do pé $\boldsymbol{c}$ (cm) de uma pessoa com o número do sapato $\boldsymbol{N}$.
$$\boldsymbol{N = \frac{5c + 28}{4}}$$
Alguns valores obtidos com o modelo:
<table>
<tr><th>Comprimento do pé (em cm)</th><th>Número do calçado</th></tr>
<tr><td>20</td><td>32</td></tr>
<tr><td>22</td><td>34,5 ≃ 35</td></tr>
<tr><td>24</td><td>37</td></tr>
<tr><td>26</td><td>39,5 ≃ 40</td></tr>
<tr><td>28</td><td>42</td></tr>
<tr><td>30</td><td>44,5 ≃ 45</td></tr>
</table>


</td>
<td>
• Valor numérico
• Função Afim
• Equação Polinomial de 1º grau
• Etc.</td>
</tr>
<tr>
<td>S3: Intensidade luminosa dentro de um lago.

Seção: Fazer e aprender, Q. 9

(p. 190)</td>
<td>Modelo matemático que mede a intensidade luminosa dentro de um lago a uma profundidade - Lei de Beer-Lambet:
$$\boldsymbol{\log\left(\frac{L}{15}\right) = -0{,}08x}$$
• L: intensidade luminosa (em $lumens$);
• x: profundidade do lago (em cm).</td>
<td>
• Valor numérico
• Cálculo numérico (uso de calculadora científica)
• Logaritmo
• Função Exponencial
• Equação Exponencial
• Etc.</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Smole e Diniz (2016a), volume 1.

Ressalta-se, contudo, que a seleção desses modelos matemáticos foi limitada às introduções, às seções de textos complementares e aos exercícios. Várias outras situações são percebidas nesses livros, que poderiam fazer parte dessa seleção. Tais situações, com vistas ao propósito da presente investigação, em geral, são muito mais interessantes para a elaboração de um Material de Apoio (Apêndice D) do que as que foram selecionadas. Não foram elencadas nesse primeiro momento, pois são situações adaptadas de questões do ENEM, ou são na íntegra algumas dessas questões, as quais serão investigadas separadamente, como fonte para o levantamento de dados, isto é, de modelos matemáticos dentro de contextos diversos, que tratem de situações reais. Essa, portanto, é a perspectiva e a ênfase que será dada à próxima seção.

4.2 AS QUESTÕES DO ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), criado em 1998, a princípio voltado para a avaliação do desempenho dos estudantes ao término da Educação Básica, visa identificar um conjunto de competências fundamentais e suas respectivas habilidades fundamentais para o pleno exercício da cidadania, conforme os indicadores apontados nos documentos oficiais (BRASIL, 1996, 1998). De acordo com Viggiano e Mattos (2013, p. 420) o ENEM, nessa perspectiva,

> [...] viria em direção distinta do modelo vestibular posto, tornando-se uma forma alternativa de ingresso na educação superior. [...] O exame, inicialmente, tinha como objetivo fornecer informações sobre estratos específicos para ações do poder público e disponibilizar informações aos estudantes, para que eles mesmos avaliassem seu desempenho em comparação com os dados gerais, e não se voltar para avaliação individual.

Após 10 anos de sua implantação, em 2009, o ENEM é reestruturado e ganha uma nova dimensão. Com a criação do Sistema de Seleção Unificada (SISU), o exame recebe modificações estruturais significativas, deixando de ser um exame com 63 questões, aplicadas em um único dia, para ter 180 questões, aplicadas em dois dias e mantendo a obrigatoriedade da Redação. Essa mudança elevou o número de instituições de Ensino Superior que passou a adotar o ENEM como meio de avaliação para o ingresso em seus cursos, mesmo que seu uso não tenha sido de modo uniforme. É o que destaca Viggiano e Mattos (2013, p. 421): “Essa adesão ocorreu de maneira diversificada, podendo o exame ser aplicado como a única forma de avaliação, como a primeira fase desta ou contribuindo com parcela da nota final.”.

Nesse sentido, o novo ENEM passa “[...] a ser um instrumento de política pública para conduzir e alinhar o currículo de Ensino Médio em todo o país.” (DANTE, 2016, p. 310). Segundo o autor, esse instrumento visa amenizar algumas disparidades causadas pelos concursos vestibulares tradicionais praticados até então pela maioria das instituições de Ensino Superior, pois havia uma diferença muito grande com relação ao nível e forma de abordar os conteúdos curriculares nesses concursos. Dependendo da instituição, o que/como era desenvolvido no Ensino Médio de uma determinada escola em termos curriculares, poderia ser adequado para um bom desempenho dos estudantes naquele vestibular, naquela instituição de

Ensino Superior, ou poderia ser totalmente fora de contexto, sem sentido para resolver as situações que ali eram apresentadas.

Assim, o novo ENEM se apresenta como “[...] um vestibular unificado criado pelo governo federal e obedecendo a suas diretrizes e seus parâmetros curriculares. [...] tem como fim avaliar o aspecto cognitivo, mas enfatizando a capacidade de autonomia intelectual e o pensamento crítico dos alunos.” (p. 310). Há, nessa direção, um favorecimento à mobilidade dos estudantes, no sentido de descentralizar os vestibulares específicos de cada instituição pública de Ensino Superior, possibilitando intercâmbio entre os jovens estudantes em todo o território brasileiro. Além disso, de acordo com Dante (2016, p. 310),

> [...] o Enem se propõe a melhorar a qualidade do Ensino Médio, uma vez que avalia o desenvolvimento de certas competências e habilidades dos alunos, não isoladamente, mas de forma conjunta. Assim, o conteúdo ministrado no Ensino Médio passa a ser determinado pelos professores, coordenadores e diretores e não exclusivamente ditado pelas universidades. Desse modo, é importante que os docentes compreendam e discutam a proposta integralmente, pois a execução desses pressupostos em sala de aula poderá contribuir para uma reorientação nas concepções e nas práticas, já que não se trata de mera revisão de conteúdos a ensinar, mas de redimensionar o papel da escola e seus atores.

É pensando nessa proposta de melhorar a qualidade do ensino, principalmente do ensino de Matemática, que se pretende fazer uso mais eficiente das questões do ENEM em sala de aula, não somente aquelas que já aparecem nos livros didáticos. Acredita-se que, a AnM como método alternativo de ensino, nessa perspectiva, pode servir de ponte entre os pressupostos apresentados na Matriz de Referência do novo ENEM e a prática em sala de aula ao utilizar questões desse exame. Nesse sentido, como apontado por Dante (2016), entende-se que a AnM pode ter um direcionamento que vise, de um modo geral, “[...] contribuir para uma reorientação nas concepções e nas práticas [...]” (DANTE, 2016, p. 310).

Esse direcionamento vem ao encontro dos propósitos estabelecidos na Matriz de Referência para o novo ENEM, cujo foco geral é a análise e resolução de situações-problema elaboradas com base na interdisciplinaridade e na contextualização (BRASIL, 2009). De acordo com essa Matriz, o novo ENEM visa avaliar *competências* específicas de cada *área de conhecimento*, as quais se desdobram em *habilidades* que refletem conhecimentos emergentes dentro de *eixos cognitivos*, comuns a todas as áreas.

As áreas de conhecimento são: 1. Linguagens, Códigos e suas Tecnologias (incluindo redação); 2. Ciências Humanas e suas Tecnologias; 3. Ciências da Natureza e suas Tecnologias; 4. Matemática e suas Tecnologias. Dentro das competências especificas de cada área de conhecimento, são distribuídas 30 habilidades que se inserem dentro de eixos cognitivos que norteiam todas as áreas. Conforme a Matriz, esses eixos visam, de um modo geral: I. Dominar linguagens (DL); II. Compreender fenômenos (CF); III. Enfrentar situações-problema (SP); IV. Construir argumentação (CA); V. Elaborar propostas (EP). (BRASIL, 2009).

No caso específico da área de Matemática e suas Tecnologias, são indicadas sete competências onde se inserem as 30 habilidades, conforme o quadro abaixo:

Quadro 15: Competências (Ci) e Habilidades (Hi) de Matemática e suas Tecnologias

C1: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
H1 – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais. **H2 –** Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem. **H3 –** Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos. **H4 –** Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas. **H5 –** Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
C2: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
H6 – Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional. **H7 –** Identificar características de figuras planas ou espaciais. **H8 –** Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma. **H9 –** Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
C3: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
H10 – Identificar relações entre grandezas e unidades de medida. **H11 –** Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano. **H12 –** Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas. **H13 –** Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente. **H14 –** Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.
C4: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
H15 – Identificar a relação de dependência entre grandezas. **H16 –** Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais. **H17 –** Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação. **H18 –** Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.
C5: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.
H19 – Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas. **H20 –** Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas. **H21 –** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 – Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação. **H23** – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.
C6: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
H24 – Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências. **H25** – Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos. **H26** – Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.
C7: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.
H27 – Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos. **H28** – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de Estatística ou Probabilidade. **H29** – Utilizar conhecimentos de Estatística ou Probabilidade como recurso para a construção de argumentação. **H30** – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de Estatística e Probabilidade.

Fonte: Elaborado pelo autor, baseado na Matriz de Referência do novo ENEM (BRASIL, 2009).

Além disso, cada área de conhecimento possui *objetos de conhecimento* específicos que fazem parte do currículo do Ensino Médio atual e que o aluno precisa estudar/dominar. No caso da Matemática e suas Tecnologias, esses objetos de conhecimento estão destacados a seguir:

Quadro 16: Objetos de Conhecimento da área de Matemática e suas Tecnologias

1. Conhecimentos numéricos
operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.
2. Conhecimentos geométricos
características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.
3. Conhecimentos de estatística e probabilidade
representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.
4. Conhecimentos algébricos
gráficos e funções; funções algébricas do 1º e 2º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.
5. Conhecimentos algébricos/geométricos
plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

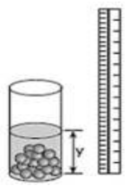
Fonte: Elaborado a partir da Matriz de Referência do ENEM (BRASIL, 2009).

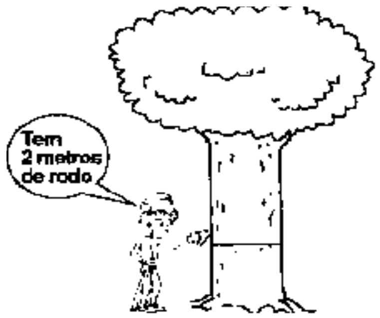
Assim, da mesma forma que o livro didático se apresenta como fonte de situações-problema onde constam a presença de modelos matemáticos que podem ser abordados na perspectiva da AnM, as questões de Matemática do ENEM também têm essa característica, e muitas com um potencial mais elevado por trazerem, em seus enunciados, situações contextualizadas que envolvem interdisciplinaridade e relacionam áreas diversas do conhecimento.

Diante disso, para a elaboração do Material de Apoio baseado na concepção de AnM proposta nesta pesquisa, além dos livros didáticos de Matemática descritos na seção anterior, são utilizadas como fonte de busca por modelos matemáticos, as questões de Matemática do ENEM, das edições de 2009 até 2018.

Assim, do modo como foi feito com os livros didáticos na seção anterior, para exemplificar a presença de modelos matemáticos nesses exames, se apresenta um quadro a seguir, constando situações onde esses modelos aparecem, destacando o modelo matemático relacionado e os conteúdos que podem ser abordados. Limitou-se, nessa exemplificação, selecionar somente alguns modelos (8 questões) presentes nas edições do novo ENEM.

Quadro 17: Modelos matemáticos encontrados em questões de Matemática do ENEM

<table>
<tr><th>Situações</th><th>Modelos matemáticos</th><th>Conteúdos abordados</th></tr>
<tr><td>S1: Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.</td><td>Modelo matemático, representado por um quadro com alguns resultados obtidos, que relaciona o nível da água com o número de bolas colocadas dentro do copo.

<table><tr><th>número de bolas (x)</th><th>nível da água (y)</th></tr><tr><td>5</td><td>6,35 cm</td></tr><tr><td>10</td><td>6,70 cm</td></tr><tr><td>15</td><td>7,05 cm</td></tr></table>Fonte: Q. 159 (ENEM 2009).</td><td>• Valor Numérico
• Proporcionalidade
• Taxa de Variação
• Função Afim
• Equação do 1º grau
• Sistema de equações do 1º grau com duas variáveis
• Etc.</td></tr>
<tr><td>S2: No manejo sustentável de florestas, é preciso muitas vezes obter o volume da tora que pode ser obtida a partir de uma árvore. Para isso, existe um método prático, em que se mede a circunferência</td><td>Modelo matemático do Volume ($\boldsymbol{V}$) de uma tora (m^3) em função do "rodo" ($\boldsymbol{\rho}$) e a altura da tora ($\boldsymbol{h}$), ambos, em m.
$$\boldsymbol{V = 0,06\rho^2 h}$$
• O coeficiente $\boldsymbol{0,06}$ foi obtido experimentalmente.
Obs.: A densidade ($\boldsymbol{D}$) da tora é dada por:</td><td>• Grandezas lineares e espaciais
• Proporcionalidade
• Comprimento de circunferência
• Função Quadrática
• Equação do 2º grau</td></tr>
</table>

da árvore à altura do peito de um homem (1,30 m), conforme indicado na figura. A essa medida denomina-se “rodo” da árvore. Um técnico em manejo florestal recebeu a missão de cubar, abater e transportar cinco toras de madeira, de duas espécies diferentes, sendo: 3 toras da espécie I, com 3 m de rodo, 12 m de comp. e densidade 0,77 ton/m^3; e, 2 toras da espécie II, com 4 m de rodo, 10 m de comp. e densidade 0,78 ton/m^3.	$$\boldsymbol{D = \frac{M}{V}}$$ • $\boldsymbol{M}$ é a massa da tora (em ton). **Ilustração da medida do “rodo”**  Fonte: *Q. 158 (ENEM 2010).*	• Função racional de duas variáveis • Volume de Cilindro • Etc.
S3: Escala de Magnitude de Momento (MMS - abreviação em inglês e denotada por M_W). Essa escala foi introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade.	Modelo matemático que indica o valor da Magnitude de Momento de um terremoto em função do Momento sísmico $$\boldsymbol{M_W = -10,7 + \frac{2}{3}\log(M_0)}$$ • M_W é a Magnitude de Momento; • M_0 é o Momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, por meio dos sismógrafos), cuja unidade é o $dina.cm$. **Obs.**: O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causou mais impacto no Japão. Teve magnitude $M_W = 7,3$. Fonte: *Q. 137 (ENEM 2011).*	• Valor numérico • Cálculo numérico (uso de calculadora científica) • Logaritmo • Função Exponencial • Equação Exponencial • Etc.
S4: Dentre outros objetos de pesquisa, a Alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano.	Modelo matemático que, segundo a Alometria, representa a área $\boldsymbol{A}$ (m^2) da superfície corporal de uma pessoa em função da sua massa $\boldsymbol{M}$ (kg); $\boldsymbol{k} = cte > 0$ $$\boldsymbol{A = k\,M^{\frac{2}{3}}}$$ Fonte: *Q. 168 (ENEM 2012).*	• Valor numérico • Áreas de figuras planas irregulares • Proporcionalidade • Função Algébrica • Potenciação e Radiciação • Etc.
S5: Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia	Modelo matemático que indica a quantidade de massa de um material radioativo (M) após t anos. $$\boldsymbol{M(t) = A(2,7)^{-kt}}$$ Onde $\boldsymbol{A}$ é a massa inicial do material radioativo e $\boldsymbol{k}$ é uma constante positiva.	• Valor numérico • Função Exponencial • Equação Exponencial • Potenciação • Logaritmos • Cálculo numérico (uso de calculadora científica) • Etc.

<table>
<tr>
<td>abandonado, foi manipulada de forma indevida.</td>
<td>Obs.: A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos.
Fonte: Q. 166 (ENEM 2013).</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>S6: A taxa de fecundidade é um indicador que expressa a condição reprodutiva das mulheres de uma região, importante para a análise da dinâmica demográfica dessa região. A variação percentual relativa na taxa de fecundidade no período de 2000-2010 se repete em 2010-2020.</td>
<td>Modelo matemático, representado pela tabela abaixo, que expressa a Taxa de fecundidade em função do tempo. Essa tabela apresenta os dados obtidos pelos Censos de 2000 e 2010, feitos pelo IBGE, com relação à taxa de fecundidade no Brasil.
<table>
<tr><th>Ano</th><th>Taxa de fecundidade no Brasil</th></tr>
<tr><td>2000</td><td>2,38</td></tr>
<tr><td>2010</td><td>1,90</td></tr>
</table>
Fonte: Q. 137 (ENEM 2014).</td>
<td>• Valor Numérico
• Proporcionalidade
• Taxa de Variação
• Função Afim
• Equação do 1º grau
• Sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis
• Etc.</td>
</tr>
<tr>
<td>S7: Uma enfermeira deve administrar um medicamento X a uma criança, cuja dosagem de adulto é de $60\,mg$. Ela não tem o registro da idade da criança no prontuário, mas sabe que, algumas horas antes, foi dada a ela uma dose de $14\,mg$ do medicamento Y, cuja dosagem de adulto é $42\,mg$.</td>
<td>Modelo matemático, representado pela “Fórmula de Young”, que expressa o modo de calcular a dose infantil de um medicamento, dada a dose do adulto.
$$\boldsymbol{D_c = \left(\frac{I_c}{I_c + 12}\right) \cdot D_a}$$
• $\boldsymbol{D_c}$ é a dose infantil (em mg);
• $\boldsymbol{D_a}$ é a dose para o adulto (em mg);
• $\boldsymbol{I_c}$ é a idade da criança (em anos).

Fonte: Q. 158 (ENEM 2015).</td>
<td>• Valor Numérico
• Proporcionalidade
• Taxa de Variação
• Função Afim
• Equação do 1º grau
• Etc.</td>
</tr>
<tr>
<td>S8: Segundo o IBGE, produtos sazonais são os que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Há épocas em que a disponibilidade nos mercados ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.</td>
<td>A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pelo Modelo matemático expresso pela função:
$$\boldsymbol{P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)}$$
Onde $\boldsymbol{x}$ representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado a jan., $x = 2$ a fev., e assim sucessivamente, até $x = 12$ (dez.).

Fonte: Q. 180 (ENEM 2015).</td>
<td>• Valor numérico
• Trigonometria do Triângulo
• Trigonometria no círculo
• Funções Periódicas
• Função Trigonométrica
• Equação Trigonométrica
• Etc.</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do ENEM 2009-2015, caderno Azul.

Na sequência desta pesquisa, é proposta a AnM como um método de ensino de Matemática para a Educação Básica a fim de direcionar a elaboração de atividades práticas a partir do livro didático e de questões do ENEM. Para isso, além dos modelos apontados até aqui, outros mais são selecionados, tanto nos volumes 2 e 3 de cada coleção apresentada, como nas outras provas do ENEM. Primeiramente, propõe-se, no próximo capítulo (capítulo 5), discutir mais detalhadamente as concepções acerca da abordagem AnM e apontar uma proposta inicial desta (AnM) como método de ensino, visando, a princípio, a elaboração de uma primeira versão do Material de Apoio (Apêndice D).

5 ANÁLISE DE MODELOS: UMA PROPOSTA ALTERNATIVA PARA ENSINAR MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

A busca por novos métodos de ensino que auxilie o professor na tentativa de tornar a Matemática escolar mais significativa e motivadora à aprendizagem do estudante é uma ação que vem ganhando destaque nos últimos anos. Em geral, essa busca visa oportunizar uma interação mais próxima da Matemática com a realidade, de modo que uma das principais preocupações que professores e pesquisadores da área têm em relação a essa questão é como relacionar os conteúdos estudados em sala de aula com as situações reais do cotidiano e do interesse dos estudantes (FIORENTINI; LORENZATO, 2012).

A MM, como método de ensino, tem sido apresentada e utilizada com esse fim. No contexto geral das Aplicações, em particular a ApM, conforme a definição apresentada anteriormente (Seção 3.1.3.), pode ser vista também nesse sentido. Vale destacar que, em todo processo de Modelagem, há *aplicação* de modelos envolvida, o que não ocorre no processo inverso, isto é, nem toda *aplicação* de modelos contém uma atividade de Modelagem. De acordo com o que foi visto até este momento, a Modelagem parte das situações e problemas da realidade e se direciona para a Matemática, para os conteúdos, para os modelos. A ApM percorre o caminho inverso, ou seja, tem como ponto de partida a própria Matemática em direção às situações-problema da realidade dos estudantes.

Nessa perspectiva, Soares (2012), Soares e Javaroni (2013), identificaram basicamente um papel ilustrativo dos modelos para exemplificar os conteúdos, de modo que, a partir da definição proposta (Seção 3.1.3.), a ApM pode ser utilizada como modo de atuação do professor, em sala de aula, como uma abordagem que faz uso de modelos matemáticos prontos, principalmente para ilustrar e exemplificar os conteúdos matemáticos, podendo, inclusive, ser utilizada como atividade introdutória ou preliminar à *Modelação* (BIEMBENGUT, 2016), conforme sinalizado pelos professores participantes da presente pesquisa (Seção 3.1.4.).

Por outro lado, Soares (2012), Soares e Javaroni (2013), ao aprofundar o estudo do uso de modelos matemáticos, identificam ainda um papel mais reflexivo desses, e propõem uma abordagem alternativa para o trabalho com modelos matemáticos prontos, a qual denominaram de *Análise de Modelos* (AnM). Biembengut (2016), com a finalidade de desenvolver o processo de Modelação, especialmente enfatizando o Ensino, isto é, "ensinar o conteúdo e a modelar", propõe o trabalho com modelos matemáticos prontos, incentivando o professor a planejar suas atividades à luz do binômio "Aprender $\leftrightarrow$ Ensinar" a fim de alcançar os objetivos de tal direcionamento.

Assim, mediante o que foi visto no capítulo anterior, é possível estabelecer uma relação entre as abordagens AnM (SOARES, 2012; SOARES; JAVARONI, 2013) e "ensinar o conteúdo e a modelar" (BIEMBENGUT, 2016), de modo que, a partir dessa junção de ideias, tentar adaptar/estabelecer a AnM como um método de ensino de Matemática na Educação Básica.

Entendida como um método de ensino que pode transitar entre a ApM e a MM, a AnM é discutida nessa direção no presente capítulo. A perspectiva é identificá-la não apenas como abordagem pedagógica que visa um único sentido na direção entre Matemática e Realidade, mas em um sentido de "mão dupla", isto é, "Matemática $\leftrightarrow$ Realidade".

A seguir, discute-se, o modo como o termo "Análise de Modelos" é concebido no contexto geral das Aplicações. Primeiramente, inicia-se com uma breve reflexão sobre a palavra "Análise" no âmbito da Matemática e na sequência é visto o termo geral "Análise de Modelos" na perspectiva de Soares (2012, 2015), Soares e Javaroni (2013), relacionado à MM. Ainda nesse contexto da MM, é possível perceber indícios dessa perspectiva também em Biembengut (2016), o que será visto na sequência. Em seguida o termo é evidenciado conforme a perspectiva e caracterização de um grupo de professores do Ensino Básico. Por fim, é apresentada uma perspectiva da AnM como um método de ensino, ênfase central deste trabalho.

5.1 CONCEPÇÕES SOBRE ANÁLISE DE MODELOS

No contexto histórico da Matemática, o termo "Análise" surge como ramo da Matemática para lidar, principalmente, com os conceitos introduzidos pelo Cálculo Diferencial e Integral a partir do século XVII, e tentar suprir a necessidade de prover formulações rigorosas às ideias intuitivas do Cálculo (ÁVILA, 2001).

No âmbito da Educação Matemática, principalmente nos trabalhos que se utiliza modelos matemáticos (como na MM), onde se incentiva o envolvimento dos estudantes na participação e na tomada de decisões sobre os temas (matemáticos ou não) a serem estudados, o termo "análise" pode se configurar como uma abordagem pedagógica potencializadora no trabalho com situações aplicadas à área de interesse dos estudantes, mesmo que essas situações envolvam conteúdos matemáticos que ainda não tenham sido estudados por eles. Nesse sentido, Soares (2012, 2015), Soares e Javaroni (2013), propõem um trabalho de "análise" que visa o estudo de modelos matemáticos já existentes a fim de introduzir conceitos novos aos estudantes, que de alguma forma têm relação com os modelos em estudo. Esse tipo de trabalho é denominado pelas autoras de *Análise de Modelos*.

A seguir, será considerado o entendimento do termo "Análise de Modelos" na perspectiva desses autores (SOARES, 2012, 2015; SOARES; JAVARONI, 2013), na sinalização apontada por Biembengut (2016), além das caracterizações e percepções evidenciadas por um grupo de professores do Ensino Básico acerca do termo.

5.1.1 Análise de Modelos no contexto da Modelagem Matemática

O termo "Análise de Modelos" como uma abordagem pedagógica que utiliza modelos matemáticos prontos dentro do contexto da MM, é sugerido por Débora da Silva Soares em sua tese de doutorado intitulada *Uma Abordagem Pedagógica Baseada na Análise de Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do software?* (SOARES, 2012). A abordagem foi desenvolvida dentro da disciplina Matemática Aplicada, oferecida no curso de Ciências Biológicas da Universidade Estadual Paulista - Unesp, de Rio Claro - SP. A ementa da disciplina era basicamente a de um curso de Cálculo Diferencial e Integral I, que enfatiza essencialmente o estudo de funções, noção intuitiva de limite, derivada e integral, e suas aplicações.

Formado por um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias não lineares, o modelo utilizado[30] pela autora na abordagem envolvia conteúdos e técnicas de resolução complexos para os estudantes nesse nível inicial de seus estudos, pois vão além da ementa da disciplina oferecida. Esse, no entanto, é um aspecto central na abordagem, pois segundo a autora, a ideia não é apenas usar modelos que envolvam os conteúdos do currículo, mas usar modelos mais acurados, mesmo que fujam do conteúdo previsto. Nesse sentido, para o alcance dos objetivos propostos, foi utilizado o software *Modellus*, que tinha o papel fundamental para auxiliar no entendimento das questões mais complexas envolvidas no modelo. Desse modo, os estudantes puderam fazer representações gráficas e tabulares para as soluções do modelo, permitindo reflexão dos estudantes sobre as situações propostas.

De acordo com Soares e Javaroni (2013), essa reflexão surge a partir dos questionamentos feitos pelos próprios estudantes quando exploram os modelos. A ideia é que, nessa exploração, os modelos sirvam "[...] como pano de fundo para a **introdução de conceitos matemáticos novos** para os alunos." (p. 197, grifo nosso). Essa é uma característica crucial que diferencia a AnM da ApM, destacam as autoras. Além disso, as autoras destacam algumas atividades que podem estar envolvidas no processo de Análise de Modelos. São elas:

---

[30] Modelo de *Ross-Macdonald* para transmissão da malária.

> (i) estudo do fenômeno em questão; (ii) estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo; (iii) entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno; (iv) estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas; (v) estudo da influencia dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influencia de possíveis intervenções no fenômeno; (v) análise das limitações do modelo. (SOARES; JAVARONI, 2013, p. 199).

Para conduzir o trabalho com AnM, as autoras apresentam algumas possibilidades, considerando que nessa perspectiva é possível: 1) propor o estudo de vários modelos ao longo de uma disciplina; 2) usar um modelo para desenvolver um tópico específico; ou, 3) propor o estudo de um único modelo ao longo de uma disciplina inteira.

Como exemplo da primeira possibilidade, as autoras destacam o trabalho[31] desenvolvido em Javaroni (2007), que propôs na disciplina Introdução às *Equações Diferenciais Ordinárias* a análise qualitativa de modelos matemáticos clássicos da literatura (objeto em queda, modelos populacionais de Malthus e Verhust e lei do resfriamento dos corpos), explorando-os por meio dos softwares como *Maple*, *planilha* e *Winplot*, buscando analisar o comportamento das equações e dos parâmetros envolvidos, além das soluções com o fim de dar significados aos mesmos.

Para ilustrar a segunda possibilidade, citam o trabalho[32] desenvolvido em Deprez (2011), no qual foi proposta uma sequência didática na disciplina Álgebra Linear, com a finalidade de introduzir os conceitos de autovalor e autovetor por meio do estudo da matriz de Leslie como um modelo matemático para a evolução de uma população.

Em relação à terceira possibilidade, as autoras citam o estudo[33] desenvolvido em Soares (2012), no qual foi proposto, desde o primeiro dia de aula, para alunos da disciplina Matemática Aplicada ao curso de graduação em Biologia a análise do modelo de transmissão da malária de *Ross-Macdonald*. Nesse estudo, foi utilizado o software *Modellus*, o qual possibilitou que os estudantes fizessem representações gráficas e tabulares para as soluções do modelo, sendo que:

> O foco de análise foi o estudo do comportamento das soluções e a influência dos parâmetros neste comportamento. Essa análise foi desenvolvida de forma interligada com a disciplina de modo que alguns dos conceitos previstos na ementa (funções, derivada, máximos e mínimos, limite) foram trabalhados de forma relacionada ao estudo do modelo. (SOARES; JAVARONI, 2013, p. 199).

Essas são, portanto, algumas possibilidades de encaminhar trabalhos com modelos matemáticos prontos que visam a relação da “análise” destes com os conteúdos matemáticos de uma disciplina da Matemática ou de um tópico desta, conforme destacam as autoras. Enfatizam,

---

[31] Pesquisa realizada em sua tese de doutorado em Educação Matemática na Unesp de Rio Claro - SP.

[32] Pesquisa realizada em sua atividade docente.

[33] Pesquisa realizada em sua tese de doutorado em Educação Matemática na Unesp de Rio Claro - SP.

porém, que o trabalho desenvolvido em Soares (2012) proporciona um encaminhamento mais aberto, de modo que as aulas podem ser guiadas por questionamentos feitos pelos próprios estudantes a partir da exploração do modelo, possibilitando melhor entendimento tanto do modelo em si como dos parâmetros envolvidos (SOARES; JAVARONI, 2013).

Destaca-se ainda, que há um direcionamento em refletir acerca de uma possível relação da AnM com a MM e com a ApM (SOARES, 2012, 2015; SOARES; JAVARONI, 2013). Segundo as autoras, existe certa aproximação entre as três abordagens, embora mantenham diferenças que as caracterizam separadamente. Desse modo, preliminarmente, a AnM poderia ser localizada como uma abordagem intermediária entre as outras duas.

A princípio, a visão de Soares (2012) era que a AnM não podia ser caracterizada como uma atividade de MM, pois nessa abordagem os estudantes "[...] não elaboram seu próprio modelo matemático [...]. Eles estudam um modelo pronto." (p. 108), e, portanto, não completam um ciclo de MM. Por outro lado, também não é simples ApM, pois a AnM, nessa perspectiva,

> [...] vai além, uma vez que enfatiza o estudo do comportamento das soluções e suas relações com o fenômeno, e convida a utilizar a análise do modelo como fio condutor para a discussão de conceitos matemáticos da disciplina, isto é, os conceitos previstos na ementa da disciplina aparecem como importantes elementos para a realização desta análise. Assim, o estudo de modelos proposto neste trabalho **extrapola o objetivo de ilustrar** o uso do conteúdo matemático, assim como também extrapola a análise dos modelos por si só. (SOARES, 2012, p. 112-113, grifo nosso).

Além do mais,

> [...] na primeira [AnM] um modelo matemático é sugerido para estudo com o intuito de **trabalhar um conceito matemático ainda desconhecido** pelos alunos, ou seja, é por meio da análise do modelo que o concito será introduzido; já na segunda [ApM] um modelo é apresentado como exemplo para um **conteúdo já trabalhado**. [...] Na Análise de Modelos, o conteúdo matemático não vem antes da situação, mas eles são pensados juntos, desde o início do processo de desenvolvimento do trabalho. (SOARES; JAVARONI, 2013, p. 211-212, grifo nosso).

No entanto, como destacam as autoras, é possível estabelecer uma relação mais próxima entre a AnM e a MM, embora reconheçam que "[...] um aprofundamento teórico e o desenvolvimento de mais pesquisas sobre o tema [AnM] poderá trazer contribuições a respeito da questão." (SOARES; JAVARONI, 2013, p. 215).

É nessa tentativa de aprofundamento, partindo das discussões encontradas em Soares (2012), Soares e Javaroni (2013) e baseada na concepção de *modelagem prescritiva*[34] (NISS, 2015), que Soares (2015) propõe a AnM como sendo uma atividade de MM. Para esse

---

[34] "Na modelagem prescritiva, o objetivo final é abrir caminho para *tomar medidas com base em decisões* resultantes de certo tipo de considerações matemáticas, ou seja, 'mudar o mundo' em vez de 'entender o mundo'." (NISS, 2015, p. 69, tradução nossa). Nesse sentido, o termo *modelagem prescritiva* "[...] representa um movimento focado no *produto* (o modelo) para se concentrar nos *propósitos* da modelagem." (STILLMAN; BLUM; BIEMBENGUT, 2015, p. 4, tradução nossa).

entendimento, sabendo que a elaboração de um modelo matemático pelos estudantes é um dos aspectos centrais no processo de MM na maioria das concepções, Soares (2012, 2015), Soares e Javaroni (2013) discutem a presença do modelo matemático dentro desse processo.

Para iniciar, as autoras analisam o diagrama cíclico do processo de MM sugerido por Blum e Leiß (2007), visto no capítulo 3. Uma primeira defesa da AnM como uma atividade de modelagem, portanto, baseia-se no esquema proposto por esses autores, que segundo as autoras, é apontado como "um movimento cíclico", pois: "Os autores [Blum e Leiß (2007)] afirmam que não é necessário que essas etapas sejam cumpridas rigidamente na ordem apresentada e, em geral, este é um entendimento que permeia a maioria das representações de um processo de modelagem." (SOARES; JAVARONI, 2013, p. 210).

Além disso, levando em conta a concepção de Blomhøj e Kjeldsen (2011) acerca do ponto de partida nesse ciclo, as autoras percebem uma proximidade da AnM a um processo de modelagem quando afirmam: "Blomhøj e Kjeldsen (2011) destacam que um processo de modelagem não necessariamente inicia com a compreensão da situação e do problema, de modo que poderia iniciar em qualquer etapa, inclusive na etapa do modelo matemático." (p. 210).

Assim, partindo do modelo, o foco da abordagem recai prioritariamente sobre a interpretação e a validação, enfatizando o trabalho de transição do modelo real para um modelo matemático (SOARES; JAVARONI, 2013). De acordo com as autoras, "[...] a validação envolve a discussão de potencialidades e limitações do modelo, o que pode ser o ponto de partida para a proposição de modificações e para discussões relacionadas às questões de ética e responsabilidade na elaboração de um modelo." (p. 211).

Outros aspectos podem emergir a partir dessa abordagem (AnM) e a expectativa, segundo as autoras, é que o ciclo de modelagem fosse completado, o que possibilitaria caracterizá-la como uma atividade de modelagem. É justamente nesse momento que o software (Modellus, GeoGebra, Excel etc.) entra como elemento central no processo de completar esse ciclo. Isso é percebido nos trabalhos desenvolvidos em Javaroni (2007), Deprez (2011) e Soares (2012), nos quais os *softwares* utilizados solucionam os modelos e apresentam representações dessas soluções para os estudantes, os quais avançam para a resolução dos problemas levantados por meio desses modelos e apresentam representações dessas soluções (SOARES; JAVARONI, 2013).

Assim, a defesa da AnM como uma atividade de modelagem avança em Soares (2015), baseando-se na concepção de *modelagem prescritiva*[35], cujo propósito é "[...] *especificar ou*

[35] Alguns exemplos de questões que esse tipo de modelagem pode abordar são apontados em Niss (2015), tais como: "Onde deve ser localizada uma nova usina ou um enorme shopping center? De que forma os assentos devem

projetar objetos ou estruturas que façam parte de algum domínio extra-matemático, possuindo (se possível) certas propriedades necessárias ou desejadas." (NISS, 2015, p. 69, tradução nossa). Esse autor argumenta que, nessa perspectiva, mesmo não se desenvolvendo todas as etapas do ciclo de modelagem (pelos menos não de forma explícita), ainda assim, de forma "rudimentar", tem-se um processo de modelagem.

Para exemplificar essa ideia, Niss (2015) apresenta e discute o modelo matemático IMC (Indice de Massa Corporal)[36], considerando-o dentro de um ciclo de modelagem elaborado por ele em Niss (2010)[37]. Trata-se do modelo representado por uma função real de duas variáveis, $f: \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$, definida por $f(w,h) = \frac{w}{h^2}$, $(w,h) \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}_+^2$, onde w indica a massa (em kg) de uma pessoa e h, a sua altura (em metros), de modo que:

Tabela 1: Rótulo normativo dos intervalos de IMC

$0 < IMC < 18{,}5$	$18{,}5 \leq IMC < 25$	$25 \leq IMC < 30$	$IMC \geq 30$
Baixo peso	Peso normal	Sobrepeso	Obesidade

Fonte: Adaptado de Niss (2015, p.70).

De acordo com Niss (2015), a etapa de *preparação do domínio extra-matemático,* equivalente ao *tratamento e simplificação da situação e/ou problema real* (BLUM; LEIß, 2007), é contemplada pelo estabelecimento de uma "meta-questão", isto é, o questionamento de como pode ser criada uma medida quantitativa para evidenciar a variação de peso dentro e entre uma população humana, visando estabelecer um índice de peso para os indivíduos dessa população e simplificando o ser humano, para aferição de seu IMC, em termos apenas de seu peso e altura.

---

ser divididos entre as partes nas eleições parlamentares? De que forma os m membros de um conselho de administração devem ser eleitos pelo eleitorado de candidatos p $(m < p)$? Qual seria uma boa medida do grau de acidez das substâncias? Qual seria uma boa medida da viscosidade de um líquido/fluido? Como definir um esquema de amortização de empréstimo para cumprir determinados requisitos? Como construir desenhos de planos para refletir fielmente a nossa visão espacial? Quais as dimensões de uma caixa (um paralelepípedo de ângulo reto) que contenha 1 l de modo a minimizar o uso de material?" (NISS, 2015, p. 69, tradução nossa).

[36] "Foi inventado por Lambert Adolphe Jacques Quételet entre 1830 e 1850. É também denominado de 'Índice de Quételet', como tributo ao seu criador. Lambert nasceu na Bélgica em 22/02/1796 e faleceu em 17/02/1874, tendo trabalhado nas áreas da astronomia, matemática e sociologia. Fundou e dirigiu o Observatório de Bruxelas, e teve um importante papel na introdução de métodos estatísticos ao estudo das ciências sociais.". Disponível em: https://br.answers.yahoo.com/question/index?qid=20080424155209AArgvRx. **Acesso em**: 04 abr. 2018.

[37] Apresentado em cinco momentos, equivalentes às etapas propostas por Blum e Leiß (2007). 1º) *Preparando o domínio exta-matemático* - momento de especificar e idealizar a situação que será considerada, de fazer suposições, escolher e formular questões a serem respondidas; 2º) *Matematizando a situação* - momento de traduzir a situação e questões idealizadas para a linguagem matemática (elaboração do modelo); 3º) *Lidando com a situação matemática* - momento de resolver a situação matemática e apresentar respostas; 4º) *Desmatematizando os resultados* - momento de interpretar os resultados matemáticos (as respostas) no contexto extra-matemático a fim de responder as questões iniciais; 5º) *Validando o modelo* - momento de comparar os resultados obtidos pelo modelo com a realidade conhecida do domínio extra-matemático. Aqui ocorre a avaliação da qualidade e relevância das respostas, ajudando na tomada de decisão e na exposição dos resultados. (NISS, 2010).

A etapa *matematização da situação* (NISS, 2010; BLUM; LEIß, 2007), é contemplada quando cada pessoa, dentro do conjunto da população global, "[...] é parametrizada (uma maneira especial de ser representada matematicamente) pelo vetor $(w, h) \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}_+^2$, usado como argumento de uma função $f: \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$, dada por $f(w, h) = \frac{w}{h^2}$, combinando peso e altura para definir nossa medida de 'peso relativo'." (NISS, 2015, p. 70, tradução nossa). Assim, cada membro da população global pode ser classificado, dependendo do valor $f(w, h)$ identificado dentro de um dos intervalos $]0;\ 18{,}5[$, $[18{,}5;\ 25[$, $[25;\ 30[$ e $[30;\ \infty[$. Tem-se, portanto, o modelo elaborado. A matematização da situação-problema está completa, pois aqui é traduzida as entidades do mundo real (indivíduos e populações, escalas e padrões) em um domínio matemático que consiste em intervalos de números reais e funções racionais.

O *tratamento da situação matemática*, etapa equivalente à *obtenção dos resultados matemáticos*, a *resolução* (BLUM; LEIß, 2007), "[...] é quase trivial. Simplesmente consiste em calcular para qualquer indivíduo seu IMC a partir de w e h, e, em seguida, localizar o valor resultante em um (ou dois) dos intervalos." (NISS, 2015, p.70, tradução nossa). A *desmatematização dos resultados* ou *interpretação* (BLUM; LEIß, 2007), é igualmente trivial, pois consiste em identificar rótulos do mundo real (baixo peso, peso normal, sobrepeso ou obesidade) ao indivíduo, com base na localização do IMC.

Já a etapa de *validação do modelo* (NISS, 2010; BLUM; LEIß, 2007) não é possível realizar. O autor aponta que não faz sentido validar o modelo, nem mesmo avaliar a qualidade e relevância das respostas obtidas por ele, pois "[...] em princípio, o modelo *não pode ser falsificado*. [...] não foi possível a validação direta do modelo, apenas um amplo espectro de meta-validação[38] e crítica do uso do modelo."[39] (NISS, 2015, p.71, tradução nossa).

Em síntese, situações como essas, sugerem um "ciclo de modelagem rudimentar" (NISS, 2015). Dentro do contexto da modelagem prescritiva, um ciclo de modelagem rudimentar, então, pode ser entendido como um processo de modelagem que não chega a desenvolver todas as suas etapas (elaboração e validação do modelo, por exemplo), mas pode

[38] O autor exemplifica o que seria essa *meta-validação* ao expressar: "[...] o que aconteceria se outra medida fosse escolhida, por exemplo, $f(w, h) = \frac{w}{h^\alpha}$, talvez com $\alpha = 1$ ou $\alpha = 3$? E o que aconteceria se os limites do intervalo fossem alterados? Isso poderia ter um grande impacto na atribuição de rótulos de peso para as pessoas. Por que o modelo não distingue entre homens e mulheres, entre jovens e idosos, e entre diferentes grupos étnicos? Por que a composição corporal não é levada em consideração? Se adotado em todas as populações, quais distribuições de valores e peso do IMC encontraríamos? Perguntas como essas ajudariam a esclarecer algumas das consequências da utilização do modelo, mas isso é diferente de validar o modelo diretamente." (NISS, 2015, p. 71).

[39] "[...] in principle the model cannot be falsified. […] no direct validation of the model was possible, only a wide spectrum of meta-validation and critique of the use of the model." (NISS, 2015, p. 71).

ser "completado" ao realizar o que Niss (2015) chama de *meta-validação*, sendo esta uma "etapa" crucial em um processo de modelagem prescritiva.

Soares (2015) percebe, então, que a AnM (SOARES, 2012; SOARES; JAVARONI, 2013), assim como a modelagem prescritiva (NISS, 2015), se constrói baseada em um ciclo rudimentar de modelagem e, portanto, pode ser vista sim como uma atividade de MM. A autora considera, então, que ao utilizar a AnM como abordagem pedagógica em sala de aula, "[...] os alunos estão desenvolvendo um ciclo de modelagem rudimentar [...]" (SOARES, 2015, p.458, tradução nossa). Em outras palavras, a ênfase é que na AnM, o ciclo de modelagem pode ser considerado rudimentar porque algumas etapas são feitas por outras pessoas ou pela tecnologia utilizada. Além disso, em Soares (2012), apesar de os estudantes não terem elaborado modificações no modelo, eles analisaram modificações propostas para o modelo (SOARES, 2015).

Para a autora, o fato de se utilizar o termo "rudimentar" não significa que se trata de uma modelagem ruim, pelo contrário, trata-se de uma MM que oportuniza e incentiva o uso de tecnologia digital, o que só enriquece o processo como um todo. No caso específico do trabalho realizado em Soares (2012), se não fosse o software *Modellus*, os estudantes não conseguiriam analisar aquele modelo da transmissão da malária, ressalta a autora.

Essa perspectiva é reafirmada em Soares e Vier (2017), quando se expressa que a AnM pode ser entendida "[...] como um processo de Modelagem Matemática com um ciclo de modelagem rudimentar." (p. 3). Além do mais, é destacado que a AnM pode ser caracterizada como um ambiente de aprendizagem (BARBOSA, 2001b) de MM onde as tecnologias digitais têm papal central na análise dos modelos, possibilitando, assim, reorganização do processo investigativo, reflexão sobre os conteúdos matemáticos a serem estudados e sobre os próprios fenômenos envolvidos.

Outra perspectiva que sinaliza a AnM dentro do contexto da MM é vista em Biembengut (2016). Ao propor o uso da *Modelação* na Educação Básica, a autora apresenta a atuação do professor na sala de aula em duas direções, *ensinar o conteúdo e a modelar*, e, *ensinar a pesquisar - fazer modelagem*, sinalizando que a AnM estaria inserida na primeira, pois segundo a autora, nessa direção, a abordagem "[...] nos permite desenvolver o conteúdo curricular (e não curricular sempre que necessário), a partir da reelaboração de modelos (sobre temas/assuntos que possam interessar aos estudantes) e da mostra de aplicações às mais diversas áreas do conhecimento [...]" (p. 179). Além do mais, a partir "[...] deste tema/assunto ou modelo vamos 'extrair' o conteúdo curricular e não curricular se julgarmos pertinente. Ou seja, vamos apresentar o modelo, passo a passo, de tal forma que requeira explicitação do conteúdo que precisamos tratar [...]" (p. 180).

Nota-se que esse direcionamento - *ensinar o conteúdo e a modelar* - vem ao encontro da perspectiva encontrada em Soares (2012), Soares e Javaroni (2013), com relação à abordagem mais reflexiva dos modelos matemáticos, vista anteriormente. Segundo Biembengut (2016), a atuação do professor, nesse direcionamento, contempla o desenvolvimento do conteúdo curricular por meio do uso adequado dos modelos matemáticos prontos, escolhidos de acordo com o interesse dos estudantes. Essa é a primeira parte do direcionamento, isto é, *ensinar o conteúdo*. Já na segunda parte, *ensinar a modelar*, está presente o aspecto mais reflexivo do uso desses modelos, pois é nesse momento que o professor apresenta o "modelo, passo a passo", propõe sua "reelaboração" em conjunto com os estudantes, tentando entender como este é elaborado e quais conteúdos e cálculos já conhecidos estão presentes e quais surgirão. Essas ações sugerem o reforço dos conhecimentos prévios e um olhar crítico em relação aos conteúdos e à própria situação-problema onde o modelo está sendo aplicado.

Esse último aspecto, isto é, apresentar o modelo passo a passo e sua reelaboração, parece indicar uma ação que vai além da simples ilustração ou exemplificação do conteúdo estudado. Não é apenas ApM, pois como o foco é ensinar a modelar, a abordagem parece apontar para uma ação conjunta do professor com os estudantes, os quais podem fazer uso de modelos matemáticos clássicos ou não da literatura ou de projetos prontos de modelagem. A ideia é que nesses projetos de modelagem, partindo do modelo construído, seja possível "reviver" as etapas do processo. Esse tipo de ação poderá dar mais segurança ao professor, caso não se sinta devidamente preparado, para implementar a Modelação em sua prática pedagógica (BIEMBENGUT, 2016).

Diante de tais considerações, embora a autora não utilize o termo "Análise de Modelos" de modo explícito para indicar uma abordagem que faz uso de modelos matemáticos prontos em uma perspectiva mais reflexiva, a proposta de *ensinar o conteúdo e a modelar* como direcionamento para implementar a Modelação no ambiente escolar, aponta uma relação estreita entre ambas (AnM e Modelação). A AnM não seria apenas uma atividade introdutória ou preliminar à Modelação, como sinalizado para a ApM, mas sim como parte fundamental do próprio processo que envolve o método, isto é, a parte do Ensino (do conteúdo curricular e da "arte de modelar").

Nesse sentido, as ações relativas às propostas de *ensinar o conteúdo e a modelar* (BIEMBENGUT, 2016) e de *modelagem rudimentar* (SOARES, 2015), além de caracterizarem a abordagem AnM no contexto da MM, apontam direções que servem de base para uma perspectiva dessa abordagem como um método de ensino de Matemática para a Educação Básica. Para tanto, além das propostas citadas, são levadas em consideração as perspectivas de um grupo de professores de Matemática desse nível de Ensino acerca do termo “Análise de Modelos” (grupo descrito no capítulo 2), conforme é apresentado na próxima seção.

5.1.2 Análise de Modelos na perspectiva de professores da Educação Básica

Com a intenção de delimitar o tema, na presente seção, enfatiza-se a investigação do termo “Análise de Modelos”. Para tanto, entre as seis perguntas do questionário aplicado aos 58 professores de Matemática da Educação Básica que participaram desta pesquisa destaca-se: “Considerando que Modelagem Matemática, Análise de Modelos e Aplicação de Modelos são alternativas metodológicas para ensinar Matemática na Educação Básica, como você caracteriza cada uma delas?”. O recorte dos relatos tem a intenção de responder à pergunta: como um grupo de professores de Matemática concebe ou caracteriza o termo “Análise de Modelos”?

Essa caracterização tem como principal objetivo, servir de auxílio aos direcionamentos apontados na seção anterior (5.1.1.), que visam o desenvolvimento da proposta de adaptar a AnM como método de ensino para a Educação Básica, e assim, ajudar responder à pergunta diretriz construída para a presente pesquisa (Seção 1.2.2.).

Ao caracterizar o termo “Análise de Modelos” (AnM), os participantes, respondendo à pergunta: “Como você concebe ou caracteriza o termo “Análise de Modelos”?”, apontam que a AnM pode ser caracterizada de cinco maneiras, que de forma direta ou indireta, também estão relacionadas ao contexto geral das Aplicações. Conforme a ATD desenvolvida, emergiram cinco categorias que caracterizam o termo “Análise de Modelos”: AnM_1 - **Abordagem que favorece o desenvolvimento do conteúdo curricular**; AnM_2 - **Estratégia que favorece os processos de ensino e aprendizagem**; AnM_3 - **Estratégia utilizada para a resolução de problemas da realidade**; AnM_4 - **Etapa do processo de Modelagem Matemática**; AnM_5 - **Abordagem que favorece a interação com outras práticas pedagógicas**.

Para sintetizar o processo da ATD realizado que levou a essas categorias (AnM_i) emergentes, apresentam-se a seguir, quadros referentes a cada categoria, os quais resumem o processo e exibem em suas três colunas, respectivamente: **Exemplos de fragmentos** dos relatos; **Unidades de significados** emergentes a partir da unitarização; **Número de ocorrências** (Nº Oc.) de cada uma dessas unidades.

Quadro 18: AnM_1 - Abordagem que favorece o desenvolvimento do conteúdo curricular

Exemplos de fragmentos	Unid. de signif.	Nº Oc.
"Mostra a importância e aplicabilidade dos conteúdos matemáticos [...]" (P44). *"[...] o aluno consegue vivenciar o conteúdo matemático e observa a aplicação de algo antes pensado apenas abstrato na sua realidade."* (P4). *"É mostrar ao educando a aplicabilidade de determinado conteúdo no seu cotidiano, trazendo para o seu dia a dia o que lhe foi ensinado em ambiente escolar [...]"* (P17). *"[...] abre-se um leque para o professor explorar diferentes exemplos. Muitas vezes, exemplos de diferentes funções (lineares, quadráticas, exponenciais, etc.), são trabalhadas em sala de aula para exemplificar uma situação da realidade [...]"* (P8).	Aplicando de modo prático para exemplificar	15
"A Análise de Modelos pode trazer tanto ao professor como ao estudante percepções sobre os componentes de determinado conteúdo e seus efeitos, quando estão presentes em determinada situação." (P9). *"Permite ao aluno entender como e onde utilizar determinados conteúdos apresentados em sala de aula."* (P57). *"Dá sentido ao conteúdo estudado, respondendo a uma pergunta constante dos alunos da educação básica: - 'Porque estudar isso professor?' - 'Onde eu vou usar isso na minha vida?'"* (P18). *"[...] ilustra o 'para que serve isso' tão comentado pelos estudantes [...]"* (P10).	Justificando sua importância em diversos contextos	11
"[Abordagem utilizada] para discussão de conceitos matemáticos." (P10). *"[O estudante] aprende conceitos matemáticos envolvidos na elaboração do modelo."* (P5). *"[...] proporciona melhor entendimento do conteúdo pelo aluno."* (P55). *"[...] aprofunda seus conhecimentos [...]"* (P12). *"Fixa melhor os conceitos e conteúdos estudados."* (P29).	Discutindo-os para compreender, aprofundar e fixar	8
"[...] relaciona a matemática a outras áreas do conhecimento [...]" (P10). *"[...] aproxima a matemática de áreas de interesse dos estudantes."* (P11). *"[...] mostra que a matemática básica está no cotidiano [dos estudantes]"* (P20). *"Favorece processos interdisciplinares."* (P21).	Relacionando a Matemática com outras áreas do conhecimento e de interesse dos estudantes	10

Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa categoria, uma das mais frequentes no relato dos professores (34 ocorrências), enfatiza o desenvolvimento do conteúdo curricular. Aponta a AnM como abordagem facilitadora para mostrar na prática o conteúdo curricular por meio da exploração de modelos encontrados nas diversas áreas do conhecimento, seja com a finalidade direcionada para compreender e fazer previsão acerca de fenômenos reais, ou com objetivo de simplesmente oportunizar discussão, compreensão, aprofundamento e fixação desse conteúdo. Essa perspectiva se harmoniza com as concepções de AnM, proposta por Soares (2012), Soares e Javaroni (2013), e de *Modelação*, conforme Biembengut (2014, 2016).

De acordo com o relato dos professores, dentro dessa categoria, a AnM favorece a compreensão de conceitos matemáticos ao indicarem que, um fenômeno de qualquer natureza pode ser elemento motivador para se trabalhar os conteúdos matemáticos em sala de aula.

Além disso, a categoria sinaliza a AnM como abordagem potencializadora de interdisciplinaridade. Como visto anteriormente, as DCNEB preveem a interdisciplinaridade, que é "[...] entendida aqui como abordagem teórico-metodológica em que a ênfase incide sobre o trabalho de integração das diferentes áreas do conhecimento, um real trabalho de cooperação e troca, aberto ao diálogo e ao planejamento." (BRASIL, 2013, p. 28), e cuja pretensão, como já destacavam os PCNEM, é "[...] utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver um problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista." (BRASIL, 2000, p. 21).

Vale ressaltar que essa relação da Matemática com as situações do cotidiano dos estudantes e com outras áreas do conhecimento, apontada pelos professores, pode se configurar como fator essencial para estabelecer a interdisciplinaridade no contexto escolar, e a AnM, dentro dessa perspectiva, pode ser percebida em vários relatos apresentados. É o que expressam explicitamente os professores P21 e P33, ao afirmarem, respectivamente, que a AnM *"Favorece processos interdisciplinares."* e *"Permite interdisciplinaridade [...]"*.

Quadro 19: AnM_2 - Estratégia que favorece os processos de ensino e aprendizagem

Exemplos de fragmentos	Unid. de signif.	Nº Oc.
"[...] percebo que análise de modelo está mais para obter um caminho matemático para descrever algo. [...] é um modo de olhar mais para o caminho do que para o resultado." (P9). *"É um caminho para o ensino e aprendizagem da matemática [...]"* (P38). *"Apresenta um conjunto de direções para se trabalhar a matemática em sala de aula."* (P41).	Apresentada como um caminho ou conjunto de direções	6
"[...] é compreender o fenômeno estudado e tentar representá-lo [o fenômeno] matematicamente." (P48). *"[...] é a interpretação de modelos que representem alguma situação específica que está sendo estudada, investigada."* (P11). *"[...] é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações problemas."* (P28). *"Incentivo à interpretação e discussão de problemas. [...] pois com a análise de modelos é possível trabalhar temas do dia-a-dia dos alunos."* (P56).	Indicada para estudar e compreender fenômenos da realidade	23

"[...] traz para a aula de Matemática o estudo e análise de situações problema que sejam do cotidiano dos alunos." (P17). *"Pode representar um modo de mostrar para o aluno que os modelos são representações da realidade."* (P8). *"Permite ver o mundo real sendo interpretado em modelos matemáticos."* (P33).		
"É bom para a práxis pedagógica do professor." (P45). *"Auxilia o professor, reduzindo o ensino do método tradicional [...]"* (P56). *"Sai da rotina de quadro e giz."* (P20). *"Sua principal importância se refere à superação do modelo tradicional de ensino."* (P4).	Auxiliando o professor a sair de uma postura tradicional de ensino	11
"Tal estratégia pode atribuir significado à aprendizagem dos alunos [...]" (P6). *"É importante para o processo de ensino aprendizagem partindo da efetiva comunicação entre o professor e aluno, pois se observa que em geral não há uma "conexão" entre a linguagem matemática usada pelo professor e a compreensão desta pelo aluno."* (P48). *"Torna os processos de ensino e aprendizagem da matemática mais interessantes com significado em cada área discutida e trabalhada. [...] torna o aprendizado significativo e prazeroso."* (P35).	Dando significado ao que é estudado	15

Fonte: Elaborado pelo autor.

A presente categoria enfatiza a AnM como estratégia metodológica nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática. Essa caracterização é perceptível em praticamente todas as unidades de significados. Inicia apresentando a AnM como um caminho ou conjunto de direções no processo educativo, sinalizando a concepção de estratégia metodológica, e segue destacando seu favorecimento nos processos de ensinar e de aprender Matemática no contexto escolar.

De acordo com esse entendimento, a AnM tanto pode auxiliar o professor a melhorar sua prática em sala de aula, oportunizando-lhe uma alternativa de ensino mais "interessante", que o ajude a variar as aulas tradicionais geralmente praticadas (P20; P43; P56), como pode dar maior significado àquilo que os estudantes aprendem, tornando o aprendizado muito mais *"agradável"* e *"prazeroso"*. Dessa forma, é possível que a prática da AnM no contexto escolar, venha constituir-se realmente como um método (P6; P36), como *"[...] uma alternativa às aulas [...]"* (P45). É o que expressa também o professor P51 ao indicar que a AnM pode ajudar a *"[...] suprir uma carência no ensino da matemática atual."*.

Tal perspectiva se harmoniza à proposta apresentada pela atual BNCC (BRASIL, 2018) sobre as estratégias de ensino dos conteúdos nos diferentes componentes curriculares, que visa, de modo geral, "[...] assegurar as aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da

Educação Básica, uma vez que tais aprendizagens só se materializam mediante o conjunto de decisões que caracterizam o currículo em ação.” (p. 16). De acordo com esse documento, considerando algumas das ações referentes a tais decisões, pode-se destacar:

> [...] contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando **estratégias** para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas; [...] adotar **estratégias** mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem; selecionar e aplicar **metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas**, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares [...]. (p.16-17, grifo nosso).

Isso indica que, a caracterização dos professores acerca da AnM, nessa categoria, vem ao encontro das orientações presentes nos documentos oficiais da Educação brasileira. Em síntese, o que se pode inferir, é que a AnM, segundo o relato dos professores, tem o potencial de se configurar como uma estratégia alternativa dinâmica, interativa e diversificada, que pode favorecer tanto o ensino como a aprendizagem de Matemática na prática de sala de aula.

Quadro 20: AnM_3 - Estratégia utilizada para a resolução de problemas da realidade

Exemplos de fragmentos	Unid. de signif.	Nº Oc.
“Geralmente esses modelos já estão prontos e o estudante não constrói, apenas analisa e relaciona para tirar suas próprias conclusões.” (P2). *“É analisar modelos já existentes para esta situação.”* (P53). *“É o estudo da aplicabilidade de um modelo já estruturado.”* (P13).	Fazendo uso de modelos matemáticos prontos	8
“Pode ser usada para tentar responder questionamento ou apontar solução para determinado problema.” (P21). *“Busca soluções para problemas enfrentados pelos estudantes no meio em que vivem [...] e propõe a resolução destes com algum modelo matemático elaborado para tanto.”* (P5). *“[...] favorece a compreensão de que a Matemática é utilizada para ajudar resolver problemas em diferentes áreas do conhecimento.”* (P11). *“[...] o aluno aprenderá a fazer da matemática um instrumento para a resolução de seus problemas em diversas situações.”* (P47).	Resolvendo situações reais do cotidiano dos estudantes	13

Fonte: Elaborado pelo autor

Mesmo sendo uma das categorias com menor número de ocorrências (20), essa caracterização da AnM aponta para um aspecto bem relevante que envolve a própria natureza da Matemática, isto é, a resolução de problemas (D`AMBROSIO, 2012; DANTE, 2011).

De acordo com os documentos oficiais relativos à educação brasileira, a resolução de problemas é indicada como “[...] ponto de partida da atividade matemática”, de modo que “[...] o conhecimento matemático ganha significado” para os estudantes (BRASIL, 1998) e atribui ao desenvolvimento do pensamento matemático um valor formativo (BRASIL, 2006). Além do mais, a atual BNCC (BRASIL, 2018) aponta competências gerais que podem ser desenvolvidas pelos estudantes quando estes se deparam com situações-problema de vários contextos e são instigados a enfrentá-las, a fim de resolvê-las.

Para isso, o uso de modelos matemáticos prontos, já existentes, seria o procedimento utilizado pelo professor para alcançar o objetivo de resolver problemas (P2; P6; P10; P26; P53). Uma justificativa para essa postura, segundo o professor P13, é que a AnM *"É essencial, pois em alguns tópicos específicos não seria possível recriar os modelos matemáticos/físicos já estabelecidos."*. Assim, esses modelos prontos, podem ser modelos clássicos da literatura ou não (P10; P5), pois conforme P43, na prática em sala de aula, o professor pode *"Utilizar modelos matemáticos existentes, seja em livros didáticos, questões de vestibulares, livros paradidáticos, internet e outras mídias."*.

Essa perspectiva evidencia uma diferença essencial entre AnM e a MM. Enquanto a Modelagem busca construir/elaborar um modelo, a AnM faria uso de modelos já existentes, inclusive advindos de algum processo de MM. É o que indica o participante P6 ao expressar que o uso da AnM ocorre *"Quando não há o processo completo da modelagem, mas se toma o modelo já pronto [...]"*, pois *"[...] seria a oportunidade que o professor tem para, a partir da dificuldade de procurar problemas que envolvam modelagem matemática na prática, já faria uso dos modelos prontos desse processo e analisariam esses modelos."* (P26).

Vale sublinhar que, embora os participantes da pesquisa apontem o uso de modelos matemáticos prontos, mesmo assim a ênfase recai na sua utilização para resolver problemas advindos da própria realidade dos estudantes (P5; P23; P47). Essa perspectiva vem ao encontro das concepções de MM, que mesmo tendo múltiplos olhares, como visto no capítulo anterior, convergem em um ponto: lidar com situações do cotidiano e/ou da realidade dos estudantes.

Para a prática em sala de aula, alguns sugerem que a AnM, como modo de resolver as *"situações-problema"*, os *"fenômenos reais"* ou até mesmo como *"interpretação de uma realidade"*, pode ser usada para introduzir a aula com um modelo matemático pronto de alguma área do conhecimento ou do cotidiano dos estudantes, que servirá de guia para se trabalhar um assunto específico ou uma unidade curricular. Essa caracterização sinaliza o uso de um "modelo-guia", conforme sugere Biembengut (2016) no processo de Modelação.

Se faz necessário, portanto, que os modelos escolhidos pelo professor para serem abordados em sala de aula estejam em harmonia com os interesses dos estudantes. Isso vem ao encontro da proposta de Modelação (BIEMBENGUT, 2016), pois para sua implementação em sala de aula, a autora sugere que se utilize modelos matemáticos já conhecidos, sejam eles clássicos ou não, encontrados na literatura, ou advindos de algum trabalho de modelagem já realizado. O professor, nesse sentido, poderia "[...] apresentar o modelo, passo a passo, de tal forma que requeira explicitação do conteúdo que precisamos tratar (conhecimentos das áreas envolvidas)." (p. 180). Com isso, os estudantes têm a oportunidade de "manusear" conteúdos curriculares e resolver problemas advindos de contextos de seu interesse, de sua própria realidade.

Quadro 21: $AnM_{\mathbf{4}}$ - Etapa do processo de Modelagem Matemática

Exemplos de fragmentos	Unid. de signif.	Nº Oc.
"É a validação de modelos a serem aplicados." (P1). *"Trata-se do processo de validação de um modelo ou de modelos que propõe explicar um problema."* (P8). *"Uma vez criado um modelo matemático, são necessárias várias simulações a fim de aperfeiçoá-lo, essa fase da modelagem é chamada de análise do modelo."* (P18). *"É útil para verificar a proximidade dos resultados obtidos através do modelo, comparando com as situações reais. A partir dessa análise é possível verificar possíveis falhas e proporcionar abertura de discussões para o aperfeiçoamento do modelo [...]"* (P36). *"Penso que seja um passo da modelagem, a análise de modelos me remete a interpretação de resultados que podem ser obtidos com a modelagem."* (P39).	Validação	27
"[...] no caso da incompatibilidade do modelo construído com os dados reais, reajustar o modelo." (P54). *"[...] se houver [erros], ou gerar resultados diferentes, poder corrigi-los."* (P44).	Modificação	3
"Todo modelo tem uma análise, acredito que sua característica seja analisar a sua aplicabilidade no decorrer do processo [de modelagem]." (P41). *"É refletir sobre quais os benefícios que estes resultados obtidos no processo [de modelagem] podem trazer para melhoria da tomada de decisões e implementação de ações."* (P52).	Aplicação	3

Fonte: Elaborado pelo autor

Essa categoria é apontada por um número expressivo de participantes (31 ocorrências). Relaciona diretamente a AnM ao processo de MM, indicando a AnM como parte desse processo, como etapa. Na maioria dos relatos essa relação não está explicitamente indicada, no entanto, pelo contexto analisado, é possível inferir que em geral os participantes sinalizam para essa caracterização.

Em um processo de MM de uma situação-problema, etapas ou fases são desenvolvidas para se completar um ciclo desse processo e atender aos objetivos propostos no início do estudo. Essas etapas são estabelecidas conforme a concepção de Modelagem adotada. Para evidenciar a presente categoria emergente, será considerada para tanto, como anunciado anteriormente, a concepção de MM segundo Bassanezi (1999, 2002).

Vale lembrar que para Bassanezi as etapas de um processo de MM são seis, definidas em: 1ª - *Escolha do tema e Experimentação*; 2ª - *Abstração*; 3ª - *Resolução*; 4ª - *Validação*; 5ª - *Modificação*; 6ª - *Aplicação*. Assim, as etapas do processo de Modelagem sinalizadas pelos participantes da pesquisa que podem caracterizar a AnM são a 4ª, 5ª e 6ª etapas, isto é, a *Validação* (27 ocorrências), a *Modificação* (3 ocorrências) e a *Aplicação* (3 ocorrências), respectivamente.

Esse resultado se harmoniza com o resultado visto na pesquisa realizada por Sousa, Lara, Reisdoefer e Machado (2017), ao identificarem a AnM essencialmente como a etapa de *Validação* do modelo dentro do processo de Modelagem. Os autores apontam essa etapa inserida dentro de outros processos de MM, em outras concepções. Segundo a concepção de Biembengut (2016), a AnM poderia ser inserida na 3ª etapa, isto é, na *Significação e Expressão*. Em Burak (1992, 2004), a AnM poderia se encaixar naturalmente na 5ª etapa, ou seja, na *Análise crítica da solução*.

Do mesmo modo como foi caracterizada a ApM anteriormente, a AnM também é indicada na mesma direção, isto é, não se apresenta como uma abordagem independente nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática em sala de aula, mas como etapa ou fase de um processo maior, de um ciclo de MM. O professor P49 aponta claramente nessa direção: *"É um fragmento da modelagem"*. Ou como expressa P5: *"Seria a terceira etapa da Modelagem Matemática em que há a validação do modelo matemático elaborado."*, indicando a AnM como etapa do ciclo de Modelagem conforme a concepção de Biembengut (2014, 2016). Em síntese, seria a etapa que permite *"[...] questionar-se sobre o processo de construção/elaboração do modelo [...]"* (P6).

Nesse sentido, a fim de utilizar AnM em sala de aula, de acordo com essa caracterização, seria necessário que alguma atividade de Modelagem tenha sido realizada e gerado algum modelo matemático, ou talvez pelo menos explorado algum projeto de MM já desenvolvido, a fim de explorar a etapa da *Validação*. Essa inferência, especialmente a segunda parte, vem ao encontro da recomendação feita por Biembengut (2014, 2016) quanto à prática da Modelação. Segundo a autora, caso o professor não se sinta devidamente preparado para iniciar uma atividade de MM ou Modelação em sala de aula, é indicado que comecem "[...] por aprender a partir de alguns modelos matemáticos clássicos ou trabalhos de modelagem matemática realizadas no ensino." (BIEMBENGUT, 2014, p. 48).

Quadro 22: AnM_5 - Abordagem que favorece a interação com outras práticas pedagógicas

Exemplos de fragmentos	**Unid. de signif.**	**Nº Oc.**
"A análise de modelos é importante, pois oportuniza a experimentação." (P2). *"Desenvolve nos estudantes a capacidade de investigar, interagir [...], proporciona o trabalho em grupo [...]"* (P3). *"Promove a investigação em sala de aula."* (P5). *"[...] propicia condições para o desenvolvimento do letramento matemático dos estudantes."* (P10).	Potencializando a relação com outras abordagens	8
"Como abordagem pedagógica, com uso de recurso tecnológico [...], meios tecnológicos atuais." (P23). *"[...] pode ser feito através de software, [por meio da] utilização de programas computacionais."* (P28).	Fazendo uso de recursos tecnológicos	3
"É uma forma de propiciar a reflexão por meio das relações que se pode fazer durante a Análise de Modelos. [...] Desenvolve nos estudantes a capacidade de argumentar e estimula a criatividade." (P3). *"[...] favorece o desenvolvimento da capacidade crítica e argumentativa dos estudantes [...]"* (P11). *"É importante para despertar o interesse [...]"* (P10). *"É de suma importância tanto para a motivação e interesse pela aprendizagem por parte dos alunos, bem como para a reflexão dos alunos [...]"* (P43). *"Aumenta a motivação do aluno em estudar [...]"* (P12).	Desenvolvendo competências, habilidades e estímulos	15

Fonte: Elaborado pelo autor

Por fim, essa é a categoria que apresenta o menor número de ocorrências (19). No entanto, as unidades de significados que são destacadas aqui, apontam a AnM com potencial para interagir com outras estratégias pedagógicas e com recursos tecnológicos, além de favorecer os processos de ensino e aprendizagem ao oportunizar que os estudantes sejam estimulados e desenvolvam competências e habilidades, como previsto nos documentos oficiais (BRASIL, 2013, 2018).

Segundo o relato dos participantes da pesquisa, nessa categoria, utilizar a AnM como abordagem em sala de aula pode favorecer práticas de "investigação/pesquisa" (P3; P5; P28), "Trabalho em grupo" (P3; P4; P9) e "experimentação" (P2; P28; P47). Essa concepção vem ao encontro do que estabelece as DCNEB, quando incentiva o professor a "[...] estimular a realização de pesquisas, a produção de conhecimentos e o trabalho em grupo." (BRASIL, 2013, p. 163). É destacada, nesse documento, a *pesquisa* como princípio pedagógico. Desse modo, conforme o documento:

> É necessário que a **pesquisa** como princípio pedagógico esteja presente em toda a educação escolar dos que vivem/viverão do próprio trabalho. Ela instiga o estudante

> no sentido da curiosidade em direção ao mundo que o cerca, gera inquietude, possibilitando que o estudante possa ser protagonista na busca de informações e de saberes, quer sejam do senso comum, escolares ou científicos. Essa atitude de inquietação diante da realidade potencializada pela pesquisa, quando despertada no Ensino Médio, contribui para que o sujeito possa, individual e coletivamente, formular questões de **investigação** e buscar respostas em um processo autônomo de (re) construção de conhecimentos. [...] O relevante é o desenvolvimento da capacidade de pesquisa, para que os estudantes busquem e (re) construam conhecimentos. (p. 164, grifo nosso).

Adicionado a isso, Moraes, Galiazzi e Ramos (2012) destacam que a pesquisa em sala de aula pode envolver os participantes, estudantes e professores, "[...] num processo de questionamento do discurso, das verdades implícitas e explícitas nas formações discursivas, propiciando a partir disto a construção de argumentos que levem a novas verdades." (p. 12). De acordo com esse princípio, percebe-se, portanto, que os autores sintetizam os fundamentos da pesquisa em sala de aula ao considerarem três momentos cruciais, sejam eles: o questionamento; a construção de argumentos; a comunicação.

Outra prática que também pode ser contemplada pela utilização da AnM, mencionada pelos participantes da pesquisa nessa categoria, é a "experimentação". Isso vem ao encontro das propostas acerca de novas metodologias de ensino sugeridas nas DCNEB (BRASIL, 2013). Significa que a caracterização da AnM como uma estratégia de ensino pode se configurar como uma alternativa nesse processo, pois de conformidade com esse documento,

> [...] são também importantes **metodologias de ensino inovadoras**, distintas das que se encontram nas salas de aula mais tradicionais e que, ao contrário dessas, ofereçam ao estudante a oportunidade de uma atuação ativa, interessada e comprometida no processo de aprender, que incluam não só conhecimentos, mas, também, sua contextualização, **experimentação**, vivências e convivência em tempos e espaços escolares e extraescolares, mediante aulas e situações diversas, inclusive nos campos da cultura, do esporte e do lazer. (p. 181, grifo nosso).

Além disso, segundo o professor P10, a AnM *"[...] propicia condições para o desenvolvimento do letramento matemático dos estudantes.",* equiparando-a aos "[...] processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem, [que] são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático [...]" (BRASIL, 2018, p. 266). De acordo com a BNCC, o letramento matemático é

> [...] definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e percebe o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (BRASIL, 2018, p. 266).

Essa definição envolve diretamente as percepções dos professores nessa categoria, especialmente a última unidade de significados, isto é, o desenvolvimento de competências, habilidades e estímulos. De acordo com os professores da pesquisa, a AnM pode instigar o "interesse e motivação" (P10; P12; P43; P46; P47; P55; P57), desenvolve a capacidade de "argumentar e criticar" (P2; P3; P11; P12; P47), desenvolve a "criatividade" (P3; P7; P47), propicia "reflexão" (P3; P43; P52), ajuda no "raciocínio" (P7; P57) e prepara os estudantes para "atuarem na sociedade" (P12; P47).

Outra unidade de significados que aparece dentro dessa categoria é o uso de recursos tecnológicos mais acessíveis, que segundo os professores, também pode favorecer a interação da AnM com outras práticas pedagógicas. É o que se percebe no relato de alguns participantes ao afirmarem que a aprendizagem dos estudantes, por meio de modelos matemáticos prontos, pode ser melhor fixada com o *"[...] uso de materiais tecnológicos [...]"* (P23), *"[...] através de software ou experimentação"* (P28) e *"[...] através da informática"* (P45). Essa sugestão se harmoniza com os indicadores encontrados na BNCC (BRASIL, 2018) acerca do uso de tecnologias, e com a concepção de AnM proposta em Soares (2012, 2015), Soares e Javaroni (2013).

Em síntese, as categorias emergentes nessa ATD enfatizam que uma situação-problema do cotidiano dos estudantes ou um fenômeno de qualquer natureza pode ser elemento motivador tanto para o ensino como para a aprendizagem de conteúdos matemáticos em sala de aula. Partindo de um determinado tema ou fenômeno, se possível escolhido pelos estudantes, busca-se relacionar a ele vários modelos matemáticos já prontos que permitirão descrevê-lo e explorá-lo, se possível, com auxílio de recursos tecnológicos. Os estudantes, mesmo não construído os modelos, têm a oportunidade de compreender e tirar conclusões próprias sobre o fenômeno em estudo.

Além do mais, de acordo com os participantes, a AnM é importante como estratégia de ensino de Matemática porque: possibilita a aplicabilidade e contextualização da Matemática em situações-problema do cotidiano dos estudantes, valorizando a própria cultura e o contexto social destes; sai da rotina das aulas tradicionais; proporciona interdisciplinaridade; potencializa o uso de meios tecnológicos atuais; é uma forma de atrair o interesse do estudante e motivá-lo a estudar; otimiza o tempo na implementação em sala de aula; dentre outros.

Conforme estudo realizado por Sousa e Lara (2017)[40], essas características apontadas pelos participantes, em geral são atribuídas também à MM. Os autores destacam, porém, que

> [...] o tempo dispensado ao planejamento e execução de uma atividade de Modelagem é sinalizado pelos participantes como fator negativo para sua implementação em sala de aula. Seja devido ao tempo diferenciado exigido para o planejamento desse tipo de atividade, seja por conta das exigências no cumprimento do conteúdo curricular ou devido à carga de trabalho excessiva que em geral o professor tem, há quase sempre muitas turmas para dar conta. Desse modo, implementar a AnM como prática em sala de aula, conforme os relatos, seria mais fácil. (SOUSA; LARA, 2017, p. 12-13).

De acordo com os autores, essa perspectiva pode ser notada no relato de alguns professores, quando afirmam: *"[...] o grande problema da implementação da modelagem matemática em sala de aula é a carga horária excessiva que o professor tem. Para fazer modelagem matemática requer muito tempo de pesquisa, tempo esse que o professor não tem."* (P26); atividades de Modelagem em sala de aula *"[...] demandam muito tempo de planejamento"* (P17), pois *"[...] é necessário um tempo diferenciado para desenvolver essas atividades [a Modelagem]. O que é difícil diante do extenso currículo das disciplinas como a Matemática"* (P16). Assim, a grande dificuldade nessa questão é a *"[...] falta de tempo, pois temos que cumprir um cronograma muito extenso, sobrando pouco tempo para implementação de novas técnicas, e outra, é que a modelagem não é imediata."* (P30).

Em contrapartida, "[...] implementar a AnM como prática em sala de aula, seria mais fácil." (SOUSA; LARA, 2017, p. 13), pois conforme relatam alguns participantes, *"[...] a importância [da AnM] encontra-se na economia de tempo na implementação"* (P25), uma vez que *"[...] a relação entre o número de aulas disponíveis e o conteúdo programático é apropriado para realizar análise de modelos, não modelagem."* (P14). Portanto, *"Em geral é mais cômodo o professor fazer a análise de modelos e a aplicação de modelos em situações já previamente estudadas [...]"* (P26).

Assim, ao tentar sintetizar a perspectiva que o grupo tem acerca do termo "Análise de Modelos", é possível inferir que, além de caracterizá-la como uma estratégia de ensino com o uso de modelos matemáticos prontos ou advindos de algum processo de MM, apontam sua potencialidade em estabelecer uma conexão da Matemática escolar com a realidade dos estudantes. Além disso, oportuniza a interdisciplinaridade e potencializa um rompimento com o modo tradicional de ensino que tem sido praticado com frequência no contexto educacional brasileiro. Entende-se, com isso, que o tema se faz relevante para ser discutido, investigado e incentivado como prática escolar.

[40] O estudo investigou a percepção de uma parte do grupo de professores da presente pesquisa, isto é, os 25 professores da cidade de Santarém/PA.

De um modo geral, essa perspectiva vem ao encontro das concepções apontadas no capítulo anterior, onde a AnM é caracterizada, de modo explícito, no contexto da MM como uma atividade de modelagem rudimentar (SOARES, 2015), cujo processo é enriquecido pelo uso de tecnologia digital (software *Modellus*, por exemplo). E de modo implícito, a AnM é apontada como parte do processo de Modelação (BIEMBENGUT, 2016), mais especificamente na parte referente ao Ensino (do conteúdo curricular e da "arte de modelar").

Diante de tais apontamentos, portanto, pretendeu-se desenvolver nas seções seguintes, uma perspectiva dessa abordagem (AnM) com vistas à elaboração de um roteiro com etapas que favoreça sua implementação em sala de aula. A intenção foi criar condições e possibilidades para que professores da Educação Básica possam explorar modelos matemáticos prontos, encontrados principalmente nos livros didáticos e nas questões do ENEM. A proposta visa a elaboração e execução de atividades práticas em sala de aula, de modo que a AnM possa configurar-se como método de ensino de Matemática, voltada principalmente à Educação Básica, em particular, para o Ensino Médio.

5.2 ANÁLISE DE MODELOS: DELINEANDO UMA PROPOSTA

Diante do exposto até este ponto, na presente seção, tem-se como objetivo principal desenvolver o tema central da pesquisa, com o intuito de caracterizar a abordagem Análise de Modelos como um método de ensino de Matemática para a Educação Básica.

Visando o alcance desse objetivo, primeiramente, faz-se uma breve reflexão acerca do entendimento sobre método de ensino. Em seguida, busca-se articular os métodos: Modelagem Matemática (especialmente a Modelação); Resolução de Problemas; e, a abordagem Análise de Modelos, conforme a perspectiva de Soares e Javaroni (2013), Soares (2015), Biembengut (2014, 2016), e dos professores da Educação Básica participantes da pesquisa. Essa articulação tem como propósito específico apresentar uma concepção da *Análise de Modelos* como método de ensino e o estabelecimento de um roteiro em etapas que permita concebê-la como tal. Por fim, na intenção de criar condições e possibilidades para que professores da Educação Básica possam explorar modelos matemáticos encontrados nos livros didáticos e nas questões do ENEM, propõe-se a elaboração e execução de atividades práticas de AnM.

Para iniciar, a reflexão direciona-se para o entendimento que será adotado sobre *método de ensino*. O termo "método" tem origem na palavra grega "$\mu\acute{\varepsilon}\theta o\delta o\varsigma$" (*methodos*), composta pelos termos *meta* + *thodos*. Rangel (2015, p. 8), ao explorar esses termos, explica que *meta* tem o significado de "meta, objetivo", e *thodos*, "significa o caminho, o percurso, o trajeto, os meios para alcançá-lo.". Por outro lado, saber "[...] como fazer o trabalho, como desenvolver seu processo de construção, seus procedimentos, seu encaminhamento." (p. 8), fica por conta da "técnica". Em síntese, segundo a autora, "[...] o método é o caminho, e a técnica é 'como fazer', 'como percorrer' esse caminho." (p. 8).

Nessa mesma perspectiva, conforme Abbagnano (2007, p. 668), um dos significados fundamentais do termo "método", em um sentido mais restrito, se refere ao uso de "[...] uma técnica particular de pesquisa. [...] e indica um procedimento de investigação organizada, repetível e auto corrigível, que garanta a obtenção de resultados válidos.". Esse sentido do termo "método" pode ser entendido como um processo cíclico (repetível), planejado e conduzido de modo organizado, que usa técnicas apropriadas com o propósito de resolver um determinado problema (garantir a obtenção de resultados), validar os resultados obtidos, modificar algum elemento ou variável do problema se necessário (corrigível), e aplicar o processo em outras situações semelhantes (repetir).

No contexto educacional, para garantir os resultados esperados, conforme Libâneo (2017), o professor deve planejar e desenvolver o processo de ensino visando a aprendizagem dos estudantes. Para assegurar o desenvolvimento eficiente desses processos, a escolha adequada do método de ensino pelo professor é um momento de vital importância para o alcance dos objetivos propostos no planejamento.

De acordo com o autor, ao aplicar um método de ensino, o professor "[...] utiliza intencionalmente um conjunto de ações, passos, condições externas e procedimentos [...]" (LIBÂNEO, 2017, p. 150), o que permite direcionar a prática docente, tanto no ambiente específico da sala de aula, como no contexto geral que envolve a própria instituição escolar e até mesmo no sistema educacional do qual faz parte.

Nesse sentido, segundo o autor, fazendo uso de métodos de ensino apropriados é possível refletir e agir sobre a realidade educacional. É preciso que o professor, ao eleger um método de ensino, procure analisar a realidade em que a escola e os estudantes estão inseridos, a relação entre os conteúdos curriculares e os objetivos traçados, cuja finalidade deve ser promover adequadamente a aquisição de conhecimento e favorecer os processos de ensino e aprendizagem.

> Em resumo, podemos dizer que os métodos de ensino são ações do professor pelas quais se organizam as atividades de ensino e dos alunos para atingir objetivos do trabalho docente em relação a um conteúdo específico. Eles [os métodos de ensino] regulam as formas de interação entre ensino e aprendizagem, entre professor e os alunos, cujo resultado é a assimilação consciente dos conhecimentos e o

> desenvolvimento das capacidades cognoscitivas[41] e operativas dos alunos. (LIBÂNEO, 2017, p. 152).

Percebe-se, diante dessa concepção, que há uma ênfase voltada à aprendizagem. A prática docente deve visar, prioritariamente, a construção do conhecimento e a assimilação consciente deste pelos estudantes.

De acordo com Rangel (2015), para o favorecimento da aprendizagem, o professor deve focalizar nas "[...] questões essenciais e significativas do conhecimento. Esse principio é comum a todos os métodos, às técnicas e às atividades de ensino e aprendizagem, tanto quanto às suas etapas de previsão e prática." (p. 11). Visando desenvolver e favorecer o bom andamento desses processos, a fim de prever e executar determinado método de ensino, dentre outros, pode-se destacar os seguintes momentos: planejamento; prática; avaliação. É o que destaca Rangel (2015, p. 12, grifo nosso), ao afirmar:

> O **planejamento** inclui diagnóstico e fundamentação [...]. O diagnóstico é feito em relação ao aluno, ao conteúdo, aos recursos, ao contexto, aos objetivos. A fundamentação refere-se ao estudo, ao conhecimento do método e à motivação do seu uso. [...] A **prática** é a realização do método, inicia-se pela sua explicação, esclarecendo seu encaminhamento, para que se realizem as técnicas e atividades pertinentes ao conteúdo e ao contexto. [...] A **avaliação** é feita sobre o contexto, os processos e os resultados do método, sobre a sua prática, sobre o desempenho e a participação de professores e alunos, observando-se, sobretudo, a garantia da aprendizagem do conhecimento em seus aspectos e conceitos essenciais.

Assim, para o uso adequado de métodos de ensino em sala de aula, a fim de alcançar os propósitos referentes à aprendizagem dos estudantes, é de suma importância que o professor leve em conta esses três momentos. A execução do método (a prática), em geral é o momento áureo do processo de ensino, mas pode ser comprometido seriamente caso o momento anterior (o planejamento) não seja considerado com a atenção devida. A princípio, há o perigo, inclusive, de se escolher um método de ensino inovador e diferenciado, mas que pode ser totalmente ineficiente ou inadequado para trabalhar determinado conteúdo. Além disso, é no planejamento que o professor estabelece os objetivos, e, portanto, precisa conhecer bem o método escolhido e o conteúdo a ser desenvolvido a fim de alcançá-los.

Por outro lado, há o momento posterior à execução do método que é tão relevante quanto o planejamento. É a etapa da avaliação. Essencialmente, é nesse momento que se verifica a eficiência do método adotado. Em outras palavras, analisa-se os resultados obtidos na

---

[41] São aptidões ou habilidades para conhecer algo (HOUAISS, 2009). Segundo Libâneo (2017, p. 65), "[...] são as energias mentais disponíveis nos indivíduos, ativadas e desenvolvidas no processo de ensino, em estreita relação com os conhecimentos.". Fazem parte dessas capacidades "a exercitação dos sentidos, a observação, a percepção, a compreensão, a generalização, o raciocínio, a memória, a linguagem, a motivação, a vontade.".

perspectiva dos objetivos propostos e verifica se houve “aprendizagem do conhecimento em seus aspectos e conceitos essenciais.” (RANGEL, 2015, p. 12).

Em síntese, pode-se entender como método de ensino, um conjunto de ações planejadas e organizadas pelo professor, nas quais são estabelecidas atividades que visam o favorecimento do ensino do conteúdo curricular e a facilitação da aprendizagem por parte dos estudantes. Tais ações devem instigar a assimilação e aplicação consciente dos conteúdos estudados e o desenvolvimento das capacidades cognoscitivas e operativas dos estudantes.

Na próxima seção, apresenta-se uma breve explanação sobre os processos de ensino e aprendizagem, tendo como principal objetivo, auxiliar (o pesquisador) na elaboração e execução de atividades de ensino por meio de métodos adequados. A AnM, como um desses métodos, voltado principalmente para a Educação Básica, será definida na sequência, tendo como desdobramentos, sua caracterização e um roteiro em etapas que possibilitem e favoreçam seu desenvolvimento prático em sala de aula.

5.2.1 Processos de ensino e aprendizagem

De acordo com o que foi exposto, o método de ensino escolhido pelo professor para ser utilizado em sala de aula, precisa, em linhas gerais: estar em sintonia com a realidade escolar e dos estudantes; ser adequado para abordar os conteúdos curriculares de modo a alcançar os objetivos traçados; possibilitar de modo direcional a aquisição de conhecimento; e, favorecer os processos de ensino e aprendizagem.

Para Libâneo (2017), o processo de ensino é um conjunto de atividades organizadas que envolve ações não somente do professor, mas também dos estudantes. Esse processo,

> [...] caracteriza-se pelo desenvolvimento e transformação progressiva das capacidades intelectuais dos alunos em direção ao domínio dos conhecimentos e habilidades, e sua aplicação. Por isso, obedece a uma direção, orientando-se para objetivos conscientemente definidos; implica passos gradativos, de acordo com critérios de idade e preparo dos alunos. O desdobramento desse processo tem um caráter intencional e sistemático, em virtude do qual são requeridas as tarefas docentes de planejamento, direção das atividades de ensino e aprendizagem, e avaliação. [...] visa alcançar determinados resultados em termos de domínio de conhecimentos, habilidades, hábitos, atitudes, convicções e desenvolvimento das capacidades cognoscitivas dos alunos. (p. 64).

É perceptível nessa caracterização, que o professor, ao planejar de modo intencional e sistemático as atividades de ensino, visa alcançar, por parte dos estudantes, uma “aprendizagem organizada” (LIBÂNEO, 2017). Essa aprendizagem, segundo o autor, “[...] tem por finalidade específica aprender determinados conhecimentos, habilidades, normas de convivência social.” (p. 66). É o caso da aprendizagem escolar, que se configura como “[...] um processo de assimilação de determinados conhecimentos e modos de ação física e mental, organizados e orientados no processo de ensino." (p. 67).

Dentro desse processo de ensino, de acordo com o autor, para que ocorra efetivamente a aprendizagem, o professor precisa exercer sua influência no sentido de mobilizar as estruturas física e mental próprias dos estudantes para que os objetivos no estudo das matérias sejam alcançados. Quando essa mobilização ocorre, inicia-se um processo, denominado "processo de assimilação ativa.". Com relação a esse processo, o Libâneo (2017) expressa: "Entendemos por assimilação ativa ou apropriação de conhecimentos e habilidades, o processo de percepção, compreensão, reflexão e aplicação que se desenvolve com meios intelectuais, motivacionais e atitudinais do próprio aluno, sob a direção e orientação do professor." (p. 68).

No contexto escolar, é possível inferir que o alcance de uma aprendizagem organizada, fruto desse processo de assimilação ativa, está diretamente relacionada à ação externa do professor por meio do ensino e seus componentes, isto é, os objetivos, conteúdos e métodos. Segundo Libâneo (2017), por um lado: "O professor propõe objetivos e conteúdos, tendo em conta características dos alunos e da sua prática de vida." (p. 68). Por outro lado, os estudantes "[...] dispõem em seu organismo físico-psicológico de meios internos de assimilação ativa, meios esses que constituem o conjunto de suas capacidades cognoscitivas [...]" (p. 68). Tais capacidades vão se desenvolvendo gradativamente ao longo da vida, em particular, durante o processo de ensino que ocorre no ambiente escolar.

Segue, portanto, que o professor, ao elaborar atividades de ensino, deve ter entendimento sobre o processo de assimilação ativa. Em síntese esse processo se desenvolve em três momentos, os quais estão interligados e se complementam, são eles: atividade *sensorial*; atividade *mental*; atividade *prática* (LIBÂNEO, 2017).

De acordo com o autor, a atividade *sensorial* é o momento que o estudante é instigado a perceber e apreender (captar, se familiarizar, se apropriar, etc.) o objeto de estudo em seus aspectos gerais, como características, propriedades, etc. A atividade *mental* é o momento de compreender e explicitar, de transformar e aprimorar as primeiras percepções do estudante acerca dos objetos e fenômenos em estudo. Ocorre aí um processo de análise e síntese, onde o estudante poderá abstrair, generalizar e sistematizar essas percepções. É por intermédio desse processo que a apreensão do conteúdo evolui da forma visível (exterior, concreta, etc.) para uma "ideia", para um conteúdo do pensamento. Já a atividade *prática* é o momento de dar significado à aprendizagem. É nesse momento que o estudante poderá evidenciar e consolidar as aplicações práticas dos conhecimentos e habilidades que assimilou.

Assim, levando em consideração essas perspectivas relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem, aos direcionamentos quanto à elaboração de atividades de ensino, visando a assimilação ativa do estudante, percebe-se certa harmonia dessas ideias com as propostas de ensino de Matemática por meio da RP e da MM, sintetizadas nos roteiros apresentados nas seções 3.2.3 e 3.3.3 (quadros 9 e 11), respectivamente.

Nota-se que, tanto as fases propostas por Van de Walle (2009)[42] para a RP, desdobradas nas etapas de Allevato e Onuchic (2014)[43], quanto as fases indicadas por Biembengut (2016)[44] para a MM na Educação (especialmente para a Modelação) que absorvem as etapas de Bassanezi (2002)[45], Burak (2004)[46], Blum e Leiß (2007)[47], podem ser vislumbradas em algum grau nas atividades apresentadas acima (*sensorial*, *mental* e *prática*) dentro do processo de assimilação ativa (LIBÂNEO, 2017).

É baseado nesses apontamentos, e levando em conta todo o referencial levantado, principalmente acerca da abordagem AnM, seja de forma direta (SOARES, 2012, 2015; SOARES; JAVARONI, 2013; SOARES; VIER, 2017) ou de forma indireta (BIEMBENGUT, 2014, 2016), que nas próximas seções, o objetivo principal é apresentar uma perspectiva da AnM como um método para ensinar Matemática na Educação Básica.

5.2.2 Definindo o método de ensino Análise de Modelos

Considerando os dados apresentados até esse ponto, é possível inferir que as atividades de ensino, planejadas pelo professor e executadas em conjunto com os estudantes, podem ser organizadas e direcionadas de modo intencional e sistemático. Devem estar em sintonia com a realidade escolar e dos estudantes, visando abordar mais adequadamente os conteúdos curriculares, que direcionados aos estudantes, sejam meios que lhes possibilitem o domínio e assimilação de novos conhecimentos e competências como parte do processo de aprendizagem.

---

[42] 1) Proposição do problema; 2) Leitura individual; 3) Leitura em conjunto; 4) Resolução do problema; 5) Observação e incentivo; 6) Registro das resoluções; 7) Plenária; 8) Busca do consenso; 9) Formalização do conteúdo; 10) Proposição e resolução de novos problemas.

[43] 1) Proposição do problema; 2) Leitura individual; 3) Leitura em conjunto; 4) Resolução do problema; 5) Observação e incentivo; 6) Registro das resoluções; 7) Plenária; 8) Busca do consenso; 9) Formalização do conteúdo; 10) Proposição e resolução de novos problemas.

[44] 1ª) Percepção e Apreensão; 2ª) Compreensão e Explicitação; 3ª) Significação e Expressão.

[45] 1-Experimentação; 2-Abstração; 3-Resolução; 4-Validação; 5-Modificação; 6-Aplicação.

[46] 1-Escolha do tema; 2-Pesquisa exploratória; 3-Levantamento dos problemas; 4-Resolução do problema e desenvolvimento do conteúdo matemático; 5-Análise crítica da solução.

[47] 1-Entendento o problema; 2-Simplificando e Estruturando; 3-Matematizando; 4-Trabalhando matematicamente; 5-Interpretando; 6-Validando; 7-Expondo.

De acordo com o que foi apresentado nas seções anteriores, pode-se afirmar que um método de ensino que leve em conta esses direcionamentos, pode ser considerado um bom meio de conduzir as atividades em sala de aula, e favorecer os processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Como exemplos de métodos com essas características, podem ser citados a Resolução de Problemas e a Modelagem Matemática (Modelação), amplamente discutidos neste texto, e que têm sido inspiração e referência para uma perspectiva da AnM como um método de ensino de Matemática para a Educação Básica.

Diante dessas perspectivas, e considerando todo o referencial levantado para esse fim, é razoável que se apresente, de um modo mais direto e explícito, uma perspectiva da AnM como um método de ensino. Para isso, primeiramente são estabelecidos alguns princípios baseados no referencial teórico já discutido (SOARES, 2012, 2015; SOARES; JAVARONI, 2013; BIEMBENGUT, 2014, 2016), que podem direcionar essa perspectiva, bem como a organização de um roteiro em etapas que oriente o professor na elaboração e execução de atividades práticas para a sala de aula.

Vale ressaltar, porém, que esse roteiro (etapas do método AnM), apresentado ainda neste capítulo, é uma proposta inicial necessária que, em um primeiro momento, visou orientar o planejamento do próprio pesquisador na elaboração do Material de Apoio (piloto) que foi utilizado tanto no minicurso sobre o método AnM, com os professores participantes da pesquisa (Santarém/PA), como na implementação prática na escola pelos próprios professores. A ideia foi que esses professores tivessem um roteiro prévio para guiar suas ações em sala de aula, permitindo que, ao final das intervenções pedagógicas, a proposta apresentada pudesse ser confirmada, aperfeiçoada, ou até mesmo modificada, conforme o apontamento indicado na avaliação decorrente de todo o processo.

Assim, baseado em pontos centrais acerca da AnM, da MM e da RP, encontrados no referencial teórico levantado, é possível identificar pelo menos três princípios essenciais que podem servir de características básicas da AnM como um método de ensino de Matemática para a Educação Básica. São eles: 1 - *O uso de modelos matemáticos prontos*; 2 - *O desenvolvimento do conteúdo curricular (e não curricular)*; 3 - *O uso de situações e/ou problemas da realidade*. Esses princípios, portanto, vão direcionar o desenvolvimento prático das aulas ou sequências didáticas baseadas na AnM.

O primeiro princípio sinaliza que o professor pode e deve fazer uso de um ou vários modelos matemáticos para o desenvolvimento do conteúdo curricular, seja de um tópico específico, de um capítulo ou unidade, de um bimestre, de um semestre ou até mesmo da ementa do ano todo. Acredita-se, porém, que na Educação Básica, destacando-se o Ensino Médio, o mais apropriado seja utilizá-los para desenvolver um tópico específico, no máximo um capítulo ou unidade, pois de acordo com o que se percebe nos livros didáticos e nas questões do ENEM, os modelos matemáticos aí encontrados, geralmente, não são muito sofisticados para abranger tanto conteúdo. A ideia é que os modelos sejam explorados de modo objetivo, direto e motivador, incentivando os estudantes a se envolverem com o assunto/tema apresentado e, consequentemente, com o conteúdo a ser desenvolvido.

Um aspecto que vale ser ressaltado nesse princípio é o fato dos modelos serem "prontos", o que pode facilitar o trabalho de busca e seleção desses pelo professor, uma vez que esses modelos podem ser encontrados com certa facilidade em vários "lugares" (*internet*, artigos, jornais, revistas, livros, projetos de modelagem, livros didáticos, questões do ENEM, etc.). Entende-se que os modelos "prontos" podem ser apresentados/propostos de duas maneiras: de modo *explícito*, isto é, por meio de uma *representação*[48]; e, de modo *implícito*, ou seja, por meio de *informações* possíveis de traduzi-lo(s) para o modo explícito.

Como exemplo desse último modo de apresentação, cita-se a situação seguinte, onde o modelo aparece de modo implícito, porém com possibilidades de expressá-lo explicitamente:

> Em julho de 2015, o Banco Central do Brasil classificou 12 instituições bancárias em relação às taxas de juros ao ano oferecidas para financiamento de imóveis a pessoas físicas. A taxa média de juros dessas instituições nesse período foi de 12,13% ao ano. Sabendo que F_x indica o valor a ser pago por um financiamento com essa taxa em x anos, e que a taxa permanece a mesma, então o valor a ser pago ao banco dobrará caso o financiamento seja pago em quantos anos? (DANTE, 2016a, p. 156, adaptado).

A situação apresentada envolve um modelo matemático que pode ser representado de modo explícito por uma função exponencial, $F_x = F_0(1{,}1213)^x$, e visa introduzir o conceito de logaritmo e todas as propriedades referentes ao tema. A partir do modelo, apresentado inicialmente de modo implícito, além da expressão matemática $F_x = F_0(1{,}1213)^x$, é possível representá-lo em um gráfico ou uma tabela, possibilitando que os estudantes realizem experimentos de calcular valores, usando por exemplo, uma calculadora científica.

O segundo princípio para o desenvolvimento de aulas baseadas na AnM, é a importância devida ao conteúdo curricular (e não curricular). Trata-se de uma necessidade e exigência do próprio sistema escolar brasileiro. De acordo com as discussões apresentadas nesta pesquisa, essa é uma das principais dificuldades apontadas por professores de todos os níveis de ensino na implementação de métodos de ensino diferenciados, como é o caso da MM, que em geral, afirmam, toma muito tempo de planejamento e execução, tornando um pouco lento o

[48] Pode ser uma expressão matemática, como por exemplo: uma equação, inequação, sistema de equações, etc. Além disso, pode ser também um desenho, imagem, projeto ou planta de uma casa, esquema, gráfico, mapa, tabela, etc. (BURAK, 1992, 2004; BIEMBENGUT, 2014, 2016).

cumprimento do conteúdo curricular. Com a AnM, porém, tendo como ênfase esse princípio, acredita-se que muitos professores da Educação Básica, principalmente do Ensino Médio, poderão utilizá-la em sua prática pedagógica, uma vez que o conteúdo curricular pode ser desenvolvido sem prejuízo dentro dos processos escolares, além de inspirar e incentivar esses professores a realizarem seus primeiros trabalhos de Modelagem em sala de aula de forma gradativa.

Vale destacar que o desenvolvimento do conteúdo curricular, segundo esse princípio, segue em duas direções. A primeira tem como objetivo, o reforço dos conhecimentos prévios dos estudantes sobre os conteúdos matemáticos já desenvolvidos, já conhecidos, mas que aparecem no contexto atual. Nesse momento, o professor pode retomar as questões e situações anteriores onde esse conteúdo foi visto, inclusive trazer à discussão os modelos matemáticos já analisados, caso esse conteúdo tenha sido abordado na perspectiva da AnM. Já a segunda direção, visa a introdução de conceitos matemáticos novos, sendo esse o objetivo central dentro desse princípio. Esse direcionamento, portanto, possibilitará o cumprimento do conteúdo exigido na ementa da componente curricular (Matemática) para cada série/ano.

Um outro aspecto de destaque dentro desse princípio, é o desenvolvimento de conteúdo não curricular. Entende-se que esse tipo de conteúdo surge naturalmente a partir do uso de modelos matemáticos prontos, encontrados em outras áreas do conhecimento, em situações do dia-a-dia e da atualidade. Há nesse direcionamento, a possibilidade de relacionar a Matemática com essas outras áreas do conhecimento e com outras disciplinas/componentes escolares. Pode favorecer, portanto, a interdisciplinaridade, além de evidenciar temas transversais que são sugeridos dentro dos currículos.

Por fim, o terceiro princípio, relacionado muito estreitamente com o princípio anterior, principalmente à parte do conteúdo não curricular, aponta que pode ser uma fonte de modelos matemáticos que em geral traduzem várias situações e/ou problemas da realidade, o que pode favorecer a interdisciplinaridade e incentivar a abordagem de temas transversais. Significa que os modelos escolhidos pelo professor para direcionar o trabalho em sala de aula devem priorizar situações-problema reais ou adaptadas delas. Tais situações precisam fazer sentido para os estudantes e os dados envolvidos devem advir da realidade e do interesse deles.

Considera-se que a observação desse princípio dentro do processo de AnM, é um aspecto de vital importância para se perceber o método (AnM) na articulação do binômio Matemática e Realidade, não apenas em um único sentido desse direcionamento, mas no sentido de mão dupla, isto é, no sentido "Realidade ↔ Matemática". De acordo com esse princípio, as aulas baseadas na AnM iniciam com situações reais, aliadas à Matemática (modelo matemático), e por todo o desenrolar das aulas, as duas componentes do binômio apresentam-se com potencial interativo, "caminhando" em parceria, se complementando e favorecendo, no final das contas, o próprio processo educativo (ensino e aprendizagem).

Em síntese, a partir desses princípios básicos apontados na AnM, que podem direcionar o desenvolvimento de aulas de Matemática na Educação Básica, especialmente no Ensino Médio, pode-se definir (uma proposta inicial) a Análise de Modelos como *um método de ensino que faz uso de modelos matemáticos prontos, partindo sempre de alguma situação-problema da realidade, cujo objetivo é desenvolver o conteúdo curricular e não curricular.*

Diante dessa perspectiva, portanto, a fim de auxiliar o trabalho do professor, tanto no planejamento como na execução do método (AnM), conforme os momentos apontados por Rangel (2015) para seu desenvolvimento, um roteiro (em etapas) que direcione esse trabalho se mostra um aliado de singular importância para sua implementação prática em sala de aula.

Antes, porém de detalhar esse roteiro para o desenvolvimento prático do método, é essencial que o professor planeje suas atividades com considerável atenção e cuidado, sempre levando em conta o elenco e os elementos envolvidos no processo, isto é, os estudantes, os conteúdos, os recursos disponíveis, os contextos envolvidos e os objetivos. Além disso, o professor precisa ter segurança e conhecimento do método a ser aplicado, e naturalmente, o domínio do conteúdo a ser desenvolvido (RANGEL, 2015). No caso específico do método AnM, o planejamento, portanto, é o momento de escolher o conteúdo curricular que será desenvolvido, selecionar o(s) modelo(s) e elaborar/adaptar situações-problema que envolva esse(s) modelo(s) e evidenciem interação da Matemática com outras áreas do conhecimento e com a realidade/cotidiano/interesse dos estudantes.

Assim, partindo desse planejamento (escolhido o conteúdo, selecionado(s) o(s) modelo(s), elaborada/adaptada a situação contextualizada), dos princípios básicos identificados acima para a AnM, e dos roteiros de ensino de Matemática por meio dos método RP e MM (Quadros 9 e 11), a proposta inicial aqui apontada, é que o método AnM seja desdobrado na prática, seguindo as seguintes etapas: 1ª) *Apresentação das situações-problema*; 2ª) *Exploração e interpretação (dos modelos)*; 3ª) *Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução*; 4ª) *Aplicação*.

Na 1ª etapa desse roteiro, *Apresentação das situações-problema*, a princípio, a finalidade é tentar chamar a atenção dos estudantes para o tema/assunto envolvido na situação apresentada. Nessa etapa, os estudantes começam a refletir e compreender o problema, e têm o primeiro contato com a linguagem matemática que aparece no mesmo. Nesse momento, o professor pode fazer uma breve explanação sobre o tema/assunto da situação, e, a partir daí tentar “provocar” diálogos com os estudantes, incentivando-os a questionar e a fazer perguntas, sempre com objetivo de direcionar, identificar e selecionar questões centrais que apontem para o conteúdo que se pretende trabalhar. A partir daí os estudantes, incentivados pelo professor, começam a esboçar os primeiros apontamentos para a resolução das questões levantadas.

Na 2ª etapa, *Exploração e interpretação (dos modelos)*, o objetivo é tentar compreender e interpretar a situação-problema a partir das informações e do(s) modelo(s) explicitado(s) na mesma. Nesse momento, os estudantes têm a oportunidade de tomarem conhecimento das situações em estudo e fazerem experimentos com o(s) modelo(s), seja identificando as variáveis no contexto matemático, tentando compreender o significado de seus elementos componentes dentro do contexto onde estão inseridos, ou fazendo cálculos e obtendo resultados para aquela situação específica. Nesse processo de exploração dos modelos, os conhecimentos prévios dos estudantes acerca dos conteúdos curriculares já abordados vão sendo resgatados e reforçados, e novos conteúdos surgem conforme a necessidade das próprias situações e dos modelos apresentados.

A 3ª etapa, destinada ao *Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução*, tem como pano de fundo a situação-problema e o(s) modelo(s) envolvido(s), onde é evidenciado que um novo conhecimento matemático se faz necessário para dar conta daquele problema. O professor, então, passa a explorar o novo conteúdo curricular que vem ao encontro daquela necessidade. Não perdendo de vista a situação original, mas sempre trazendo-a para o contexto matemático, e vice-versa, o professor desenvolve o conteúdo previsto e planejado para aquela aula. É no decorrer dessa etapa que os estudantes são “equipados” matematicamente com vistas à produção de resultados dentro do contexto matemático, mas que poderão ser “transportados” para a situação-problema da realidade, para o mundo real. Essa transição permitirá que o problema seja resolvido e interpretado à luz desse novo conteúdo desenvolvido. É o momento de dar significação ao conteúdo curricular estudado e ao(s) modelo(s) matemático(s) proposto(s). Aqui, as soluções obtidas a partir do(s) modelo(s) são analisadas, interpretadas e validadas de modo mais crítico e reflexivo (BASSANEZI, 2002; BURAK, 2004; SOARES; JAVARONI, 2013; BLUM; LEIß, 2007; BIEMBENGUT, 2016).

Por fim, chega-se a 4ª etapa do roteiro, isto é, a *Aplicação*. É o momento de aplicar os modelos discutidos, tanto no contexto das situações-problema propostas inicialmente como na resolução de novos problemas, em contextos semelhantes ou não, desde que esses modelos sejam apropriados ou adaptados para essas novas situações (BASSANEZI, 2002). Nesse momento, os estudantes têm a oportunidade de consolidar o conteúdo matemático introduzido, aprofundando e ampliando sua compreensão. É potencializada nesse momento, a participação dos estudantes no mundo real, em situações do cotidiano e das ciências, em outras áreas do conhecimento, não como simples coadjuvante, mas como protagonista, com capacidade de refletir e influenciar em suas mudanças. É possível utilizar esse momento como uma oportunidade para que os estudantes possam expressar/apresentar/expor os resultados alcançados, como sugerem Biembengut (2016), e Blum e Leiß (2007) nas etapas de **expressão** e **exposição**, dentro do processo de MM.

Diante dessas descrições, é possível apontar elementos presentes nos métodos de RP e MM, que também podem ser percebidos dentro do roteiro apresentado para o desenvolvimento da AnM em sala de aula. Com a finalidade de sintetizar esse roteiro, e tentando relacionar mais nitidamente suas etapas com as etapas dos processos de RP (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), resumido no Quadro 9, e de MM (BIEMBENGUT, 2016), que agrega as etapas indicadas por Bassanezi (2002), Burak (2004), Blum e Leiß (2007), conforme o Quadro 11, apresenta-se a seguir um quadro que tenta expressar essa síntese.

Quadro 23: Etapas da Análise de Modelos em comparação com a RP e com a MM

Análise de Modelos	RP	MM
1ª) ***Apresentação da situação-problema***	1) Proposição do problema 2) Leitura individual 3) Leitura em conjunto	1.1) Percepção 1.2) Apreensão
2ª) ***Exploração e interpretação***	5) Observação e incentivo 7) Plenária 8) Busca do consenso	1.2) Apreensão 2.1) Compreensão 2.2) Explicitação
3ª) ***Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução***	4) Resolução do problema 6) Registro das soluções 9) Formalização do conteúdo	2.2) Explicitação 3.1) Significação
4ª) ***Aplicação***	10) Proposição e resolução de novos problemas	3.1) Significação 3.2) Expressão

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir desse roteiro, o direcionamento apontado por suas etapas além de se apresentar como uma possível caracterização do método de ensino proposto (AnM), pode auxiliar o professor no planejamento e execução de atividades baseadas nesse método.

Nesse sentido, a próxima seção tem a intenção de discutir com mais detalhes e de modo mais prático o desenvolvimento dessas etapas dentro do contexto escolar, sempre visando a aprendizagem, o reforço de conhecimentos já estudados e a aquisição de novos, não só da Matemática, como outras áreas do conhecimento. A seção finaliza, portanto, com alguns exemplos de conteúdos curriculares que podem ser planejados e desenvolvidos em sala de aula conforme a proposta do método (AnM), cujo objetivo é tentar ilustrar as quatro etapas do roteiro apresentado.

5.3 ANÁLISE DE MODELOS: PRÁTICA EM SALA DE AULA

A aplicação prática do método AnM em sala de aula é um dos objetivos centrais desta pesquisa. A proposta não tem a intenção de simplesmente deixar registrado um método de ensino para ser "admirado" como se fosse uma paisagem, um ornamento ou uma obra de arte. Não. A intenção é que o método possa realmente ser útil na prática pedagógica do professor de Matemática, principalmente no Ensino Médio. Que ele possa planejar e tenha condições de executar atividades pedagógicas de um modo diferenciado, mesmo dentro de um contexto escolar onde se apresentam dificuldades variadas, como é o caso do sistema escolar brasileiro.

Por outro lado, a proposta não tem a pretensão nem a ilusão de que o método (AnM) vai solucionar todos os problemas relativos ao ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Médio. Entende-se que a proposta poderá contribuir nesses processos, oportunizando ao professor abordar alguns conteúdos curriculares em uma perspectiva que, mesmo não sendo como em um processo clássico de MM (BASSANEZI, 2002; BURK, 2004; BLUM; LEIß, 2007; BIEMBENGUT, 2016), sai um pouco daquela postura tradicional de exposição dos mesmos, e aos estudantes, além do estudo desse conteúdo, é oportunizado o contato com outras áreas do conhecimento, favorecendo a interdisciplinaridade, e com temas transversais sugeridos nos currículos, como apontado na seção anterior.

Nessa perspectiva, portanto, a primeira ação prática para a qual o professor deve se voltar atentamente é o planejamento das atividades (RANGEL, 2015; LIBÂNEO, 2017). De acordo com o que foi destacado anteriormente, é no planejamento que o professor vai escolher o conteúdo curricular a ser desenvolvido, selecionar os modelos matemáticos que contemplem o conteúdo, mas que estejam em conformidade com as situações-problema que serão elaboradas/adaptadas. Além disso, é relevante que as situações a serem apresentadas e desenvolvidas em sala de aula sejam, em alguma medida, de interesse e relevância para os estudantes, pois assim, o envolvimento deles no processo como um todo terá maior possibilidade de ocorrer de modo eficiente, começando com "pé direito".

Esse momento prévio do planejamento, visando, posteriormente, o desenvolvimento prático do roteiro apresentado na seção anterior (etapas do processo de AnM), pode ser exemplificado em Sousa et al. (2017), onde são destacados alguns modelos matemáticos, selecionados para abordar determinado conteúdo curricular específico, dentro de situações e áreas de interesse dos estudantes. A experiência registrada pelos autores ocorreu em uma disciplina de *Pré-Cálculo*, ministrada para uma turma de 23 estudantes[49] de vários cursos[50], na UFOPA, onde o primeiro autor atua como docente. O conteúdo curricular desenvolvido nessa experiência foi o estudo de *funções exponenciais*, para o qual foram escolhidos os modelos gerais: *Exponencial Crescente/Decrescente* $\boldsymbol{y = Ae^{rx}}$; *Exponencial Limitado* $\boldsymbol{y = B - Ae^{-kx}}$; e, *Exponencial Logístico* $\boldsymbol{y = \frac{A}{1+Be^{-kx}}}$. Já as situações apresentadas envolviam: 1) O crescimento de um investimento aplicado a juros compostos com taxa fixa ($y = Ae^{rx}$); 2) A concentração de um medicamento no organismo humano ($y = B - Ae^{-kx}$); 3) A eficiência no trabalho ($y = B - Ae^{-kx}$); 4) O crescimento bacteriano ($y = Ae^{rx}$); e, 5) O crescimento populacional de moscas-das-frutas ($y = \frac{A}{1+Be^{-kx}}$).

Embora não tenha sido uma experiência realizada com estudantes do Ensino Médio, ainda assim vale destacar que o conteúdo curricular envolvido (funções exponenciais) é um dos mais vistos nesse nível de ensino. Além do mais, a surpresa dos estudantes em relação ao modo como foi apresentado o conteúdo é expressa pelos autores ao afirmarem:

> O estudante E3 destaca: estudei esse tipo de função no 2º grau, mas não sabia que podia ser usada em outras áreas. Acho que se o meu professor do 2º grau tivesse me ensinado desse jeito eu teria gostado mais de Matemática. Outro estudante, E20, também enfatizou a aplicabilidade desse tipo de função ao declarar que a Matemática, a gente pensa que é só um monte de fórmulas, mas não, ela tem também aplicações em outros campos. Nota-se que os conhecimentos prévios trazidos do Ensino Médio, além de ampliados, são vistos de modo significativo, pois agora conseguem perceber não só como algo estático, seco, sem sentido, mas como algo dinâmico e aplicável. (SOUSA et al., 2017, p. 70).

Além disso, segundo os autores, um aspecto que tem potencial destacado no processo de exploração dos modelos nessa experiência é o uso de ferramentas da informática, em particular a planilha *Excel* que é usualmente mais comum entre os estudantes do Ensino Médio. Essa potencialidade é destacada como fundamental para a AnM no contexto do Ensino Superior (SOARES, 2012, 2015; SOARES; JAVARONI, 2013; SOARES; VIER, 2017), o que corrobora e motiva o seu uso também na Educação Básica, especialmente no Ensino Médio.

Assim, de acordo com Sousa et al. (2017), embora muitos dos estudantes que participaram da atividade envolvendo os modelos exponenciais apresentados acima não tivessem muito contato/experiência com essa ferramenta (planilha *Excel*), com ajuda de colegas, puderam experimentar e aplicar a mesma em problemas da realidade, conduzidos por um conteúdo matemático do currículo. É o que destacam os autores:

---

[49] Esses estudantes foram identificados por E1, E2, ..., E23.

[50] Ciências Biológicas, Química, Engenharia Florestal, Farmácia e Ciências Econômicas.

> Com relação às ferramentas da informática, o estudante E12, relatando sobre a experiência de trabalhar com a planilha Excel, afirmou: *eu não sabia que o Excel poderia ser usado nos problemas de Matemática*. Outros disseram que nunca haviam nem usado uma planilha, como se percebeu no relato de outros estudantes: *nunca gostei muito de computador. Usava às vezes na escola só o Word pra escrever algum trabalho, mas esse aí [Excel] já tinha ouvido falar, mas nunca usei*, destacou o estudante E17, e completou E9, *eu também só sabia de ouvir falar, mas com a ajuda do meu colega, eu consegui aprender como usar*. Observa-se que, não só conteúdos matemáticos se tornam significativos para os estudantes, mas também as ferramentas da informática. Para muitos deles, ferramentas como Word, Excel, PowerPoint, GeoGebra, e outras não faziam parte, na prática, da sua realidade. Com o desenvolvimento da atividade, essas ferramentas passaram a ser significativas para esses estudantes, de acordo com a experiência que cada um teve. (p. 70-71).

Portanto, ao sintetizar a experiência realizada, os autores enfatizam que, em geral, os estudantes que participaram dessa atividade sinalizaram o uso de dados empíricos, em situações reais, para construir e analisar modelos, como elementos motivadores no trabalho investigativo e no ensino da Matemática, possibilitando sua relação e interação com outras áreas do conhecimento. E para facilitar esse processo, destacam: “[...] é importante também ter à disposição para o desenvolvimento desse tipo de trabalho, ferramentas da informática que auxiliem no tratamento dos dados, o que ajuda na compreensão dos fenômenos em estudo, e portanto, facilita a aprendizagem de modo significativo.” (SOUSA et al., 2017, p. 71).

Como dito anteriormente, esse exemplo (SOUSA et al., 2017) visou apenas evidenciar o momento prévio do planejamento de uma atividade baseada no método AnM, isto é, a escolha do conteúdo curricular (função exponencial), a seleção dos modelos (crescimento ou decaimento exponencial, crescimento limitado ou inibido, crescimento logístico) e as situações-problema onde esses modelos poderiam ser explorados.

Nesse instante, a intenção é ampliar as ações desse planejamento, apresentando-o de modo mais prático, incluindo o desdobramento do roteiro (em quatro etapas) proposto na seção anterior. Para exemplificar esse desdobramento na prática, apresenta-se a seguir, uma proposta de ensino de dois conteúdos curriculares do Ensino Médio, cuja organização segue o modelo das atividades contidas no Material de Apoio (Apêndice D).

Os conteúdos curriculares escolhidos para exemplificar são a Função Afim (Polinomial de 1º grau) e as Funções Trigonométricas Seno e Cosseno. São conteúdos que estão presentes tanto no Ensino Médio como em vários cursos do Ensino Superior, em disciplinas básicas de Matemática como *Pré-Cálculo*, *Matemática Básica*, *Fundamentos de Matemática*, etc. A escolha desses conteúdos deve-se, principalmente, à própria experiência do pesquisador como docente há 26 anos, no decorrer dos quais tem tido a oportunidade de desenvolvê-los tanto no Ensino Médio (por 13 anos) como no Ensino Superior (por 13 anos).

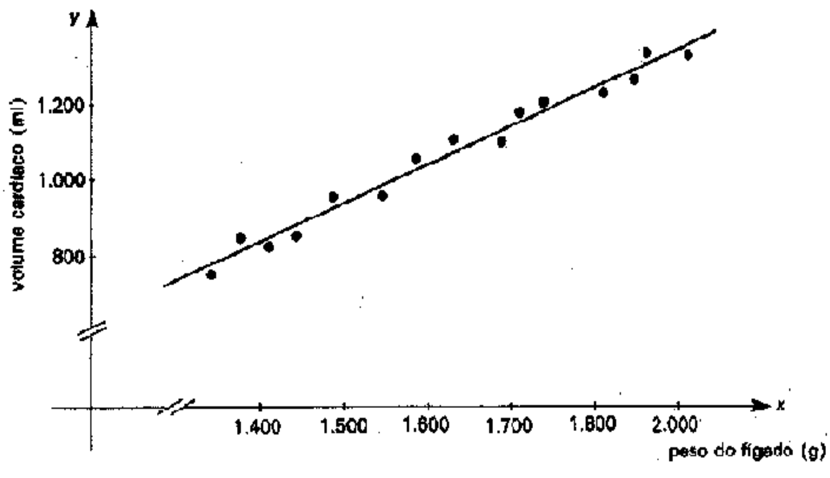
Nesses exemplos, os modelos e as situações onde estão inseridos visam a abordagem de temas de interesse dos estudantes, principalmente, nas áreas de ciências biológicas, para onde os conteúdos curriculares específicos (Funções Afim e Trigonométricas) foram direcionados[51]. No conteúdo de Função Afim, apresentam-se três situações que envolvem: a relação entre o volume cardíaco e a massa hepática de uma pessoa que mantém um treinamento ativo; o registro dos níveis médios de dióxido de carbono na atmosfera em determinado período de tempo; o crescimento de uma população de moscas-das-frutas durante um período de 50 dias. No conteúdo de Funções Trigonométricas (Seno e Cosseno), são apresentadas duas situações: o ritmo oscilatório dos braços de um indivíduo durante uma corrida; a variação da pressão sanguínea no decorrer do tempo. Seguem, portanto, esses exemplos:

Exemplo 1: Função Afim (Polinomial de 1º grau)

1ª Etapa: Apresentação das situações-problema

Situação 1.1: ***Volume cardíaco*** *versus* ***massa hepática*** (AGUIAR; et al., 2009). De acordo com especialistas, o treinamento físico de um indivíduo, na dependência da qualidade e da quantidade do esforço realizado, provoca a longo prazo aumento do preso do fígado e do volume do coração, existindo uma relação quase linear entre a massa hepática e o volume cardíaco. Isso significa que o fígado de uma pessoa treinada tem, em termos gerais, maior capacidade de armazenar glicogênio, o qual será usado no metabolismo energético durante esforços de longa duração. Alguns dados experimentais foram registrados no gráfico abaixo:

Modelo 1.1



Fonte: Aguiar et al. (2009, p. 6).

51 Esses exemplos foram utilizados na disciplina *Pré-Cálculo*, ministrada pelo pesquisador para cursos de licenciatura em Ciências Biológicas na Universidade Federal do Oeste do Pará, onde atua como docente.

Situação 1.2: Os ***níveis médios de dióxido de carbono na atmosfera*** (STEWART, 2013), medidos em partes por milhão (ppm) no Observatório de Mauna Loa em Hilo, no Havaí, de 1980 a 2008 estão representados no quadro a seguir:

Modelo 1.2

Níveis médios de dióxido de carbono (CO_2) na atmosfera

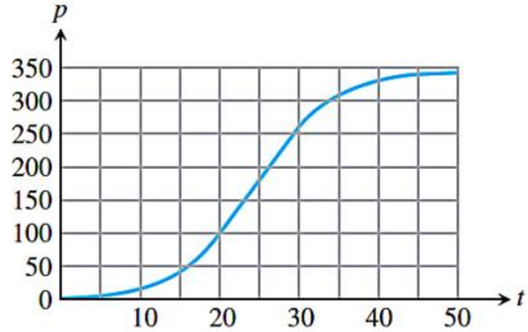
Ano	Nível de CO_2 (em ppm)	Ano	Nível de CO_2 (em ppm)
1980	338,7	1996	362,4
1982	341,2	1998	366,5
1984	344,4	2000	369,4
1986	347,2	2002	373,2
1988	351,5	2004	377,5
1990	354,2	2006	381,9
1992	356,3	2008	385,6
1994	358,6		

Fonte: Stewart (2013, p. 24).

Situação 1.3: ***População de moscas-das-frutas*** (THOMAS, 2009). Uma população de moscas-das-frutas (*Drosophila*) cresceu durante um experimento que durou 50 dias. O número de moscas p foi contado a intervalos regulares, os valores obtidos foram representados em um gráfico com relação ao tempo t (em dias), e os pontos foram unidos por uma curva lisa, conforme a figura abaixo:

Modelo 1.3

Crescimento de uma população de moscas-das-frutas durante 50 dias



Fonte: Thomas (2009, p. 5).

Após ou durante a apresentação das situações-problema, o professor propõe a tarefa seguinte.

(Exemplo 1) **Tarefa 1: Identificar variáveis (**Sugestão de respostas**)**

Na **Situação 1.1**, a variável $\boldsymbol{y}$ representa o volume cardíaco (em ml) e $\boldsymbol{x}$ indica o "peso" do fígado (em g) de um indivíduo. A relação entre essas duas grandezas, de acordo com o gráfico (Modelo 1.1), é quase linear. Aqui será considerado linear. Significa que o volume do coração de um indivíduo depende linearmente (está em função) do "peso" de seu fígado, isto é, $\boldsymbol{y}$ é uma função de $\boldsymbol{x}$, indicado pela expressão geral $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Na **Situação 1.2**, a variável $\boldsymbol{C}$ representa o nível médio de dióxido de carbono (CO_2) encontrado na atmosfera (em partes por milhão - ppm) e $\boldsymbol{t}$ indica o ano em que foi medido

$\boldsymbol{C}$. Após representar graficamente os pontos da tabela (Modelo 1.2), percebe-se que a relação entre essas duas grandezas é quase linear, isto é, o nível médio de CO_2 na atmosfera aumenta de forma (quase) linear no decorrer do tempo, pelo menos no período de 1980 a 2008. Aqui será considerado linear. Significa que $\boldsymbol{C}$ depende linearmente (está em função) de $\boldsymbol{t}$, indicado pela expressão geral $\boldsymbol{C = f(t)}$.

Na **Situação 1.3**, a variável $\boldsymbol{p}$ indica o número de moscas-das-frutas, contado em cada dia $\boldsymbol{t}$, durante 50 dias. De acordo com o gráfico (Modelo 1.3) o número de indivíduos dessa população de moscas cresce com o tempo, isto é, há uma relação de dependência (não linear) do número de moscas $\boldsymbol{p}$ e o tempo $\boldsymbol{t}$. Significa que $\boldsymbol{p}$ é uma função (não linear) de $\boldsymbol{t}$, dada de modo implícito pela expressão geral $\boldsymbol{p = f(t)}$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação (dos modelos)

Possíveis questões a serem levantadas

Na **Situação 1.1:** Quantos pontos aparecem no gráfico (Modelo 1)? Quais são esses pontos? O que significa dizer que a relação entre a massa hepática x (em g) e o volume cardíaco y (em ml) é quase linear? Que representação gráfica indicam esses pontos? Que tipo de função representa esse gráfico? Como obter uma expressão matemática $y = f(x)$ para essa função (representação algébrica)? Existe só uma maneira de expressar essa função (representação algébrica)? Como obter uma expressão $y = f(x)$ para esse fenômeno utilizando uma planilha ou algum outro *software*? Se um fenômeno relaciona duas grandezas de modo linear (como indica o Modelo 1.1), quantos pontos, no mínimo, são necessários para expressar esse fenômeno na forma geométrica? Sem utilizar planilhas ou *softwares*, como obter a expressão matemática $y = f(x)$ para esse fenômeno utilizando apenas a quantidade mínima de pontos? etc.

Na **Situação 1.2:** O que você sabe sobre dióxido de carbono (CO_2)? O que significa o nível médio de CO_2 em cada ano? Considerando que t representa o tempo (em anos) e c, o nível de CO_2 (em ppm), que representação gráfica (em um sistema de coordenadas cartesianas) indicam os pontos (t, c) da tabela (Modelo 1.2)? Que tipo de função representa esse gráfico? Como obter uma expressão matemática $c = f(t)$ para essa função (representação algébrica)? Existe só uma maneira de expressar essa função (representação algébrica)? Como obter uma expressão $c = f(t)$ para esse fenômeno, utilizando uma planilha ou algum outro *software*? Como obter a expressão $c = f(t)$ para esse fenômeno sem fazer uso de planilhas ou *softwares*? etc.

Na **Situação 1.3:** O gráfico (Modelo 1.3) representa uma função $p = f(t)$. Quais os intervalos de domínio e imagem dessa função? O crescimento dessa população ocorre de modo linear? Por quê? O que você entende por taxa média de crescimento? Qual a taxa média de crescimento dessa população nos 10 primeiros dias? E entre os dias 10 e 20? E entre os dias 20 e 30? E entre os dias 30 e 40? E nos últimos 10 dias? Quando essa população de moscas cresce mais lentamente? Quando cresce mais rapidamente? etc.

A partir das questões levantadas, o professor propõe ações exploratórias (Tarefa 2) que devem ser realizadas pelos estudantes, orientadas pelo professor. O objetivo é tentar envolvê-los na exploração das situações e respectivos modelos, além de preparar o "ambiente" para a 3ª etapa.

(Exemplo 1) **Tarefa 2: Realizar ações exploratórias (**Sugestão de ações exploratórias**)**

Na **Situação 1.1: a)** Tentar exibir os 15 pontos (x, y) do gráfico (Modelo 1.1). **b)** Utilizando uma planilha ou algum outro *software*, tentar obter uma função $y = f(x)$, a partir dos 15 pontos encontrados no item anterior. **c)** Escolher dois dos pontos encontrados no item **a**, marcá-los em um novo sistema de coordenadas e construir a reta que passa por eles; etc.

Na **Situação 1.2: a)** Pesquisar sobre dióxido de carbono (CO_2). **b)** Representar em um sistema de coordenadas os pontos (t, c) da tabela (Modelo 1.2). **c)** Utilizando uma planilha ou algum outro *software*, tentar obter uma função $c = f(t)$, a partir dos pontos (t, c) da tabela (Modelo 2). **d)** Escolher dois dos pontos da tabela (Modelo 1.2), marcá-los em um novo sistema de coordenadas e construir a reta que passa por eles; etc.

Na **Situação 1.3: a)** Determinar os intervalos de domínio e imagem da função $p = f(t)$ (Modelo 1.3). **b)** Exibir os pontos $(t, f(t))$, nos casos em que $t = 0$, $t = 10$, $t = 17$, $t = 20$, $t = 28$, $t = 30$, $t = 40$ e $t = 50$. **c)** Marcar em cada gráfico (Figura 2) os pares de pontos $(0, f(0))$ e $(10, f(10))$, $(10, f(10))$ e $(20, f(20))$, $(17, f(17))$ e $(28, f(28))$, $(20, f(20))$ e $(30, f(30))$, $(30, f(30))$ e $(40, f(40))$, $(40, f(40))$ e $(50, f(50))$. **d)** Em cada gráfico do item anterior, construir a reta que passa pelos pares de pontos marcados; etc.

Para facilitar a realização dessas ações pelos estudantes, o professor pode se utilizar de alguns recursos e proceder da seguinte forma:

Na **Situação 1.1**

- Distribuir para os estudantes, folhas de papel A4, quadriculado ou milimetrado com o Modelo 1.1 (gráfico ampliado) para que possam melhor estimar os 15 pontos.
- Levar os estudantes para o laboratório de informática da escola, caso possua; pedir que os estudantes tragam para a escola seu *Notebook*, caso possua; trazer o próprio *Notebook* para a escola e tentar apresentar (usando *Datashow*) para que todos vejam o processo de regressão linear dos 15 pontos encontrados, usando, para isso, o *Excel* ou o *GeoGebra*.
- Distribuir para os estudantes, folhas de papel A4, quadriculado ou milimetrado (com desenho de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy) para que eles possam marcar os dois pontos escolhidos e traçar a reta que passa por esses pontos.

Na **Situação 1.2**

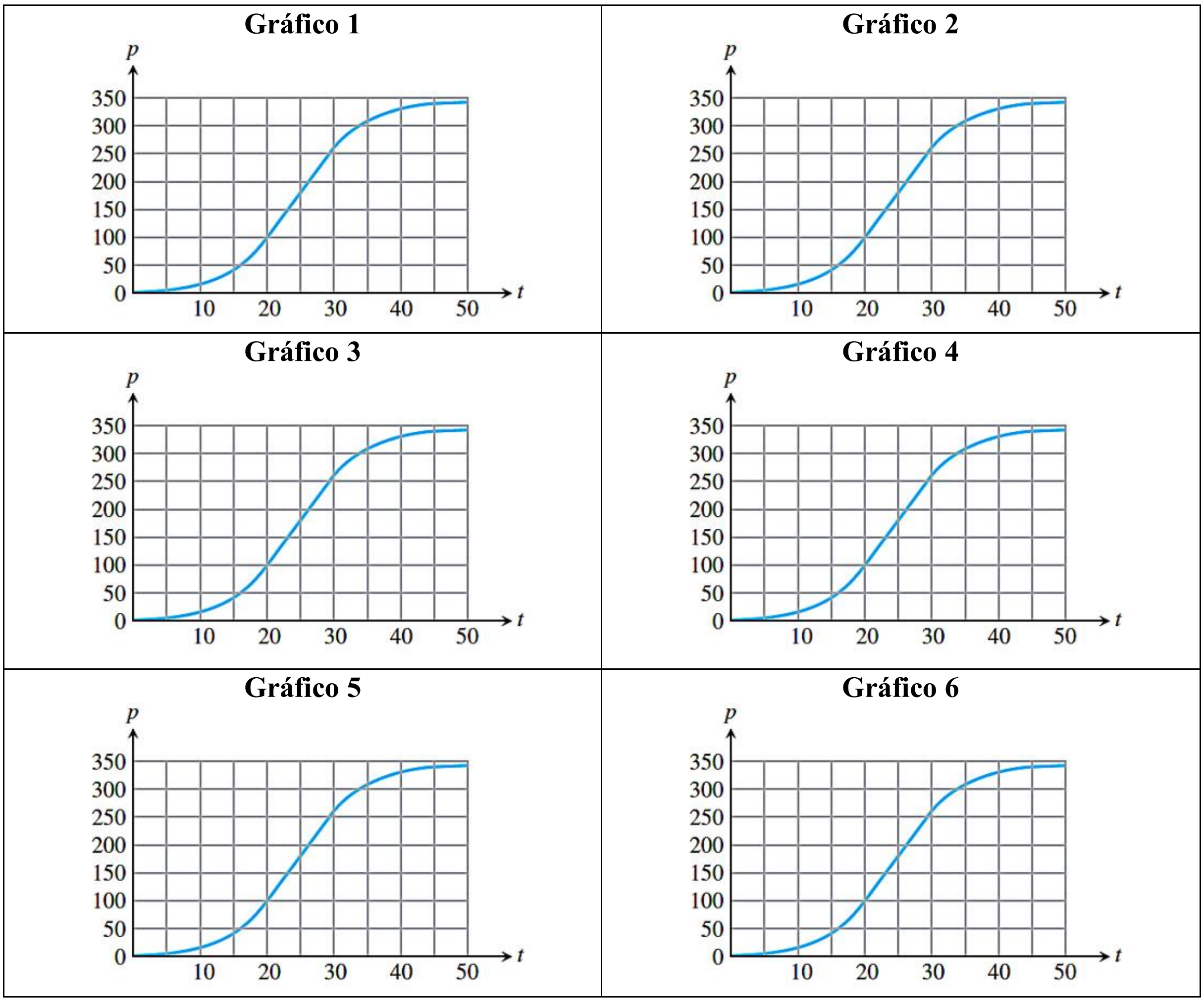
- Permitir que os estudantes pesquisem na *internet* (*Smartphone*) sobre dióxido de carbono.

- Distribuir para os estudantes, folhas de A4, papel quadriculado ou milimetrado (com desenho de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais tOc) para que eles possam marcar todos os pontos da tabela (Modelo 1.2) de modo mais preciso possível.
- Levar os estudantes para o laboratório de informática da escola, caso possua; pedir que eles tragam para a escola seu *Notebook*, caso possua; trazer o próprio *Notebook* para a escola e tentar apresentar (usando *Datashow*) para que todos vejam o processo de regressão linear dos pontos da tabela (Modelo 1.2), usando, para isso, o *Excel* ou o *GeoGebra.*
- Distribuir para os estudantes, folhas de papel A4, quadriculado ou milimetrado (com desenho de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais tOc) para que eles possam marcar os dois pontos escolhidos e traçar a reta que passa por esses pontos.

Na **Situação 1.3**

- Distribuir para os estudantes, folhas de papel A4 contendo seis gráficos (Figura 2) para que possam marcar os pares de pontos indicados e em seguida, traçar a reta que passa por eles.

Figura 2: Folha de tarefa acerca do Modelo 1.3



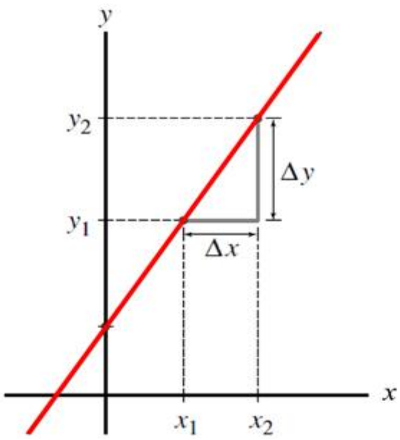
Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Thomas (2009, p. 5).

<u>3ª Etapa</u>: Resolução e desenvolvimento do conteúdo curricular

O conteúdo curricular deve ser desenvolvido de modo autônomo pelo professor, visando a resolução dos problemas levantados, conforme a necessidade emergente em cada situação. A sugestão central, no entanto, é que o professor apresente um esquema gráfico (Figura 3) que expresse a questão levantada na etapa anterior, conforme a proposta indicada a seguir.

Parte-se da hipótese que já se conhece dois dos pontos da reta que se pretende estudar. Supondo que esses dois pontos sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, traça-se a reta que passa por eles, conforme ilustra a Figura 3.

Figura 3: Inclinação da reta (Taxa média de variação ou Coeficiente angular)



Fonte: Elaborado pelo autor

Considerando que os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ são conhecidos e calculadas as variações $\Delta y = y_2 - y_1$ e $\Delta x = x_2 - x_1$, define-se, portanto, a *inclinação* (m) da reta (Taxa média de variação ou Coeficiente angular) como sendo a razão entre essas variações, isto é:

$$m := \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

A partir dessa expressão, e sabendo que o valor de m independe dos dois pontos que se escolhe, considera-se um ponto genérico $P = (x, y)$ e um ponto específico $P_0 = (x_0, y_0)$ dessa reta. Para efeito de cálculos, esse último ponto específico P_0 pode ser identificado como sendo qualquer um dos dois já conhecidos, isto é, $P_1 = (x_1, y_1)$ ou $P_2 = (x_2, y_2)$. Assim, partindo da expressão que define a inclinação da reta vista acima, tem-se que $m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \cdot$ Logo, a *Equação da Reta* que passa pelos pontos P_1 e P_2 pode ser representada pela expressão:

$$\boldsymbol{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Desenvolvendo essa última expressão, obtém-se $y = mx + (y_0 - mx_0)$, sendo que o número entre parênteses é uma constante, o qual pode ser identificado de modo simplificado por n, isto é, $n = (y_0 - mx_0)$. Assim, a equação da reta pode ser expressa, simplesmente por:

$$\boldsymbol{y = mx + n}$$

Trata-se da lei ou modelo matemático denominado *Função Afim* (Polinomial de 1º grau) que é uma função real $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $y = f(x)$ e expressa por $\boldsymbol{y = mx + n}$.

Nesse momento, o professor retoma as duas situações iniciais e propõe a resolução dos problemas levantados na etapa anterior.

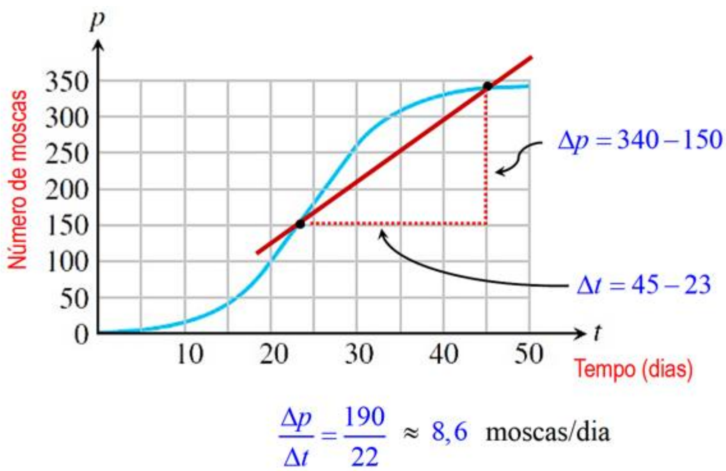
(Exemplo 1) **<u>Tarefa 3</u>: Resolver os problemas (**Possíveis questões**)**

Da **Situação 1.1: a)** A partir do gráfico obtido no item **c** da Tarefa 2, referente à Situação 1.1, determine a função $y = f(x)$, isto é, o modelo matemático $y = mx + n$ para o fenômeno em estudo. **b)** Discuta o significado das variáveis x, y, m e n nesse contexto; **c)** Usando esse modelo, calcule os valores $f(1.340)$, $f(1.390)$, $f(1.400)$, $f(1.440)$, $f(1.490)$, $f(1.540)$, $f(1.590)$, $f(1.620)$, $f(1.690)$, $f(1.700)$, $f(1.720)$, $f(1.800)$, $f(1.850)$, $f(1.860)$ e $f(1.900)$. **c)** Compare esses valores com os encontrados na Tarefa 2 (item **a** referente à Situação 1.1), estimados a partir do Modelo 1.1, e avalie seu modelo. **d)** Estime o Domínio e a Imagem dessa função e interprete-os; etc.

Da **Situação 1.2: a)** A partir do gráfico obtido no item **c** da Tarefa 2, referente à Situação 1.2, determine a função $c = f(t)$, isto é, o modelo matemático $c = mt + n$ para o fenômeno em estudo. **b)** Discuta o significado das variáveis t, c, m e n nesse contexto. **c)** Usando esse modelo, calcule os valores $f(1980)$, $f(1982)$, $f(1984)$, ..., $f(2008)$. **d)** Compare esses valores com os dados da tabela (Modelo 1.2), e avalie seu modelo; etc.

Antes de propor aos estudantes a próxima tarefa (Tarefa 4), referente à Situação 1.3, o professor pode discutir/explorar com eles o conceito de *taxa média de variação* (mais especificamente, a taxa média de crescimento da população de moscas, $\frac{\Delta p}{\Delta t}$), e, em seguida exemplificar, propondo a seguinte questão: Quantas moscas foram registradas nos dias 23 e 45? Qual a taxa média de crescimento da população de moscas entre esses dias?

Figura 4: Taxa média de crescimento das moscas-das-frutas entre os dias 23 e 45



Fonte: Adaptado de Thomas (2009, p. 69).

Para o desenvolvimento da questão, em primeiro lugar, o professor em conjunto com os estudantes, tenta identificar os dias 23 e 45 e os respectivos valores da população (que devem ser 150 e 340 aproximadamente), e marcar no gráfico os pontos correspondentes. Em seguida, traça uma reta que passa por esses dois pontos e calcula as variações da população e do tempo. Por fim, calcula-se a taxa média $\frac{\Delta p}{\Delta t}$, como indicado na figura acima (Figura 4).

De posse do resultado e tendo explorado junto com os estudantes o significado desses números, o professor retoma o item **c** da Tarefa 2 (referente à Situação 1.3), e chama a atenção deles para o fato de os resultados obtidos serem diferentes em cada intervalo e pede para que eles tentem identificar alguma relação entre cada valor obtido e a reta traçada no respectivo gráfico. A ideia aqui é fazer com que os estudantes percebam que o valor da taxa média em cada intervalo representa a *inclinação* da reta construída em cada caso, de modo que a menor taxa indica menor inclinação da reta e a maior taxa, uma inclinação mais acentuada desta. Com isso, os estudantes podem identificar em quais intervalos de tempo ocorreu o menor e o maior crescimento da população de moscas nesse experimento, seja observando os valores numéricos obtidos ou a inclinação de cada reta construída.

Nesse momento deve estar entendido pelo os estudantes que para determinar a inclinação da reta (taxa média de variação) basta conhecer/escolher dois pontos da mesma (pares ordenados), e o professor precisa enfatizar que essa escolha independe dos pontos. Podem ser escolhidos quaisquer dois pontos da reta que ainda assim, o valor da inclinação será sempre o mesmo.

Percebendo, então, que os estudantes compreenderam bem esse conceito, isto é, a relação entre a taxa média de variação (crescimento) e a inclinação da reta que passa pelos dois pontos do gráfico, o professor pode avançar na exploração do modelo e apresentar o conceito de *taxa instantânea* de variação, identificando-a como sendo, geometricamente, a *inclinação da reta tangente* ao gráfico em um único ponto correspondente a um tempo (dia) específico.

Diante dessas considerações, o professor agora pode propor questões referentes à Situação 1.3, conforme a sugestão indicada na tarefa a seguir.

(Exemplo 1) **Tarefa 4: Resolver os problemas (**Possíveis questões**)**

Da **Situação 1.3: a)** A partir dos gráficos obtidos no item **d** da Tarefa 2, referente à Situação 1.3 (Tabela 2), determine a taxa média de crescimento da população de moscas nos seguintes períodos: nos 10 primeiros dias; entre os dias 10 e 20; entre os dias 17 e 28; entre os dias 20 e 30; entre os dias 30 e 40; nos 10 últimos dias. **b)** Em que período, essa população de moscas cresce mais lentamente? **c)** Em que período ela cresce mais rapidamente? **d)** Monte uma estratégia que ajude calcular a taxa instantânea de crescimento das moscas-das-frutas nos dias 10, 15, 17 e 33. **e)** Em que dia você acha que houve a maior taxa de crescimento dessa população de moscas? Por quê? Encontre essa taxa. **f)** Em que dia você acha que houve a menor taxa de crescimento dessa população de moscas? Por quê? Encontre essa taxa; etc.

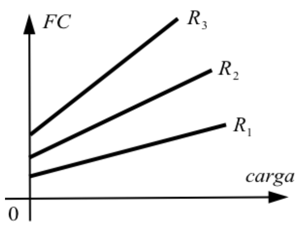
Obs.: Para realizar os itens **d**, **e**, **f** da tarefa, utilizar os gráficos da Figura 2.

4ª Etapa: Aplicação

Nessa etapa podem ser apresentadas questões relativas a situações onde os modelos estudados (modelos lineares) terão papel central na resolução e interpretação das mesmas.

Questões de Estudo (algumas sugestões)

Q1. [Aguiar et al. (2009, p. 32)]. Mellerrowicz e Meller (*Bases Fisiológicas do Treinamento Físico*, São Paulo, EPU-Springer-EDUSP, 1979) observaram que a frequência cardíaca (FC) depende linearmente da carga (esforço). Na figura ao lado, as três retas representam essa dependência linear para indivíduos *treinados*, *não-treinados* e *cardíacos*. Qual é a reta que representa os indivíduos cardíacos, os não-cardíacos destreinados e os treinados? Justifique em cada caso sua resposta.



Q2. [Adaptado de Hoffmann e Bradley (2010, p. 33)]. Observe os anúncios abaixo e determine:

Anúncio 1

Anúncio 2

a) A lei matemática que representa o custo (y) em função do número de minutos das ligações efetuadas (x), de cada um dos planos; **b)** Se um consumidor costuma falar em torno de 300 minutos em ligações por mês, qual das duas companhias é mais vantajosa em termos de custos? Qual será a economia para esse consumidor ao final de um ano? **c)** Em que circunstância as duas companhias têm o mesmo custo? Qual é esse custo? **d)** Em que circunstâncias cada uma das companhias pode oferece mais vantagens para o consumidor?

Q3. [Aguiar et al. (2009, p. 37)]. Há diversas maneiras de se calcular a dose infantil de um medicamento, sendo conhecida a do adulto. É óbvio que a dose infantil deverá ser uma fração da dose do adulto. Normalmente, esse cálculo é feito em função da idade da criança ou de seu peso. Existem diversas regras para se obter essa estimativa. Citaremos três delas:

Regra de Young: Para crianças com idade de 2 a 12 anos e quando temos apenas a idade como referência. Nesse caso a idade é medida em anos.

$$dose\ infantil = \frac{idade\ da\ criança}{idade\ da\ criança + 12} \cdot dose\ do\ adulto$$

Regra de Fried: Para crianças com idade inferior a 2 anos. A idade é medida em meses.

$$dose\ infantil = \frac{idade\ da\ criança}{150} \cdot dose\ do\ adulto$$

Regra de Clark: Para crianças com idade até 12 anos e quando é usado o peso como referência. Nesse caso o peso é medido em quilogramas.

$$dose\ infantil = \frac{peso\ da\ criança}{70} \cdot dose\ do\ adulto$$

Responda: **a)** A dose de sulfato de morfina para o adulto é 10 mg. Qual deverá ser a dose infantil, tratando-se de uma criança de 12 anos, pesando 30 kg? Há discrepância entre o previsto pela Regra de

Young e de Clark? Por quê? **b)** Um bebê de 6 kg precisa tomar uma dose de acetado de cortisona. Sabe-se, ainda, que a idade do bebê é de 25 semanas e que a dose do adulto é de 150 mg. Qual a dose infantil pela Regra de Fried? **c)** Quais seriam as doses de cortisona para o mesmo bebê, porém agora calculadas através das Regras de Young e de Clark? Há discrepâncias? Em caso afirmativo, você tem alguma explicação para o fenômeno? **d)** Exprima, em termos de uma função $y = f(x)$, cada uma das regras acima citadas, considerando que y é a dose infantil e x é a dose do adulto. Além disso, utilize as letras I e P para indicar a idade e o peso da criança. São exemplos de função Afim? Se sim, considere a criança do item (**a**), quais os coeficientes angulares a partir das regras de Young e de Clark? interprete-os.

Q4. [Adaptado de Anton et al. (2007, p. 78)]. A tabela ao lado dá a medição da pressão P de um gás em temperaturas T diferentes, sugerindo uma relação linear entre P e T. Determine a equação $P = f(T)$.

Temperatura (°F)	Pressão (libras/pol^2)
70	187,42
75	189
85	192,16
100	196,9
110	200,06

Q5. [Hoffmann e Bradley (2010, p. 32)]. Sabe-se que as temperaturas em graus Celsius (℃) e Fahrenheit (°F) são relacionadas de modo linear. Encontre a Equação Linear (da Reta) que relaciona a temperatura nessas escalas $C = f(F)$, sabendo que a água congela a 0 ℃ (32 °F) e ferve a 100 ℃ (212 °F). Com essa equação: **a)** Converta 72 °F em graus Celsius e 15 ℃ em Fahrenheit; **b)** Que temperatura é a mesma tanto em graus Celsius quanto em Fahrenheit?

Q6. [Stewart (2013, p. 32)]. Biólogos notaram que a taxa de emissão de sons de uma certa espécie de grilo está relacionada com a temperatura de uma maneira que aparenta ser quase linear. Um grilo emite 124 sons por minuto a 68°F e 172 sons por minuto a 80°F. Determine o que se pede: **a)** A equação linear que dá o número de sons N emitidos por minuto como uma função da temperatura F, ou seja, $N = f(F)$; **b)** Qual é a inclinação do gráfico? O que ela representa? **c)** Se os grilos estiverem emitindo 150 sons por minuto, estime a temperatura nesse momento; **d)** Qual seria essa temperatura em graus Celsius? **e)** Como seria a lei matemática $N = f(C)$?

Exemplo 2: Funções Trigonométricas (Seno e Cosseno)

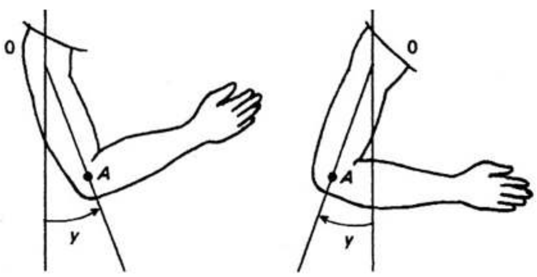
<u>1ª Etapa</u>: Apresentação das situações-problema

Situação 2.1: ***Ritmo oscilatório dos braços de um corredor*** (AGUIAR; et al., 2009). Um praticante do método de corridas popularmente conhecido como método de Cooper balança cada um de seus braços ritmicamente (Figura 5) enquanto corre, segundo a expressão:

Modelo 2.1

$$\boldsymbol{y = \frac{\pi}{9} sen\left[\frac{8\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)\right]}$$

Figura 5: Duas posições do braço de um corredor em seu movimento cíclico



Fonte: Aguiar et al. (2009, p. 99)

Situação 2.2: ***Como está sua pressão?*** (SMOLE; DINIZ, 2016b). Considera-se que a variação da pressão nas paredes dos vasos sanguíneos de um certo indivíduo pode ser expressa em função do instante de coleta dessa medida. O gráfico abaixo indica uma investigação desse tipo onde se analisa a situação clínica de um paciente em repouso.

Modelo 2.2

Fonte: Smole e Diniz (2016b, p. 8).

(Exemplo 2) **<u>Tarefa 1</u>: Identificar variáveis (**Sugestão de respostas**)**

Na **Situação 2.1**, a variável $\boldsymbol{y}$ representa o ângulo (em radianos - rad) compreendido entre a posição do braço e o eixo vertical imaginário (Figura 5) em cada instante $\boldsymbol{t}$ (em segundos - s). A medida do ângulo $\boldsymbol{y}$ é uma função do tempo $\boldsymbol{t}$, dada de modo explícito por $\boldsymbol{y = f(t)}$.

Na **Situação 2.2**, o modelo apresentado (Modelo 2.2) envolve duas variáveis, $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{t}$. A variável $\boldsymbol{P}$ indica a pressão sanguínea de um individuo (em milímetros de mercúrio - mmHg) em um determinado instante $\boldsymbol{t}$ (em segundos - s). De acordo com o modelo, a pressão sanguínea $\boldsymbol{P}$ é uma função do tempo $\boldsymbol{t}$, que pode ser traduzida pela função $\boldsymbol{P = f(t)}$.

<u>2ª Etapa</u>: Exploração e interpretação (dos modelos)

<u>Possíveis questões a serem levantadas</u>

Na **Situação 2.1:** Que tipo de função é essa (Modelo 2.1)? O que caracteriza esse tipo de movimento? O que significa que o movimento é oscilatório/cíclico? Como é a representação gráfica dessa função? Qual a variação do ângulo y em um movimento completo dos braços desse corredor? Em quanto tempo t ocorre um movimento completo dos braços desse corredor?
Na **Situação 2.2:** Em geral, a pressão indicada no gráfico (Modelo 2.2) obedece a um ciclo, sendo que cada ciclo completo equivale a um batimento cardíaco. Baseado nesse gráfico, em quanto tempo você acha que ocorre esse ciclo? Você sabe o que é a *frequência* cardíaca de uma pessoa? A partir das informações do Modelo 2.2, como encontrar a frequência cardíaca do individuo avaliado? Quando é que a pressão de uma pessoa é considerada boa? Você acha que

a pressão desse indivíduo (Modelo 2.2) pode ser considerada boa? Por quê? Que tipo de gráfico é esse? Que expressão matemática $P = f(t)$ pode representar esse fenômeno? etc.

A partir das questões levantadas, o professor propõe algumas ações exploratórias.

(Exemplo 2) **<u>Tarefa 2</u>: Realizar ações exploratórias (**Sugestão de ações exploratórias**)**

Na **Situação 2.1: a)** Como $y = f(t)$, tentar expressar alguns pontos (t, y) a partir do Modelo 2.1. **b)** Representar esses pontos encontrados em um sistema de coordenadas. **c)** A partir desses pontos, tentar esboçar o gráfico (linha contínua) que representa o fenômeno em estudo; etc.

Na **Situação 2.2: a)** Tentar perceber, a partir do gráfico (Modelo 2.2), um ciclo completo do batimento cardíaco do indivíduo ali representado. **b)** Identificar em quanto tempo (*período*) ocorre esse ciclo completo. **c)** Pesquisar sobre *frequência* cardíaca e tentar expressar a frequência cardíaca do indivíduo do gráfico (Modelo 2.2). **d)** A partir do gráfico, tentar identificar a pressão do indivíduo em estudo. **e)** Pesquisar e discutir quando a pressão de uma pessoa é considerada boa. **f)** Utilizando um medidor de pressão, medir a pressão dos colegas da turma e discutir os resultados; etc.

Para facilitar a realização dessas ações pelos estudantes, o professor pode:

Na **Situação 2.1**

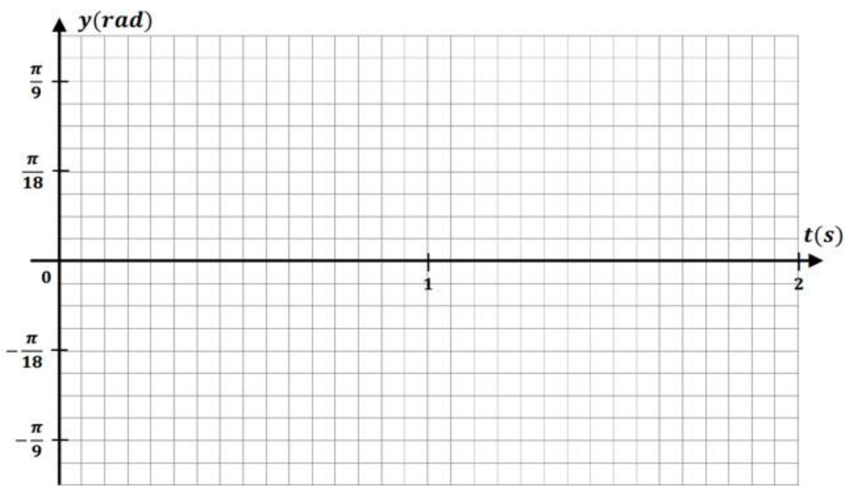
- Distribuir para os estudantes, folhas de papel A4 contendo uma tabela e um sistema de coordenadas (Tabela 2 e Figura 6) para que possam realizar melhor a tarefa proposta.

Tabela 2: Registro dos ângulos y (radianos) a partir dos tempos t (segundos)

t	$\frac{12}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{17}{16}$	$\frac{18}{16}$	$\frac{19}{16}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{24}{16}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{29}{16}$	$\frac{30}{16}$
y													

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6: Sistema de coordenadas tOy para esboço do gráfico $y = f(t)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

- Relembrar alguns conhecimentos prévios sobre trigonometria no triângulo retângulo e no círculo. É nesse momento que os estudantes têm a oportunidade de relembrar operações com frações, o trabalho de representá-las na reta real, o cálculo do seno (e cosseno) de alguns ângulos como $0, \frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{2}$ (em radianos), além do próprio exercício de representar pares ordenados em um plano cartesiano e de esboçar o gráfico à partir desses pontos.
- Instigar os estudantes a perceberem que o gráfico obtido tem como principal característica a repetição (oscilação, periodicidade, ação cíclica), e os conceitos de *período*, *frequência* e *amplitude* já podem ser explorados, mesmo de forma intuitiva.
- Permitir e incentivar o uso de calculadora científica pelos estudantes.

Na **Situação 2.2**

- Permitir que os estudantes pesquisem na internet (Smartphone) sobre *frequência* cardíaca e sobre pressão arterial para discussão em sala de aula.
- Levar para sala de aula um medidor de pressão para que os estudantes possam medir e registrar a própria pressão. É um momento bem oportuno para discutir a importância de se manter uma pressão normal, os cuidados preventivos, inclusive os perigos e males que a pressão alta ou baixa pode causar.

3ª Etapa: Resolução e desenvolvimento do conteúdo curricular

Como destacado anteriormente, o conteúdo curricular deve ser desenvolvido de modo autônomo pelo professor, visando a resolução dos problemas levantados, conforme a necessidade emergente em cada situação.

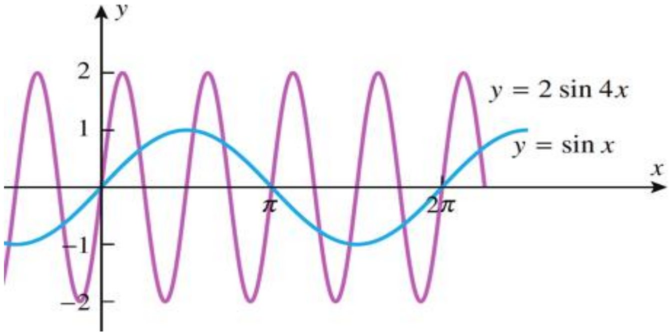
Uma sugestão é que, em primeiro lugar, o professor apresente uma visão geral sobre as funções trigonométricas, destacando que são funções que têm a propriedade de serem *periódicas*, utilizadas em geral para descrever fenômenos repetitivos, oscilatórios e vibratórios. Alguns exemplos, com figuras podem ser destacados, como: na trajetória dos planetas; na música; na medicina; etc.

Em seguida, o professor pode definir função *periódica*[52], **período** e **frequência** de f[53]. E como exemplos citar as funções trigonométricas *seno* e *cosseno*. Pode ainda, chamar a atenção dos estudantes em como fazer mudanças nos gráficos dessas funções, seja alongando, comprimindo ou transladando (deslocando), de modo vertical ou horizontal. Para exemplificar algumas dessas ações, pode considerar a função do tipo $\boldsymbol{y = A\,sen(Bx)}$, onde A e B são constantes positivas. Nesse tipo de função, A tem o efeito de alongar ou comprimir

[52] É toda função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, para a qual existe um número positivo P tal que $f(x + P) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
[53] **período** é o menor valor de P e **frequência** é $F = 1/p$.

verticalmente o gráfico de $y = sen(x)$ por esse fator, enquanto que o efeito de B é fazer o mesmo, porém na horizontal. Assim, por exemplo, o gráfico de $y = 2sen(4x)$ pode ser obtido, alongando verticalmente o gráfico de $y = sen(x)$ pelo fator 2 (*amplitude*), e comprimindo horizontalmente pelo fator 4, isto é, seu *período* é um quarto do período do gráfico da função original $y = sen(x)$ que é 2π, ou seja, $p = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ conforme está na Figura 7.

Figura 7: Gráfico das funções $y = sen(x)$ e $y = 2sen(4x)$



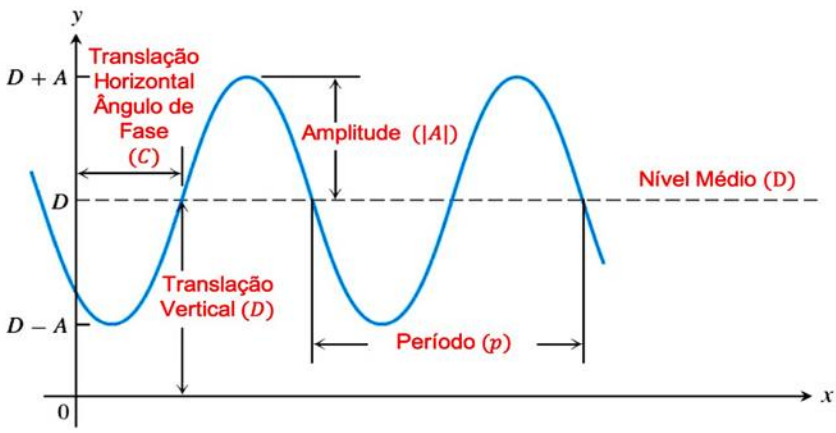
Fonte: Anton et al. (2007, p. 46).

Portanto, em relação a função $y = Asen(Bx)$ (O mesmo vale para $y = Acos(Bx)$): A **amplitude** é $\boldsymbol{A}$; O **período** é $\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{B}}$; A **frequência** é $\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{2\pi}}$.

Com relação à translação do gráfico, isto é, o deslocamento vertical e horizontal ocorre quando se tem uma função do tipo geral $\boldsymbol{y = D + A\ sen[B(x - C)]}$ (Figura 8).

Nesse caso, ocorre um deslocamento da função $y = Asen(Bx)$ em D unidades na vertical e C unidades na horizontal para a direita. A constante D indica o valor médio da função, chamado **Nível Médio**, e C representa o deslocamento mínimo do sistema de coordenadas na horizontal para ser adequado à equação pretendida (função $Seno$), chamado **Ângulo de Fase**.

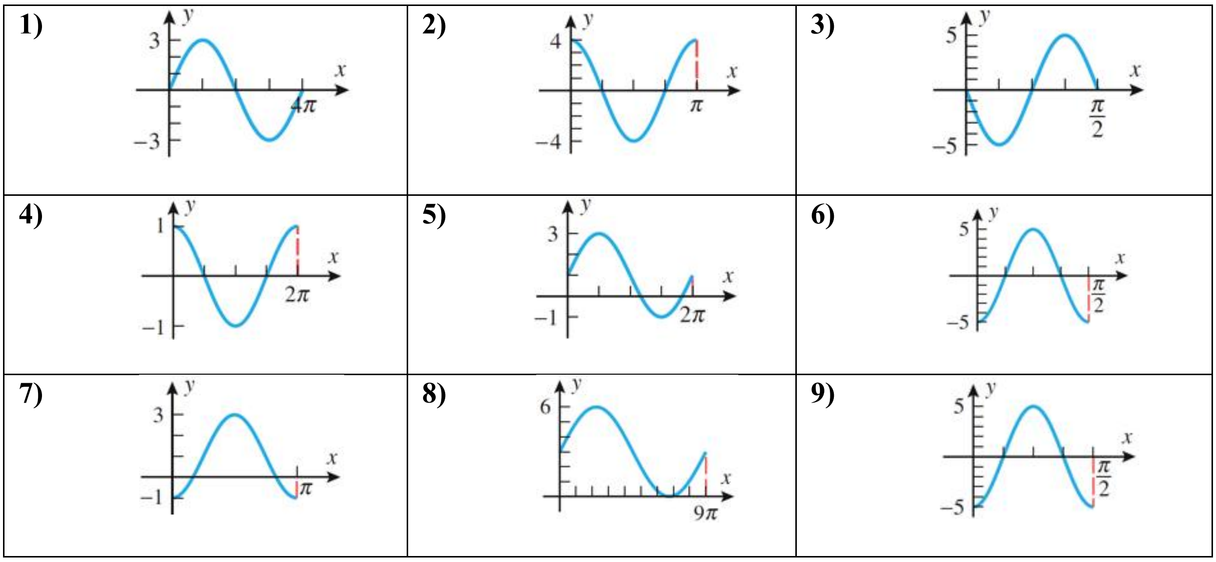
Figura 8: Transformações no gráfico da Função Seno



Fonte: Adaptado de Thomas (2009, p. 25).

Tendo explorado essas informações junto com os estudantes, o professor pode ainda reforçar essas transformações, propondo aos estudantes a seguinte questão: Que tipo de função ($y = D + A\,sen[B(x - C)]$ ou $y = D + A\,cos[B(x - C)]$) representa cada gráfico abaixo?

Figura 9: Gráficos de funções trigonométricas



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Anton et al. (2007, p. 50).

Nesse momento, o professor retoma as duas situações iniciais e propõe a resolução dos problemas centrais levantados na etapa anterior.

(Exemplo 2) **<u>Tarefa 3</u>: Resolver os problemas (**Possíveis questões**)**

Na **Situação 2.1: a)** Identificar o tipo de função trigonométrica ($P = D + A\,sen[B(t - C)]$ ou $P = D + A\,cos[B(t - C)]$) que é o Modelo 2.1. **b)** Expressar os valores p, F, A, B, C e D dessa função, interpretando o significado de cada um; etc.

Na **Situação 2.2: a)** Identificar qual o tipo de gráfico representa o Modelo 2.2 (seno ou cosseno). **b)** Expressar a função ($P = D + A\,sen[B(t - C)]$ ou $P = D + A\,cos[B(t - C)]$) que melhor representa o fenômeno descrito pelo gráfico (Modelo 2.2); etc.

Muito provavelmente, outras questões podem surgir a partir das situações e da exploração dos modelos apresentados. O importante é que, ao chegarem nesse momento, os estudantes tenham adquirido certa familiaridade e habilidade com o conteúdo curricular apresentado, de modo que, a partir de agora, possam expandir sua utilização e aplicação em outras situações e contextos. É hora, portanto, de passar para a última etapa do processo (4ª), onde os estudantes têm a oportunidade de perceber essa aplicabilidade.

<u>4ª Etapa</u>: Aplicação

Fechando o roteiro, são propostas a seguir algumas questões relativas ao conteúdo estudado (F. Trigonométricas), inserido em situações onde a aplicação dos modelos explorados (seno e cosseno) tem papel central na resolução e, consequentemente, na interpretação.

Questões de Estudo (algumas sugestões)

Q1. [Aguiar et al. (2009, p. 116)]. Sabe-se que, em determinada região da América do Sul, a Temperatura média semanal T (em $°C$) e a quantidade de Energia solar média semanal E (em $kcal/cm^2$) possam ser expressas em função do tempo t (em semanas), por meio das equações:

$$\boldsymbol{T(t) = 10 + 12sen\left[2\pi\left(\frac{t-15}{52}\right)\right]} \text{ e } \boldsymbol{E(t) = 400 + 200sen\left[2\pi\left(\frac{t-11}{52}\right)\right]}$$

Determine: **a)** A maior e a menor Temperatura que pode ocorrer nessa região durante o ano. Faça o mesmo para a Energia; **b)** A partir desses modelos, quais as datas aproximadas em que ocorrem, anualmente, os máximos e mínimos da Temperatura e da quantidade de Energia.

Q2. [Adaptado de Unesp (2001)]. Uma equipe de mergulhadores, dentre eles um estudante de Matemática, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e, a partir de dados coletados, verificou-se que esse fenômeno era periódico e podia ser aproximado por:

$$\boldsymbol{y = \frac{21}{2} + 2cos\left[\frac{\pi}{6}\left(t + \frac{15}{2}\right)\right]}$$

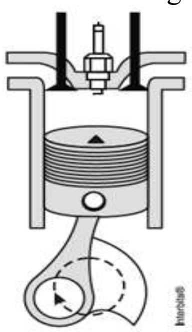
onde t é o tempo (em horas) decorrido após o início da observação e y é a profundidade da água (em metros) no instante t. Determine: **a)** A que horas ocorreu a primeira maré alta? **b)** Qual a profundidade no local onde ocorreu essa maré? **c)** Faça um esboço do gráfico dessa função.

Q3. [Unesp (2003)]. No hemocentro de certo hospital, o número de doações de sangue tem variado periodicamente. De acordo com os registros disponíveis no hemocentro, no ano de 2017, esse número, de janeiro a dezembro, pode ser aproximado pelo modelo matemático

$$\boldsymbol{S(t) = A - cos\left[\frac{\pi}{6}(t-1)\right]}$$

onde A é uma constante positiva, $S(t)$ indica o número de doações de sangue (em milhares) e t é o tempo (em meses), $0 \leq t \leq 11$. Determine: **a)** O valor de A, sabendo que no mês de fevereiro houve 2 mil doações; **b)** Em quais meses houve 3 mil doações de sangue; **c)** Qual o maior e o menor número de doações de sangue nesse hemocentro no ano de 2017; **d)** E que meses isso ocorreu.

Q4. [UFPR (2013)]. O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro, como ilustra a figura abaixo:



A partir de um experimento realizado por um grupo de estudantes de Matemática, verificou-se que em um instante t (em segundos), a altura $h(t)$ do pistão (em centímetros), pode ser descrita pela expressão:

$$\boldsymbol{h(t) = 4 + 4sen(40\pi t)}$$

Com base nessa equação, determine:

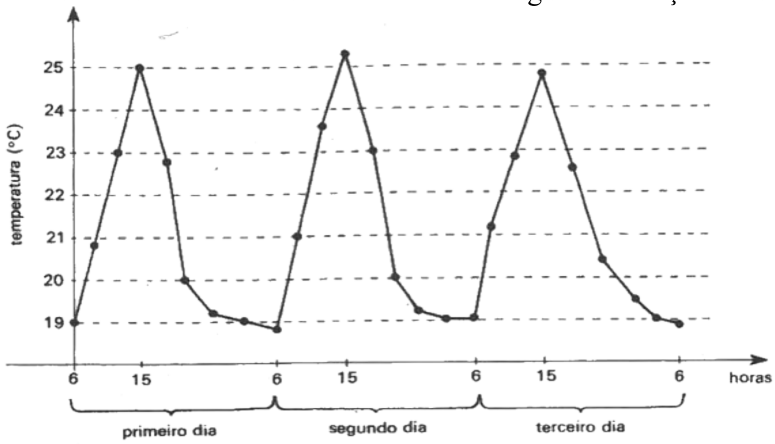
a) As alturas máxima e mínima que o pistão pode atingir; **b)** Quantos ciclos completos esse pistão realiza, funcionando durante um minuto; **c)** Em quanto tempo ocorre um ciclo completo.

Q5. [UFPB (2011)]. Com o objetivo de aumentar a produção de alimentos em certa região, a secretaria de agricultura local contratou uma equipe de agrônomos para realizarem um estudo sobre as potencialidades do solo dessa região. Na análise da temperatura do solo, a equipe efetuou medições diárias, durante quatro dias consecutivos, em intervalos de uma hora. As medições tiveram início às 6 horas da manhã do primeiro dia ($t = 0$). Os estudos indicaram que a temperatura T, medida em graus Celsius, e o tempo t, representando o número de horas decorridas após o início das observações, podiam ser relacionadas por meio da seguinte expressão:

$$T(t) = 26 + 5cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{4\pi}{3}\right).$$

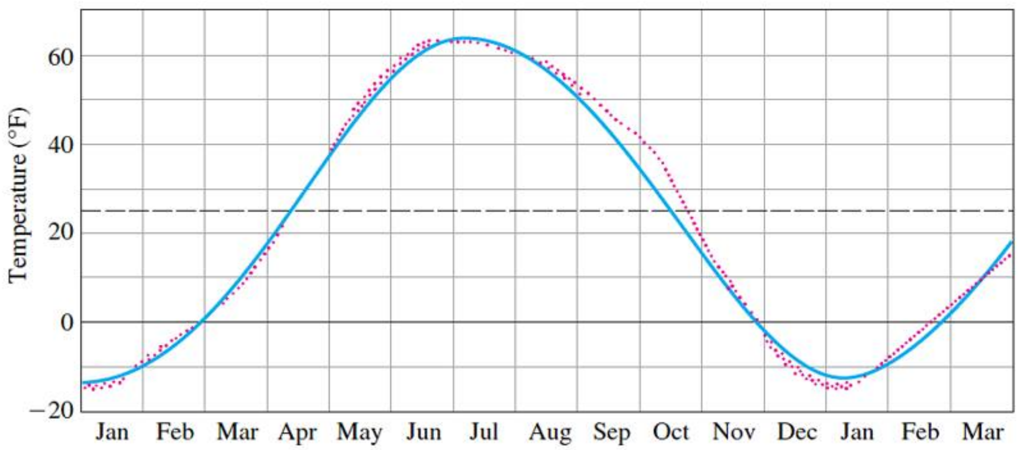
Com base nessas informações, determine: **a)** A temperatura do solo, às 6 horas da manhã do primeiro dia; **b)** Sendo a função periódica, qual é o período? **c)** Quais as temperaturas máxima e mínima atingida por esse solo analisado? **d)** A que horas a temperatura foi máxima no primeiro dia? **e)** Em quais os intervalos de tempo, a temperatura do solo está crescendo? E decrescendo?

Q6. [Aguiar et al. (2009, p. 91)]. A temperatura é um parâmetro importante em modelos utilizados na representação da atividade biológica, em razão de seu efeito sobre a cinética das reações químicas vitais. Assim, compreende-se o interesse de representar variações de temperatura ambiente em função do tempo. Nesse caso, modelos trigonométricos simples tornam-se bastante efetivos, em razão de as temperaturas do ar e do solo guardarem relações muito estreitas com a radiação solar, cuja intensidade, em dado lugar, apresenta um ritmo diário e outro anual, cuja origem são os movimentos da Terra (em torno de seu próprio eixo e o de circunvolução ao redor do Sol). Na figura abaixo dispomos de dados referentes à temperatura do solo, em um período de três dias, obtidos a intervalos de três horas. Os pontos marcados no gráfico representam dados observados. Usando a função **Cosseno**, modele esse fenômeno e determine os valores estimados segundo a função encontrada.

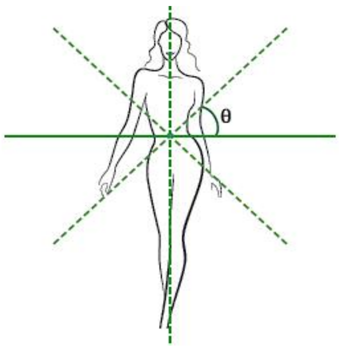


Horas	Valores observados	Valores estimados
06	$19{,}0°C$	
09	$20{,}8°C$	
12	$23{,}0°C$	
15	$25{,}0°C$	
18	$22{,}8°C$	
21	$20{,}0°C$	
24	$19{,}2°C$	
27	$19{,}0°C$	
30	$18{,}8°C$	

Q7. [Thomas (2009, p. 200)]. O gráfico abaixo mostra a temperatura média (em Fahrenheit) na cidade de Fairbanks, Alasca nos Estados Unidos, durante um ano de 365 dias. A linha horizontal pontilhada indica o valor médio das temperaturas. Assim, um modelo matemático que dá uma boa aproximação para esse fenômeno é a equação do tipo $\boldsymbol{y = D + Asen[B(x - C)]}$, onde y representa a temperatura (em Fahrenheit) e x, o tempo (em dias). Baseado no gráfico, determine essa expressão.



Q8. [Adaptado de Aguiar et al. (2009, p. 100) e Uepa (2012)]. Os desfiles de moda feminina parecem impor implicitamente tanto o “vestir-se bem” quanto o “ser bela”, definindo desse modo padrões de perfeição. Nesses desfiles de moda, a rotação pélvica do andar feminino é exagerada quando comparada ao andar “duro” masculino, em passos de igual amplitude. Isto acontece, basicamente, devido a certas diferenças anatômicas entre os dois sexos. Pode-se avaliar tal movimento oscilatório supondo uma linha imaginária passando pelas duas cristas ilíacas, perpendicular (horizontal) a uma outra linha (vertical), aqui representada pela coluna vertebral. Quando a mulher se desloca no seu andar, a reta horizontal oscilará em torno de seu centro para cima e para baixo, acompanhando o ritmo da pélvis. Esse movimento oscilatório do andar feminino pode ser avaliado a partir da variação do ângulo θ (em radianos) conforme ilustrado na figura abaixo, ao caminhar uniformemente no decorrer do tempo t (em segundos). Após registrar vários desfiles de uma "top Model", verificou-se que, para ela, o ângulo de oscilação poderia ser expresso pela seguinte expressão $\theta(t) = \frac{\pi}{10} cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right)$.



Com base nesse modelo matemático, determine:

a) O tempo que a modelo faz um movimento completo;

b) Qual a frequência da oscilação?

c) Qual o ângulo máximo atingido pela modelo nesse movimento?

d) Quantos movimentos completos a modelo realiza em 9 segundos?

e) Faça o esboço do gráfico desse movimento num período de 0 a 4 segundos.

Vale ressaltar que, todo o processo de análise e aplicação dos modelos estudados poderá ser utilizado pelo professor como meio de avaliação parcial dos estudantes em relação ao conteúdo curricular específico abordado (Função Afim e Funções Trigonométricas) dentro de um período letivo (um bimestre, por exemplo).

Para isso, tanto a participação como a resolução das questões pelos estudantes precisam ser acompanhadas de perto pelo professor a fim de auxiliá-los no que for preciso, seja na interpretação das situações apresentadas, seja na explicação de conceitos ou temas novos que porventura surjam nessas questões. Além disso, o modo como os resultados vão ser divulgados pelos estudantes é de vital importância para o fechamento dessa etapa do processo se a intenção do professor é utilizá-los como objeto de avaliação, o que, consequentemente, gerará um conceito ou uma nota parcial para os estudantes.

A divulgação dos resultados poderá ocorrer de variadas formas, podendo ser: a defesa de questões diante da turma; a entrega de trabalho escrito; exposição de painéis em sala de aula ou em alguma área da escola; participação em algum evento dentro da escola (por exemplo, uma feira de ciências, uma exposição sobre o tema específico, etc.); participação em algum evento fora da escola (congresso, simpósio, etc.); etc.

Diante desses dois exemplos (Função Afim e Funções Trigonométricas), ao apresentar o roteiro em etapas do processo de AnM, tem-se a convicção de que os temas discutidos são muito mais amplos, não se esgotam apenas com o que foi apresentado e nem as situações e modelos selecionados são os únicos que podem ser considerados. Dependendo do objetivo do professor, outras situações e outros modelos poderiam ser escolhidos. Além disso, na exploração dos modelos apresentados, muitas outras questões poderiam surgir no decorrer da implementação prática em sala de aula que, certamente, enriqueceriam ainda mais as aulas.

A ideia desses exemplos é apresentar previamente o modelo das atividades que compõem o Material de Apoio (Apêndice D) destinado ao professor de Matemática do Ensino Médio. Vale ressaltar que, não se trata de um material que se apresenta como uma receita estática ou engessada de uma proposta pedagógica, mas como um direcionamento, um guia que auxilie o professor de Matemática a exercer sua própria criatividade no planejamento das aulas, seguindo, contudo, os princípios apresentados como possível caracterização da AnM como método de ensino de Matemática para a Educação Básica.

Além disso, a elaboração desse Material de Apoio busca estabelecer uma relação viável e promissora entre o livro didático de Matemática do Ensino Médio, as questões de Matemática do ENEM e a AnM conforme os apontamentos indicados no capítulo 4. Nesse Material consta uma proposta para o desenvolvimento prático das etapas relativas ao método proposto (AnM) de alguns conteúdos específicos do Ensino Médio, os quais se distribuem em três unidades, sendo cada unidade voltada para o ensino de conteúdos da 1ª, 2ª e 3ª séries, respectivamente.

Diante de tudo que foi exposto até o momento, entende-se que a proposta central da presente pesquisa tem se evidenciado, pois uma perspectiva da AnM como método de ensino de Matemática para a Educação Básica tem sido construída solidamente. O procedimento natural que se apresenta agora é testar esse método na prática. Tal procedimento tem como finalidade principal avaliar sua viabilidade prática na sala de aula, especialmente em relação aos processos de ensino e de aprendizagem.

Esse, portanto, é o direcionamento dado no próximo capítulo, o qual busca descrever e analisar as ações/concepções de professores e estudantes acerca do método AnM com vistas a sua validação.

6 INTERVENÇÕES PEDAGÓGICAS: DESCRIÇÃO E ANÁLISES

> Excelência é uma arte obtida com o treinamento e o hábito. Só fazemos melhor aquilo que repetidamente insistimos em melhorar. [Portanto] a busca da excelência não deve ser um objetivo, e sim um hábito. (DURANT, 1996, p. 76).

No contexto educacional, ao concordar com a frase de Will Durant (1996) acima, entende-se que a busca do professor (em qualquer nível de ensino) por querer melhorar sempre mais sua prática pedagógica, e consequentemente melhorar a aprendizagem dos estudantes, deve ser um hábito contínuo na sua caminhada. É nesse sentido que esta pesquisa vem sendo construída, e chega ao presente capítulo com a proposta de descrever e analisar uma intervenção pedagógica prática, cuja finalidade última direciona-se ao incentivo e fortalecimento desse hábito.

Diante dessa perspectiva, o atual capítulo apresenta e discute os dados coletados a partir das ações pedagógicas realizadas (minicurso e prática na escola) com um grupo de professores e estudantes, cujo objetivo é legitimar tais ações e tentar responder ao problema geral da pesquisa: **De que modo professores de Matemática do Ensino Médio podem utilizar modelos matemáticos presentes nos livros didáticos e nas questões do ENEM, adaptados à perspectiva da Análise de Modelos, como método de ensino, a fim de elaborar e executar atividades de ensino em sala de aula?**

Para tanto, este capítulo está organizado em duas seções. Na primeira seção, são apresentados o contexto, planejamento e análise das ações pedagógicas referentes às ações de formação dos professores no que diz respeito ao método de ensino AnM, o que envolve tanto o minicurso como a prática deste na escola. Na segunda seção, a partir das categorias emergentes apontados pelos professores (questionário 2 – Apêndice B) e da opinião dos estudantes (questionário 3 – Apêndice C), é discutida a viabilidade e potencial da AnM como método para ensinar Matemática na Educação Básica no contexto educacional brasileiro vigente. Além disso, são destacadas nessa seção, as contribuições que um Material de Apoio baseado no método AnM pode trazer à prática dos professores no contexto da sala de aula.

6.1 SOBRE AS AÇÕES PEDAGÓGICAS DE FORMAÇÃO COM OS PROFESSORES

A etapa de aplicação do método de ensino AnM, como já destacado anteriormente, implica um dos objetivos centrais da presente pesquisa. Para isso, foi necessário que o grupo de professores participante dessa etapa da investigação fosse atendido com um aporte teórico-prático sobre o método, e assim, poder implementá-lo na sala de aula. A ideia de uma formação com esses professores, envolvendo o tema AnM, surgiu exatamente dessa necessidade e foi dividida basicamente em dois momentos: a realização de um minicurso sobre o método AnM; e, a aplicação prática do mesmo na escola.

Essa formação com os professores foi proposta como uma ação de extensão dentro de um projeto vinculado à PROCCE/UFOPA[54], promovido pelo GEPEIMAZ[55], do qual o pesquisador é integrante. O nome da ação foi intitulado "Análise de Modelos (AnM) como um método de ensino de Matemática" e teve uma carga horária total de 30 horas, sendo 16 horas destinadas à primeira parte da ação (minicurso), 12 horas à segunda parte (prática na escola) e 2 horas para o encontro de encerramento (avaliação). Tais ações estão descritas a seguir.

6.1.1 O minicurso

O minicurso ocorreu nos dias 28 e 30 de março de 2019, no Instituto de Ciências da Educação da UFOPA, desenvolvido durante quatro encontros de 4 horas cada. Esses encontros aconteceram nos períodos da manhã (de 8h às 12h) e tarde (de 14h às 18h). Ministrado pelo pesquisador, o minicurso buscou contemplar os seguintes pontos:

Ementa: Modelos matemáticos. Principais concepções sobre Modelagem Matemática. Aplicação de Modelos. Análise de Modelos.

Objetivo geral: Propor uma discussão e abordagem teórico-prática (operacional) de um método de ensino de Matemática na Educação Básica (Análise de Modelos - AnM), a princípio, voltado para o Ensino Médio.

Objetivos específicos: a) contribuir, de modo prático, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, favorecendo a melhoria da qualidade desses processos ao mesmo tempo que leva em conta o currículo exigido nesse nível de ensino; **b)** oferecer subsídios teóricos e práticos para os professores participantes, com o intuito de capacitá-los a compreender e diferenciar as propostas metodológicas de ensino apresentadas (Modelagem Matemática, Aplicação de Modelos e Análise de Modelos); **c)** apresentar aos professores, um Material de Apoio (piloto) baseado nos princípios do método AnM, visando auxiliá-los no planejamento e na implementação prática do método em sua própria sala de aula; **d)** validar/aperfeiçoar o Material de Apoio (piloto) elaborado pelo pesquisador (professor ministrante) por meio de avaliação dos professores participantes do minicurso; **e)** oportunizar aos participantes, que elaborem o seu

[54] Pró-Reitoria da Cultura, Comunidade e Extensão da Universidade Federal do Oeste do Pará.

[55] Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Interdisciplinaridade na Amazônia.

próprio material baseado no método AnM ou que adaptem o material proposto à sua própria realidade escolar.

Público-alvo: Professores de Matemática da rede pública de ensino que estivessem atuando no Ensino Médio.

Antes da exposição formal dos tópicos da ementa, iniciou-se um diálogo com alguns questionamentos. Sobre **Modelagem Matemática**, ao serem questionados se tinham conhecimento do método, os professores disseram que não. Dois deles afirmaram que só tinham ouvido falar quando responderam o questionário 1 (Apêndice A) em 2017, mas nunca desenvolveram de fato alguma atividade de Modelagem. Dez deles, porém, afirmaram que já tinham ouvido falar sobre esse método antes, mas também nunca haviam desenvolvido em sala de aula. Após a exposição dos primeiros tópicos (Modelos e Modelagem), três professores demonstraram surpresa, e compartilharam que já haviam realizado com seus alunos, atividades semelhantes às que foram apresentadas. Na concepção deles, tinham realizado (pelo menos em parte) atividades de Modelagem em sala de aula.

Na sequência da exposição, foi apresentado o tópico sobre **Aplicação de Modelos**, e aproveitou-se a oportunidade para discutir se as atividades realizadas pelos três professores eram realmente de Modelagem. De acordo com a base teórica construída no capítulo 3 (seção 3.1) da presente pesquisa, e apresentada nesse momento do encontro, os professores perceberam que essas atividades[56] seriam melhor classificadas como Aplicação de Modelos, pois ao realizarem as atividades, eles expressaram que os modelos matemáticos utilizados (expressões do seno, cosseno, tangente e combinação simples) já tinham sido definidos formalmente antes das atividades, e o objetivo era, basicamente, aplicá-los em alguma situação real, dando significado ao conteúdo estudado.

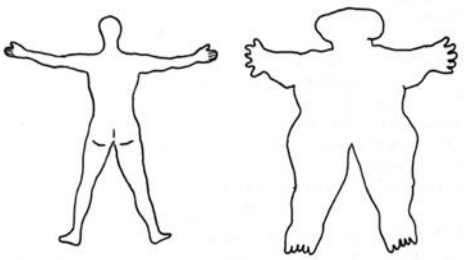
Na tentativa de construir um caminho para se chegar à **Análise de Modelos**, iniciou-se com uma atividade mais prática, denominada Atividade Investigativa 1 (Figura 10), a qual deveria ser realizada em grupos pelos professores[57]. Depois de formarem três grupos, foi distribuída para cada professor, uma folha de papel A4 com a atividade, onde constava uma situação relacionada com a Superfície Corporal de uma pessoa.

Figura 10: Atividade Investigativa 1

[56] Um desses professores narrou que havia realizado uma atividade com cartões da Mega-Sena para exemplificar Combinação Simples e os outros dois haviam realizado atividades, um para medir a altura de uma torre próxima à escola e outro para medir a altura de árvores dentro do terreno da escola como uma aplicação da Trigonometria no triângulo retângulo.

[57] São os doze professores, os quais serão identificados a partir daqui pelas letras maiúsculas **A**, **B**, **C**, ..., **L**.

Tema/assunto: *Área da Superfície Corporal de um indivíduo*[1]



Situação: A pele que recobre nosso corpo desempenha funções muito importantes. Ela tem participação ativa na manutenção da temperatura corporal, na eliminação de substância tóxicas geradas pelo próprio metabolismo do corpo e na proteção contra agressões do meio exterior. Um dos parâmetros mais utilizados por fisiologistas e médicos em geral é precisamente a *superfície corporal* (SC), ou seja, a área de um corpo, que é um dos objetos de pesquisa da *Alometria*[2]. Um desses estudos que relaciona a SC de um indivíduo e a temperatura do ambiente em que vive é conhecido como *Lei de Bergmann* (1847)[3].

A SC se refere a uma medida *antropométrica*[4] que pode relacionar dois dados principais de um indivíduo (*massa* e *altura*), e é de grande utilidade para determinar as doses exatas de um fármaco e para intervenções cirúrgicas onde é necessária a aplicação de anestesia. Essa medida (SC) também é utilizada com frequência por nutricionistas, fisioterapeutas e médicos esportivos para auxiliá-los no trabalho que realizam. Portanto, em determinadas situações é de fundamental importância saber quanto vale essa medida (SC) de um indivíduo. Você sabe qual a sua SC?

Informação 1: De acordo com estudos realizados[5], a superfície da sola do pé de uma pessoa representa aproximadamente 1% da superfície total do corpo (SC).

Problema: Como medir, aproximadamente, a área da SC de uma pessoa?

Tarefa: Montar e executar uma estratégia para calcular a SC de cada colega do grupo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para realizar a tarefa, foram disponibilizadas aos grupos algumas folhas de papel A4, réguas, trenas e fita métrica. Assim, depois de algumas discussões em torno das estratégias que seriam utilizadas pra resolver o problema, os grupos fizeram desenhos, medições e chegaram aos seguintes resultados (Tabela 3):

Tabela 3: Área da superfície corporal dos professores (em m^2)

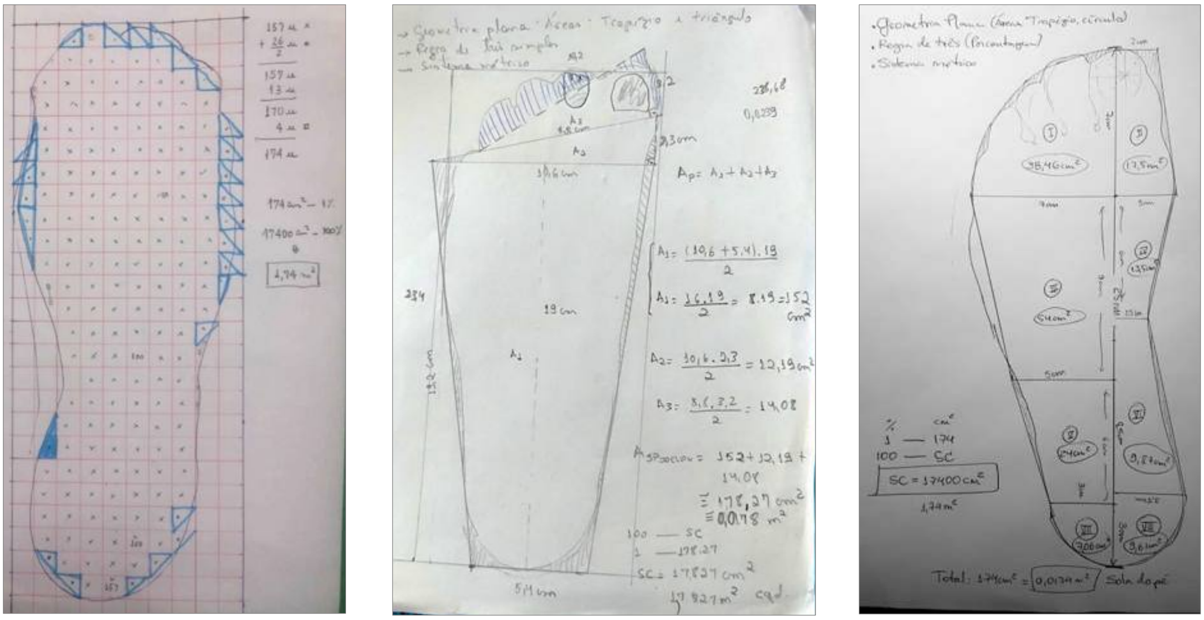
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1,65	1,92	2,21	1,78	1,78	1,50	1,75	1,74	1,56	1,74	1,65	1,55

Fonte: Elaborado pelo autor baseado nas informações dos professores.

Para chegar a esses valores, cada grupo montou estratégias diferentes, cujas ideias estão resumidas na figura abaixo (Figura 11).

Figura 11: Desenho da sola do pé de representantes dos grupos

grupo 1 **grupo 2** **grupo 3**



Fonte: Elaborado pelos professores.

Percebe-se que: o **grupo 1** desenhou um retângulo que circunscrevia o contorno do pé, e fez uma malha no retângulo, dividindo-o em quadrados com 1 cm de lado; o **grupo 2**, dividiu o desenho do pé em triângulos e semicírculos; por fim, o **grupo 3**, dividiu o desenho do pé em trapézios e semicírculos.

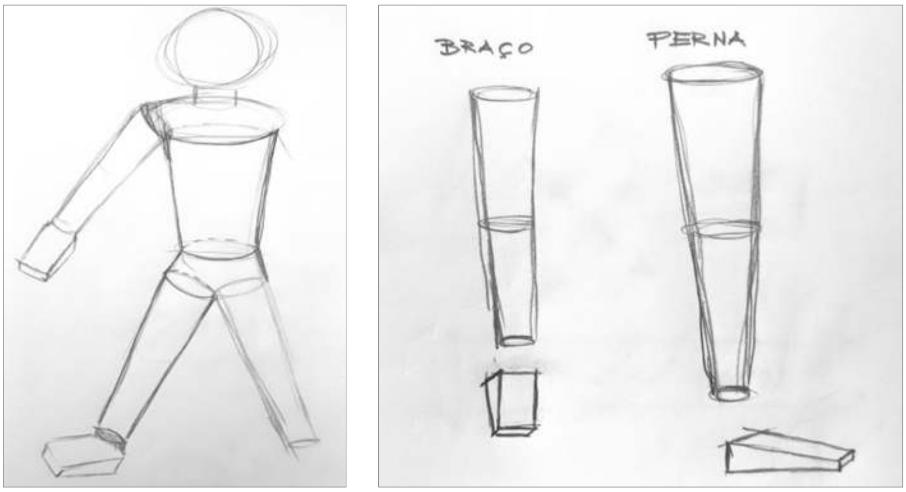
A partir da estratégia desenvolvida pelo grupo 1, surgiu uma ideia (do pesquisador) que não estava prevista. A ideia era tentar encontrar uma fórmula que calculasse a área SC em função do comprimento C e da largura L do retângulo onde o pé está inscrito. Nesse caso, C e L seriam, o comprimento e a largura do pé da pessoa que se quer medir a área. Como seria essa fórmula? Diante do desafio, após alguns minutos, um dos professores percebeu que bastava ver qual a porcentagem da área da sola do pé em relação à área do retângulo ($C \cdot L$). Para isso, realizaram alguns cálculos experimentais e concluíram que a área do pé era aproximadamente 70% da área do retângulo, e utilizando a informação 1, chegaram a fórmula $\text{SC} = \boldsymbol{70CL}$.

Fez-se, em seguida, uma breve discussão sobre a experiência. Percebeu-se que a maioria dos professores demonstrava certo entusiasmo, pois, segundo eles, era a primeira vez que participavam de uma atividade desse tipo (Modelagem). Destacaram como pontos positivos da atividade: a realização de experimentos reais (calcular a área da sola do pé); o resgate de conhecimentos prévios (área de figuras planas, porcentagem, etc.); a elaboração do modelo $\text{SC} = \boldsymbol{70CL}$; a participação nas tarefas; o envolvimento geral da turma.

Uma questão levantada na discussão girou em torno do uso da **informação 1** na resolução do problema. Foram feitas pelo pesquisador as perguntas: Caso não constasse essa informação, seria mais fácil ou mais difícil resolver o problema? Que relevância tem essa informação para a resolução do problema? Que estratégia poderia ser utilizada para resolver o problema, caso não constasse essa informação?

A resposta dos professores foi unânime no sentido de que a informação 1 apresentada na situação era sim, muito relevante, e facilitava a resolução do problema, pois além de se ganhar tempo na execução da tarefa, se limitava a calcular apenas a área da sola do pé. Quanto à estratégia que utilizariam para resolver o problema, indicaram que o corpo de uma pessoa poderia ser dividido em várias partes. Cada parte seria representada por algum sólido geométrico, como cilindro, tronco de cone, prisma e esfera. A cabeça, por exemplo, poderia ser representada por uma esfera; o pescoço, por um cilindro; o tronco, os braços e as pernas, por cilindros ou troncos de cone; as mãos e os pés, por prismas trapezoidais (Figura 12).

Figura 12: Modelo do corpo de uma pessoa



Fonte: Elaborado pelos professores.

Reforçaram, no entanto que, sem a informação 1 seria muito complicada a execução da tarefa, pois para encontrar a área da SC de cada um dos colegas, teriam que calcular a área de cada parte do corpo separadamente. Dessa forma, o modelo (Figura 12) teria muitas variáveis (perímetro de várias partes do corpo, por exemplo) o que não seria muito prático.

Logo em seguida, ao serem questionados sobre a implementação prática desse tipo de atividade (Modelagem) na sala de aula, os professores enfatizaram que, os estudantes gostam bastante, mas é muito difícil de realizar na escola por vários motivos, e destacaram: a falta de tempo para planejamento; a execução das tarefas toma muito tempo; a estrutura da escola não é adequada; falta material de apoio; há a exigência de cumprir o programa curricular; etc.

Seguindo as discussões nessa temática, foi destacado que suas percepções (dos professores) vêm ao encontro àquilo que várias pesquisas já têm apontado, que, mesmo atestando que a Modelagem é um método de ensino dinâmico e envolvente, têm identificado justamente essas, e outras dificuldades na sua implementação prática na sala de aula (capítulo 3, seção 3.3). Foi lembrado, no entanto, que, a proposta de ações como aquela (minicurso) que estava sendo desenvolvida no momento, era tentar discutir formas de amenizar tais dificuldades.

Assim, continuando a "caminhada" para se chegar à **Análise de Modelos**, em outro encontro foi proposta outra atividade, denominada Atividade Investigativa 2 (Figura 13), onde constava a mesma situação da Atividade Investigativa 1 (Superfície Corporal), só que agora, acrescida de mais uma informação.

Figura 13: Atividade Investigativa 2

Informação 1: De acordo com estudos realizados[5], a superfície da sola do pé de uma pessoa representa aproximadamente 1% da superfície total do corpo (SC).

Informação 2: Algumas fórmulas matemáticas já foram desenvolvidas para o cálculo da SC (m^2). Uma delas é a fórmula de *Mosteller* (1987)[6] que utiliza a *massa* M (kg) e a *altura* H (cm) da pessoa, e é expressa por:

$$\mathrm{SC}_M = \frac{\sqrt{M \cdot H}}{60}$$

Problema: Como medir, aproximadamente, a área da SC de uma pessoa?

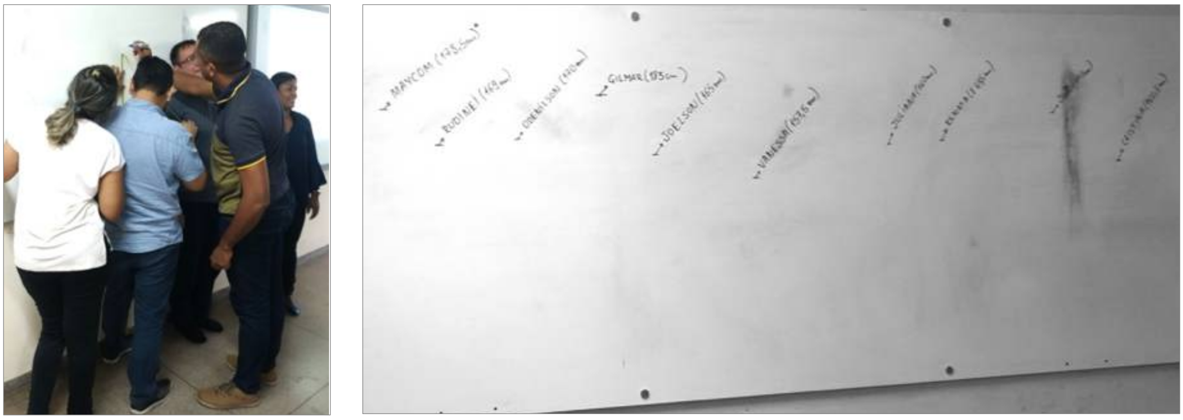
Tarefa: **a)** Montar e executar uma estratégia para calcular a SC de cada colega do grupo (Informação 1); **b)** Calcular a SC de cada colega do grupo pela fórmula de *Mosteller* (Informação 2); **c)** Analisar a confiabilidade da fórmula de *Mosteller*.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como o item **a** dessa nova tarefa já tinha sido feita na Atividade Investigativa 1, os professores foram orientados a realizar o item **b** da tarefa. Para isso, deviam fazer uso da informação 2 (fórmula de *Mosteller*) e precisavam saber a altura (em cm) e a massa (em kg) de cada professor, por isso, foi disponibilizada, além dos materiais já utilizados (réguas, trenas e fita métrica), uma balança digital portátil. Com isso, puderam medir a altura (Figura 14) e a massa de cada um dos professores[58].

Figura 14: Medição das alturas dos professores (em cm)

[58] Somente 10 professores participaram dessa atividade, os outros dois tiveram compromissos na escola.



Fonte: O autor.

De posse dessas medidas (altura e massa), cada professor pôde calcular a área de sua própria SC, cujos valores estão registrados na tabela a seguir (Tabela 4), junto com os valores obtidos inicialmente no item **a** da tarefa.

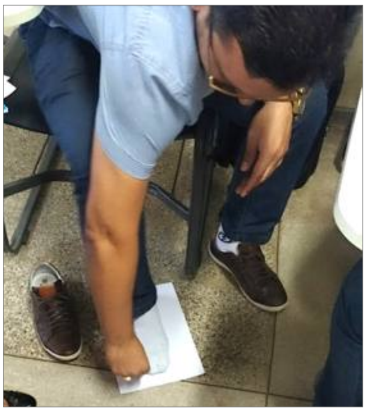
Tabela 4: Área da SC dos professores (em m^2) - dois modos de calcular

item	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
a)	1,65	1,92	2,21	1,78	1,78	1,50	1,75	1,74	1,56	1,74	1,65	1,55
b)	1,91	-	2,27	1,86	1,93	1,77	1,91	1,92	1,90	2,01	1,74	-

Fonte: Elaborado pelo autor baseado nas informações dos professores.

Ao compararem os dados da tabela 4, os professores perceberam logo que todos os valores encontrados pela fórmula de *Mosteller* (item **b**) eram maiores que os obtidos na primeira parte da tarefa (item **a**). Questionou-se, então: Onde teria ocorrido erro, na fórmula ou na experiência realizada (item **a**)? Como você desenhou o contorno do seu pé? Foi você mesmo ou foi um colega que desenhou pra você? Após alguns instantes de silêncio, um dos professores lembrou que eles mesmos haviam desenhado, e estavam sentados quando fizeram (Figura 15).

Figura 15: Um professor desenhando o contorno da sola do pé



Fonte: O autor.

Com isso, perceberam que o procedimento utilizado para desenhar a sola do pé pode ter prejudicado a medição correta, e consequentemente causado a diferença entre os valores. Assim, concluíram que uma pessoa que esteja em pé, o desenho da sola do seu pé é maior do que se estivesse sentada, pois em pé, há maior compressão na sola do pé, consequentemente, maior área.

Outro questionamento levantado (pelo pesquisador) foi o seguinte: É possível encontrar a mesma SC, pela fórmula de *Mosteller*, de dois indivíduos que tenham massas e alturas diferentes? Prontamente uma professora respondeu que sim, e afirmou que bastava o produto $M \cdot H$ ser igual para os dois indivíduos. Outro professor confirmou, dizendo que *"se o primeiro indivíduo tem massa maior que a do segundo indivíduo, necessariamente sua altura (primeiro indivíduo) deve ser menor que a do outro (segundo indivíduo)"*[59]. Como exemplo, uma outra professora chamou atenção para os registros no quadro, onde percebeu que, pela fórmula de *Mosteller*, dois dos colegas tinham encontrado a mesma área (1,91 m^2), e verificaram que o primeiro tinha $M \approx 81{,}84\ kg$ e $H \approx 160{,}5\ cm$, enquanto que o segundo colega tinha $M \approx 73{,}59\ kg$ e $H \approx 178{,}5\ cm$, o que confirmava a hipótese da primeira professora.

Foi enfatizado ainda (pelo pesquisador) que, a fórmula de *Mosteller* poderia ser utilizada para introduzir alguns conteúdos matemáticos do programa curricular, como por exemplo, a equação da parábola. Nota-se que a fórmula de *Mosteller* é uma expressão que representa uma função algébrica (irracional) de duas variáveis (massa e altura). Assim, considerando apenas os indivíduos com massa de 90 kg (ou outro valor) e substituindo as variáveis SC_M por y e H por x, a fórmula de *Mosteller* poderia ser expressa por $y^2 = \frac{1}{40}x$, que é a equação de uma parábola. Para se chegar a essa equação, os próprios estudantes poderiam ser incentivados a fazê-lo.

Para finalizar as discussões acerca da atividade (Atividade Investigativa 2), levantou-se um questionamento que girou em torno da pergunta: Diante do que foi exposto e discutido até o momento, o que fizemos, foi Modelagem ou Aplicação de Modelos? Como resposta: Três professores afirmaram que tinha sido Modelagem, pois o item **a** da tarefa (que fez uso da informação 1), além de proporcionar a realização de experimentos reais (cálculo da área da sola do pé), permitiu que elaborassem um modelo para a área da SC (SC = $\boldsymbol{70CL}$); Quatro professores apontaram que a atividade estaria mais próxima de Aplicação de Modelos devido à informação 2, pois já trazia um modelo pronto para a área da SC (Fórmula de *Mosteller*). O restante dos professores (três), no entanto, sinalizou que a atividade poderia ser classificada

[59] As falas dos professores serão expressas entre parênteses e em itálico para diferir de citações bibliográficas.

como algo intermediário à Modelagem e Aplicação de Modelos, uma vez que aparece um pouco de cada.

Diante de tais opiniões, aproveitou-se o momento para destacar a presença das informações extras (informação 1 e informação 2) na atividade e, voltando-se aos professores, enfatizou-se que a informação 1, como eles já haviam apontado antes, facilitava a resolução do problema proposto e otimizava o tempo no desenvolvimento da tarefa, o que não ocorreria caso não tivesse tal informação. Enfatizou-se ainda que, com a informação 2, a resolução do problema proposto se tornava ainda mais fácil e rápido. Além disso, destacou-se que, não só a informação 2 apresentava um modelo pronto (Fórmula de *Mosteller*), mas também a informação 1, sendo ela mesma, um modelo pronto dado de modo implícito (seção 5.2).

Assim, tomando como referência todas as discussões realizadas, desde a exposição do tema (Modelos, Modelagem e Aplicação de Modelos), passando pelas tarefas propostas nas duas atividades (Atividade Investigativa 1 e 2), e chegando às percepções apontadas pelos professores, ficou evidenciado para eles que esse tipo de atividade talvez não seja classificada como Modelagem, pelo menos em uma perspectiva mais formal do método (BASSANEZI, 2002), mas também não seria considerada uma simples Aplicação de Modelos, uma vez que os modelos apresentados (informação 1 e informação 2) não tinham a função de apenas ilustrar e/ou exemplificar um conteúdo já trabalhado, mas também introduzir e desenvolver um conteúdo novo, explorar e analisar um tema/assunto com auxílio da Matemática. Destacou-se, portanto, que atividades desse tipo poderiam ser melhor identificadas como **Análise de Modelos**, tópico explorado na sequência.

Na exposição desse tópico, foi explanado o contexto da proposta inicial desenvolvida pela professora Débora da Silva Soares (SOARES, 2012) e sua evolução (SOARES, 2015) acerca da Análise de Modelos. Destacou-se que, até então, essa abordagem havia sido aplicada basicamente no Ensino Superior, mas a proposta que se propôs nesta tese foi utilizá-la/adaptá-la na Educação Básica, como um método de ensino de Matemática.

De modo sintético, descreveu-se a trajetória acadêmico-profissional do pesquisador, desde o primeiro contato com a Modelagem até chegar à Análise de Modelos, e os eventos que instigaram o interesse pelo tema. Em seguida, apresentou-se o referencial utilizado para construir essa ideia, enfatizando uma proposta prática para desenvolver o método em sala de aula. Para isso, foi apresentado um Material de Apoio (piloto) com propósito de auxiliar o professor no planejamento e execução do método. Para exemplificar, apresenta-se a seguir (Figura 16), uma atividade extraída desse material (sugestão) que aborda Função Quadrática.

Figura 16: Atividade de Análise de Modelos (Função Quadrática)

CONTEÚDO CURRICULAR - 1º ANO

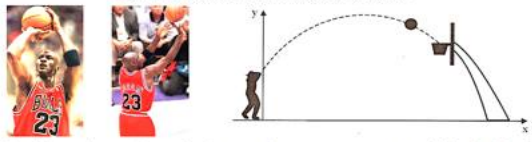
CC1.1 – FUNÇÃO QUADRÁTICA (POLINOMIAL DO 2º GRAU)

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Definição da função quadrática • Valor da função num ponto • Raízes da função quadrática • Gráfico da função quadrática • Vértice da parábola	• Conhecimentos algébricos • Conhecimentos algébricos/geométricos • Conhecimentos numéricos	C1 C5	H4 H19 H20, H21 H22, H23

1ª Etapa: Apresentação das situações-problema

» **Situação 1.1.1**: ***Basquete mágico!*** (DANTE, 2016a, p. 144, adaptado). Michael Jordan foi um dos maiores jogadores de basquete de todos os tempos. Jogou no Chicago Bulls pela NBA no período de 1984-1998, sendo campeão em seis temporadas. A figura a seguir ilustra o momento do lançamento de uma bola de basquete para a cesta feito por Jordan.

Figura 1: **Lançamento de uma bola de basquete**



Foi inserido um sistema de coordenadas cartesianas para representar a trajetória da bola, de modo que a altura y (em m) da bola é dada em função da distância horizontal x (em m) por:

Modelo 1 $\quad \boldsymbol{y = -0,1x^2 + 1,2x + 2,5}$

Possíveis questões 1.1.1: Que tipo de função é essa? E o gráfico da trajetória da bola, como se chama? Em relação ao eixo vertical (eixo Oy), o que ocorre com a bola antes de atingir a altura máxima? E quando ela atinge essa altura? E depois? Qual a altura máxima atingida pela bola nesse lançamento? Qual a posição da bola, na horizontal (eixo Ox), quando isso ocorre? etc.

» **Situação 1.1.2**: ***Construindo um galinheiro*** (IEZZI et al., 2016a, adaptado). Na comunidade Perema (14 km de Santarém na Av. Curuá-Uma (PA-370)), um pequeno criador de galinhas resolve construir um galinheiro retangular no seu terreno. Dispondo apenas de 30 m de tela, o homem decide aproveitar um velho muro como uma das laterais do galinheiro conforme a figura abaixo:

Modelo 2

Possíveis questões 1.1.2: De quantas maneiras é possível cercar esse galinheiro? A área obtida é sempre a mesma? É possível o galinheiro ter uma área de $112\ m^2$? Por quê? E $125\ m^2$? Por quê? Caso seja possível o galinheiro ter alguma dessas áreas ($112\ m^2$ ou $125\ m^2$), quais seriam as dimensões x e z? Quais as dimensões (x e z) que dão a maior área possível para esse galinheiro? Qual será essa área? etc.

» **Situação 1.1.3**: ***Vamos à praia?*** (ENEM – 2015, adaptado). A praia de Alter-do-Chão (figura abaixo) está entre as dez mais bonitas do Brasil. Localizada no oeste do Pará, é a primeira entre os dez lugares com as praias mais bonitas do Brasil, chamado de "Caribe brasileiro" pelo jornal inglês *The Guardian*. O jornal também aponta o lugar como o mais bonito do mundo com praias de águas doces. Perfeita para relaxar, a natureza foi bem generosa com a vila de pescadores, que pertence à cidade de Santarém. O cenário é paradisíaco (figura abaixo) e guarda uma beleza única, já que suas praias são às margens do Rio Tapajós.

Figura 2: **Praia de Alter-do-Chão**

Uma excursão à vila pode ser feita em pequenas embarcações, navegando as águas verde-azuladas do Rio Tapajós, saindo da orla de Santarém (à 38 km da vila aproximadamente).

Modelo 3 "Seu" Antônio é dono de uma dessas embarcações, cuja capacidade máxima é de 40 passageiros, e cobra para uma excursão (ida e volta) até a vila e arredores, *R*$ 60,00 de cada passageiro. Uma condição colocada por ele é que se não atingir a capacidade máxima da embarcação, cada passageiro deve pagar mais *R*$ 2,00 por lugar vago.

Possíveis questões 1.1.3: Como seria uma expressão matemática que permite calcular o valor a ser arrecadado em função do número de lugares vagos? Para as pessoas que vão numa excursão dessa, o ideal é que todos os lugares sejam ocupados, mas para o dono da embarcação

seria bom que não. Sendo assim, quantos lugares deveriam ser vagos para que o seu Antônio tenha a maior arrecadação possível? Qual é esse valor? etc.

» **Situação 1.1.4**: ***Vai um sorvete aí?*** (IEZZI et al., 2016a, adaptado). Devido o calor que faz em Santarém em quase todo o ano, um convite desses não é nada mal! Pensando nisso, foi que Ana resolveu abrir uma sorveteria na sua própria casa, no bairro Aparecida.

Figura 3: **Sorvetes da Ana**

No primeiro mês (agosto), quando o calor é mais intenso em Santarém, Ana observou que:

Modelo 4 Quando o preço do sorvete (de uma bola) é fixado em *R*$ 3,50, são vendidas 60 bolas por dia. Procurando aumentar sua arrecadação, Ana fez algumas reduções no preço da bola de sorvete que acarretaram um aumento nas vendas. Nessa relação entre preço e número de bolas de sorvete vendidos, ela pôde verificar que, para cada *R*$ 0,10 de desconto, o número de bolas de sorvete vendidos por dia aumentava em 4 unidades.

Possíveis questões 1.1.4: Ao analisar a situação, Ana ficou interessada em saber qual o preço a ser cobrado pela bola de sorvete que proporcionaria a maior receita possível, isto é, a receita máxima. Para que isso ocorra, qual o preço a ser cobrado pela bola de sorvete? Qual a quantidade de bolas de sorvete vendidas por esse preço? Qual a receita gerada nessas condições? Em termos gerais, como seria uma expressão matemática que dá a receita em função do desconto? etc.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

CC1.1 - Identificando variáveis

Na **S1.1.1**, considera-se um sistema de coordenadas cartesianas para representar a trajetória da bola, de modo que a variável $\boldsymbol{y}$ (em metros) indica a altura da bola em função de $\boldsymbol{x}$ (em metros), que é a distância na horizontal.

Na **S1.1.2**, os lados do galinheiro podem ser identificados pelas variáveis $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$ (em metros), sendo $\boldsymbol{x}$ a medida dos lados iguais. Já a área do galinheiro (retângulo) pode ser representada pela variável $\boldsymbol{y}$ (em m^2), cuja expressão será dada por $\boldsymbol{y = x \cdot z}$.

Na **S1.1.3**, podemos representar o número de lugares vagos pela variável $\boldsymbol{x}$, e o valor arrecadado pelo dono da embarcação por $\boldsymbol{y}$ (em reais).

Na **S1.1.4**, podemos considerar $\boldsymbol{x}$ como a variável que representa a quantidade de vezes que é dado o desconto de *R*$ 0,10 no preço fixado inicialmente na bola de sorvete (*R*$ 3,50), e $\boldsymbol{y}$, a receita diária.

CC1.1 - Realizando experimentos

Na **S1.1.1**, **a)** Sem realizar cálculos é possível determinar a altura da bola no momento do lançamento utilizando a expressão matemática acima. Encontrar essa altura; **b)** Sabendo que a altura oficial da cesta fica 3,05 m do chão, determinar a que distância da cesta (na horizontal) está o jogador; **c)** Calcular a altura que a bola atinge quando sua posição (projeção) no eixo x está a 2 m do jogador. Fazer o mesmo cálculo caso essa projeção esteja a 3 m ou a 4 m do jogador; **d)** Discutir maneiras de calcular a altura máxima que a bola pode atingir. Primeiramente por tentativas, realizando cálculos numéricos do tipo $y = f(a)$, onde a é um valor atribuído a x na expressão matemática $y = f(x)$, e depois, evidenciando a necessidade de conhecer o vértice da parábola; etc.

Na **S1.1.2**, **a)** Esboçar possibilidades de como cercar o galinheiro; **b)** Ao considerar os três lados do galinheiro que serão cercados, representando os lados iguais por x (metros) e o outro lado por z (metros), evidenciar a expressão matemática da área do galinheiro $y = f(x)$; **c)** Encontrar as dimensões do galinheiro pra que este tenha uma área de $112\ m^2$. Fazer o mesmo cálculo, supondo que o galinheiro tem uma área $125\ m^2$; **d)** A partir das possibilidades apresentadas no item a), estendê-las e realizar cálculos (por tentativas) a fim de tentar obter a área máxima do galinheiro (evidenciar a necessidade de conhecer o vértice da parábola); etc.

Na **S1.1.3**, **a)** Encontrar uma expressão matemática $y = f(x)$ que permite calcular o valor a ser arrecadado em função do número de lugares vagos. Uma sugestão é construir e preencher a tabela abaixo (Tabela 1); **b)** Para as pessoas que vão numa excursão dessa, o ideal é que todos os lugares sejam ocupados, mas para o dono da embarcação seria bom que não. Sendo assim, a partir da expressão matemática encontrada no item a), tentar calcular (por tentativas) o número ideal de lugares vagos deveria ter para que Seu Antônio tenha a maior arrecadação possível e tentar achar esse valor (evidenciar a necessidade de conhecer o vértice da parábola); etc.

Tabela 1: Expressão matemática $y = f(x)$ do Valor Total arrecadado por "Seu" Antônio

Nº de Lugares Vagos	Valor Individual	Valor Total
0	60	$40 \cdot 60$
1	$60 + 2 \cdot \mathbf{1}$	$(40 - \mathbf{1}) \cdot (60 + 2 \cdot \mathbf{1})$
2	$60 + 2 \cdot \mathbf{2}$	$(40 - \mathbf{2}) \cdot (60 + 2 \cdot \mathbf{2})$
3	....	....
4	....	....
5	....	....
⋮	⋮	⋮
x	....	....

Na **S1.1.4**, **a)** Encontrar uma expressão matemática $y = f(x)$ que permite calcular a receita gerada em função do desconto de x vezes do valor $R\$$ 0,10 no preço fixado inicialmente na bola de sorvete. Uma sugestão é construir e preencher a tabela abaixo (Tabela 2); **b)** Utilizando essa expressão matemática, tentar calcular (por tentativas) o valor do desconto em cada bola de sorvete para que se tenha a receita máxima; **c)** Utilizando os dados do item b), encontrar o preço a ser cobrado pela bola de sorvete visando achar a receita máxima, a quantidade de bolas de sorvete vendidas por esse preço e o valor da receita gerada nessas condições (evidenciar a necessidade de conhecer o vértice da parábola); etc.

Tabela 2: Expressão matemática $y = f(x)$ da Receita diária arrecadada por Ana

Nº de descontos	Valor Individual	Receita
0	3,50	$60 \cdot 3{,}50$
1	$3{,}50 - 0{,}10 \cdot \mathbf{1}$	$(60 + 4 \cdot \mathbf{1}) \cdot (3{,}50 - 0{,}10 \cdot \mathbf{1})$
2	$3{,}50 - 0{,}10 \cdot \mathbf{2}$	$(60 + 4 \cdot \mathbf{2}) \cdot (3{,}50 - 0{,}10 \cdot \mathbf{2})$
3	....	....
4	....	....
5	....	....
⋮	⋮	⋮
x	....	....

3ª Etapa: Resolução e desenvolvimento do conteúdo curricular

O conteúdo curricular deve ser desenvolvido de modo autônomo pelo professor, visando a resolução dos problemas levantados, conforme a necessidade emergente em cada situação.

Na **S1.1.1**, o modelo $\mathbf{y = -0,1x^2 + 1,2x + 2,5}$ é a expressão matemática de uma função quadrática, cujo gráfico (trajetória da bola) é uma parábola. Em relação ao eixo vertical (eixo Oy), a medida que a bola sobe, vai perdendo velocidade até parar, quando atinge a altura máxima. A partir daí ela começa a cair, aumentando sua velocidade até atingir o chão, devido a aceleração da gravidade (discutir o movimento no contexto da Física). **Desenvolver o conteúdo sobre função quadrática para: 1)** Identificar os coeficientes a, b e c da função $y = -0{,}1x^2 + 1{,}2x + 2{,}5$; **2)** Calcular, dessa função, os seguintes valores $y = f(0)$, $y = f(1)$, $y = f(2)$, $y = f(3)$ e $y = f(4)$; **3)** Calcular, dessa função, os valores de x tais que $f(x) = 3{,}05$, $f(x) = 5{,}25$ e $f(x) = 6{,}50$; **4)** Calcular a altura máxima atingida pela bola, representada pela

função $y = -0{,}1x^2 + 1{,}2x + 2{,}5$; 2) Calcular a posição da bola, na horizontal (eixo Ox), quando isso ocorre.

Na **S1.1.2**, há "infinitas" maneiras de cercar o galinheiro, obtendo, em geral, áreas diferentes. Essa área pode ser dada pela expressão matemática $y = -2x^2 + 30x$ (função quadrática) onde x é a medida do lado duplo do galinheiro como definido anteriormente. **Desenvolver o conteúdo sobre função quadrática para: 1)** Verificar se é possível o galinheiro ter uma área de $112\ m^2$ ou $125\ m^2$; **2)** Caso seja possível, calcular em cada situação, as dimensões x e z estabelecidas anteriormente; **3)** Calcular as dimensões (x e z) que dão a maior área possível para esse galinheiro; **4)** Calcular essa área.

Na **S1.1.3**, uma expressão matemática que permite calcular o valor y a ser arrecadado em função do número de lugares vagos x pode ser dada por $y = -2x^2 + 20x + 2400$, que é uma função quadrática. **Desenvolver o conteúdo sobre função quadrática para: 1)** Identificar os coeficientes a, b e c da função $y = -2x^2 + 20x + 2400$; **2)** Verificar se é possível o seu Antônio arrecadar $R\$$ 2500,00 ou $R\$$ 3000,00 nessa excursão; **3)** Caso seja possível, calcular em cada arrecadação, o número de lugares vagos; **4)** Calcular o número de lugares vagos para que o seu Antônio tenha a maior arrecadação possível; **5)** Calcular esse valor.

Na **S1.1.4**, uma expressão matemática que permite calcular a receita y em função do número x de descontos de $R\$$ 0,10 em cada bola de sorvete pode ser dada por $y = -0{,}4x^2 + 8x + 210$, que é uma função quadrática. **Desenvolver o conteúdo sobre função quadrática para: 1)** Identificar os coeficientes a, b e c da função $y = -0{,}4x^2 + 8x + 210$; **2)** Verificar, nessas condições, se é possível Ana ter uma receita diária de $R\$$ 240,00 ou $R\$$ 260,00 na venda de sorvetes; **3)** Caso seja possível, calcular em cada receita, o desconto dado em cada bola de sorvete; **4)** Calcular o preço a ser cobrado por Ana pela bola de sorvete a fim de obter a receita máxima e o número de bolas de sorvete vendidas por esse preço; **6)** Calcular a receita máxima.

4ª Etapa: Aplicação

CC1.1 - Questões de Aplicação

Q1. (C2/V1/q.38/p.108) Um biólogo desejava comparar a ação de dois fertilizantes. Para isso, duas plantas **A** e **B** da mesma espécie, que nasceram no mesmo dia, foram desde o início tratadas com fertilizantes diferentes. Durante vários dias ele acompanhou o crescimento dessas plantas, medindo, dia a dia, suas alturas. Ele observou que a planta **A** cresce linearmente, à taxa de 2,5 cm por dia; e a altura da planta **B** pode ser modelada pela função dada por $y = \frac{20x - x^2}{6}$,

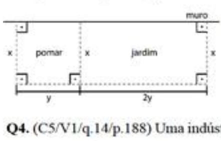
em que y é a altura (em cm) e x o tempo (em dias). Determine: **a)** A diferença entre as alturas dessas plantas com 2 dias de vida; **b)** A lei da função que representa a altura (y) da planta **A** em função de x (nº de dias)? **c)** O dia em que as duas plantas atingiram a mesma altura e qual essa altura; **d)** A taxa média de variação do crescimento das plantas **A** e **B** do dia 1 ao 4.

Q2. (C4/V1/q.40/p.123) Na construção de edifícios e monumentos, seja por propriedades estruturais ou por motivos estéticos, podemos observar a presença de forma que se assemelham a uma parábola. Algumas pontes, por exemplo, apresentam em sua estrutura um arco em forma de parábola. Observe o esquema ao lado de uma ponte sobre um rio cujo arco lembra uma parábola. Esse arco pode ser representado matematicamente pela função $y = f(x)$.

$y = -0{,}0021x^2 + 1{,}0563x$, na qual y representa a distância entre o nível do rio e o arco, e x representa a distância em linha reta a partir de uma das extremidades do arco no nível do rio, ambos em metros.

a) Supondo que uma pessoa escale a ponte representada no esquema, qual será a maior altura que ela poderá atingir, em relação ao nível do rio? **b)** Qual é a distância entre as extremidades do arco formado pela ponte, representada no esquema, no nível do rio?

Q3. (C2/V1/q.32/p.105) Um fazendeiro possui 150 m de um rolo de tela para cercar um jardim retangular e um pomar, aproveitando, como um dos lados, parte de um muro, conforme a figura:



a) Para cercar com tela a maior área possível, quais os valores x e y? **b)** E se não fosse possível aproveitar a parte do muro? Em que percentual ficaria reduzida a área da superfície limitada pelo jardim e pomar reunidos?

Q4. (C5/V1/q.14/p.188) Uma indústria têxtil vende diariamente 800 m^2 de certo tipo de tecido ao preço de $R\$$ 10,00 por metro quadrado. Uma pesquisa de mercado revelou que, para cada desconto de $R\$$ 0,04 por metro quadrado desse tecido, haveria um acréscimo diário de 5 m^2 nas vendas. Levando em consideração essa pesquisa, o departamento de vendas da indústria estabeleceu o preço por metro quadrado desse tecido para que a receita diária arrecadada com sua venda fosse máxima. **a)** Qual foi o preço estabelecido por metro quadrado desse tecido? **b)** Qual será a receita diária apurada com a venda desse tecido para o preço estabelecido?

Q5. (C1/V1/q.58/p.129) Num voo com capacidade para 100 pessoas, fretado para uma viagem turística, uma companhia aérea cobra $R\$$ 200,00 por pessoa quando todos os lugares são

ocupados. Se existirem lugares não ocupados, o preço de cada passagem será acrescido de $R\$$ 4,00 por cada lugar não ocupado. **a)** Determine a expressão matemática que dá a receita arrecadada por essa companhia (y) em função do número de lugares não ocupados (x); **b)** Quantos devem ser os lugares não ocupados para a receita ser máxima; **c)** Qual essa receita?

Q6. (ENEM – 2010.1) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia do processo. Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função $y = f(t)$, em que y é o valor da temperatura do forno (°C), e t o tempo (min), decorrido desde o instante que o forno é ligado.

$$y = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, & \text{para } 0 \le t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, & \text{para } t \ge 100 \end{cases}$$

Uma peça é colocada nesse forno quando a temperatura é 48 °C e retirada quando atinge 200 °C. Quanto tempo a peça permanece no forno?

Fonte: Elaborado pelo autor - Material de Apoio (piloto).

Outros exemplos foram apresentados e discutidos. Foi enfatizado, no entanto, que esse Material de Apoio (piloto) ainda estava em processo de construção e aperfeiçoamento, e não se tratava de uma receita estática de uma proposta pedagógica, mas de um guia que tinha a intenção de auxiliar o professor a exercer sua criatividade no planejamento das aulas. Com isso, os professores foram incentivados a ler e avaliar cuidadosamente o Material, para que no momento oportuno, pudessem compartilhar com o grupo suas percepções (primeiras impressões, críticas e sugestões etc.). A partir das falas dos professores (no último encontro - 13/04/2019), e das respostas ao questionário 2, apareceram sugestões relevantes que contribuíram para a melhoria e aperfeiçoamento do Material de Apoio (Apêndice D). Mais adiante, na subseção 6.2.2, serão destacadas essas sugestões.

6.1.2 A prática do método AnM na escola

A prática do método AnM pôde ser realizada pelos professores de oito escolas[60], sendo duas federais e seis estaduais. A seguir, é apresentado um quadro (Quadro 24) onde consta o número de estudantes do Ensino Médio matriculado em 2018, em cada uma das escolas.

Quadro 24: Quantidade de estudantes do Ensino Médio por escola

Escola	Número de estudantes matriculados
$\mathcal{E}_1$	934
$\mathcal{E}_2$	573
$\mathcal{E}_3$	285
$\mathcal{E}_4$	1363
$\mathcal{E}_5$	465
$\mathcal{E}_6$	224
$\mathcal{E}_7$	377
$\mathcal{E}_8$	146

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do Censo Escolar de 2018[61].

De acordo com o cronograma proposto na ação de extensão, a prática do método AnM na escola, pelos professores, deveria ocorrer durante as duas primeiras semanas de abril/2019 (01/04 a 05/04 e 08/04 a 12/04). Cinco professores, no entanto, só puderam realizar nas semanas seguintes devido alguns fatores (conclusão de conteúdos com as turmas, realização de provas, fechamento do bimestre, etc.). Assim, sete professores aplicaram nas duas primeiras semanas

[60] Essas escolas serão identificadas por $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_2$, ..., $\mathcal{E}_8$.
[61] Disponível em: https://www.melhorescola.com.br/. **Acesso em**: 30 mai. 2019.

de abril, e os outros cinco, nas três semanas seguintes. Para esses cinco professores, porém, foi solicitado que ao aplicarem o método, fizessem um breve relato da experiência e entregassem junto com o questionário 2 (Apêndice B).

Após definirem as turmas/séries, conteúdos, dias e horários, os professores[62] repassaram as informações ao pesquisador, que organizou o quadro abaixo (Quadro 25).

Quadro 25: Cronograma das aulas práticas do método AnM na escola

	PROFESSOR	TURMA	CONTEÚDO	ESCOLA	DIA/HORÁRIO
01	A	2º ANO (**M**)	Trigonometria no Triângulo Retângulo	$\mathcal{E}_6$	**4ª SEMANA:** **24/04** (quarta) >>> 8:35 às 10:10 (2 aulas) **26/04** (sexta) >>> 7:15 às 8:35 (2 aulas)
02	B	3º ANO (**M**)	Geometria Espacial	$\mathcal{E}_2$	**4ª SEMANA:** **23/04** (terça) >>> 9:00 às 10:30 (2 aulas) **5ª SEMANA:** **30/04** (terça) >>> 9:00 às 10:30 (2 aulas)
03	C	1º ANO (**V**)	Geometria Plana	$\mathcal{E}_8$	**4ª SEMANA:** **23/04** (terça) >>> 13:15 às 14:35 (2 aulas) **25/04** (quinta) >>> 14:35 às 15:55 (2 aulas)
04	D	1º ANO (**N**)	Função Quadrática	$\mathcal{E}_1$	**3ª SEMANA:** **15/04** (segunda) >>> 18:40 às 20:00 (2 aulas) **16/04** (terça) >>> 19:20 às 20:55 (2 aulas)
05	E	1º ANO (**V**)	Função Afim	$\mathcal{E}_4$	**1ª SEMANA:** **01/04** (segunda) >>> 14:35 às 16:10 (2 aulas) **03/04** (quarta) >>> 13:15 às 14:35 (2 aulas)
06	F	2º ANO (**V**)	Análise Combinatória	$\mathcal{E}_5$	**2ª SEMANA:** **09/04** (terça) >>> 14:35 às 16:10 (2 aulas) **11/04** (quinta) >>> 16:50 às 18:10 (2 aulas)
07	G	2º ANO (**M**)	Sistemas Lineares	$\mathcal{E}_2$	**3ª SEMANA:** **16/04** (terça) >>> 7:30 às 9:00 (2 aulas) **4ª SEMANA:** **23/04** (terça) >>> 7:30 às 9:00 (2 aulas)
08	H	2º ANO (**M**)	Análise Combinatória	$\mathcal{E}_7$	**2ª SEMANA:** **08/04** (segunda) >>> 7:15 às 8:35 (2 aulas) **10/04** (quarta) >>> 10:10 às 11:30 (2 aulas)
09	I	3º ANO (**N**)	Medidas de Tendência Central	$\mathcal{E}_4$	**2ª SEMANA:** **09/04** (terça) >>> 18:40 às 20:00 (2 aulas) **11/04** (quinta) >>> 18:00 às 19:20 (2 aulas)
10	J	1º ANO (**M**)	Função Quadrática	$\mathcal{E}_3$	**1ª SEMANA:** **04/04** (quinta) >>> 10:45 às 12:15 (2 aulas) **2ª SEMANA:** **11/04** (quinta) >>> 10:45 às 12:15 (2 aulas)
11	K	1º ANO (**N**)	Trigonometria no Triângulo Retângulo	$\mathcal{E}_3$	**2ª SEMANA:** **09/04** (terça) >>> 18:30 às 20:00 (2 aulas) **3ª SEMANA:** **16/04** (terça) >>> 18:30 às 20:00 (2 aulas)
12	L	2º ANO (**M**)	Geometria Plana	$\mathcal{E}_3$	**1ª SEMANA:** **01/04** (segunda) >>> 9:00 às 10:30 (2 aulas) **2ª SEMANA:** **08/04** (segunda) >>> 9:00 às 10:30 (2 aulas)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Devido às condições logísticas impostas a partir do cronograma acima (Quadro 25), foi possível acompanhar a prática de seis professores[63], de quatro escolas[64], das três séries do Ensino Médio. A observação dessa prática teve papel fundamental na percepção/convicção (do pesquisador) quanto à relevância da proposta desta pesquisa, que, em última análise, intenta contribuir (nem que seja com um pequeno "grão") para a melhoria da qualidade do ensino de Matemática no contexto educacional brasileiro.

No decorrer das aulas observadas, buscou-se identificar na prática, os três princípios essenciais apontados (no capítulo 5) como caracterização central do método AnM, tendo em

[62] São os doze professores identificados pelas letras maiúsculas **A**, **B**, **C**, ..., **L**.

[63] Foram os professores **E**, **F**, **H**, **I**, **J** e **L**.

[64] Da escola $\mathcal{E}_4$ foram acompanhados dois professores (**E**, **I**), da escola $\mathcal{E}_3$, foram dois professores (**J**, **L**), da escola $\mathcal{E}_5$, foi um professor (**F**) e da escola $\mathcal{E}_7$, também foi um professor (**H**).

vista, a percepção de influências (positivas) desses no processo educativo. O **uso de situações-problema** para iniciar as aulas é um desses princípios, o qual é apresentado inicialmente (no capítulo 5) com potencial de possibilitar a exploração e **desenvolvimento do conteúdo curricular** (outro princípio) por meio do **uso de modelos matemáticos prontos** (outro princípio) relacionados aos temas/assuntos propostos nas situações. De acordo com a proposta, esses princípios também podem oportunizar a exploração/discussão de conteúdos não curriculares (temas transversais, da atualidade, de outras áreas do conhecimento, etc.).

Diante desse direcionamento, inicia-se uma breve descrição dos principais momentos observados, destacando que os seis professores acompanhados durante a aplicação do método AnM fizeram uso de alguma situação para introduzir o conteúdo novo. Com poucas mudanças, cinco deles tomaram como fonte principal para a escolha das situações, o Material de Apoio (piloto) que havia sido disponibilizado no minicurso. O único professor (**L**) que não utilizou nenhuma situação do Material, elaborou uma situação especifica para sua turma, que será comentada mais adiante.

O professor **E**, por exemplo, para introduzir o estudo de Função Afim em uma turma de 1º ano, fez uso da situação "Quanto você calça?" (Figura 17), e explorou o tema/assunto a partir de um modelo matemático que permite calcular o número do pé conhecendo seu comprimento.

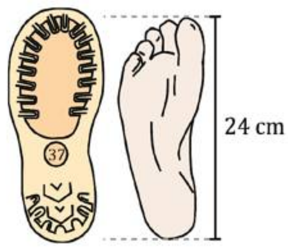
Figura 17: Situação-problema: estudo de Função Afim

≫ **Situação 1.5.3**: ***Quanto você calça?*** (SMOLE; DINIZ, 2016a, p. 76). A numeração usada na confecção de sapatos depende (é **função**) do comprimento do pé das pessoas. Os fabricantes de calçados brasileiros usam a fórmula:

Modelo 15

$$\boldsymbol{N} = \frac{\mathbf{5}\boldsymbol{c} + \mathbf{28}}{\mathbf{4}}$$

onde $\boldsymbol{c}$ representa o comprimento do pé (em cm) e $\boldsymbol{N}$, o número do calçado. Observe a seguir a figura de um pé, onde consta o seu tamanho e o número do sapato correspondente:



Fonte: Elaborado pelo autor - Material de Apoio (piloto).

A partir desse modelo, o professor **E** propôs aos estudantes várias tarefas que podem ser destacadas, como por exemplo: a medição do tamanho do pé; cálculo numérico, substituindo os valores encontrados do tamanho do pé, para encontrar o número do calçado; comparação dos resultados obtidos pelo modelo e o número real do pé; discussão sobre as diferenças entre os valores encontrados por meio do modelo e os valores reais; simplificação do modelo para $N = 1{,}25c + 7$ com vistas a identificá-lo com a expressão $y = mx + n$ (expressão geral da Função Afim); representação de pontos (c, N), obtidos pelos próprios estudantes, em um plano cartesiano com objetivo de perceberem o gráfico da Função Afim (reta); discussão em torno da quantidade de pontos necessários para a construção de uma reta; etc.

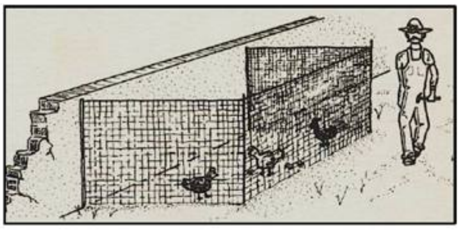
Trabalhando em duplas, a maioria dos estudantes dessa turma demostrava interesse, participando com perguntas, indo ao quadro quando solicitado pelo professor, chamando o professor para esclarecimento de dúvidas sobre as tarefas, etc. Apesar do não envolvimento de alguns estudantes, percebeu-se um ambiente de interação, não só entre os estudantes, mas entre estudantes e o professor (que era bem dinâmico).

O professor **J**, para introduzir o estudo de Função Quadrática em uma turma de 1º ano (Técnico Agropecuária), utilizou-se da situação “Construindo um galinheiro” (Figura 18).

Figura 18: Situação-problema: estudo de Função Quadrática

≫ Situação 1.1.2: ***Construindo um galinheiro*** (IEZZI et al., 2016a, adaptado). Na comunidade Perema (14 km de Santarém na Av. Curuá-Uma (PA-370)), um pequeno criador de galinhas resolve construir um galinheiro retangular no seu terreno. Dispondo apenas de 30 m de tela, o homem decide aproveitar um velho muro como uma das laterais do galinheiro conforme a figura abaixo:

Modelo 2



Fonte: Elaborado pelo autor - Material de Apoio (piloto).

Depois da turma formar grupos com três ou quatro estudantes, o professor **J** propôs algumas tarefas, a partir do modelo acima, incentivando os estudantes a explorarem a situação de forma mais autônoma possível, preparando-os para o desenvolvimento formal do conteúdo. A sequência de tarefas proposta pelo professor parecia indicar um roteiro sistemático na construção do conhecimento, do conteúdo curricular. Essa sequência de tarefas foi apresentada na forma de perguntas e organizada (pelo pesquisador) no quadro abaixo (Quadro 26), evidenciando ao lado de cada tarefa, a ação de aprendizagem esperada que o estudante alcance.

Quadro 26: Roteiro de uma sequência de tarefas proposta pelo professor **J**

Sequência de tarefas (proposta do professor)	**Ações de aprendizagem** (percepções do pesquisador)
1 - De quantas maneiras é possível cercar esse galinheiro?	Resgate conteúdo básico de geometria: retângulo; perímetro.
2 - A área obtida é sempre a mesma?	Resgate conteúdo básico de geometria: área de retângulo.
3 - Considerando que x é a medida dos dois lados iguais do galinheiro e z é a medida do outro lado, que expressão matemática representa o perímetro do cercado desse galinheiro?	Resgate conteúdo básico de álgebra: multiplicação de número real por uma incógnita; soma algébrica.
4 - Considerando que y indica a área do galinheiro, que expressão matemática representa essa área em função de x e z?	Resgate conteúdo básico de álgebra: multiplicação algébrica.
5 - Que expressão matemática (função real) representa a área y do galinheiro em função apenas do lado x?	Resgate conteúdo básico de álgebra: multiplicação e soma algébrica; trinômio de 2º grau. Identifica novo conteúdo: Função Quadrática – definição.
6 - É possível o galinheiro ter uma área de $112\ m^2$? Se sim, quais as dimensões de seus lados? Se não, por quê?	Resgate conteúdo básico de álgebra: Equações de 2º grau – identificação, resolução e interpretação.
7 - É possível o galinheiro ter uma área de $125\ m^2$? Por quê? Se sim, quais as dimensões de seus lados? Se não, por quê?	Resgate conteúdo básico de álgebra: Equações de 2º grau – identificação, resolução e interpretação.
8 - Como é o gráfico dessa função? (representar vários pontos (x, y) extraídos dos próprios experimentos realizados pelos estudantes)	Identifica novo conteúdo: Função Quadrática – representação de pares ordenados em um plano cartesiano, esboço gráfico e estudo da parábola.
9 - Quais as dimensões x e z que dão a área maior possível para o galinheiro?	Identifica novo conteúdo: Função Quadrática – resolução e interpretação de problemas de otimização.
10 - Qual será essa área?	Identifica novo conteúdo: Função Quadrática – resolução e interpretação de problemas de otimização.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os professores **F** e **H**, em turmas de 2º ano, desenvolveram o mesmo conteúdo, isto é, Análise Combinatória (Combinação Simples). Para isso, o professor **F** fez uso das situações "Vai uma pizza aí?"[65] e "Quem quer ser um milionário?" (distribuiu para os estudantes uma folha com as duas situações), enquanto que o professor **H**, utilizou apenas essa segunda situação (fez uso de *Datashow* para apresentar a situação à turma).

[65] Nessa situação, ao invés de usar cinco sabores disponíveis, o professor apresentou somente quatro, para facilitar o desenvolvimento da tarefa proposta em seguida.

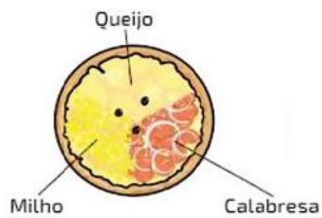
A partir do modelo proposto (Figura 19), o professor **F** introduziu o conteúdo, lendo e comentando a situação (com participação intensa da maioria dos estudantes), em seguida perguntou qual o número de possibilidades de pizzas diferentes com três sabores era possível montar, escolhendo entre os quatro disponíveis.

Figura 19: Situação-problema: estudo de Combinação Simples 1

≫ **Situação 2.2.1**: ***Vai uma pizza aí?*** (SOUZA; GARCIA, 2016b, p. 111, adaptado). Você sabe quem inventou a pizza? Seus criadores foram mesmo os italianos. Mas existem várias hipóteses para explicar a chegada do ancestral da pizza à Itália. A principal delas conta que, três séculos a.C., os fenícios costumavam acrescentar ao pão redondo e chato como um disco coberturas de carne e cebola. A mistura também foi adotada pelos turcos, que preferiam cobertura à base de carne de carneiro e iogurte fresco. “Durante as Cruzadas, no século 11, o pão turco foi levado para o porto italiano de Nápoles”, conta o sociólogo Gabriel Bollaffi, da USP. Os napolitanos tomaram gosto pelo petisco e foram aperfeiçoando-o com trigo de boa qualidade para a massa e coberturas variadas, especialmente queijo. Nascia, então, a pizza quase como a conhecemos hoje. Faltava só o tomate, introduzido na Itália no século 16, vindo da América, e incorporado como ingrediente tão básico quanto o queijo. A mais antiga pizzaria que se conhece está em Nápoles e foi fundada em 1830. A pizza margherita também surgiu nessa cidade, em 1889, feita de encomenda para o rei Umberto I e a rainha Margherita.[1]

Em Santarém, uma das pizzarias mais visitadas é a pizzaria Bom Pão, que oferece pizzas comuns e especiais. Para as pizzas comuns, o *pizzaiolo* tem à sua disposição ingredientes para fazer pizzas em 5 sabores: Atum (A); Queijo (Q); Calabresa (C); Milho (M); Portuguesa (P).

Modelo 21 A fim de atender a preferência dos clientes, a pizzaria oferece até três sabores na pizza grande, de modo que cada possibilidade pode ser expressa por uma terna. Um exemplo disso é a terna $\{Q, M, C\}$, que representa uma dessas possibilidades, ilustrada por:



Fonte: Elaborado pelo autor - Material de Apoio (piloto).

Para responder à pergunta, o professor **F** orientou os estudantes (em duplas) a realizarem de início a seguinte tarefa: Exibir, conforme o exemplo apresentado no modelo (Figura 19), todas as possibilidades de pizzas com três sabores, escolhidos entre os quatro disponíveis. Durante a realização da experiência, alguns estudantes logo perceberam que as possibilidades do tipo $\{Q, M, C\}$ e $\{Q, C, M\}$ representavam a mesma pizza. Além disso, com orientação do professor, os estudantes perceberam que cada terna (por exemplo, $\{Q, M, C\}$), fazendo troca da posição dos sabores, indicava seis possibilidades (permutações de 3 elementos - assunto já conhecido dos estudantes), mas que na realidade representava a mesma pizza.

Assim, após algumas discussões, interação e participação (estudantes), percebeu-se que os estudantes (pelo menos metade da turma) haviam compreendido que o total de possibilidades de pizzas de três sabores, escolhidos entre os quatro disponíveis, era 4, e que o cálculo para se chegar a esse número poderia ser feito a partir da expressão $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!}$. A fim de reforçar esse entendimento dos estudantes, o professor **F** propôs tarefas diretas (apenas dialogando) a partir da situação inicial com pequenas mudanças. Um exemplo, foi pedir que eles calculassem o número de pizzas diferentes com três sabores, escolhendo entre 5 (fez o mesmo, considerando 6 e 7 sabores). Outro exemplo, pedia a mesma tarefa, mas agora, para pizzas com quatro sabores, escolhidos entre 5, 6 e 7.

Em seguida, o professor chamou a atenção dos estudantes para a outra situação, "Quem quer ser um milionário?" (Figura 20).

Figura 20: Situação-problema: estudo de Combinação Simples 2

≫ **Situação 2.2.2**: ***Quem quer ser um milionário?*** (SOUZA; GARCIA, 2016b, p. 97, adaptado). Esse é o título de um filme vencedor do Oscar em 2009. Lembra dele? Conta a história de um jovem indiano, Jamal Malik, órfão e pobre que começa a viver na rua junto com seu irmão, Salim, depois da morte da mãe num ataque étnico, que num golpe de sorte consegue participar de um programa de televisão sensação no seu país que dá como prêmio máximo até 20 milhões de rúpias. Jamal participa do programa e consegue ganhar esse prêmio.

E você, já sonhou em se tornar um milionário? Muitos brasileiros ficam empolgados com essa ideia e arriscam a sorte nas loterias organizadas pela Caixa Econômica Federal. Para ganhar na loteria e tornar esse sonho uma realidade, no entanto, é preciso muita sorte. Muita sorte mesmo!

A *Mega-Sena*, por exemplo, é uma dessas modalidades de loteria, cujo prêmio varia conforme o sorteio. Para apostar é preciso escolher no mínimo 6 e no máximo 15 números, dentre 60 disponíveis. Ganha o prêmio máximo (sena), quem acertar os 6 números sorteados. Se acertar 5 ou 4 números, o apostador também recebe prêmios, porém menores. Na *Quina*, um apostador marca de 5 a 15 números dentre 80 disponíveis no volante, podendo ganhar prêmios os acertadores de 2 a 5 números. Já na *Lotofácil*, marcam-se de 15 a 18 números, dentre 25 disponíveis no volante, e faturam prêmios os apostadores que acertarem de 11 a 15 números.

Modelo 22 Chances de se ganhar o prêmio máximo nessas loterias com uma aposta mínima:

Fonte: Elaborado pelo autor - Material de Apoio (piloto).

Após ler e discutir a situação com os estudantes, o professor **F** propôs uma tarefa específica sobre a Mega-Sena, perguntando: *"Qual o número de jogos simples (com 6 números) é possível fazer?"* Com a orientação do professor, alguns estudantes logo perceberam que a resolução desse problema era semelhante ao da pizza. Concluíram, ao final das discussões, que a resposta à pergunta seria encontrada a partir da expressão $\frac{60\cdot59\cdot58\cdot57\cdot56\cdot55}{6!}$, cujo resultado era $50\,063\,860$. A partir daí o professor propôs outras tarefas envolvendo a Mega-Sena onde se discutiu outras possibilidades de jogos (com 7 e 8 números), a inviabilidade financeira em fazer uma aposta com todos os jogos possíveis, etc. Outras tarefas, envolvendo as loterias, Quina e a Lotofácil, foram propostas em seguida como atividades de aplicação.

O professor **H**, ao apresentar essa mesma situação (Figura 20), distribuiu para os estudantes (que estavam em grupos de dois e três) cartelas recentes da Mega-Sena, e pediu que fizessem jogos (simulação), a fim de se familiarizarem com o tema/assunto. O professor também aproveitou as informações no verso das cartelas para discutir, principalmente, questões relativas à fórmula de arrecadação pelo governo e a destinação social dos recursos arrecadados.

Ressalta-se que esse professor (**H**), assim como o professor **F**, desenvolveu com os estudantes basicamente o mesmo argumento, isto é, fez os estudantes perceberem que o total de possibilidades de jogos simples diferentes ($50\,063\,860$ cartelas) poderia ser encontrado a partir da expressão $\frac{60\cdot59\cdot58\cdot57\cdot56\cdot55}{6!}$. Um diferencial, porém, que pôde ser percebido na ação desse professor (**H**) foi a ênfase dada à diferença entre esse tipo de agrupamento (apresentado nesse momento como Combinação Simples) e Arranjo Simples (já estudado em aula anterior). Com isso, o professor chamou a atenção dos estudantes para a expressão acima, lembrando que o produto $60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55$ era, na prática, o arranjo simples $A_{60,6}$, e 6!, a permutação simples P_6. Portanto, a Combinação Simples de 60 elementos tomados 6 a 6, nesse caso, pode ser dada pela expressão $C_{60,6} = \frac{A_{60,6}}{6!}$, que de modo geral, seria $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$, concluiu o professor.

A partir daí o professor **H** levantou algumas questões envolvendo o preço dos jogos da Mega-Sena. Destacou: *"Sabe-se que um jogo simples (com 6 números) custa* $R\$3{,}50$. *Quanto custa cada jogo, marcando 7, 8, 9, ..., 15 números?"* (pediu que os estudantes pesquisassem na internet); Após encontrarem os valores, o professor questionou o por quê desses jogos (com 7, 8, 9, ..., 15 números), custarem, respectivamente, $R\$24{,}50$, $R\$98{,}00$, $R\$294{,}00$, ..., $R\$17517{,}50$ cada. Após discussões, o professor levou os estudantes a perceberem que ao marcar 7 números, por exemplo, as chances de acertar 6, aumentavam 7 vezes, pois o que se tinha era um subproblema de Combinação Simples, onde seriam escolhidos 6 números dentre 7 disponíveis. Em outras palavras, as chances aumentavam nesse caso, $C_{7,6} = 7$ vezes. Assim, se marcar 8 números, as chances aumentam $C_{8,6} = 28$ vezes, se marcar 9 números, as chances aumentam $C_{9,6} = 84$ vezes, e assim por diante. Quando se multiplica $R\$3{,}50$ (que o valor de um jogo simples) por 7, 28 e 84 tem-se exatamente os valores acima. Com isso, o professor generalizou o total de chances nos jogos da Mega-Sena, conforme a quantidade de números a serem marcados m (de 6 a 15) com o modelo $C_{m,6} = \frac{A_{m,6}}{6!}$ para representar esse fenômeno. A partir daí o professor propôs algumas outras tarefas envolvendo o valor a ser pago por todos os jogos possíveis da Mega-Sena (com 7, 8 e 9 números), visando a discussão da inviabilidade das apostas. Também propôs tarefas semelhantes para as outras loterias (Quina e Lotofácil).

No decorrer das aulas, tanto do professor **F** como do professor **H**, percebeu-se que a maioria dos estudantes teve participação significativa na construção e compreensão das ideias acima descritas. Além disso, o ambiente proporcionado pelas situações propostas, facilitava o diálogo e a interação, além de incentivar a participação dos estudantes na construção do próprio conhecimento (conteúdo curricular). Essa percepção pôde ser notada também nas aulas dos outros dois professores (**I** e **L**).

No caso do professor **I**, para desenvolver o conteúdo *Medidas de Tendência Central* (Média Aritmética Simples e Ponderada), em uma turma de 3º ano, ele aproveitou a situação "Você está preparado para o ENEM?" (Figura 21) do Material de Apoio (piloto).

Figura 21: Situação-problema: estudo de *Médias Simples e Ponderada*

≫ **Situação 3.1.1**: ***Você está preparado(a) para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)?*** (SOUZA; GARCIA, 2016c, ampliado). O ENEM foi criado em 1998, pelo Ministério da Educação (MEC), com o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica e da qualidade do ensino no nosso país. Atualmente, o ENEM é a principal forma de ingresso no ensino superior, e é por meio desse exame que estudantes (concluintes do Ensino Médio) podem participar de programas criados pelo governo federal para acesso ao ensino superior, como: Programa Universidade para Todos (**ProUni**), que oferta bolsas de estudo parciais ou integrais em instituições particulares; Fundo de Financiamento Estudantil (**Fies**), que concede financiamento sem juros ou com juros baixo em faculdades particulares; Sistema de Seleção Unificada (**SiSU**), que oferta vagas em instituições públicas de ensino superior. Para a contagem da nota final, em geral as universidades públicas adotam duas maneiras para esse cálculo (medidas de tendência central), conforme as fórmulas abaixo:

Modelo 39

Média Aritmética (simples)

$$\bar{x} = \frac{LC + CH + CN + M + R}{5}$$

Modelo 40

Média Aritmética ponderada

$$\bar{x}_p = \frac{LC \cdot p_1 + CH \cdot p_2 + CN \cdot p_3 + M \cdot p_4 + R \cdot p_5}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5}$$

onde LC indica a nota de Linguagens e Códigos, CH, de Ciências Humanas, CN, de Ciências da Natureza, M, de Matemática, e R, a nota da Redação. Na média aritmética ponderada, os valores p_1, p_2, p_3, p_4 e p_5, são os pesos atribuídos a cada área de conhecimento, respectivamente. Considere as notas abaixo:

Figura 23: **Notas do ENEM 2018 obtidas por uma estudante**

Prova Objetiva

Áreas de Conhecimento	Nota	Situação
Linguagens, Códigos e suas Tecnologias	617,6	Presente
Ciências Humanas e suas Tecnologias	565,1	Presente
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	494,7	Presente
Matemática e suas Tecnologias	586,2	Presente

Redação

	Nota	Situação
Redação	640	Presente

Sabe-se, por exemplo, que as universidades federais do Oeste do Pará (UFOPA) e de Minas Gerais (UFMG) adotam a média aritmética simples para todos os seus cursos, enquanto que as federais do Amazonas (UFAM), de Goiás (UFG) e o Instituto Federal do Pará (IFPA) adotam a média aritmética ponderada conforme o curso escolhido. O estudante citado acima, tinha interesse em cursar *Letras* em uma dessas instituições de ensino.

Fonte: Elaborado pelo autor - Material de Apoio (piloto).

Com essa situação, um dos momentos que vale destaque, foi quando o professor **I** instigou os estudantes a fazerem perguntas sobre o tema/assunto. Apesar de poucos estudantes se manifestarem, as perguntas feitas oportunizaram discussões sobre os cursos oferecidos pela UFOPA e sobre a possibilidade de eles estudarem nessa universidade pública. Na oportunidade, o professor incentivou a turma a participar do ENEM daquele ano (2019), esclarecendo que poderiam, inclusive, tentar a isenção da taxa de inscrição. Outra questão levantada, oportunizou discussões acerca do porquê havia duas maneiras diferentes de calcular a nota final de acesso aos cursos de universidades públicas. A partir desse questionamento, além de discutir sobre as áreas de conhecimento (e disciplinas) que os estudantes mais se identificavam e tinham maior aptidão, o professor aproveitou a oportunidade para propor tarefas envolvendo o exemplo (notas do ENEM 2018 de um estudante) apresentado na situação (Figura 21). A participação em massa da turma, tanto nas discussões como na realização das tarefas, inclusive nas questões de aplicação propostas ao final, pôde ser percebida explicitamente durante as aulas.

Por último, nas aulas do professor **L**, como mencionada anteriormente, não se utilizou nenhuma das situações sugeridas no Material de Apoio (piloto), mas de uma situação intitulada "Geometria Plana e a Construção Civil", elaborada por ele, direcionada especificamente para uma turma de 2º ano (Téc. em Edificações). Para isso, o professor fez uso dos espaços da própria sala de aula (chão, paredes, janelas, etc.) para introduzir e desenvolver conceitos matemáticos envolvidos na situação, como, por exemplo, *perímetro* e *área*. A partir dessa situação, com bastante dinamismo (do professor), interação e participação (dos estudantes), o professor abordou temas como: revestimento (reboco, pintura, cerâmica) das paredes e do chão; custo da obra; perda de material; compra de material para revestimento (modelo $C = A + 10\%A$, onde C é total de revestimento a ser comprado em função da área medida A); quantidade de cerâmica (em unidades e em m^2) para revestimento; necessidade de realização de cálculo mental (facilita respostas rápidas, pelo menos aproximadas, no canteiro de obras); etc.

Uma síntese inicial que se pode fazer a partir dessa experiência (observação das aulas), é que, de modo geral, as expectativas em relação à influência positiva dos princípios essenciais característicos do método AnM no processo educativo (destacados no capítulo 5) têm sido confirmadas com certo êxito. Essa percepção fica evidente na experiência realizada, o que é apontado também pelos próprios professores (seção 6.2.), ao avaliarem as ações e responderem o questionário 2 (Apêndice B). Adicionado a isso os estudantes apontam nessa mesma direção ao responderem o questionário 3 (Apêndice C).

Vale ressaltar ainda, que, não apenas esses seis professores (**E**, **F**, **H**, **I**, **J** e **L**), mas os outros (**A**, **B**, **C**, **D**, **G** e **K**), ao realizarem a prática do método AnM em suas aulas (Quadro 25), indicaram em seus relatos[66] o uso de situações-problema e modelos matemáticos prontos como uma ação positiva fundamental no processo educativo, tanto em relação ao ensino como à aprendizagem. É perceptível nesses relatos, assim como foi observado na prática presencial dos primeiros professores, o papel relevante que as situações e modelos utilizados podem desempenhar nesse processo, não apenas para iniciar as aulas, conquistar a atenção dos estudantes e introduzir um conteúdo novo, mas também oportunizar discussões de temas/assuntos de outros contextos fora da Matemática, além de tornar o estudo do conteúdo curricular mais atrativo e significativo para os estudantes.

Essa perspectiva pode ser notada na resposta dos professores e estudantes envolvidos na experiência, o que será explorado a seguir.

6.2 SOBRE A VIABILIDADE DO MÉTODO ANÁLISE DE MODELOS: O QUE APONTAM PROFESSORES E ESTUDANTES?

Todo o caminho traçado, retraçado e construído na presente pesquisa, visava, em certo sentido, chegar a este momento. Embora a experiência de observar a prática do método AnM, como descrito na seção anterior, tenha sido um dos momentos fundamentais para uma avaliação inicial da viabilidade desse método de ensino, acredita-se que nesse momento, as percepções dos próprios professores e dos estudantes participantes desta etapa da pesquisa, têm peso de reforçar e autenticar as ideias levantadas quanto a sua viabilidade no contexto do Ensino Médio.

Para tanto, o relato-analítico que se apresenta, está inserido em duas subseções. A primeira tem como principal direcionamento, as categorias emergentes de uma ATD (MORAES; GALIAZZI, 2011) realizada a partir das respostas dadas pelos 12 professores no questionário 2 (Apêndice B). A questão principal que fez emergir essas categorias se refere às contribuições do método AnM para a aprendizagem dos estudantes. Já a segunda, levando em conta ainda, opiniões oriundas de outras respostas do mesmo questionário e das anotações de encerramento da ação de extensão (avalição dos professores), aborda as contribuições que o Material de Apoio (piloto), elaborado com base no método AnM, pode trazer à prática do professor, assim como algumas sugestões de melhoria desse Material apontadas por eles[67].

---

[66] Esses relatos foram entregues em maio/2019, via e-mail, junto com o questionário 2 (Apêndice B). De acordo com os relatos, apenas dois deles, **C** e **G**, elaboraram situações diferentes das sugeridas no Material de Apoio (piloto) para o estudo de Geometria Plana e Sistemas Lineares, respectivamente. Os outros quatro professores (**A**, **B**, **D** e **K**) utilizaram situações do Material com pequenas adaptações.

[67] O Material de Apoio (piloto) foi reformulado, levando em conta essas sugestões. Disponível no Apêndice D.

6.2.1 Categorias que expressam potencial e viabilidade do método AnM

A pergunta central do questionário 2 (Apêndice B), considerada para análise da percepção dos professores quanto ao método AnM, visando o surgimento de categorias que expressassem potencial, e consequente, viabilidade de sua implementação prática no contexto educacional vigente, foi a seguinte: "Partindo do pressuposto que a Análise de Modelos é um método que pode ser usado para ensinar Matemática na Educação Básica (Ensino Médio), que elementos se destacam como pontos positivos desse método que podem contribuir para a aprendizagem dos estudantes?". A partir da ATD realizada, os professores apontaram em suas respostas, cinco categorias (ViP_1, ViP_2, ..., ViP_5) que indicam esse potencial/viabilidade.

Assim, para facilitar a visualização da ATD realizada, serão apresentadas essas categorias na forma de quadros que resumem o processo ao destacar alguns **Exemplos de fragmentos** dos relatos, as **Unidades de significados** emergentes a partir da unitarização e o **Número de ocorrências** de cada uma dessas unidades.

Adaptada e proposta nesta pesquisa como um método para ensinar Matemática na Educação Básica, baseado em princípios essenciais que conduzem seu desenvolvimento prático em etapas simples (capítulo 5), a AnM, em primeiro lugar (Quadro 27), potencializa **maior envolvimento dos estudantes no processo educativo**, conforme indica os professores. Esse entendimento é apontado pela metade, dos doze professores participantes. Segundo eles, esse envolvimento pôde ser percebido nas reações dos estudantes durante as aulas.

Quadro 27: ViP_1 - Maior envolvimento dos estudantes no processo educativo

Exemplos de fragmentos	Unid. de significados	Nº Oc.
"[...] conquistando a atenção, o interesse [...]" (**A**) *"Maior atenção e interesse pela matemática."* (**C**)	Chama a atenção dos estudantes e desperta seu interesse pela Matemática	2
"Aula participativa." (**L**) *"Maior participação dos alunos."* (**B**) *"Potencial para [...] o envolvimento dos alunos com as atividades [...]"* (**E**) *"A participação dos alunos durante a aplicação das atividades torna a aprendizagem muito mais prazerosa."* (**H**)	Incentiva a participação dos estudantes nas atividades	6
"[...] o aluno sente vontade de interagir e acaba envolvendo os demais alunos." (**H**) *"[...] o aluno interage."* (**L**)	Oportuniza a interação entre professor e estudantes	2

Fonte: Elaborado pelo autor.

Segundo Bassanezi (2002), o envolvimento dos estudantes no processo educativo pode ser potencializado se forem incentivados a “gostar mais de Matemática”. É nesse sentido que o autor afirma: “Acreditamos que esse gosto se desenvolve com mais facilidade quando é movido por interesses e estímulos externos à Matemática, vindos do *mundo real*.” (p. 15). Assim, “[...] ao privilegiar um ensino voltado para os interesses e necessidades da comunidade, precisamos considerar o estudante como um participante, especialmente ativo, do desenvolvimento de cada conteúdo [...]” (p.176). O autor enfatiza um ensino que instigue o interesse do estudante, que cative sua atenção, que o motive a “gostar mais de Matemática”, a participar ativamente da construção do próprio conhecimento e a socializar-se interativamente com colegas e professor. É justamente essa perspectiva que se vê apontada pelos professores nessa categoria.

Somado a isso, Burak (1992), ao estabelecer princípios fundamentais para direcionar um ensino com Modelagem no contexto educacional, evidencia um entendimento semelhante quando aponta o “interesse do grupo”, dos estudantes, não somente como algo a ser incentivado no decorrer do processo educativo, mas como elemento motivador principal para o restante das ações. No entendimento do autor, os problemas de interesse dos estudantes é que determinam o conteúdo curricular a ser estudado, consequentemente, sua participação e interação durante as aulas. Essa perspectiva tem certo “eco” nos princípios estabelecidos aqui para a AnM (capítulo 5), pois, embora na AnM o conteúdo curricular seja pensado junto com os problemas (temas/assuntos), estes, elaborados em forma de situações-problema (sempre utilizadas para iniciar e conduzir as aulas), têm como objetivo primário ser de interesse dos estudantes.

É fundamental, portanto, que o professor, ao planejar atividades de AnM, use de sua criatividade para elaborar/adaptar situações a partir de temas/assuntos de áreas e contextos diversos, que sejam de interesse dos estudantes e/ou causem-lhe interesse. Tomando como referência as ideias dos autores acima citados, Bassanezi (2002) e Burak (1992), é possível inferir que os estudantes se envolvem mais, participam mais e interagem mais, quando os temas/assuntos das aulas motivam seu interesse. Essa inferência é percebida na opinião geral dos professores participantes da pesquisa quando afirmam, por exemplo, que a aprendizagem de Matemática dos estudantes depende[68], entre outros fatores: *“Da parte motivacional, ou seja, de situações que façam sentido e despertem o interesse da maioria dos alunos.”* (**E**); *“[da] Apresentação de problemas que motivem os alunos.”* (**B**); *“[de] uma boa metodologia que deve ser usada para despertar o interesse do educando para o tema que será abordado [...]”* (**F**);

[68] Pergunta 1, do questionário 2: “Na sua opinião, do que depende a aprendizagem de Matemática dos estudantes?”

“[do] aluno estar motivado;” (**J**); *“[da] Motivação e esforço individual [do estudante] em realizar as atividades propostas pelo docente.”* (**K**); etc.

Essas ideias vêm ao encontro daquilo que Biembengut (2016) expressa em relação à aprendizagem e interesse. A autora lembra, por exemplo, que nem tudo que chega à percepção dos estudantes gera aprendizagem, pois “aprender implica ter conhecimento” e isso vai além de ter ou receber grande volume de informações que podem ser facilmente descartadas ou retidas por um tempo na memória. É nesse sentido que a autora afirma: “A aprendizagem, entretanto, está relacionada ao interesse que, por sua vez, vem antes da aprendizagem. De acordo com o grau de interesse que temos sobre alguma coisa, a aprendizagem - o conhecimento adquirido - pode permanecer em uma memória de curto, médio ou longo prazo.” (BIEMBENGUT, 2016, p. 77).

Ao tratar do conteúdo curricular que é apresentado em sala de aula, Biembengut (2016) destaca ainda que o estudante, muitas vezes, até compreende e memoriza esse conteúdo para reproduzi-lo mais adiante em uma “prova”, mas

> Estes conteúdos em ‘níveis’ de compreensão e não de conhecimento são esquecidos tão logo avançam para o próximo tópico de estudo ou, ainda, logo que se realiza uma ‘avaliação’. Contribui para este esquecimento se o estudante não tem interesse ou não percebe qualquer valor desse conteúdo curricular para a área de que gosta ou possa lhe interessar. (BIEMBENGUT, 2016, p. 174).

Assim, de acordo com a autora, estimular e motivar o interesse dos estudantes é um dos primeiros passos rumo à aprendizagem. Essa concepção se harmoniza com as ideias dos autores citados acima, Bassanezi (2002) e Burak (1992), e tem sido apontada pelos professores participantes da pesquisa ao sinalizarem, nessa primeira categoria, que a partir desse interesse intrínseco ou estimulado, a atenção dos estudantes é acionada, sua participação é incentivada e oportunizada a interação com os colegas e com o professor. Esse envolvimento, como se tem percebido, é a chave para o desenvolvimento do conteúdo curricular de um modo mais fluido e que faça sentido para o estudante, no seu contexto, na sua realidade, no seu cotidiano.

Uma segunda categoria apontada pelos professores, indicando o potencial da AnM no ensino da Matemática, é que, segundo eles, com esse método, **a abordagem do conteúdo curricular acontece de modo diferenciado**. A maioria dos professores destacou essa perspectiva como ponto positivo da AnM que pode contribuir para a aprendizagem dos estudantes. Dos doze professores, oito sinalizaram nessa direção.

Quadro 28: ViP_2 - A abordagem do conteúdo curricular acontece de modo diferenciado

Exemplos de fragmentos	Unid. de significados	Nº Oc.

"Desenvolvimento do conteúdo [ocorre] de forma diferente da tradicional [...]" (**A**) *"[...] permite abordar o conteúdo matemático por caminhos diferentes do tradicional."* (**G**) *"É um método que faz o processo inverso do tradicional [...]"* (**I**) *"Necessidade de elaborar estratégias de resolução da situação problema sem conhecer completamente o conteúdo. Normalmente os alunos estão acostumados a receberem o conteúdo e somente após isso é que fazem exercícios sobre o tema. Com esse método ocorre o contrário."* (**K**)	Aborda o conteúdo matemático diferente do modo tradicional	6
"Situações reais do cotidiano do aluno." (**A**) *"O potencial para desenvolver conteúdos matemáticos a partir da situação problema [...]"* (**E**) *"A construção de modelos a partir de situações do cotidiano do aluno [...]"* (**H**) *"Parte de uma situação problema para construir os conceitos matemáticos."* (**I**) *"Apresentação de uma aplicação em situação real, próxima da realidade dos alunos."* (**K**)	Aborda o conteúdo matemático a partir de situações reais e do cotidiano dos estudantes	6

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se de início, nessa categoria, que a AnM como um método de ensino de Matemática, é percebida pelos professores como um modo diferente de abordar o conteúdo matemático em comparação com o modo comumente utilizado nas escolas. Segundo eles, a AnM sai um pouco do modo tradicional de ensino e *"[...] torna a abordagem dos conteúdos muito mais interessante."* (**H**).

De acordo com Saviani (2008), o ensino dito tradicional, predominante ainda hoje no contexto educacional brasileiro, foi estruturado a partir de um método pedagógico denominado método expositivo, que é conhecido por todos e que, no decorrer da carreira escolar, todos já passaram em algum momento por ele, e muitos ainda estão passando. Centrado no professor, nos conteúdos e no processo lógico, o ensino tradicional, segundo o autor, privilegia a transmissão dos conhecimentos dominados, estruturados e organizados, deixando aos estudantes, basicamente, o papel de receber passivamente esses conhecimentos e memorizá-los (SAVIANI, 2008).

Para Libâneo (2017), essa concepção de ensino diminui drasticamente o papel do personagem central do processo educativo, o sujeito da aprendizagem - o estudante, pois o torna um mero "recebedor da matéria" e reduz sua tarefa a simples "decoreba". Com isso, um aprendizado mais significativo fica comprometido, uma vez que

> Os conhecimentos [conteúdo curricular] ficam estereotipados, insossos, sem valor educativo vital, desprovidos de significados sociais, inúteis para a formação das capacidades intelectuais e para a compreensão crítica da realidade. O intuito de formação mental, de desenvolvimento do raciocínio, fica reduzido a práticas de memorização. (LIBÂNEO, 2017, p. 53).

O autor aponta, a partir desse quadro, a necessidade de busca por outros métodos e técnicas que permitam certa ruptura com essa concepção tradicional de ensino, e que valorizem nos estudantes, habilidades de reflexão, descoberta, pesquisa, experimentação, trabalho em grupo, atividades cooperativas, etc. Segundo o autor, esses métodos e técnicas devem proporcionar aos estudantes condições adequadas que os estimulem, além do interesse pelo tema/assunto abordado, a busca e construção do conhecimento por si mesmos. Para o autor, "Trata-se de colocar o aluno em situações em que seja mobilizada a sua atividade global que se manifesta em atividade intelectual, atividade de criação, de expressão verbal, escrita, plástica ou outro tipo." (LIBÂNEO, 2017, p. 53). O que se percebe, nesse contexto, é que o professor precisa tomar consciência da necessidade de mudar a própria prática, e assim, venha se sentir desafiado a atuar de modo diferente, com uma abordagem diferente.

É certo que esse tipo de postura não blinda o professor de dificuldades e obstáculos na implementação da nova proposta de ensino, como é o caso da AnM, pelo contrário, o desafio é ainda maior, porém, com resultados muito mais gratificantes (BASSANEZI, 2002). Esse entendimento é apontado por Anastasiou e Alves (2015, p. 78) ao afirmarem que, "Quando o professor é desafiado a atuar em uma nova visão em relação ao processo de ensino e de aprendizagem, poderá encontrar dificuldades, até mesmo pessoais, de se colocar em uma diferenciada ação docente.". Essas dificuldades, segundo as autoras, muitas vezes têm início no próprio reconhecimento da necessidade de ruptura com o método tradicional de repasse dos conteúdos. Portanto, o professor precisa estar ciente dos obstáculos a serem vencidos, caso queira atuar de forma diferenciada.

De acordo com as autoras, o professor deve se preparar para "[...] lidar com questionamentos, dúvidas, inserções dos alunos, críticas, resultados incertos, respostas incompletas e perguntas inesperadas." (ANASTASIOU; ALVES, 2015, p. 78). A própria dinâmica da aula é modificada, incluindo aí, a organização e disposição dos estudantes no espaço físico da sala, rompendo, assim, com aquela disciplina característica imposta pelo modelo tradicional.

Diante desses apontamentos, percebe-se que tal perspectiva vem ao encontro daquilo que os professores participantes da pesquisa têm apontado em relação à AnM, mais especificamente na presente categoria. Eles já haviam enfatizado que a aprendizagem de

Matemática dos estudantes depende[69], entre outros fatores, de *"metodologias adequadas"* (**L**) que *"[...] propiciem a participação do aluno na construção do conhecimento."* (**J**), de *"estratégias que instigam e desafiem a construção do conteúdo [...]"* (**C**). De acordo com o que eles apontaram, a AnM se apresenta como um método alternativo que potencializa essa ruptura com o método tradicional de abordagem dos conteúdos. Um dos pontos positivos destacado por eles é justamente o fato de a aula, na perspectiva de AnM proposta, não começar diretamente com a exposição do conteúdo curricular, mas com apresentação e discussão de situações reais ou do cotidiano dos estudantes, de interesse deles. Tal concepção se harmoniza com os princípios essenciais propostos para o método AnM, apresentados no capítulo 5 e lembrados no presente capítulo, em especial o princípio referente ao uso de situações-problema para iniciar as aulas.

Como visto no terceiro capitulo, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) de Matemática para o Ensino Fundamental, ao enfatizarem a resolução de problemas como estratégia metodológica de ensino, já destacavam "[...] que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm **situações desafiadoras** para resolver [problemas] e trabalham para desenvolver estratégias de resolução." (BRASIL, 1998, p. 40, grifo nosso). As Orientações Curriculares para Ensino Médio igualmente enfatizavam que

> [...] a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma **situação-problema** ao aluno, ficando a formalização do conceito como a última etapa do processo de aprendizagem. Nesse caso, caberia ao aluno a construção do conhecimento matemático que permite resolver o problema, tendo o professor como um mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do novo conhecimento (BRASIL, 2006, p. 81, grifo nosso).

Esse documento define "[...] **situação-problema** como uma situação geradora de um problema cujo conceito, necessário à sua resolução, é aquele que queremos que o aluno construa." (BRASIL, 2006, p. 84, grifo nosso). Significa que a construção de novos conhecimentos matemáticos pelos estudantes, "a formalização do conceito" (conteúdo curricular), pode ser potencializada pelo uso de situações-problema no desenvolvimento das aulas. De acordo com o documento, embora pareça paradoxal essa definição de situação-problema, pois por um lado "[...] como o aluno pode resolver um problema se ele não aprendeu o conteúdo necessário à sua resolução?, [mas] por outro lado, a história da construção do conhecimento matemático mostra-nos que esse mesmo conhecimento foi construído a partir de problemas a serem resolvidos." (p. 84).

---

[69] Pergunta 1, do questionário 2: "Na sua opinião, do que depende a aprendizagem de Matemática dos estudantes?"

Dante (2011) resume esse entendimento ao afirmar que “O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema.” (p. 19). O autor sinaliza que, a abordagem do conteúdo curricular deve ocorrer pela exploração de problemas estruturados advindos de alguma situação. É o que se percebe em sua afirmação: “Nos processos de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las [...]” (DANTE, 2011, p.19).

Segundo Dante (2011), o uso de situações-problema para explorar o conteúdo curricular desenvolve o poder de comunicação dos estudantes, valoriza os conhecimentos prévios, estabelece uma relação próxima entre a linguagem informal e a linguagem simbólica da Matemática, aguça a curiosidade, permite o desenvolvimento da criatividade e do espírito explorador. Em síntese, se a intenção do professor é proporcionar condições que potencialize uma aprendizagem mais significativa ao estudante, “[...] nada melhor que apresentar situações-problema que o envolva, o desafie e o motive a querer resolvê-las.” (p. 20).

Na atual BNCC (BRASIL, 2018), essa perspectiva pode ser percebida com certa transparência, uma vez que aponta competências gerais e habilidades para a área da Matemática e suas Tecnologias que visam, em um sentido geral, “resolver situações-problema” (BRASIL, 2018, p. 527). No Ensino Médio, dentre as competências específicas da área, destacam-se:

> **1.** Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar **situações** em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas [...];
> **2.** Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a **situações** de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. (BRASIL, 2018, 531).

O documento sugere que as situações-problema propostas levem em conta, basicamente, o interesse dos estudantes, seu cotidiano e que os temas/assuntos abordados das diversas áreas de conhecimento tenham significado real para eles. Os problemas do cotidiano, destaca o documento, exercem papel fundamental no processo de aprendizagem e aplicação dos conceitos matemáticos “[...] não apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho.” (BRASIL, 2018, p. 535).

Esse entendimento é apontado pelos professores participantes da pesquisa ao evidenciarem que a principal meta no ensino da Matemática[70] era *“[...] resolver situações do cotidiano de tal forma que isso possa transformar o meio onde vive [...]”* (**H**), *“[...] oferecer*

[70] Pergunta 2, do questionário 2: “Qual a principal meta no ensino da Matemática?”

ferramentas para que o aluno possa intervir de maneira crítica na resolução de problemas do dia a dia." (**C**), *"Estruturar conhecimentos matemáticos que viabilizem a resolução de problemas do cotidiano [...]"* (**B**), *"[...] compreender o mundo real."* (**I**), *"[...] interagir, analisar e propor soluções para situações sociais, econômicas e ambientais. [...] contribuir com a comunidade na qual está inserido."* (**J**), etc.

Em síntese, percebe-se que esses apontamentos vêm ao encontro das concepções sinalizadas pelos professores nessa categoria, ao indicarem, de modo geral, que na AnM a abordagem do conteúdo curricular acontece de modo diferenciado, destacando duas atitudes. A primeira se refere a uma mudança de postura do professor frente aos desafios que se impõem na busca pela melhoria da qualidade do ensino de Matemática. Trata-se de uma atitude que destaca a necessidade de novas abordagens desse ensino, do conteúdo curricular, em contraste à forma com a qual tem sido praticada tradicionalmente. A segunda atitude se refere a um modo prático de tentar implementar essa abordagem, isto é, o uso de situações-problema da realidade, do cotidiano, do interesse dos estudantes, que sirvam de ponto de partida às aulas e gerem os problemas direcionadores das discussões, reflexões e desenvolvimento do conteúdo curricular e não curricular.

Essa perspectiva leva os professores participantes da pesquisa a apontarem a terceira categoria que expressa potencialidade da AnM no aprendizado dos estudantes. Segundo eles, com a AnM, **a aprendizagem do conteúdo curricular se torna mais significativa**. Cinco professores destacaram esse ponto.

Quadro 29: ViP_3 - A aprendizagem do conteúdo curricular se torna mais significativa

Exemplos de fragmentos	Unid. de significados	Nº Oc.
"[...] torna a aprendizagem mais significativa." (**I**) *"Aprendizado mais significativo do conteúdo."* (**D**) *"[...] fazendo-os (os alunos) aprender de modo mais significativo a teoria matemática [...]"* (**H**)	Torna a aprendizagem mais significativa	4
"Os alunos aprendem brincando." (**L**) *"[...] torna a aprendizagem muito mais prazerosa."* (**H**)	Torna a aprendizagem mais divertida	2

Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa perspectiva tem relação direta com a categoria anterior apontada pelos professores, pois como destaca a BNCC, o uso de situações-problema (nas aulas) em vários contextos "[...] favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de **forma significativa**." (BRASIL, 2018, p. 534, grifo nosso). O documento sinaliza que uma aprendizagem mais significativa pressupõe uma atitude reflexiva por parte do estudante, ou seja, ele precisa ser capaz de resolver os problemas emergentes das situações apresentadas ao mesmo tempo que reflete sobre a Matemática evidenciada nesses contextos. Essa atitude pode ser potencializada pelo uso de modelos matemáticos nas situações propostas, nas aulas. É o que aponta a BNCC ao afirmar:

> [...] diferentes registros de **representação matemática** [modelos matemáticos] na busca de solução e comunicação de resultados dos problemas [...] têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de **forma significativa** sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de **pensar matematicamente**. Além disso, a **análise das representações** [Análise de Modelos] utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo. (BRASIL, 2018, p. 538, grifos nossos).

Percebe-se que esse documento está sinalizando o potencial da AnM para uma aprendizagem mais significativa, uma vez que essa perspectiva de usar representações matemáticas (modelos matemáticos) nas situações-problema é proposta como um dos princípios essenciais estabelecidos para o método AnM (capítulo 5).

Ademais, ao relacionar a possibilidade de ter uma aprendizagem significativa com a "capacidade de pensar matematicamente" dos estudantes, o documento se harmoniza com aquilo que foi discutido no terceiro capítulo (BASSANEZI, 2002; NISS; BLUM; GALBRAITH, 2007; SOARES, 2012; SOARES; JAVARONI, 2013) sobre a inserção da AnM no contexto geral da Aplicações ao deixar indícios de que a AnM transitaria entre as *aplicações matemáticas* (Modelagem) e as *aplicações da Matemática* (Aplicação de Modelos). Essa perspectiva, segundo Bassanezi (2002, p. 32), "[...] consiste, essencialmente, na atitude de pensar e fazer matemática." que, na prática de sala de aula, pode ser traduzida de modo simples, ou seja, que "[...] a matéria [conteúdo curricular] deve ser ensinada de um modo significativo matematicamente, considerando as próprias realidades do sistema educacional [vigente]." (p. 36). Essa atitude, segundo o autor, faz o estudante "[...] compreender melhor os argumentos matemáticos, incorporar conceitos e resultados de modo mais significativo [...], criar predisposição para aprender matemática porque passou, de algum modo, a compreendê-la e valorizá-la." (p. 177). Tal atitude combina com a ação de 'analisar representações' evidenciada acima na BNCC.

Assim, a expressão "capacidade de pensar matematicamente" (BRASIL, 2018, p. 358), expressa por "atitude de pensar e fazer matemática" (BASSANEZI, 2002, p. 32), aponta o desenvolvimento do conteúdo curricular de modo significativo e a "análise das representações" (expressão que remete à ideia de Análise de Modelos) como ações relevantes à uma aprendizagem significativa para os estudantes. Com essas ações, sintetiza Bassanezi (2002), além de "[...] estarmos pensando num ensino mais dinâmico e abrangente, [...] que inclui as aplicações em matemática de modo significativo [...] estamos preocupados com processos mais significativos de aprendizagem e valorização da matemática ensinada." (p. 178). Tais ações reforçam o potencial da AnM como um método para ensinar Matemática na Educação Básica que, como têm indicado os professores nesta categoria, *"[...] torna a aprendizagem mais significativa."* (**I**) e *"[...] muito mais prazerosa."* (**H**).

A aprendizagem significativa como uma teoria no campo do desenvolvimento cognitivo é construída por vários autores, tendo como um dos destaques David Paul Ausubel (1918-2008), psicólogo e médico norte americano. Na perspectiva de Ausubel, aprendizagem significativa ocorre quando há a ampliação da estrutura cognitiva do indivíduo por meio da incorporação de novas ideias a ela, ou seja, "[...] é o processo através do qual uma nova informação (um novo conhecimento) se relaciona de maneira não arbitrária e substantiva (não literal) à estrutura cognitiva do aprendiz." (AUSUBEL, 1968 apud MOREIRA, 1997, p. 19). A maneira não arbitrária de relacionar as informações, significa que ocorre de uma forma lógica e não imposta, enquanto que a maneira substantiva, significa que o estudante consegue explicar o novo conhecimento de formas diferentes com linguagem sinônima.

Para Ausubel, de acordo com Moreira (1997), conceitos, ideias ou proposições já existentes na estrutura cognitiva (conhecimentos prévios) do aprendiz serve de ponto de ancoragem para uma nova informação, permitindo ao indivíduo atribuir-lhe significado. Essa ideia é apontada pelo professor **K** ao enfatizar[71] que o ensino da Matemática atinge seu objetivo *"Quando o aluno consegue enxergar além da questão proposta, além dos 'cálculos', e consegue perceber que o processo de elaborar estratégias e usar conhecimentos acumulados ao longo da vida escolar é mais importante que o 'cálculo' propriamente dito."*. Assim, para que ocorra aprendizagem significativa, segundo Ausubel, duas condições são essenciais: o material a ser aprendido deve ser relacionável, isto é, precisa ser potencialmente significativo; e o estudante precisa estar disposto a aprender, a relacionar à sua estrutura cognitiva. O autor destaca que o material a ser aprendido não é significativo em si mesmo, é o estudante que dá o significado próprio ao mesmo e o incorpora à sua estrutura.

Essa perspectiva pode ser percebida na resposta dos professores participantes da pesquisa à pergunta: "Para você, quando o ensino da Matemática atinge seu objetivo?". Nessas respostas fica subentendido que, para eles, a aprendizagem (significativa) de Matemática

[71] Pergunta 3, do questionário 2: "Para você, quando o ensino da Matemática atinge seu objetivo?".

ocorre: *"Quando o aluno consegue ver sua aplicação [da Matemática] para além da sala de aula, tornando o aprendizado significativo."* (**A**); *"Quando os alunos conseguem utilizar na prática os conhecimentos compartilhados durante as aulas."* (**B**); *"Quando o estudante consegue compreender de que forma se aplica determinado conteúdo e faz ligações do mesmo com a realidade."* (**F**); *"[...] a partir do momento em que o aluno for capaz de identificar os conceitos matemáticos nas suas ações diárias e ajudar na leitura de mundo."* (**I**); etc.

No contexto da Educação Matemática, mais especificamente em relação à Modelagem como método de ensino, Burak e Aragão (2012) buscam compreender e estabelecer relações entre esse método na perspectiva do ensino e da aprendizagem de Matemática, por meio de atividades didáticas, e a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel. Uma das conclusões apontadas pelos autores é um incentivo aos professores e diz respeito à necessidade de buscar

> [...] promover em aulas, situações que evidenciem uma **nova forma de pensar**, não disjuntiva, mas integradora, que propicie o estudante a compreender tais situações, não apenas em termos escolares, mas, sob aspectos globais, que envolvem abordagens diferenciadas do conhecimento e que promovem o pensar sob uma ótica multidimensional, que possam estar coerentes com problemas vivenciados pelos cidadãos do século XXI." (BURAK; ARAGÃO, 2012, p. 124, grifo nosso).

Diante dessa perspectiva, em um contexto que remete à AnM, pode-se destacar uma atividade prática realizada em sala de aula[72] em que se utilizou alguns modelos matemáticos para abordar o conteúdo funções exponenciais (SOUSA; VIALI; RAMOS, 2017). Nessa atividade foram propostas situações-problema constando dados empíricos (modelos matemáticos na forma implícita e na forma de tabelas), cujo objetivo era a construção e análise dos modelos exponenciais[73] na forma explícita, e desenvolvimento do conteúdo do programa da disciplina. Tendo como auxílio o uso de ferramentas da informática, como o *Excel* e *GeoGebra*, buscou-se identificar durante o processo alguns elementos da teoria de aprendizagem significativa de Ausubel. Ao final da atividade, os autores acenam positivamente nesse sentido, destacando que os estudantes demonstraram ter compreendido muito mais os conceitos e propriedades relacionados às funções exponenciais, sinalizando maior interesse pelo tema, pois, segundo eles, puderam identificar sua aplicação em várias áreas do conhecimento, além da oportunidade de aprender e trabalhar com ferramentas de informática (*Excel* e *GeoGebra*).

---

[72] A atividade foi realizada dentro de uma disciplina de Pré-Cálculo com estudantes de vários cursos de graduação da UFOPA.

[73] Modelo de crescimento e decrescimento exponencial; modelo de crescimento limitado ou inibido; modelo de crescimento logístico.

Segundo os autores, com essa atividade, “[...] foi possível perceber que o trabalho com modelos matemáticos pode se tornar significativo para os estudantes e ser enriquecido quando se utiliza dados empíricos de situações práticas da realidade ou do contexto acadêmico/profissional dos estudantes [...]” (SOUSA et al., 2017, p. 71), e concluem afirmando que esse tipo de atividade (construção e análise de modelos) possibilita que os “[...] conteúdos matemáticos estudados desde o Ensino Básico até o Ensino Superior apresentem-se mais úteis nas aplicações e análises de situações-problema, permitindo que os estudantes possam dar mais significado ao que estudam, ao percebê-los em diversos contextos da sua realidade.” (p. 72).

A AnM, portanto, ao ser destacada pelos professores participantes da pesquisa como método de ensino potencializador de aprendizagem significativa, fortalece os princípios essenciais estabelecidos em sua caracterização (capítulo 5), pois como visto acima, ela pode ser utilizada pelos estudantes de forma significativa para “pensar matematicamente” (“atitude de pensar e fazer matemática”, “nova forma de pensar”), lidar e resolver situações-problema de diversas áreas, permitindo que eles compreendam os modos de interpretar e raciocinar as resoluções em vários contextos (BRASIL, 2018; BASSANEZI, 2002; BURAK; ARAGÃO, 2012). A BNCC ainda aponta para a AnM quando destaca o uso de “representação matemática”, os modelos matemáticos, como potencializador de aprendizagem (significativa), em consonância com Sousa et. al (2017). Por fim, Bassanezi (2002), pensando em métodos de ensino que evidenciem as Aplicações matemáticas e da Matemática, onde a AnM está inserida, enfatiza a necessidade de desenvolver o conteúdo curricular de modo significativo.

Para os professores participantes da pesquisa, a AnM também incentiva **o pensamento crítico e reflexivo dos estudantes**. Essa é a quarta categoria apontada por eles como ponto positivo do método AnM para a aprendizagem dos estudantes. Dos doze professores, cinco evidenciaram essa perspectiva.

Quadro 30: ViP_4 - O pensamento crítico e reflexivo dos estudantes é incentivado

Exemplos de fragmentos	Unid. de significados	Nº Oc.
“Oferece a oportunidade de surgirem questionamentos por parte dos alunos, [...] questionamentos diferentes.” (**G**) *“[...] o estudante desenvolve a habilidade de elaborar perguntas.”* (**I**)	Incentiva os estudantes a questionar	2
“[...] desperta a linha de pensamento dos estudantes.” (**F**) *“[...] com o objetivo de interpretar melhor a situação-problema.”* (**H**) *“[...] conduz o aluno a reflexão.”* (**J**)	Incentiva o raciocínio e a reflexão dos estudantes	3

Fonte: Elaborado pelo autor.

A própria Lei de Diretrizes e Bases da Educação (BRASIL, 1996) evidencia essa perspectiva, quando em seu artigo 35, destaca que uma das finalidades do Ensino Médio é justamente “[...] o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia e do pensamento crítico.”. A BNCC destaca ainda que, no Ensino Médio, é preciso garantir aos estudantes também “[...] o desenvolvimento de suas capacidades de abstração, reflexão, interpretação, proposição e ação, essenciais à sua autonomia pessoal, profissional, intelectual e política.” (BRASIL, 2018, p. 464). No caso específico da Matemática, a BNCC aponta que “O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais.” (BRASIL, 2018, p. 265).

Nesse documento, a área de Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio destaca ainda essa perspectiva como uma de suas competências específicas (vista anteriormente na categoria 2), ou seja, a utilização de “[...] estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos” (BRASIL, 2018, p. 531). O documento sinaliza que o objetivo dessa competência é tentar incentivar o estudante a utilizar os conhecimentos matemáticos construídos e incorporados “[...] para fazer julgamentos bem fundamentados.” (p. 532). De acordo com o documento:

> Essa competência específica contribui não apenas para a formação de **cidadãos críticos e reflexivos**, mas também para a formação científica geral dos estudantes, uma vez que prevê a interpretação de situações das Ciências da Natureza ou Humanas. Os estudantes deverão, por exemplo, ser capazes de **analisar criticamente** o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), muitas vezes de forma imprópria e que induz a erro: generalizações equivocadas de resultados de pesquisa, uso inadequado da amostragem, forma de representação dos dados – escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros. (BRASIL, 2018, p. 532).

Percebe-se, diante desse apontamento, a preocupação que o professor deve ter durante o processo educativo, buscando sempre oportunizar aos estudantes o estímulo de uma postura crítica diante das situações, fatos e informações da sociedade. Tais elementos podem ser utilizados como potencializadores de uma aprendizagem significativa, como sinalizados na categoria anterior (categoria 3). Isso significa que o estudante é incentivado a aprender de forma crítica ao mesmo tempo que reflete sobre seu papel como cidadão, o que eleva sua aprendizagem (significativa) a um nível mais abrangente e o firma como sujeito realmente participativo da própria aprendizagem, bem como um sujeito ativo na sociedade em que está inserido.

Essa perspectiva tem eco nas ideias gerais da chamada *Educação Matemática Crítica* (SKOVSMOSE, 2001, 2014), já ventilada no terceiro capítulo. De acordo com o autor, a Educação Matemática Crítica se preocupa basicamente com uma abordagem de ensino (da Matemática) que visa desenvolver, nos estudantes (e professores), habilidades que expressem criticidade, reflexão e questionamento em torno de questões sociais, tendo a Matemática como ferramenta propulsora para esse fim. Desse modo, os estudantes podem exercer uma função mais significativa na sociedade onde se inserem e podem contribuir para o fortalecimento da democracia. O autor destaca, portanto, "[...] que a escola precisa ser defendida como um serviço que educa estudantes a serem cidadãos críticos que podem desafiar e acreditar que suas ações poderão fazer diferença na sociedade." (SKOVSMOSE, 2001, p. 65).

Levando em conta os principais interesses da Educação Matemática Crítica, Skovsmose (2001, 2014) aponta que a atividade pedagógica deve preparar os estudantes para o exercício da cidadania de modo consciente, utilizar-se da Matemática para analisar e refletir criticamente sobre as questões sociais relevantes para a democracia, levar em conta os interesses dos estudantes, atentar-se para os conflitos emergentes dos contextos cultural e social onde ocorre o processo educativo, refletir sobre a Matemática e suas aplicações. Além disso, o autor destaca que a atividade pedagógica deve ser marcada por uma comunicação interativa, instigada pelo diálogo e pela discussão, pois é assim que se estabelece uma base para a vida democrática e se evidenciam os problemas e questões sociais relevantes a serem tratados (SKOVSMOSE, 2014).

Em síntese, para basear a atividade pedagógica nos princípios da Educação Matemática Crítica, é vital que o professor tenha em mente que essa perspectiva tem a ver com: "1) uma investigação de condições para obtenção do conhecimento; 2) uma identificação dos problemas sociais e sua avalição; e 3) uma reação às situações sociais problemáticas." (SKOVSMOSE, 2001, p. 101). O autor está sinalizando que, no processo educativo, o professor precisa ter consciência das condições básicas que envolvem os estudantes para direcionar as ações que poderão facilitar a construção e obtenção do conhecimento por eles. O professor precisa também estar "antenado" aos problemas que evolvem a sociedade, tentando fazer da educação (e a Matemática como componente desse processo) "[...] uma força social progressivamente ativa [que] não pode ser um simples prolongamento da relação social existente. Não pode ser um acessório das desigualdades que prevalecem na sociedade [mas] deve reagir às contradições sociais." (p. 101). O autor resume essa ideia afirmando que

> Uma *concepção crítica da matemática* é apresentada com base na ideia de matemática em ação e nas consequências do emprego da matemática na sociedade moderna, seja nas questões econômicas, administrativas, seja na tecnologia e todos os tipos de

> atividades humanas. A matemática em ação contribui significativamente para conformar nosso mundo-vida. (SKOVSMOSE, 2014, p. 12).

Diante dessa perspectiva, é possível inferir que os professores participantes da pesquisa, ao apontarem nessa categoria que a AnM incentiva o pensamento crítico e reflexivo dos estudantes (Quadro 30), estão sinalizando essa "concepção crítica da matemática" e pode ser percebida com mais ênfase na resposta à pergunta 2, do questionário 2 (Apêndice B), quando expressam que a principal meta do ensino da Matemática é: *"[...] desenvolver o raciocínio lógico e reflexivo do aluno, oferecendo ferramentas para que ele possa intervir de maneira crítica na resolução de problemas do dia a dia."* (**C**); *"[...] fazer com que o aluno possa utilizar os conhecimentos matemáticos para resolver situações do cotidiano de tal forma que isso possa transformar o meio onde ele vive ou mesmo na compreensão de situações reais ligadas à política, economia [...] e ainda sirva para fazer interferências e escolhas na tomada de decisões."* (**H**); *"[...] contribuir para que os alunos possam interagir, analisar e propor soluções para problemas sociais, econômicos e ambientais. Desta forma, permitindo que as pessoas possam viver melhor e contribuam com a comunidade na qual estão inseridos."* (**J**); *"[...] preparar o aluno para exercer sua cidadania, por meio da aprendizagem de conteúdos que influenciem diretamente na vida cotidiana e social dele."* (**K**).

Na presente categoria, o incentivo ao questionamento dentro do processo de resolução de problemas também é apontado pelos professores como um elemento potencializado pela AnM, o que pode favorecer a aprendizagem dos estudantes (Quadro 30). Percebe-se uma consonância dessa visão com a BNCC uma vez que o documento enfatiza que o professor deve estimular o "[...] pensamento criativo, lógico e crítico [dos estudantes], por meio da construção e do fortalecimento da capacidade de fazer perguntas e de avaliar respostas, de argumentar [...]" (BRASIL, 2018, p. 58). O documento aponta ainda que a habilidade de "Resolver e elaborar problemas", dentre outras coisas, tem por finalidade "[...] promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada." (BRASIL, 2018, p. 536). Em certo sentido, pode-se afirmar que essa finalidade se harmoniza com a perspectiva de AnM concebida por Soares (2012, 2015) e consequentemente com a proposta desta pesquisa, apresentada no quinto capítulo.

Um aspecto que vale ser ressaltado para essa categoria é o fato da ação de "questionar" e "fazer perguntas", ser um elemento central no processo de pesquisa, de investigação sobre algum tema/assunto. Como visto no quinto capítulo, as DCNEB estabelecem que o professor deve "[...] estimular a realização de pesquisas, a produção de conhecimentos e o trabalho em grupo." (BRASIL, 2013, p. 163). Esse documento destaca, portanto, a *pesquisa* como princípio pedagógico que instiga a curiosidade, gera inquietude e desperta o espírito investigativo no estudante. O documento afirma que tal atitude "[...] quando despertada no Ensino Médio, contribui para que o sujeito possa, individual e coletivamente, formular questões de **investigação** e buscar respostas em um processo autônomo de (re)construção de conhecimentos." (p. 164, grifo nosso).

É nesse sentido que Moraes, Galiazzi e Ramos (2012) apontam a *pesquisa em sala de aula* como uma ação pedagógica potencializadora de interação entre estudantes e professor, "[...] num processo de questionamento do discurso, das verdades implícitas e explícitas nas formações discursivas, propiciando a partir disto a construção de argumentos que levem a novas verdades." (p. 12). Segundo os autores, em síntese, a pesquisa em sala de aula

> [...] pode ser compreendida como um movimento dialético, em espiral, que se inicia com o **questionar** dos estados do ser, fazer, e conhecer dos participantes, construindo-se a partir disso novos **argumentos** que possibilitam atingir novos patamares deste ser, fazer e conhecer, estágios esses então **comunicados** a todos os participantes do processo. (MORAES; GALIAZZI; RAMOS, 2012, p. 12, grifo nosso).

De acordo com o que os professores participantes da pesquisa têm apontado nessa categoria (ViP_4), a AnM pode ser percebida, pelo menos em parte, como método de ensino que agrega elementos da pesquisa em sala de aula (como princípio pedagógico), pois incentiva a especulação, o questionamento, a participação dos estudantes na elaboração de perguntas. Segundo os professores, ao responderem à pergunta 5, do questionário 2 (Apêndice B), enfatizam que a AnM pode ser viável como método para ensinar Matemática no Ensino Médio, pois *"[...] estimula o aluno a 'pensar', a criar, a sugerir, a especular."* (**I**), *"[...] consegue fazer com que o aluno reflita, discuta e faça questionamentos sobre o tema [em estudo]"* (**J**) e ainda *"[...] dá maior visibilidade à Matemática, onde o seu ensino é fortalecido e concretizado, levando o aluno a contextualizar e fazer questionamentos [relativos] as situações-problemas."* (**L**).

Portanto, ao destacar que a AnM incentiva o pensamento crítico e reflexivo dos estudantes, oportunizando-lhes uma atuação mais consciente na sociedade em que vivem e uma participação mais ativa como bons questionadores, os professores participantes da pesquisa sinalizam um aspecto central para uma educação escolar contemporânea, o *protagonismo* dos estudantes (BRASIL, 2013, 2018; COSTA, 2001) É nesse sentido, que os professores apontam a última categoria emergente da ATD realizada, isto é, que a AnM **oportuniza o protagonismo dos estudantes dentro do processo educativo**. Apesar de ser a categoria com menor número de ocorrência, não é menos importante que as outras. Três professores expressaram essa ideia.

Quadro 31: ViP_5 - O protagonismo dos estudantes é oportunizado dentro do processo educativo

Exemplos de fragmentos	Unid. de significados	Nº Oc.
"O aluno sente-se parte do processo e sai da posição de um simples aprendiz." (**J**) *"[...] tornando-os (os alunos) protagonistas no processo de ensino-aprendizagem."* (**E**) *"Retirada do aluno do papel de coadjuvante do processo para atores principais [...]"* (**G**)	Oportuniza o protagonismo dos estudantes	3
"Permite a descoberta [...]" (**J**)	Oportuniza a descoberta pelos estudantes	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na BNCC, as aprendizagens essenciais esperadas que os estudantes alcancem ao logo da Educação Básica são definidas com o propósito de assegurar-lhes o desenvolvimento de competências gerais. Uma dessas competências, enfatizada no documento, é justamente "[...] resolver problemas e exercer **protagonismo** e autoria na vida pessoal e coletiva." (BRASIL, 2018, p. 9, grifo nosso), o que vem ao encontro às ideias apontadas pelos professores nesta categoria (Quadro 31). De acordo com o documento é preciso superar a fragmentação do conhecimento, apresentado quase sempre de modo "radicalmente disciplinar", e estimular "[...] sua aplicação na vida real, a importância do contexto para dar sentido ao que se aprende e o **protagonismo** do estudante em sua aprendizagem e na construção de seu projeto de vida." (p. 15, grifo nosso). No Ensino Médio, a BNCC enfatiza que uma das finalidades pretendidas nesse nível de ensino é também "[...] garantir o **protagonismo** dos estudantes em sua aprendizagem [...]" (p. 464, grifo nosso).

O documento destaca ainda que, a nova estrutura do Ensino Médio mantém uma organização dos componentes por áreas de conhecimentos, prevendo, porém, o aprofundamento, inclusive com ampliação de carga horária, em uma ou mais áreas curriculares e/ou em alguma formação técnica/profissional de interesse da comunidade escolar. De acordo com o documento:

> Essa estrutura adota a **flexibilidade** como princípio de **organização curricular**, o que permite a construção de currículos e propostas pedagógicas que atendam mais adequadamente às especificidades locais e à multiplicidade de interesses dos estudantes, estimulando o exercício do **protagonismo juvenil** e fortalecendo o desenvolvimento de seus projetos de vida. (BRASIL, 2018, p. 468).

No contexto educacional, atuar como jovem protagonista implica desenvolver ações que possibilitam aos estudantes participarem ativamente do processo educativo como personagens principais na resolução de problemas reais, com iniciativa própria, liberdade e compromisso (COSTA, 2001). De acordo com esse autor, ao apresentar o termo "protagonismo juvenil" como modalidade de ação educativa, ressalta que: "O cerne do protagonismo, portanto, é a participação ativa e construtiva do jovem na vida da escola, da comunidade ou da sociedade mais ampla." (p. 179).

Essa perspectiva, como já citada supra cima, é apontada pelos professores participantes da pesquisa como potencializada pela AnM. O professor **E** expressa bem essa ideia ao qualificar como **excelente** a experiência de utilizar a AnM em sua sala de aula[74], justificando que *"A Análise de Modelos (AnM), como método de ensino de matemática, apresenta uma excelente maneira de tornar o aluno um verdadeiro protagonista durante o processo de ensino-aprendizagem."*. Os outros professores também apontam nessa direção e qualificam a experiência como **muito boa** (**A**, **C**, **D**, **F**, **G**, **H** e **J**) e **boa** (**B**, **I**, **K** e **L**). Os professores **C** e **D**, por exemplo, justificam a qualificação de suas experiências, afirmando que com a AnM *"[...] os alunos participam da elaboração do conteúdo, e isso faz com que eles tenham maior participação e atenção [nas atividades]."* (**C**), além disso, *"[...] o aluno fica mais interessado em fazer acontecer ao invés de receber tudo pronto."* (**D**).

Um aspecto de destaque nas respostas dos professores às perguntas 5 e 6 do questionário 2[75], é que **todos** afirmam que a AnM é viável como método para ensinar Matemática no Ensino Médio e que a adotariam sim, com certa frequência, em suas aulas. Como justificativa para essa resposta, o professor **A**, por exemplo, enfatiza que a AnM *"[...] possibilita ao aluno aprender matemática a partir de situações reais para compreender o conteúdo estudado."*. O professor **H** expressa que se trata de *"[...] uma forma bem diferente de trabalhar os assuntos matemáticos associando-os a situações do cotidiano. É uma proposta bastante eficaz que trabalha principalmente o novo formato de questões e habilidades propostas no novo ensino médio."*. Já os professores **J** e **K** destacam o potencial da AnM para introduzir um novo conteúdo curricular ao afirmarem que: *"[...] através dela [AnM] conseguimos envolver os alunos e motivá-los a discutir o tema que estava sendo introduzido. [...] acredito que seja uma excelente estratégia para introduzir um novo conteúdo [...]"* (**J**); a AnM *"É interessante principalmente para introduzir conhecimento novo."* (**K**).

Não apenas essas respostas, mas as ideias pontuais que geraram as categorias apresentadas, apontam que a AnM não só tem potencial para ser utilizada na prática de sala de aula, mas, *"[...] desde que seja planejada de forma estratégica e não comprometa o conteúdo*

---

[74] Pergunta 4, do questionário 2: "Como qualifica sua experiência em utilizar a *Análise de Modelos* (**AnM**) como método de ensino de Matemática em sua sala de aula? Justifique sua resposta a seguir."

[75] Pergunta 5: "Você acha que a *Análise de Modelos* (**AnM**) pode ser VIÁVEL como um método para ensinar Matemática no Ensino Médio? Justifique sua resposta a seguir."; Pergunta 6: "Você adotaria com certa frequência a *Análise de Modelos* (**AnM**) como um método para ensinar Matemática em suas aulas? Justifique sua resposta."

curricular proposto dentro de cada bimestre [...]" (**H**), pode ser viável como um método de ensino de Matemática na Educação Básica, mesmo no contexto educacional vigente no Brasil.

Adicionado a isso, esse potencial/viabilidade da AnM no contexto da Educação Básica (Ensino Médio) sinalizado pelos professores nas categorias emergentes da ATD realizada, pode ser aproximado, em certo sentido, à opinião dos estudantes[76] envolvidos nessa etapa da pesquisa. A partir das respostas do questionário aplicado a eles (Apêndice C), particularmente a questão 5[77], é possível notar essa aproximação. Como visto no segundo capítulo, para facilitar uma visualização das respostas dos estudantes, optou-se por evidenciar as principais expressões-chave apontadas por eles, que indicam pontos positivos do método AnM à aprendizagem dos estudantes durante as aulas. Para isso, utilizou-se o aplicativo *Wordle* que permitiu essa visualização fácil e rápida das expressões, destacadas a seguir (Figura 22).

Figura 22: Expressões-chave que traduzem pontos positivos da AnM para a aprendizagem dos estudantes

Fonte: Elaborado pelo autor (*Wordle*).

A frequência das expressões-chave é determinada pelo tamanho da letra (Figura 22). Quanto maior a letra, maior a frequência. Para se ter uma ideia, uma das expressões da figura com menor frequência é "Conteúdo-a-partir-de-situações-problema", apontada por pelo menos 8 estudantes, enquanto que a expressão com maior frequência, "Interação", é apontada por cerca de 34 estudantes. Assim, as expressões com maior frequência, evidenciadas pelos estudantes, podem ser dispostas na seguinte ordem decrescente de frequência: 1) Interação; 2) Aula-

[76] Como visto no capítulo 2, participou dessa etapa da pesquisa um grupo de 443 estudantes, sendo 246 do 1º Ano, 139 do 2º Ano e 58 do 3º Ano, sendo que apenas 259 deles responderam ao questionário 3. Vale lembrar que esse grupo é formado por estudantes do Ensino Médio, de oito escolas dos 12 professores.

[77] Questão 5, do questionário 3: "Cite pelo menos 2 pontos positivos do método de ensino (AnM) utilizado por seu professor nas últimas aulas que você acha que podem contribuir para a sua aprendizagem de Matemática.".

dinâmica; 3) Resolução-de-problemas; 4) Exercícios-de-aplicação; 5) Exemplos-reais; 6) Trabalho-em-grupo; 7) Aprendizagem-do-conteúdo; 8) Atividades-práticas; 9) Uso-de-fórmulas; 10) Exemplos-do-cotidiano; 11) Roteiro-passo-a-passo; 12) Elaboração-de-perguntas; 13) Pesquisa etc.

A fim de sintetizar a aproximação que se percebe entre as opiniões evidenciadas pelos professores nas categorias emergentes da ATD desenvolvida (MORAES; GALIAZZI, 2011) e pelos estudantes em relação ao potencial/viabilidade da AnM na aprendizagem de Matemática, apresenta-se, a seguir, um quadro-resumo dessas confluências (Quadro 32).

Quadro 32: Aproximação das opiniões dos professores e estudantes em relação à AnM

Professores	Estudantes
ViP_1 - Ocorre maior envolvimento dos estudantes no processo educativo	• Interação • Trabalho-em-grupo • Participação • Aula-dinâmica • Pesquisa
ViP_2 - A abordagem do conteúdo curricular acontece de modo diferenciado	• Aula-dinâmica • Trabalho-em-grupo • Conteúdo-a-partir-de-situações-problema • Roteiro-passo-a-passo • Resolução-de-problemas • Situações-problema
ViP_3 - A aprendizagem do conteúdo curricular se torna mais significativa	• Aprendizagem-do-conteúdo • Exemplos-reais • Exemplos-do-cotidiano • Aplicação-em-outras-áreas • Exercícios-de-aplicação • Atividades-práticas
ViP_4 - O pensamento crítico e reflexivo dos estudantes é incentivado	• Elaboração-de-perguntas • Resolução-de-problemas • Conteúdo-a-partir-de-situações-problema • Situações-problema • Exemplos-reais • Exemplos-do-cotidiano
ViP_5 - O protagonismo dos estudantes é oportunizado dentro do processo educativo	• Elaboração-de-perguntas • Pesquisa • Participação • Interação • Trabalho-em-grupo

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em síntese, essa aproximação sinaliza que a AnM tem potencial e pode ser viável como método para ensinar Matemática na Educação Básica, em especial no Ensino Médio, pois: estimula o interesse dos estudantes e incentiva sua participação nas aulas, oportunizando interação (estudantes e estudantes, estudantes e professor) e trabalho em grupo; aborda o conteúdo curricular diferente do modo tradicional, partindo sempre de alguma situação-problema da realidade e/ou do cotidiano dos estudantes; enfatiza a elaboração e resolução de problemas; torna a aprendizagem mais significativa; incentiva os estudantes a questionar e fazer perguntas; oportuniza pensamento crítico-reflexivo dos estudantes dentro da sociedade em que vivem; incentiva a investigação e a pesquisa; oportuniza o protagonismo dos estudantes e a descoberta.

Um elemento que teve papel central no planejamento e execução das atividades que permitiram chegar a essas conclusões foi o uso do Material de Apoio (piloto) baseado no método AnM, utilizado pelos professores na prática em sala de aula. A seguir, será discutido esse Material, evidenciando a opinião dos professores sobre o mesmo e destacando suas contribuições com vistas a uma possível melhoria (do Material).

6.2.2 Contribuições do Material de Apoio sobre AnM na prática do professor

O Material de Apoio (piloto) utilizado no minicurso e prática dos professores na escola foi elaborado principalmente a partir do livro didático de Matemática do Ensino Médio e das questões do ENEM conforme descrito no segundo capítulo, seção 2.5. Nesse Material foi apresentado o desenvolvimento prático das etapas relativas ao método AnM para alguns conteúdos do Ensino Médio, como exemplificado anteriormente nas subseções 6.1.1 (Figura 16) e 6.1.2 (Figuras 17, 18, 19, 20, 21).

Na avaliação dos professores participantes dessa etapa da pesquisa, é possível inferir que o Material proposto teve papel relevante no planejamento e execução do método AnM na prática em sala de aula. Essa opinião pode ser percebida tanto nas respostas do questionário[78] (Apêndice B), como na fala deles ao término das atividades, na avaliação feita no último encontro da ação de extensão (dia 13/04/2019). Além disso, a relevância desse Material pode ser percebida de antemão no próprio relato feito na subseção 6.1.2, onde se destacou a ação prática dos professores na escola, cujo planejamento e execução teve apoio direto do Material, principalmente no uso de situações-problema contidas nele.

Em relação às respostas do questionário 2, o quadro a seguir (Quadro 33) explicita essa opinião, sinalizando as percepções iniciais dos professores acerca da estrutura e conteúdo do Material elaborado previamente, ao mesmo tempo que aponta as primeiras sugestões.

Quadro 33: Opinião dos professores sobre o Material de Apoio (piloto)

[78] Questionário 2, pergunta 10: “Com relação ao Material de Apoio (piloto), qual sua opinião sobre: (a) A organização e visual? (b) As situações propostas? (c) As possíveis questões? (d) Os modelos apresentados?”

Material de Apoio	Professores					
	A	B	C	D	E	F
Organização e Visual	"Bom."	"Boa."	"Boa."	"Muito boa."	"Excelente."	"Muito bem organizado e elaborado. Ações bem divididas e claras."
Situações propostas	"Bom, só precisa adequar à realidade de cada escola."	"Boas. Apresentar situações mais próximas dos alunos."	"São bastante interessantes."	"Ótimas."	"Excelentes. Aumentar a quantidade de situações-problemas voltadas à nossa região."	"Contextualizadas e atrativas. Ótimas para apresentar aos alunos."
Possíveis questões	"Bom."	"Boas."	"Mostra um leque bem grande de opções."	"Coloca questões da realidade do município."	"Excelentes."	"São bem elaboradas e respondem a uma linha de pensamento para entender o conteúdo."
Modelos apresentados	"Gostei. Irei utilizar em conteúdos futuros."	"Bons."	"Estão bem organizados."	"Ótimos."	"Bem elaborados."	"Correspondem aos temas abordados."
Material de Apoio	**Professores**					
	G	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**
Organização e Visual	"Ao invés das atividades estarem separadas por fases, seria melhor por conteúdo."	"Poderia apresentar mais imagens e material palpável na hora da aplicação."	"Boa, porém separaria as etapas por situações-problemas."	"Acredito que não sobrecarrega o texto e estimula a leitura."	"Muito boa."	"Boa. O aluno gosta muito de imagem e facilita o entendimento."
Situações propostas	"Ok!"	"Muito interessantes. Fazem parte do cotidiano dos alunos."	"Excelentes."	"Adequadas aos conteúdos e níveis."	"Muito boas."	"Boas, porém deveriam diversificar mais."
Possíveis questões	"Ok!"	"Estão de acordo com a situação-problema e apresentam coerência e uma sequência com nível de dificuldade."	"Penso que está bom, pois depende muito do nível da turma para avançar nesse item."	"Permitem a reflexão e discussão."	"Muito boas."	"Boas. Levam o entendimento integrado à busca de outros conhecimentos."

Modelos apresentados	"Ok!"	"Bem elaborados e podem ser muito mais explorados tornando a atividade bem mais diversificada."	"Muito bons."	"Despertam o interesse."	"Muito bons."	"Bons e bem contextualizados."

Fonte: Elaborado pelo autor baseado nas respostas do questionário 2, pergunta 10.

É perceptível nesse quadro (Quadro 33) que a avaliação feita pelos professores indica potencial de um Material de Apoio sobre o método AnM para auxiliar os professores em sua implementação prática na sala de aula. Basta observar que os quatro elementos do Material de Apoio (piloto) destacados no questionário 2[79], são classificados pelos professores, de modo geral, como **bons**, **muito bons**, **ótimos** e **excelentes**. Isso evidencia, não só o potencial de um Material desse tipo (destacado acima), mas também a contribuição que o mesmo pode trazer ao processo educativo, seja no ensino, seja na aprendizagem.

Vale reiterar, como forma sintética dessa opinião, que a **organização** e o **visual** do Material de Apoio (piloto) utilizado no minicurso e na prática em sala de aula, segundo os professores, *"[...] não sobrecarrega o texto e estimula a leitura."* (**J**). As **situações propostas** são bem *"interessantes"* (**C**, **H**), *"Contextualizadas e atraentes."* (**F**) e *"Fazem parte do cotidiano dos alunos."* (**H**). Já as **questões** sugeridas em cada situação proposta, abrem um *"[...] leque bem grande de opções."* (**C**) e *"Permitem a reflexão e discussão."* (**J**) de temas voltados à *"[...] realidade do município."* (**D**) e *"Levam o entendimento integrado à busca de outros conhecimentos."* (**L**). Além disso, destaca o professor **F**, essas questões direcionam as discussões em uma *"[...] linha de pensamento para [o estudante] entender o conteúdo."*. Por fim, os professores enfatizaram que os **modelos apresentados** são *"bem elaborados"* e *"organizados"* (**C**, **E**, **H**), adequados *"[...] aos temas abordados."* (**F**), *"[...] bem contextualizados."* (**L**) e *"[...] despertam o interesse [dos estudantes]."* (**J**).

Contudo, os professores apontaram algumas sugestões como forma de melhoria desse Material. O professor **H** destacou, por exemplo, que na **organização** e **visual**, o Material de Apoio *"Poderia apresentar mais imagens e material palpável na hora da aplicação."* (**H**), pois como afirmou **L**, *"O aluno gosta muito de imagens e facilita o entendimento."*. Em relação às **situações propostas**, os professores enfatizaram que poderiam ser melhor adequadas *"[...] à*

---

[79] a) A organização e visual; b) As situações propostas; c) As possíveis questões; d) Os modelos apresentados.

realidade de cada escola." (**A**), ser *"[...] mais próximas dos alunos."* (**B**) e *"[...] voltadas à nossa região."* (**E**). Assim, as **possíveis questões** viriam como consequência dessas situações adaptadas, e, apesar de não indicarem sugestões de modo explícito quanto a esse elemento, percebe-se a preocupação deles em discutir e explorar mais questões relacionadas a assuntos/temas da realidade dos estudantes, seja da escola, do município ou da região onde vivem. É o que indicou o professor **H**, em sua fala no último encontro da ação de extensão (13/04/2019), quando afirmou: *"Poderiam ser elaboradas mais questões envolvendo situações-problema da nossa região [...]"*. Por fim, o professor **H** ainda destacou que os **modelos apresentados** poderiam *"[...] ser muito mais explorados, tornando a atividade bem mais diversificada."*.

Além disso, ao responderem a última questão do questionário 2[80] (Apêndice B), os professores ratificaram as sugestões apresentadas acima, de adequar o Material de Apoio à realidade dos estudantes (**A**, **H**, **K**). Nessas respostas, uma proposta que vale destaque foi apontada pelo professor **F**, ao sugerir que o Material poderia ter *"[...] uma parte de anexos para ser o material do aluno, com situações-problema e questões propostas para o manuseio do aluno."*. Esse apontamento sinaliza a possibilidade de ampliação do Material de Apoio (a princípio voltado ao professor) para facilitar o desenvolvimento prático do método AnM pelos estudantes, não só das tarefas propostas, mas do próprio conteúdo curricular em questão. Entende-se que esses *"anexos [...] para o manuseio do aluno"* poderiam ser disponibilizados em folhas A4 ou até mesmo em um caderno de atividades, contendo o resumo das situações-problema, os espaços reservados (em quadros, tabelas, sistemas de coordenadas, figuras, desenhos etc.) para desenvolvimento e resolução das questões propostas, o resumo do conteúdo curricular, as questões de aplicação etc.

Por fim, ao avaliarem as ações realizadas, no último encontro (13/04/2019), os professores apontaram ainda algumas sugestões para o Material utilizado. Em síntese, pode-se destacar: apresentar uma situação de cada vez e desenvolver o processo de AnM (as etapas) para cada uma; descrever as etapas do método dentro de uma sequência mais detalhada (passo a passo) da aula ou da sequência de aulas; explicitar as competências e habilidades esperadas dos estudantes em relação àquele conteúdo específico; como o material é de apoio ao professor, descrever as ações (como sugestões) dos professores em cada momento do processo etc. Em

[80] Questão 11, do questionário 2: "Com objetivo de ser utilizado com mais eficiência pelo professor de matemática em sala de aula, aponte sugestões para melhorar/aperfeiçoar o material de apoio apresentado no minicurso.".

complemento a isso, destaca-se ainda a ideia dos professores **B** e **H**, que sugeriram a produção (publicação) de um livro a partir do Material, ideia essa, reforçada pelos outros professores.

Percebeu-se, em última análise, que o contato dos professores com esse Material de Apoio (piloto), embora precisando de ajustes, teve papel central na segurança e inspiração deles quanto a implementação prática do método AnM na sala de aula. É o que expressaram os professores **E** e **K** ao afirmarem, respectivamente, que *"Com o Material de Apoio, ajudou a tirar o medo de não saber [implementar o método AnM]"* e mais, *"Com o Material de Apoio tivemos inspiração para elaborar e perceber situações do cotidiano dos alunos e explorar bem uma questão."*. Concluindo, o professor **J** relatou que, durante o processo da ação pedagógica, teve *"inspiração com o Material de Apoio"* na produção de um artigo que já estava escrevendo junto com outros colegas de sua escola (professores **K** e **L**).

Assim, levando em conta a opinião dos professores, foram feitos alguns ajustes no Material (piloto), principalmente em relação à organização/visual e na sugestão dos anexos para manuseio dos estudantes. Além disso, como a proposta inicial desta pesquisa era tomar o livro didático de Matemática do Ensino Médio e as questões do ENEM como principais fontes na elaboração das situações propostas, foi preciso fazer algumas adaptações para adequá-las à realidade dos estudantes e da região onde vivem. Claro que, para um possível aprofundamento, visando talvez uma publicação (como sugeriram os professores **B** e **H**), pode-se levar em consideração outras fontes, inclusive "criar" situações que envolvam interesse e a região dos estudantes. Com esses ajustes, a intensão é que o novo Material de Apoio (Apêndice D) possa ser melhor aproveitado pelo(a) professor(a) e pelos estudantes na prática em sala de aula, no processo educativo.

Diante de todas essas sugestões e percepções, entende-se, portanto, que um Material de Apoio elaborado com base no método que se propõe implementar em sala de aula, como é o caso da Análise de Modelos, pode servir como importante aliado ao professor em sua prática.

Ao iniciar o presente capítulo, destacou-se a frase do filósofo Will Durant (1996) que definiu *Excelência* como uma arte que se obtém com muito treinamento e insistência na busca pela melhoria da qualidade de uma ação, fazendo dessa ação, um hábito. Assim, ao propor um Material de Apoio (Apêndice D) na perspectiva apontada acima, infere-se que o mesmo pode servir de inspiração e auxílio no processo de busca por essa *Excelência* (DURANT, 1996) em relação à prática pedagógica do professor, no hábito de busca constante pela melhoria da qualidade tanto do ensino como da aprendizagem de Matemática na Educação Básica, no contexto brasileiro.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A busca pela melhoria da qualidade do ensino de Matemática, não só no Brasil, mas no mundo todo, tem sido uma tarefa árdua, empreendida por muitos professores e pesquisadores preocupados com esse tema. Tal preocupação é a centralidade da investigação na presente pesquisa, cuja ênfase pode ser percebida em todo o processo de idealização, planejamento e desenvolvimento da mesma.

No decorrer desse processo, percebeu-se que não se trata de simplesmente fazer uso de determinados métodos diferenciados, como a Modelagem Matemática, ou de ferramentas de apoio ao ensino, como o livro didático e/ou as tecnologias digitais, que com isso a melhoria dessa qualidade estará garantida. Não. É preciso pensar mais abrangente, não exclusivamente em novos métodos e ferramentas de apoio, mas em novas formas de lidar e abordar as que já existem e estão em vigor com certo êxito, ou não.

Foi a partir dessa perspectiva, aspirando tal melhoria, que se vislumbrou a possibilidade de conceber a abordagem *Análise de Modelos* (SOARES, 2012, 2015; SOARES; JAVARONI, 2013) como um método de ensino, voltada para a Educação Básica. A presente pesquisa, portanto, teve como objetivo geral empenhar-se na defesa da tese de que a **Análise de Modelos pode ser concebida como um método de ensino, que perpassa por etapas presentes nos métodos de Resolução de Problemas e de Modelagem Matemática, e que pode contribuir para o ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio de modo intra e interdisciplinar**.

A proposta era, a partir dessa concepção, elaborar um roteiro em etapas que auxiliasse o professor no planejamento e execução das ações pedagógicas em sala de aula. O entendimento era conceber a AnM, nessa perspectiva, não só como método de ensino que potencializasse o uso de modelos matemáticos em variados contextos, em situações-problema interessantes para os estudantes, mas também como um modo mais seguro de inicialização, pelo professor, no trabalho com Modelagem em sala de aula sem, contudo, se distanciar da estrutura escolar vigente, principalmente no que diz respeito ao cumprimento do conteúdo curricular programático. Para isso, propôs-se o desenvolvimento do método AnM a partir do uso de situações-problema e modelos matemáticos encontrados nos livros didáticos e nas provas do ENEM que, conforme pôde ser demonstrado, contêm uma variedade desses elementos (situações-problema e modelos matemáticos).

Nesse sentido, a questão de pesquisa que se levantou foi: **De que modo professores de Matemática do Ensino Médio podem utilizar modelos matemáticos presentes nos livros**

didáticos e nas questões do ENEM, adaptados à perspectiva da Análise de Modelos, como método de ensino, a fim de elaborar e executar atividades de ensino em sala de aula?

A fim de estabelecer uma concepção da AnM como método de ensino de Matemática, considerou-se basicamente as concepções de Soares (2012, 2015), Soares e Javaroni (2013) sobre essa abordagem (Capítulo 5), Allevato e Onuchic (2014) sobre Resolução de Problemas, e, Bassanezi (2002) e Biembengut (2014, 2016) sobre Modelagem Matemática (Capítulo 3).

A partir desse referencial, inferiu-se que a AnM poderia ser caracterizada por pelo menos três princípios essenciais, que são: 1 - *O uso de modelos matemáticos prontos*; 2 - *O desenvolvimento do conteúdo curricular (e não curricular)*; 3 - *O uso de situações e/ou problemas da realidade*. Estabeleceu-se, então, um roteiro em quatro etapas para o método AnM que serviria para orientar o professor tanto no planejamento como no desenvolvimento prático das aulas. São elas: 1ª etapa - *Apresentação das situações-problema*; 2ª etapa - *Exploração e interpretação (dos modelos)*; 3ª etapa - *Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução*; 4ª etapa – *Aplicação* (Capítulo 5).

Esse roteiro foi estabelecido como proposta inicial para orientar o planejamento do próprio pesquisador na elaboração de um Material de Apoio (piloto) sobre o método AnM, que foi utilizado nas intervenções pedagógicas (Capítulo 6), quando este (o pesquisador) teve a oportunidade de acompanhar o desempenho de professores e estudantes, ao utilizarem, em sala de aula, esse Material. Assim, ao final das ações, a proposta do roteiro pôde ser confirmada e o Material de Apoio (piloto), aperfeiçoado com alguns ajustes, conforme sugestões indicadas pelos próprios professores participantes dessa etapa da pesquisa na avaliação final do processo, principalmente nas respostas do questionário 2 (Apêndice B).

É perceptível, diante de todas as ações realizadas, que o processo de construção do Material de Apoio (Apêndice D), que levou em conta os princípios e o roteiro relativos ao método AnM, evidencia nitidamente um modo de como professores de Matemática do Ensino Médio podem utilizar modelos matemáticos presentes nos livros didáticos e nas questões do ENEM para elaborar/executar atividades práticas de ensino em sala de aula. Essa evidência responde, em certo sentido, a questão de pesquisa proposta, e consequentemente, alcança o objetivo específico referente a essa questão. Além disso, pôde ser demonstrado que um Material de Apoio baseado no método AnM pode contribuir positivamente no processo educativo, no contexto da sala de aula.

Tem-se, contudo, plena consciência que a proposta aqui apresentada não é final, acabada e completa. Não esgota a investigação sobre o tema. Não é a única perspectiva como método para essa abordagem (AnM), nem tão pouco, o Material de Apoio elaborado (Apêndice D) se coloca como o único modo de abordar os conteúdos curriculares. Entende-se que a proposta serve sim de inspiração e dá subsídios teórico-práticos ao professor para que possa desenvolver as atividades de AnM e, como apontado acima, inicializar com certa segurança os primeiros trabalhos de Modelagem, ao mesmo tempo que o instiga a exercer a própria criatividade nas aulas de Matemática.

Em síntese, acredita-se que a presente pesquisa tem implicação relevante direta na formação do professor de Matemática, especialmente da Educação Básica, pois apresenta uma alternativa metodológica que visa a melhoria da qualidade do ensino, e consequentemente da aprendizagem, o que contribui, em sentido mais amplo, para o fortalecimento da própria Educação Matemática no contexto educacional brasileiro.

Assim, mesmo com as limitações que se impuseram ao processo de investigação da pesquisa, fica evidenciado (capítulo 6) que a AnM, na perspectiva aqui proposta, não só tem potencial como método para ensinar Matemática na Educação Básica, mas pode ser considerada viável no contexto educacional vigente, uma vez que tem como um de seus princípios, não comprometer o conteúdo curricular, o que é apontado em geral como uma das grandes dificuldades na implementação de metodologias diferenciadas, como a Modelagem.

O resultado da pesquisa aponta que a AnM, do modo como proposto aqui, potencializa maior envolvimento dos estudantes no processo educativo, seja cativando a atenção e instigando o interesse pela Matemática, seja incentivando a participação nas atividades ou oportunizando interação entre eles e o professor. Além disso, com a AnM, a abordagem do conteúdo curricular acontece de modo diferenciado do modo tradicional de ensino, pois parte de situações reais e do cotidiano dos estudantes, o que pode tornar a aprendizagem mais significativa e divertida. Evidencia ainda que o uso do método AnM, segundo a proposta aqui sugerida, incentiva o pensamento crítico e reflexivo dos estudantes, uma vez que oportuniza espaço para questionamentos e descobertas, incentivando seu protagonismo dentro do processo educativo.

Embora ciente de suas limitações, chega-se ao final desta investigação com a sensação de que seu objetivo central foi alcançado, isto é, evidencia de alguma forma, contribuições à melhoria da qualidade do ensino de Matemática no contexto local onde o método AnM foi aplicado (Santarém/PA) ao mesmo tempo que sinaliza potencial em outros contextos (outros grupos de professores, outras escolas, outras localidades, outras cidades etc.).

Como destacado acima, a investigação sobre o tema (AnM) não se esgota aqui, mas abre possibilidades para novas pesquisas. Novos questionamentos e investigações podem surgir com o intuito de aperfeiçoá-la. Muitos tópicos abordados podem ainda ser discutidos, investigados e aprofundados. É o caso, por exemplo, de questões relativas aos modelos matemáticos (Qual tipo é melhor? Como escolher? etc.), às situações-problema (Onde encontrar? Como adaptar? etc.), ao Material de Apoio (Podem constar apenas modelos matemáticos? Podem constar apenas situações-problema com temas específicos? etc.), dentre outros.

No caso da presente proposta, a intenção é envidar esforços no sentido de tentar divulgá-la amplamente entre outros professores da Educação Básica (a princípio no Ensino Médio), por meio de ações pedagógicas semelhantes às que foram utilizadas nesta pesquisa (minicurso, acompanhamento na escola etc.). Nesse sentido, o objetivo sequencial desta pesquisa aponta para ações que oportunizem aos professores da Educação Básica o acesso a uma proposta metodológica (AnM) para, em seguida, com ou sem adaptações, implementarem-na com certa segurança em suas aulas.

Entende-se, portanto, que é a partir dessa prática, com empenho e dedicação conjunta de professores, que o método de ensino aqui proposto poderá ser melhor aproveitado, validado e aperfeiçoado ainda mais.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

AGUIAR, A. F. A.; XAVIER, A. F. S.; RODRIGUES, J. E. M. **Cálculo para Ciências Médicas e Biológicas**. São Paulo: Editora HARBRA, 2009.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim Gepem**, Rio de janeiro, n. 55, p. 122-154, jul./dez. 2009.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Paco Editorial. Jundiaí. 2014.

ALMEIDA, C. C. P. C. **A Resolução de Problemas e o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático no contexto da educação pré-escolar e no 1º ciclo do Ensino Básico**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade dos Açores, Angra do Heroísmo, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, H. C. A Matematização em Atividades de Modelagem Matemática. **Alexandria** Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 8, n.3, p. 207-227, novembro 2015.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre "como fazer" modelagem matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Org.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**. Londrina: Eduel, 2011. p.19-43.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ANASTASIOU, L. G. C.; ALVES, L. P. Estratégias de Ensinagem. In: ANASTASIOU, L. G. C.; ALVES, L. P. (Org.). **Processos de Ensinagem na Universidade**. 10 ed. Joinville, SC: Editora Univille, 2015.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo** (Volume 1). 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

ARAÚJO, J. L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática**: as discussões dos alunos. (Tese de Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

ARAÚJO, J. L. Uma abordagem sociocrítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **Alexandria Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 55-68, jul. 2009.

ARRETCHE, M. **Trajetórias da desigualdade**: como o Brasil mudou nos últimos 50 anos. 1 ed. 2015. São Paulo: Editora da Unesp, 489p.

ÁVILA, G. S. **Análise Matemática para Licenciatura**. São Paulo, SP: Editora Edgard Blücher ltda, 2001.

BARBOSA, J. C. A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.** Recife: SBEM, 2007. p.161-174.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e a perspectiva sociocrítica. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2., 2003, Santos. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2003. 1 CD-ROM.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. **Bolema**, Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001c.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática**: concepções e experiências de futuros professores. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP, Rio Claro, 2001a.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como? **Veritati**, Salvador, n. 4, p. 73-80, 2004.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Rio de Janeiro: ANPED, 2001b. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, R. C. Modelagem Matemática Uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. **Biomatemática.** Campinas, v. 9, p.9-21, 1999.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática**: teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BIANCHI, M. I. Z. **Uma reflexão sobre a presença da História da Matemática nos livros didáticos**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

BIEMBENGUT, M. S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das Propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, p. 7-32, 2009.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelação Matemática como método de Ensino-Aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1990.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem matemática no ensino fundamental**. Blumenau: Edifurb, 2014.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

BITTENCOURT, C. M. F. **Livro didático e conhecimento histórico***:* Uma história do saber escolar. 1993. Tese (Doutorado em História Social) - Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1993.

BITTENCOURT, C. M. F. **Livro didático e saber escolar**: 1810-1910. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

BLUM, W.; LEIß, D. Understanding how students' and teachers deal with modelling problems. In: Haines, C.; Galbraith, P.; Blum, W.; Khan, S. (Eds.). **Mathematical modelling**: Education, engineering and economic - ICTMA 12, p. 222-231. Chichester: Horwood, 2007.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação matemática**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 2013.

BONOTTO, D. L.; LARA, I. C. M. Modelagem Matemática e formação continuada de professores: um mapeamento teórico. In: VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 2013. **Anais...** Canoas: ULBRA, 2013.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. **Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEB/DPEM, 2006. (Orientações Curriculares do Ensino Médio, Volume 2).

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CEB n. 5/2011. Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. **Diário Oficial da União**, Poder Executivo, Brasília, DF, 24 jan. 2011. Seção 1, p. 10.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CEB n. 2/2012. Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. **Diário Oficial da União**, Poder Executivo, Brasília, 31 jan. 2012. Seção 1, p. 20.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC/SEB, 2013.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, Lei no. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matriz de Referência para o ENEM 2009**. Brasília: INEP/MEC, 2009.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática 3º e 4º ciclos: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. **Plano Nacional de Educação (PNE) 2014-2024**: Lei nº 13005, de 25 de junho de 2014. Brasília: MEC, 2014.

BRASIL. **PNLD 2018**: matemática – guia de livros didáticos – Ensino Médio/ Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2017. 122 p.

BRITO, M. R. F. Alguns aspectos teóricos e conceituais na solução de problemas matemáticos. In: BRITO, M. R. F. (Org.). **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas: Alínea, 2006, p. 13-53.

BURAK, D. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: Encontro Paranaense da Modelagem na Educação Matemática, I, Londrina, 2004. **Anais...** Londrina: UEL, p. 1-11, 2004.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.** Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1992.

BURAK, D. **Modelagem matemática**: uma alternativa para o ensino de Matemática na 5ª série. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1987.

BURAK, D.; ARAGÃO, R. M. R. **A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa**. Curitiba, PR: CRV, 2012.

BURAK, D.; KLÜBER, T. E. Considerações sobre modelagem matemática em uma perspectiva de Educação Matemática. **Margens** (UFPA), v. 6, p. 33-50, 2013.

CALDEIRA, A. D. Modelagem Matemática: um outro olhar. **Alexandria**. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 33-54, jul. 2009.

CALDEIRA, A. D.; SILVEIRA, E.; MAGNUS, M. C. M. Modelagem Matemática: alunos em ação. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**. Londrina-PR: Eduel, 2011, p.65-81.

CARGNIN-STIELER, M.; BISOGNIN, V. Contribuições de metodologia da modelagem matemática para cursos de formação de professores. **Revista Iberoamericana de Educación**, n. 49/3, 2009.

CARREIRA, S. **Significado e aprendizagem da Matemática**: dos problemas de aplicação à produção de metáforas conceptuais. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 1998.

CEOLIM, A. J.; CALDEIRA, A. D. Modelagem Matemática na Educação Matemática: obstáculos segundo professores da Educação Básica. **Educação Matemática em Revista**, v. 20, n. 46, p. 25-34, 2015.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e pesquisa**. São Paulo, p. 549-566, set./dez. 2004.

CHOPPIN, A. **Les manuels scolaires**: histoire et actualité. Paris: Hachette, 1992.

COSTA, A. C. G. **A presença da Pedagogia**: teoria e prática da ação sócio-educativa. 2. ed. São Paulo, SP: Global Instituto Ayrton Sena, 2001.

CRUZ NETO, Otávio. O trabalho de campo como descoberta e criação. In: MINAYO, M. C. S. (Org.). **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. 22. ed. Petrópolis: Vozes, 2003.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Revista Educação e Pesquisa**. São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005.

D'AMBROSIO. U. Prefácio. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. p. 11-22.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2011.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações (Ensino Médio). 3. ed. São Paulo: Ática, 2016a. Vol. 1.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações (Ensino Médio). 3. ed. São Paulo: Ática, 2016b. Vol. 2.
DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações (Ensino Médio). 3. ed. São Paulo: Ática, 2016c. Vol. 3.

DEPREZ, J. Modelling the Evolution of the Belgian Population Using Matrices, Eigenvalues and Eigenvectors. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14**. Nova Iorque: Springer, 2011. p.467-478.

DUARTE JÚNIOR, J. F. **O que é realidade**. São Paulo: Brasiliense, 2002.

DURANT, W. **A história da filosofia**. Tradução de Luis Carlos do Nascimento Silva, 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 1996.

FAINGUELERT, E. K; NUNES, K. R. A. **Matemática**: práticas pedagógicas para o ensino médio. Porto Alegre: Penso, 2012.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2012. (Coleção formação de professores).

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. Rio de Janeiro. Paz e Terra, 1996.

FREITAS, I. C.; ORTIGÃO, M. I. R. O PNLD está chegando: e agora, como escolher o livro didático de Matemática? In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, V, 2012, Petrópolis, RJ. **Anais...** Petrópolis: SBEM, 2012.

FREITAS, N. K.; RODRIGUES, M. H. O livro didático ao longo do tempo: a forma do conteúdo. **DAPesquisa**, v. 3, n. 1, Florianópolis, p. 26-33, 2008.

GAZIRE, E. S. **Resolução de Problemas**: Perspectivas em Educação Matemática. 1988. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1988.

GODOY, E. V. **A Matemática no Ensino Médio**: a trajetória brasileira desde a década de 80 e as organizações curriculares de outros países. Vitória da Conquista, BA: Práxis Educacional, v.6, n.9, p. 77-100, 2010.

HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. **Cálculo**: um curso moderno e suas aplicações. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

HOUAISS, A. **Dicionário Eletrônico Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática**: ciência e aplicações (Ensino Médio). 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016a. Vol. 1.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática**: ciência e aplicações (Ensino Médio). 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016b. Vol. 2.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática**: ciência e aplicações (Ensino Médio). 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016c. Vol. 3.

JAVARONI, S. L. **Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias**. 2007. 231f. Tese (Doutorado em

Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

KAISER, G.; LEDERICH, C.; RAU, V. Theoretical Approaches and Examples for Modelling in Mathematical Education. In: BERINDERJEET, K.; JAGUTHSING, D. **Mathematical Applications and Modelling**. Singapore: Word Scientific, 2010. p. 219-246.

KLÜBER, T. E. Considerações sobre práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, 2010, Salvador. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010.

KLÜBER, T. E., BURAK, D. Concepções de modelagem matemática: contribuições Teóricas, In: **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 1, pp. 17-34, 2008.

KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org.). **A resolução de problemas na Matemática escolar**. Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

LARA, I. C. M. A constituição histórica de diferentes sujeitos matemáticos. **Acta Scientiae** (ULBRA), v. 13, n. 2, p. 97-114, jul./dez. 2011.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. (Trad.) MONTEIRO, H.; SETTINERI, F. **A construção do saber**: manual de metodologia da pesquisa em Ciências Humanas. Porto Alegre: Artmed; Belo Horizonte: Editora UFMG, 1999.

LELLIS, M; IMENES, L. M. A Matemática e o novo Ensino Médio. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, v. 8, n. 9, p. 40-48, 2001.

LESTER JR, F. **Teaching problem solving**: what, why and how. New York: Dale Seymour Publications, 1982.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São Paulo: Cortez, 2017. E-book.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em Educação:** abordagens qualitativas. 2. ed. (Reimpr.). Rio de Janeiro: E.P.U., 2017.

MAFRA, J. R. S. **Espaços Transversais em Educação Matemática**: uma contribuição para a formação de professores na perspectiva Etnomatemática. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN, 2006.

MAGNUS, M. C. M. **Modelagem matemática em sala de aula**: principais obstáculos e dificuldades em sua implementação. 2012. 121 p. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

MALHEIROS, A. P. S. **A produção matemática dos alunos em ambiente de modelagem**. (Dissertação de Mestrado) UNESP, Rio Claro, 2004.

MALHEIROS, A. P. S. Modelagem em aulas de Matemática: reflexos da formação inicial na Educação Básica. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 9, n. 21, p. 1151-1167, 2016.

MARQUES, M. O. **Escrever é preciso**: o princípio da pesquisa. 5. ed. rev. Ijuí, RS: Ed. Unijuí, 2006.

MEYER, J.F.C.A; CALDEIRA, A.D; MALHEIROS, A.P.S. **Modelagem em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MINAYO, M. C. S. (Org.). **Pesquisa Social**. Teoria, método e criatividade. 22. ed. Petrópolis: Vozes, 2003.

MINAYO, M. C. S. **O desafio do conhecimento.** São Paulo: Hucitec,1993.

MORAES, R.; GALLIAZZI, M. C.; RAMOS, M. G. Pesquisa em sala de aula: fundamentos e pressupostos. In: MORAES, R.; LIMA, V. M. R. (Orgs.). **Pesquisa em sala de aula:** tendências para a educação em novos tempos. 3. ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2012.

MORAES, R. **Da noite ao dia**: tomada de consciência de pressupostos assumidos dentro das pesquisas sociais. 2006. Texto digitado.

MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa: um conceito subjacente. In: MOREIRA, M. A., CABALLERO, M.C.; RODRÍGUEZ, M.L. (Org.). **Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo**, Burgos, España, p. 19-44, 1997.

NISS, M. Prescriptive modelling - challenges and opportunities. In: STILLMAN, G. A; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive inuences. Cham: Springer, 2015. p.67-80.

NISS, M.; BLUM, W.; GALBRAITH, P. Introduction. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P.; HENN, H. W.; NISS, M. (Org.) **Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study**. New York: Springer, 2007. p.3-32.

NISS, M. Modeling a crucial aspect of student's mathematical modeling. In: LESS et al. (Org.). **Modeling student mathematical modeling competences**:13 ICTMA. New York: Springer, 2010. p. 43-59.

NUNES, C. B. **O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas**: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. 430 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2010.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções & Perspectivas. São Paulo, SP: Editora UNESP, 1999, p. 199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação Matemática - pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98. 2011.

PEDUZZI, L. O. Q. Sobre a Resolução de Problemas no ensino de Física. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 14, n. 3, p. 229-253, dez. 1997.

PEREIRA, E. A; MARTINS, J. R.; ALVES, V. S.; DELGADO, E. I. A contribuição de John Dewey para a Educação. **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos, SP: UFSCar, v.3, n. 1, p. 154-161, mai. 2009.

PERRELLI, M. A. S.; LIMA, A. A.; BELMAR, C. C. **A escolha e o uso do livro didático pelos professores das áreas de Ciências Naturais e Matemática**: as pesquisas que abordam essa temática. Série-Estudos – Periódico do Programa de Pós-Graduação em Educação da UCDB. Campo Grande, MS, n. 35, p. 241-261, jan./jun. 2013.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

POLYA, G. On solving Mathematical problems in high School. In: KRULIK, S.; REYS, R. (Eds.). **Problem solving in school mathematics**. Reston: NCTM, p. 1-2, 1980.

RANGEL, M. **Métodos de ensino para a aprendizagem e a dinamização das aulas**. Campinas – SP: Papirus, 2015. E-book.

ROMANATTO, M. C. **A noção de número natural em livros didáticos de matemática**: comparações entre textos tradicionais e modernos. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de São Paulo, São Carlos – SP, 1987.

ROMANATTO, M. C. O livro didático: alcances e limites. In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo – SP. **Anais...** São Paulo: USP, 2004.

SALLES, A. M. Circe Maria Bittencourt: Livro didático e saber escolar (1810-1910). **Revista de História**, v. 2, n. 2, p. 116-121, 2010.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. **Matemática** (Ensino Médio). 2ª série - Volume 1. São Paulo: Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo, 2014.

SAVIANI, D. **Escola e Democracia**. Edição Comemorativa. Campinas, SP: Autores Associados, 2008.

SCHOENFELD, A. H. **Ideas y tendencias en la rsolución de problemas**. La Enseñanza de la Matemática a Debate. Madrid: MEC, 1985.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p.31 - 42.

SILVA, C.; NOGUEIRA, C. M. I.; KATO, L. A. Possibilidade de trabalho com Modelagem Matemática em livro didático do Ensino Médio. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática, 10, 2009, Guarapuava. **Anais...** Guarapuava/PR: SBEM, 2009.

SILVEIRA, E. **Modelagem Matemática no Brasil**: entendendo o universo de teses e dissertações. Curitiba, 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Setor de Educação, UFPR.

SILVEIRA, E.; CALDEIRA, A. D. Modelagem na sala de aula: resistências e obstáculos. **BOLEMA** - Boletim de Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro - SP, v. 26, n. 43, p. 249-275, ago. 2012.

SIQUEIRA, A. A. **Modelagem Matemática e livro didático no Ensino Médio**: um olhar par o PNLD. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema** – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, ano 13, n. 14, p. 66–91, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica**: A questão da democracia. 3. ed. Campinas, SP: Papirus, 2001.

SKOVSMOSE, O. **Um convite à educação matemática crítica**: perspectivas em Educação Matemática. Campinas, SP: Papirus, 2014.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo** (Ensino Médio). 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. Vol. 1.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo** (Ensino Médio). 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. Vol. 2.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo** (Ensino Médio). 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. Vol. 3.

SOARES, D. S. Model Analysis with Digital Technologies: a "hybrid approach". In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive inuences. Cham: Springer, 2015. p. 453-463.

SOARES, D. S. **Uma abordagem pedagógica baseada na Análise de Modelos para alunos de Biologia: qual o papel do software?** 2012. 341f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

SOARES, D. S.; JAVARONI, S. L. Análise de Modelos: possibilidades de trabalho com Modelos Matemáticos em sala de aula. In: BORBA, M. C. & CHIARA, A. (Org.) **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**, São Paulo-SP, Editora Livraria da Física, 2013, p. 195-219.

SOARES, D. S.; SOUTO, D. L. P. Tensões no processo de análise de modelos em um curso de cálculo diferencial e integral. **Rematec**, Natal, RN, ano 9, n.17, p. 44-74, set./dez. 2014.

SOARES, D. S.; VIER, G. Os diálogos em um ambiente de análise de modelos e tecnologias: queda de um objeto com resistência do ar. **Educere Et Educare**, v. 12, n. 24, jan./abr. 2017.

SOUSA, E. S.; VIALI, L.; RAMOS, M. G. Construção e análise de modelos exponenciais de forma significativa: uma experiência de ensino em sala de aula. **Exitus**, Santarém/PA, v. 7, n. 2, p. 55-73, maio/agosto 2017.

SOUSA, E.S.; LARA, I. C. M. Caracterizando Análise de Modelos e sua relação com a Modelagem Matemática: relato de um grupo de professores do ensino básico. In: X Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 2017, Maringá - PR. **Anais...**, Maringá: UEM, 2017.

SOUSA, E.S.; LARA, I. C. M.; REISDOEFER, D. N.; MACHADO, D. R. Análise de Modelos em atividades de Modelagem no ensino de Matemática. In: VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 2017, Canoas - RS. **Anais...**, Canoas: ULBRA, 2017.

STEWART, J. **Cálculo** (Volume 1). São Paulo: Cengage Learning, 2013.

SZPACENKOPF, M.; FERREIRA, P. Enem 2015: Rio tem maior queda na nota de Matemática em relação a 2011. **O Globo**, 2016. Disponível em: https://oglobo.globo.com/sociedade/educacao/enem-e-vestibular/enem-2015-rio-tem-maior-queda-na-nota-de-matematica-em-relacao-2011-20243780.

TAMBARUSSI, C. M.; KLÜBER, T. E. Focos da pesquisa stricto sensu em Modelagem Matemática na Educação Matemática brasileira: considerações e reflexões. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 16, n. 1, 2014, p. 209-225.

TAMBARUSSI, C. M.; KLÜBER, T. E. Modelagem Matemática na Educação Matemática: O que se tem pesquisado? In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 8, 2013. Santa Maria. **Anais...** Santa Maria: Centro Universitário Franciscano, 2013. v.1, p. 1-15.

THOMAS, G. B. **Cálculo** (Volume 1). 11. ed. São Paulo, SP: Pearson, 2009.

TRIVIÑOS, A, N, S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo, SP: Atlas, 2017.

VALENTE, O.; NETO, J. Resolução de Problemas em Física: necessidade de uma ruptura com a didáctica tradicional. **Gazeta da Física**, v. 12, p.70-78, 1989.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre, RS: Artmed, 2009.

VIGGIANO, E.; MATTOS, C. O desempenho de estudantes no Enem 2010 em diferentes regiões brasileiras. **Revista brasileira de Estudos Pedagógicos**. Brasília, v. 94, n. 237, p. 417-438, 2013.

ZUFFI, E. M.; ONUCHIC, L. R. O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 11, p. 79-97, set. 2007.

APÊNDICES

Apêndice A: Questionário 1

Prezado(a) colega,

O objetivo deste questionário é fazer um levantamento das percepções que professores de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio têm sobre os temas: Modelagem Matemática, Análise de Modelos e Aplicação de Modelos. Os dados aqui coletados serão utilizados para uma pesquisa de doutoramento em andamento. Desde já, comprometo-me a não fazer uso de sua identificação, mantendo seu nome em sigilo.

Porto Alegre, ... semestre de 20.....

Emerson Silva de Sousa.

Identificação do(a) Professor(a)		
Nome:		
Idade:		
e-mail:		
Formação Acadêmica Superior		
Curso(s) de Graduação	**Instituição**	**Início – Término**
Curso(s) de Pós-Graduação *Latu Sensu*	**Instituição**	**Início – Término**
Curso(s) de Pós-Graduação *Stricto Sensu*	**Instituição**	**Início – Término**
Atuação Profissional		
Local(is) de Trabalho:		
Tempo de Atuação na Educação Básica (Fundamental II e Médio):		
Séries/Ano(s) em que atua:		

Q1: O que você entende por **Modelo Matemático**?

Q2: Considerando que **Modelagem Matemática**, **Análise de Modelos** (matemáticos) e **Aplicação de Modelos** (matemáticos) são alternativas metodológicas para ensinar Matemática nos Ensinos Fundamental e Médio, como você caracteriza cada uma delas?
Modelagem Matemática:
Análise de Modelos (matemáticos):

Aplicação de Modelos (matemáticos):

Q3: Qual a **importância** dessas três alternativas para os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática como prática em sala de aula?

Q4: Descreva quais as **dificuldades** de implementação de cada uma dessas alternativas nas aulas de Matemática na prática em sala de aula.

Q5: Em sua prática em sala de aula, você já usou alguma(s) dessas alternativas? Se sim, qual(is)? Descreva como ocorreu.

Q6: Descreva como você realiza a **Avaliação** nas suas aulas de Matemática em sala de aula.

Apêndice B: Questionário 2

Identificação do(a) professor(a)							
Nome do(a) professor(a)				Nº de alunos			
Escola onde aplicou o método AnM							
Turma na qual aplicou o método AnM		manhã		tarde		noite	
Conteúdo Curricular trabalhado							

Q1) Na sua opinião do que depende a aprendizagem de matemática dos estudantes?

Q2) Qual a principal meta no ensino da matemática na sua opinião? Por quê?

Q3) Para você, quando o ensino da matemática atinge seu objetivo?

Q4) Como qualifica sua experiência em utilizar a *Análise de Modelos* (**AnM**) como método de ensino de matemática em sua sala de aula? Justifique sua resposta a seguir.

- [ ] Ruim
- [ ] Regular
- [ ] Boa
- [ ] Muito boa
- [ ] Excelente

Q5) Você acha que a *Análise de Modelos* (**AnM**) pode ser VIÁVEL como um método para ensinar matemática no Ensino Médio? Justifique sua resposta a seguir.

- [ ] Sim.
- [ ] Não.

Q6) Você adotaria com certa frequência a *Análise de Modelos* (**AnM**) como um método para ensinar matemática em suas aulas? Justifique sua resposta a seguir.

- [ ] Sim.
- [ ] Não.

Q7) Cite pelo menos 2 **pontos positivos** do método de ensino **AnM** que você acha que pode contribuir para a aprendizagem dos estudantes.

Q8) Cite pelo menos 2 **dificuldades** que você sentiu ao aplicar na prática o método de ensino **AnM** em sua sala de aula.

Q9) O desenvolvimento prático do método de ensino *Análise de Modelos* (**AnM**) é sugerido em quatro etapas:

1ª etapa – Apresentação das situações-problemas;
2ª etapa – Exploração e interpretação;
3ª etapa – Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução;
4ª etapa – Aplicação.

Você considera que essas etapas são:

☐ Inadequadas.
☐ Adequadas, sem mudanças.
☐ Adequadas, porém com algumas mudanças. Nesse caso, o que mudaria?

Q10) Com relação ao material de apoio, qual sua opinião sobre:

(a) A organização e visual:
(b) As situações propostas:
(c) As possíveis questões:
(d) Os Modelos apresentados:

Q11) Com objetivo de ser utilizado com mais eficiência pelo professor de matemática em sala de aula, aponte sugestões para melhorar/aperfeiçoar o material de apoio apresentado no minicurso.

Apêndice C: Questionário 3

Identificação do(a) estudante		
Nome:	Idade:	Turma:
Escola:	Turno: ( ) manhã ( ) tarde ( ) noite	
Nome do seu professor de matemática:		

Q1) O que significa aprender matemática pra você?

....
....
....
....
....

Q2) Na sua opinião, o que mais contribui pra você aprender matemática?

....
....
....
....
....

Q3) De que modo você acha que aprende melhor a matemática?

....
....
....
....
....

Q4) Na sua opinião, os métodos de ensino utilizados por seu professor contribuem para a sua aprendizagem em matemática? Por quê?

☐ Sim. ☐ Não. ☐ Em parte.

....
....
....
....
....

Q5) Cite pelo menos **2 pontos positivos** do método de ensino (Análise de Modelos) utilizado por seu professor nas últimas aulas que você acha que pode contribuir para a sua aprendizagem de matemática.

....
....
....
....
....

Q6) Cite pelo menos **2 dificuldades** que você sentiu com o método de ensino (Análise de Modelos) utilizado por seu professor nas últimas aulas.

....
....
....
....
....

Apêndice D: Material de Apoio

ANÁLISE DE MODELOS

Um método de ensino de matemática na Educação Básica

Uma proposta de ensino de matemática para o Ensino Médio

Emerson Silva de Sousa

Santarém - PA

2019

APRESENTAÇÃO

A fim de contribuir para a prática docente do professor de Matemática, tanto no planejamento como na execução do método Análise de Modelos (AnM), é apresentado a seguir o desenvolvimento prático de alguns conteúdos específicos do Ensino Médio, cuja execução pode ocorrer, seguindo as etapas: 1ª) *Apresentação das situações-problema*; 2ª) *Exploração e interpretação*; 3ª) *Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução*; 4ª) *Aplicação*.

A 1ª etapa do método AnM visa a compreensão das situações-problema dentro do contexto apresentado e destaca a presença de modelos matemáticos nesse contexto. Nessa etapa, após e/ou durante a apresentação das situações-problema, em diálogo com os estudantes, o professor pode incentivá-los a elencar as variáveis envolvidas (**Identificação de Variáveis**). Aqui também é oportunizada aos estudantes uma retomada inicial de conhecimentos prévios, tanto de conteúdo curricular como de conteúdo não curricular.

A 2ª etapa do método objetiva levar os estudantes a relacionar e interpretar os modelos matemáticos dentro do contexto apresentado, de modo que possam compreender o significado das variáveis elencadas. Nessa etapa, em conjunto com os estudantes, além do levantamento e elaboração de problemas (**Possíveis questões**), o professor também pode propor as primeiras atividades a serem realizadas pelos estudantes (**Tarefa 1: Ações exploratórias**). O objetivo aqui é tentar envolvê-los na exploração da situação em estudo e do(s) respectivo(s) modelo(s), além de preparar o "ambiente" para a 3ª etapa.

A 3ª etapa se refere à resolução das questões levantadas (**Tarefa 2: Resolução dos problemas**), ao mesmo tempo que se desenvolve o novo conteúdo curricular necessário para dar conta destas e de outras questões que por ventura surjam. Esse conteúdo deve ser desenvolvido de modo autônomo pelo professor, que pode ser iniciado a partir de discussões envolvendo os modelos matemáticos relacionados à situação apresentada (**Discussão em torno da Situação**).

Por fim, a 4ª etapa visa aplicar os modelos discutidos, tanto no contexto das situações propostas inicialmente como na resolução de novos problemas, em outros contextos. Nessa etapa são sugeridas algumas questões relativas ao conteúdo curricular estudado (**Questões de Aplicação**). Nessas questões, os modelos matemáticos estudados têm papel central em sua resolução e interpretação, oportunizando, de modo geral, a consolidação do conteúdo matemático introduzido, agora aprofundado e ampliado.

Para facilitar a realização, tanto das *Ações exploratórias* (Tarefa 1, na 2ª etapa) como da *Resolução dos problemas* (Tarefa 2, na 3ª etapa) pelos estudantes, o professor pode elaborar um **Material Auxiliar ao Estudante** (**MAE**) para o manuseio deles. Como sugestão geral, esse **MAE** para o desenvolvimento das tarefas propostas pode ser disponibilizado, por exemplo, na forma de folhas de papel A4, constando texto-resumo das situações, as ilustrações e os modelos matemáticos. Nessas mesmas folhas podem constar os enunciados das tarefas, reservado espaços adequados para realização de cálculos e registro de opiniões, sugestões, conclusões etc. As tarefas podem ser realizadas em dupla, pois além de incentivar a interação e o trabalho em grupo, também economiza nas cópias (número de folhas).

No presente Material de Apoio, os conteúdos escolhidos estão inseridos em três unidades, sendo cada unidade referente a conteúdos do 1º, 2º e 3º anos, respectivamente. No início de cada conteúdo é apresentado um quadro (com quatro colunas), destacando-se **Tópicos de conteúdo**, **Objetos de conhecimento**, **Competências** e **Habilidades**, conforme prevê a Matriz de Referência para o ENEM do novo Ensino Médio (BRASIL, 2009). Ressalta-se, porém, que os temas discutidos aqui são muito mais amplos. Não se esgotam apenas com o que é apresentado e nem as situações e modelos selecionados são os únicos que podem ser considerados. Dependendo do objetivo do professor, outras situações e outros modelos podem ser escolhidos. Além disso, na exploração dos modelos, muitas outras questões podem surgir no decorrer da prática em sala de aula que, certamente, enriqueceriam ainda mais as aulas.

A ideia desses exemplos é apresentar, não uma receita estática ou engessada de uma proposta pedagógica, mas um guia que auxilie o professor de Matemática a exercer sua própria criatividade no planejamento das aulas, seguindo, contudo, os princípios e etapas que caracterizam a AnM como um método de ensino na Educação Básica. Destaca-se, porém, que para alguns conteúdos, as etapas do método AnM estão apresentadas de modo reduzido. São desenvolvidas apenas a 1ª etapa, e a sugestão das possíveis questões, contida na 2ª.

Diante desses apontamentos, acredita-se que a presente proposta pode incentivar a participação dos estudantes nas aulas e aproveita a motivação que têm em relação ao uso de tecnologias, especialmente o uso do celular em sala de aula, o que possibilita maior envolvimento nas atividades. Tem-se aí, portanto, a possibilidade de os estudantes fazerem uso de *softwares* e aplicativos (Calculadora, Excel, GeoGebra, etc.) que podem facilitar o desenvolvimento de várias tarefas, permitindo, com isso, aproveitar melhor o tempo.

ÍNDICE

CONTEÚDO CURRICULAR - 1º ANO

CC1.1 – FUNÇÃO QUADRÁTICA

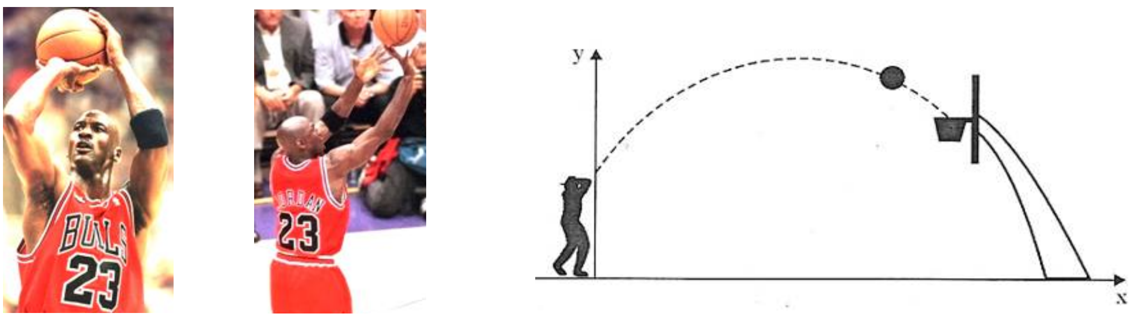
Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Definição da função quadrática • Valor da função num ponto • Raízes e gráfico da f. quadrática • Vértice da parábola	• Conhecimentos algébricos • Conhecimentos algébricos/geométricos • Conhecimentos numéricos	C1 C5	H4 H19 H20, H21 H22, H23

≫ *Situação 1.1.1: Basquete mágico!*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016a, p. 144, adaptado). Michael Jordan foi um dos maiores jogadores de basquete de todos os tempos. Jogou no Chicago Bulls pela NBA no período de 1984-1998, sendo campeão em seis temporadas. A figura a seguir ilustra o momento do lançamento de uma bola de basquete para a cesta feito por Jordan.

Figura 1: Lançamento de uma bola de basquete por Michael Jordan



Fonte: https://br.pinterest.com/pin/344243965244462883/, https://ftw.usatoday.com/2016/02/celebrate-michael-jordans-birthday-with-9-classic-photos, https://brainly.com.br/tarefa/742934.

Para facilitar a visualização da trajetória da bola nesse lançamento, foi inserido um sistema de coordenadas cartesianas para essa representação, de modo que a altura y (em m) da bola pode ser dada em função da distância horizontal x (em m) pela expressão:

Modelo 1

$$\boldsymbol{y = -0,1x^2 + 1,2x + 2,5}$$

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.1.1** (Sugestões)

Podemos considerar um sistema de coordenadas cartesianas para representar a trajetória da bola (Figura 1), de modo que a variável $\boldsymbol{y}$ (em metros) indica a altura da bola em função de $\boldsymbol{x}$ (em metros), que é a distância na horizontal.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.1.1** (Sugestões)

Que tipo de função é essa? E o gráfico da trajetória da bola, como se chama? Em relação ao eixo vertical (eixo Oy), o que ocorre com a bola antes de atingir a altura máxima? E quando ela atinge essa altura? E depois? Qual a altura máxima atingida pela bola nesse lançamento? Qual a posição da bola, na horizontal (eixo Ox), quando isso ocorre? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 1.1.1)

1) Sem realizar cálculos é possível determinar a altura da bola no momento do lançamento utilizando a expressão matemática acima. Encontrar essa altura; **2)** Sabendo que a altura oficial da cesta fica 3,05 m do chão, determinar a que distância da cesta (na horizontal) está o jogador; **3)** Calcular a altura que a bola atinge quando sua posição (projeção) no eixo Ox está a 2 m do jogador. Fazer o mesmo cálculo caso essa projeção esteja a 3 m ou a 4 m do jogador; **4)** Discutir maneiras de calcular a altura máxima que a bola pode atingir. Primeiramente por tentativas, realizando cálculos numéricos do tipo $y = f(a)$, onde a é um valor atribuído a x na expressão matemática $y = f(x)$ (Modelo 1), e depois, evidenciando a necessidade de conhecer o vértice da parábola. Calcular, por exemplo, as alturas $y = f(2{,}8)$, $y = f(3{,}5)$, $y = f(4{,}3)$, $y = f(5{,}6)$, $y = f(6{,}4)$, $y = f(7{,}2)$, $y = f(8{,}0)$; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 1.1.1** (Sugestão)

O modelo $\boldsymbol{y = -0,1x^2 + 1,2x + 2,5}$ é a expressão matemática de uma função quadrática, cujo gráfico (trajetória da bola) é uma parábola. Em relação ao eixo vertical (eixo Oy), a medida que a bola sobe, vai perdendo velocidade até parar, quando atinge a altura máxima. A partir daí ela começa a cair, aumentando sua velocidade até atingir o chão, devido a aceleração da gravidade (discutir o movimento no contexto da Física).

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *função quadrática* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 1.1.1** (Sugestões)

1) Identificar os coeficientes a, b e c da função $y = -0{,}1x^2 + 1{,}2x + 2{,}5$ e discutir seu significado no contexto da situação; **2)** Calcular os valores $y = f(0)$, $y = f(1)$, $y = f(2)$, $y = f(2{,}8)$, $y = f(3{,}5)$, $y = f(4{,}3)$, $y = f(5{,}6)$, $y = f(6{,}4)$, $y = f(7{,}2)$, $y = f(8{,}0)$ e interpretá-los no contexto da situação; **3)** Calcular os valores de x tais que $f(x) = 3{,}05$, $f(x) = 5{,}25$ e $f(x) = 6{,}50$. Discutir o significado desses valores no contexto da situação;

4) Calcular a altura máxima atingida pela bola, representada pela função $y = -0{,}1x^2 + 1{,}2x + 2{,}5$; **5)** Calcular a posição da bola, na horizontal (eixo Ox), quando isso ocorre; etc.

≫ *Situação 1.1.2*: *Como construir um galinheiro e aproveitar melhor o espaço?*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

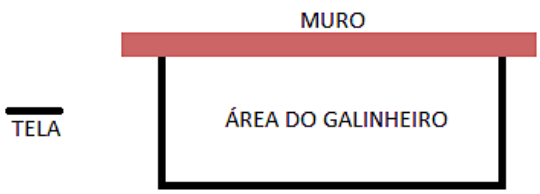
(IEZZI et al., 2016a, adaptado). Na comunidade Perema (14 km de Santarém na Av. Curuá-Uma (PA-370)), um pequeno criador de galinhas resolve construir um galinheiro retangular no seu terreno. Dispondo apenas de 30 m de tela, o homem decide aproveitar um muro desse terreno como uma das laterais do galinheiro conforme a figura abaixo:

Figura 2: Pensando no projeto "O galinheiro"

Fonte: Adaptado pelo autor a partir de https://tomroyreleased.wordpress.com/2017/02/06/hitting-the-spiritual-wall/, https://br.depositphotos.com/107728356/stock-illustration-cartoon-farmer-feeding-chikens.html e https://produto.mercadolivre.com.br/MLB-774046121-tela-pvc-viveiro-preto-1-x-10metros-_JM?quantity=1.

Esse projeto pode ser simplificado pelo desenho a seguir (Modelo 2):

Modelo 2



Fonte: http://edumatecno.blogspot.com/2013/04/desenvolvendo-uma-atividade-de.html.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.1.2** (Sugestões)

Os lados do galinheiro podem ser identificados pelas variáveis $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$ (em metros), sendo $\boldsymbol{x}$ a medida dos lados iguais. Já a área do galinheiro (retângulo) pode ser representada pela variável $\boldsymbol{y}$ (em m^2), cuja expressão será dada por $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.1.2** (Sugestões)

De quantas maneiras é possível cercar esse galinheiro? A área obtida é sempre a mesma? É possível o galinheiro ter uma área de $112\ m^2$? Por quê? E $125\ m^2$? Por quê? Caso seja possível o galinheiro ter alguma dessas áreas ($112\ m^2$ ou $125\ m^2$), quais seriam as dimensões x e z? Quais as dimensões (x e z) que dão a maior área possível para esse galinheiro? Qual será essa área? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da **Situação 1.1.2** (Sugestões)

1) Esboçar possibilidades de como cercar o galinheiro; **2)** Ao considerar os três lados do galinheiro que serão cercados, representando os lados iguais por x (metros) e o outro lado por z (metros), evidenciar a expressão matemática da área do galinheiro $y = f(x)$; **3)** Encontrar as dimensões do galinheiro pra que este tenha uma área de $112\ m^2$. Fazer o mesmo cálculo, supondo que o galinheiro tem uma área $125\ m^2$; **4)** A partir das possibilidades apresentadas no item 1), estendê-las e realizar cálculos (por tentativas) a fim de tentar obter a área máxima do galinheiro (evidenciar a necessidade de conhecer o vértice da parábola); etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 1.1.2** (Sugestão)

O professor pode dialogar com os estudantes, levando-os a perceberem que há “infinitas” maneiras de cercar o galinheiro, obtendo, em geral, áreas diferentes. Além disso, o professor pode incentivá-los a generalizar a área desse galinheiro pela expressão matemática $y = -2x^2 + 30x$ (função quadrática) onde x é a medida do lado duplo do galinheiro como definido anteriormente.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *função quadrática* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 1.1.2** (Sugestões)

1) Verificar se é possível o galinheiro ter uma área de $112\ m^2$ ou $125\ m^2$ (resolver equações do 2º grau e discutir as raízes); **2)** Caso seja possível, calcular em cada situação, as dimensões x e z estabelecidas anteriormente; **3)** Encontrar as dimensões (x e z) que dão a maior área possível para esse galinheiro, utilizando para isso, os conhecimentos sobre o vértice da parábola; **4)** Calcular essa área máxima; etc.

≫ *Situação 1.1.3: Você já foi à praia de Alter-do-Chão?*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(ENEM – 2015, adaptado). A praia de Alter-do-Chão (Figura 2) está entre as dez mais bonitas do Brasil. Localizada no oeste do Pará, é a primeira entre os dez lugares com as praias mais bonitas do Brasil, chamado de "Caribe brasileiro" pelo jornal inglês *The Guardian*. O jornal também aponta o lugar como o mais bonito do mundo com praias de águas doces. Perfeita para relaxar, a natureza foi bem generosa com a vila de pescadores, que pertence à cidade de Santarém. O cenário é paradisíaco (figura abaixo) e guarda uma beleza única, já que suas praias são às margens do Rio Tapajós.

Figura 3: Praia de Alter-do-Chão

Fonte: https://br.pinterest.com/pin/59391288811206351/?nic=1.

Uma excursão à vila pode ser feita em pequenas embarcações, navegando as águas verde-azuladas do Rio Tapajós, saindo da orla de Santarém (à 38 km da vila aproximadamente).

Modelo 3

"Seu" Antônio é dono de uma dessas embarcações, cuja capacidade máxima é de 40 passageiros, e cobra para uma excursão (ida e volta) até a vila e arredores, $R\$\ 60{,}00$ de cada passageiro. Uma condição colocada por ele é que se não atingir a capacidade máxima da embarcação, cada passageiro deve pagar mais $R\$\ 2{,}00$ por lugar vago.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.1.3** (Sugestões)

Podemos representar o número de lugares vagos pela variável $\boldsymbol{x}$, e o valor arrecadado pelo dono da embarcação por $\boldsymbol{y}$ (em reais).

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.1.3** (Sugestões)

Como seria uma expressão matemática que permite calcular o valor a ser arrecadado em função do número de lugares vagos? Para as pessoas que vão numa excursão dessa, o ideal é que todos os lugares sejam ocupados, mas para o dono da embarcação seria bom que não. Sendo assim, quantos lugares deveriam ser vagos para que o seu Antônio tenha a maior arrecadação possível? Qual é esse valor? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da **Situação 1.1.3** (Sugestões)

1) Encontrar uma expressão matemática $y = f(x)$ que permite calcular o valor a ser arrecadado em função do número de lugares vagos; **2)** Para as pessoas que vão numa excursão dessa, o ideal é que todos os lugares sejam ocupados, mas para o dono da embarcação seria bom que não. Sendo assim, a partir da expressão matemática encontrada no item 1), tentar calcular (por tentativas) o número ideal de lugares vagos deveria ter para que Seu Antônio tenha a maior arrecadação possível; **3)** Tentar achar esse valor (evidenciar a necessidade de conhecer o vértice da parábola); etc.

Observação: No **MAE** referente a essa situação (**Situação 1.1.3**), para realização do item 1 da Tarefa 1, o professor pode disponibilizar uma tabela em branco (Quadro 1) a ser preenchida pelos estudantes, em diálogo com o professor. Essa tabela pode constar na folha A4 disponibilizada ou ser construída na hora pelo professor, no quadro.

Quadro 1: Expressão matemática $y = f(x)$ do Valor Total arrecadado por “Seu” Antônio

Nº de Lugares Vagos	Valor Individual	Valor Total
0	60	$40 \cdot 60$
1	$60 + 2 \cdot \mathbf{1}$	$(40 - \mathbf{1}) \cdot (60 + 2 \cdot \mathbf{1})$
2	$60 + 2 \cdot \mathbf{2}$	$(40 - \mathbf{2}) \cdot (60 + 2 \cdot \mathbf{2})$
3	....	....
4	....	....
⋮	⋮	⋮
$\boldsymbol{x}$	....	....

Fonte: Elaborado pelo autor.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 1.1.3** (Sugestão)

O professor pode dialogar com os estudantes, levando-os a perceberem que uma expressão matemática que permite calcular o valor y a ser arrecadado em função do número de lugares vagos x pode ser dada por $y = -2x^2 + 20x + 2400$, que é uma função quadrática.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *função quadrática* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 1.1.3** (Sugestões)

1) Identificar os coeficientes a, b e c da função $y = -2x^2 + 20x + 2400$ e interpretá-los dentro do contexto da situação; **2)** Verificar se é possível o seu Antônio arrecadar $R\$\ 2500{,}00$ ou $R\$\ 3000{,}00$ nessa excursão, utilizando para isso, os conhecimentos sobre resolução da equação do 2º grau e discussão de suas raízes; **3)** Caso seja possível, calcular em cada arrecadação, o número de lugares vagos; **4)** Calcular o número de lugares vagos para que o seu Antônio tenha a maior arrecadação possível, utilizando os conhecimentos sobre o vértice da parábola nos problemas de otimização (Máx. e Mín.); **5)** Calcular esse valor.

≫ Situação 1.1.4: Que tal um sorvete pra refrescar!?

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(IEZZI et al., 2016a, adaptado). Devido o calor que faz em Santarém em quase todo o ano, um convite desses não é nada mal! Pensando nisso, foi que Ana resolveu abrir uma sorveteria na sua própria casa, no bairro Aparecida.

Figura 4: Sorvetes da Ana

Fonte: https://camoon.wixsite.com/feiramoderna/sorvetes-da-amazonia.

No primeiro mês (agosto), quando o calor é mais intenso em Santarém, Ana observou que:

Modelo 4 Quando o preço do sorvete (de uma bola) é fixado em $R\$\ 3{,}50$, são vendidas 60 bolas por dia. Procurando aumentar sua arrecadação, Ana fez algumas reduções no preço da bola de sorvete que acarretaram um aumento nas vendas. Nessa relação entre preço e número de bolas de sorvete vendidos, ela pôde verificar que, para cada $R\$ 0,10$ de desconto, o número de bolas de sorvete vendidos por dia aumentava em 4 unidades.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.1.4** (Sugestões)

Podemos considerar $\boldsymbol{x}$ como a variável que representa a quantidade de vezes que é dado o desconto de $R\$ 0,10$ no preço fixado inicialmente na bola de sorvete ($R\$ 3,50$), e $\boldsymbol{y}$, a receita diária.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.1.4** (Sugestões)

Ao analisar a situação, Ana ficou interessada em saber qual o preço a ser cobrado pela bola de sorvete que proporcionaria a maior receita possível, isto é, a receita máxima. Para que isso ocorra, qual o preço a ser cobrado pela bola de sorvete? Qual a quantidade de bolas de sorvete vendidas por esse preço? Qual a receita gerada nessas condições? Em termos gerais, como seria uma expressão matemática que dá a receita em função do desconto? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da **Situação 1.1.4** (Sugestões)

1) Encontrar uma expressão matemática $y = f(x)$ que permite calcular a receita gerada em função do desconto de x vezes do valor $R\$ 0,10$ no preço fixado inicialmente na bola de sorvete; **2)** Utilizando essa expressão matemática, tentar calcular (por tentativas) o valor do desconto em cada bola de sorvete para que se tenha a receita máxima; **3)** Utilizando os dados do item 2), encontrar o preço a ser cobrado pela bola de sorvete visando achar a receita máxima, a quantidade de bolas de sorvete vendidas por esse preço e o valor da receita gerada nessas condições (evidenciar a necessidade de conhecer o vértice da parábola); etc.

Observação: No **MAE** referente a essa situação (**Situação 1.1.4**), para realização do item 1 da Tarefa 1, o professor pode disponibilizar uma tabela em branco (Tabela 2) a ser preenchida pelos estudantes, em diálogo com o professor. Essa tabela pode constar na folha A4 disponibilizada ou ser construída na hora pelo professor, no quadro.

Quadro 2: Expressão matemática $y = f(x)$ da receita diária arrecadada por Ana

Nº de descontos	Valor Individual	Receita
0	$3,50$	$60 \cdot 3,50$
1	$3,50 - 0,10 \cdot \mathbf{1}$	$(60 + 4 \cdot \mathbf{1}) \cdot (3,50 - 0,10 \cdot \mathbf{1})$
2	$3,50 - 0,10 \cdot \mathbf{2}$	$(60 + 4 \cdot \mathbf{2}) \cdot (3,50 - 0,10 \cdot \mathbf{2})$
3	....	....
4	....	....
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{x}$	....	....

Fonte: Elaborado pelo autor.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 1.1.4** (Sugestão)

O professor pode dialogar com os estudantes, levando-os a perceberem que uma expressão matemática que permite calcular a receita y em função do número x de descontos de $R\$ \, 0{,}10$ em cada bola de sorvete pode ser dada por $y = -0{,}4x^2 + 8x + 210$, que é uma função quadrática.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *função quadrática* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 1.1.4** (Sugestões)

1) Identificar os coeficientes a, b e c da função $y = -0{,}4x^2 + 8x + 210$ e interpretá-los dentro do contexto da situação; **2)** Verificar, nessas condições, se é possível Ana ter uma receita diária de $R\$ \, 240{,}00$ ou $R\$ \, 260{,}00$ na venda de sorvetes (fazer uso dos conhecimentos sobre resolução de equação do 2º grau e discussão das raízes); **3)** Caso seja possível, calcular em cada receita, o desconto dado em cada bola de sorvete; **4)** Calcular o preço a ser cobrado por Ana pela bola de sorvete a fim de obter a receita máxima e o número de bolas de sorvete vendidas por esse preço (fazer uso dos conhecimentos sobre vértice da parábola e problemas de otimização); **6)** Calcular a receita máxima.

Observação: O desenvolvimento do conteúdo pode ser direcionado pela sugestão a seguir:

Tópicos	Desenvolvimento em resumo
Definição da função quadrática	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$. **Exemplos:** Identificar os coeficientes a, b e c: **1)** $y = 3x^2 - 4x + 1 \quad \to \quad a = 3 \quad b = -4 \quad c = 1$ **2)** $y = -9x^2 + 6x - 1 \quad \to \quad a = -9 \quad b = 6 \quad c = -1$ **3)** $y = x^2 + 100x \quad \to \quad a = 1 \quad b = 100 \quad c = 0$ **4)** $y = -4x^2 + 36 \quad \to \quad a = -4 \quad b = 0 \quad c = 36$
Valor da função quadrática num ponto	O **valor** da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ num ponto α é o valor de y quando $x = \alpha$, isto é, o valor $y = f(\alpha)$. **Exemplos:** Calcular os valores indicados para a função $y = f(x)$: 1) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$: $f(0)$; $f(1)$; $f(5)$; $f(2{,}5)$; $f(-3)$; 2) $f(x) = -9x^2 + 6x - 1$: $f(0)$; $f(4)$; $f(3{,}2)$; $f(-2)$.
Raízes da função quadrática	As **raízes** da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ são os valores de x quando $y = 0$. As raízes dessa função, quando existem, podem ser encontradas por meio da *fórmula de Baskara*:

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

onde $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$ (letra grega “delta”), chamado discriminante.

Exemplos: Encontrar as raízes da função $y = f(x)$ em cada caso (fórmula de Baskara):

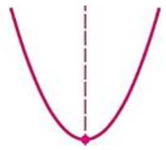
1) $y = 3x^2 - 4x + 1 \quad \rightarrow \quad ?$
2) $y = -9x^2 + 6x - 1 \quad \rightarrow \quad ?$
3) $y = x^2 + 100x \quad \rightarrow \quad ?$
4) $y = -4x^2 + 36 \quad \rightarrow \quad ?$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Gráfico da função quadrática</td>
<td>

O gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ é uma **parábola**

Exemplos: Representar graficamente a função $y = f(x)$ a partir dos pontos $(x, f(x))$ especificados. (Ver formato da parábola):

1) $y = x^2 - 4x + 3 \quad \rightarrow \quad \big(-1, f(-1)\big); \big(0, f(0)\big); \dots; (5, f(5))$



2) $y = -x^2 + 6x - 8 \quad \rightarrow \quad \big(0, f(0)\big); \big(1, f(1)\big); \dots; (6, f(6))$

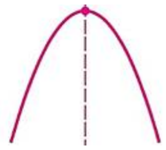
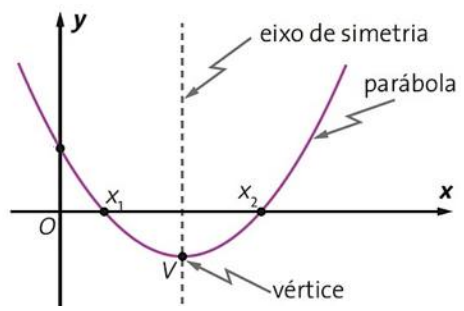


Gráfico da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ e o efeito dos parâmetros $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ na parábola

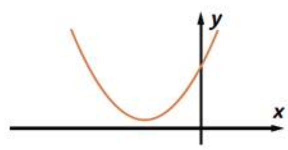


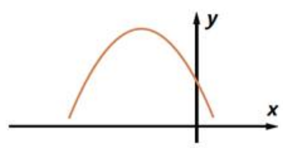
$\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ são as raízes da função. São os pontos do gráfico (caso existam) que cortam o eixo Ox;

$\boldsymbol{V}$ é o vértice da parábola. É o ponto $\boldsymbol{V = (x_v, y_v)}$ do gráfico que tem as seguintes coordenadas: $\boldsymbol{x_v = -\frac{b}{2a}}$ e $\boldsymbol{y_v = -\frac{\Delta}{4a}}$.

O parâmetro $\boldsymbol{a}$ indica a concavidade da parábola:

Se $a > 0$, a concavidade é para cima. Se $a < 0$, a concavidade é para baixo.



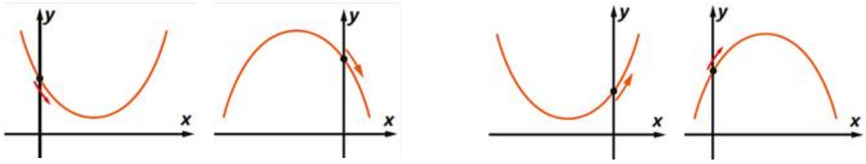


</td>
</tr>
</table>

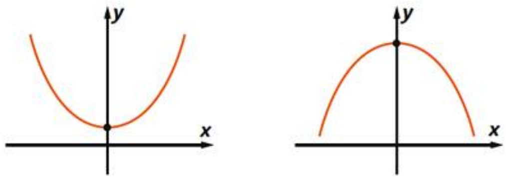
\# O parâmetro $\boldsymbol{b}$ indica se a parábola corta o eixo Oy em seu ramo crescente ou decrescente:

Se $b < 0$, a parábola intersecta o eixo y no ramo decrescente.

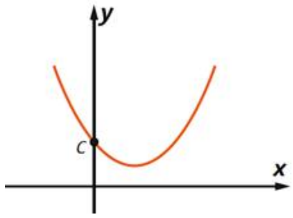
Se $b > 0$, a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente.



Se $b = 0$, a parábola intersecta o eixo y no vértice.



\# O parâmetro $\boldsymbol{c}$ indica o ponto do gráfico que corta o eixo Oy.

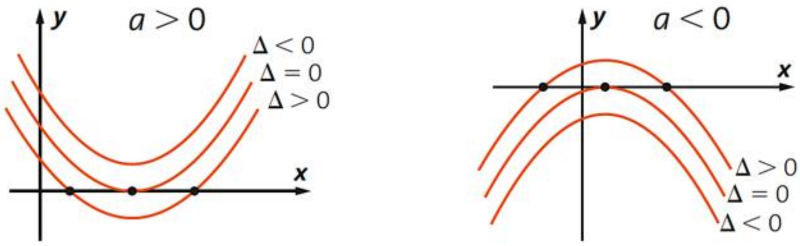


Número de raízes da função quadrática e a relação com o **Discriminante** Δ (delta)

$\Delta >$ **0**: duas raízes reais diferentes

$\Delta =$ **0**: duas raízes reais iguais

$\Delta <$ **0**: não possui raízes reais



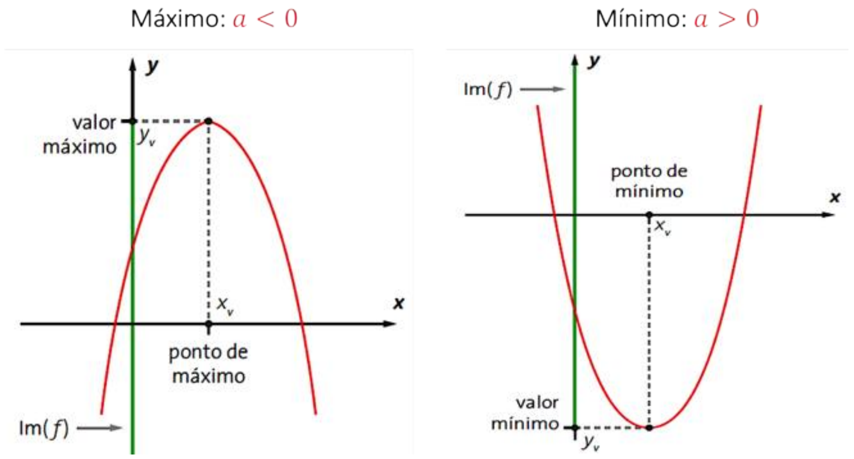
Exemplos: Calcular o discriminante (Δ) e classificar as funções quanto ao número de raízes:

1) $y = 3x^2 - 4x + 1$ → ?

2) $y = -9x^2 + 6x - 1$ → ?

3) $y = x^2 - 4x + 5$ → ?

Vértice da parábola	Otimização da função quadrática: **Máximos** e **Mínimos**

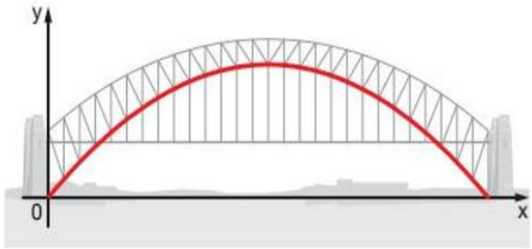
	 **Exemplos:** Identificar o tipo de otimização (máximo ou mínimo) em cada função $y = f(x)$ e calcular os pontos e valores (máximo ou mínimo): **1)** $y = 3x^2 - 4x + 1$ → ? **2)** $y = -9x^2 + 6x - 1$ → ? **3)** $y = x^2 + 100x$ → ? **4)** $y = x^2 - 4x + 5$ → ? **5)** $y = -4x^2 + 36$ → ?

4ª Etapa: Aplicação

CC1.1 - Questões de Aplicação (sugestão)

Q1. (C2/V1/q.38/p.108) Um biólogo desejava comparar a ação de dois fertilizantes. Para isso, duas plantas **A** e **B** da mesma espécie, que nasceram no mesmo dia, foram desde o início tratadas com fertilizantes diferentes. Durante vários dias ele acompanhou o crescimento dessas plantas, medindo, dia a dia, suas alturas. Ele observou que a planta **A** cresce linearmente, à taxa de 2,5 cm por dia; e a altura da planta **B** pode ser modelada pela função dada por $y = \frac{20x - x^2}{6}$, em que y é a altura (em cm) e x o tempo (em dias). Determine: **a)** A diferença entre as alturas dessas plantas com 2 dias de vida; **b)** A lei da função que representa a altura (y) da planta **A** em função de x (nº de dias)? **c)** O dia em que as duas plantas atingiram a mesma altura e qual essa altura; **d)** A taxa média de variação do crescimento das plantas **A** e **B** do dia 1 ao 4.

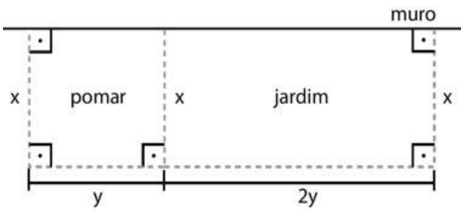
Q2. (C1/V1/q.58/p.129) Num voo com capacidade para 100 pessoas, fretado para uma viagem turística, uma companhia aérea cobra $R\$\,200{,}00$ por pessoa quando todos os lugares são ocupados. Se existirem lugares não ocupados, o preço de cada passagem será acrescido de $R\$\,4{,}00$ por cada lugar não ocupado. **a)** Determine a expressão matemática que dá a receita arrecadada por essa companhia (y) em função do número de lugares não ocupados (x); **b)** Quantos devem ser os lugares não ocupados para a receita ser máxima; **c)** Qual essa receita?



Q3. (C4/V1/q.40/p.123) Na construção de edifícios e monumentos, seja por propriedades estruturais ou por motivos estéticos, podemos observar a presença de forma que se assemelham a uma parábola. Algumas pontes, por exemplo, apresentam em sua estrutura um arco em forma de parábola. Observe o esquema ao lado de uma ponte sobre um rio cujo arco lembra uma parábola. Esse arco pode ser representado matematicamente pela função $y = -0{,}0021x^2 + 1{,}0563x$, na qual y representa a distância entre o nível do rio e o arco, e x representa a distância em linha reta a partir de uma das extremidades do arco no nível do rio, ambos em metros.

a) Supondo que uma pessoa escale a ponte representada no esquema, qual será a maior altura que ela poderá atingir, em relação ao nível do rio? **b)** Qual é a distância entre as extremidades do arco formado pela ponte, representada no esquema, no nível do rio?

Q4. (C2/V1/q.32/p.105) Um fazendeiro possui $150\ m$ de um rolo de tela para cercar um jardim retangular e um pomar, aproveitando, como um dos lados, parte de um muro, conforme a figura:



a) Para cercar com tela a maior área possível, quais os valores x e y?
b) E se não fosse possível aproveitar a parte do muro? Em que percentual ficaria reduzida a área da superfície limitada pelo jardim e pomar reunidos?

Q5. (C5/V1/q.14/p.188) Uma indústria têxtil vende diariamente $800\ m^2$ de certo tipo de tecido ao preço de $R\$\ 10{,}00$ por metro quadrado. Uma pesquisa de mercado revelou que, para cada desconto de $R\$\ 0{,}04$ por metro quadrado desse tecido, haveria um acréscimo diário de $5\ m^2$ nas vendas. Levando em consideração essa pesquisa, o departamento de vendas da indústria estabeleceu o preço por metro quadrado desse tecido para que a receita diária arrecadada com sua venda fosse máxima. **a)** Qual foi o preço estabelecido por metro quadrado desse tecido? **b)** Qual será a receita diária apurada com a venda desse tecido para o preço estabelecido?

Q6. (ENEM – 2010.1) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia do processo. Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função $y = f(t)$, em que y é o valor da temperatura do forno (°C), e t o tempo (min), decorrido desde o instante que o forno é ligado.

$$y = \begin{cases} \dfrac{7}{5}t + 20, & \text{para } 0 \le t < 100 \\ \dfrac{2}{125}t^2 - \dfrac{16}{5}t + 320, & \text{para } t \ge 100 \end{cases}$$

Uma peça é colocada nesse forno quando a temperatura é $48\ °C$ e retirada quando atinge $200\ °C$. Quanto tempo a peça permanece no forno?

CC1.2 – FUNÇÃO EXPONENCIAL

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Definição da função exponencial • Valor da função num ponto • Gráfico da função exponencial • O número irracional ***e***	• Conhecimentos numéricos • Conhecimentos algébricos • Conhecimentos algébricos/geométricos	C1 C5	H4, H19 H20, H21 H22, H23

≫ *Situação 1.2.1: Cuidado com a E. coli!*

1ª Etapa: Apresentação das situações-problema

(DANTE, 2016a, p. 148, ampliada). A *E. coli* (*Escherichia coli*) é uma bactéria que habita naturalmente no intestino de humanos e de alguns animais, mas que em grandes quantidades pode causar problemas como gastroenterite ou infecção urinária, dependendo se o excesso de bactérias surgiu no intestino ou no trato urinário e acontecendo, principalmente, quando se consome água ou alimentos contaminados.

Figura 5: Cultura de bactérias *E. coli* produzida em laboratório

Fonte: https://observador.pt/2015/05/19/usar-virus-combater-bacterias-super-resistentes/, https://exame.abril.com.br/mundo/novas-infeccoes-com-bacteria-e-coli-na-franca-e-belgica-2/.

Por isso, é recomendado sempre higienizar bem os alimentos, especialmente saladas cruas, não reaquecer mais de uma vez a comida já pronta, consumir sempre água filtrada ou fervida e lavar bem as mãos antes e depois de usar o banheiro.

Modelo 5 Sob condições ideais, as bactérias *E. coli* se reproduzem, dobrando seu número a cada 20 minutos, aproximadamente.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.2.1** (Sugestões)

O número de bactérias *E. Coli* pode ser representado pela variável $\boldsymbol{y}$ em função do tempo de reprodução das mesmas, indicado por $\boldsymbol{x}$ (tempo qualquer). Teremos, assim, uma expressão do tipo $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.2.1** (Sugestões)

Como seria uma expressão matemática que permita calcular o número total dessas bactérias em função do número de períodos de 20 minutos? Qual a quantidade de bactérias depois de um tempo qualquer não múltiplo de 20 minutos? Em quanto tempo a quantidade de bactérias duplica (triplica, quadruplica, quintuplica)? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da **Situação 1.2.1** (Sugestões)

1) Suponha que numa certa cultura exista aproximadamente 1000 bactérias *E. coli*. Calcular o número total delas em 20, 40, 60 e 80 minutos; **2)** Tentar expressar uma fórmula que dê o número total da bactéria *E. coli* em n períodos de 20 minutos, considerando 1000 bactérias como a quantidade inicial; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 1.2.1** (Sugestão)

Em diálogo com os estudantes, o professor retoma o processo desenvolvido na Tarefa 1, quando encontraram a expressão $f(n) = 1000 \cdot 2^n$ (n representa a quantidade de períodos de 20 minutos), e questiona como seria uma expressão matemática que permite calcular o número total de bactérias y em função de um tempo qualquer x, não só a cada período n de 20 minutos. A ideia é chagar à expressão $y = 1000 \cdot 2^{0,05x}$, cujo modelo geral é da forma $f(x) = y_0 \cdot a^{rx}$. Para isso, o professor pode propor que se calcule, por exemplo, a quantidade de bactérias *E. coli* em 50, 70, e 90 minutos. Nessa discussão, o professor deve levar os estudantes a perceberem que em cada caso, o número n de períodos de 20 minutos é, respectivamente, $n = \frac{50}{20} = 2{,}5$, $n = \frac{70}{20} = 3{,}5$ e $n = \frac{90}{20} = 4{,}5$. Assim, os estudantes poderão perceber que, para um tempo qualquer x, o número de períodos de 20 minutos é $n = \frac{x}{20}$ ($n = 0{,}05x$), podendo, dessa forma, chagar à expressão acima citada ($y = 1000 \cdot 2^{0,05x}$).

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *função exponencial* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 1.2.1** (Sugestões)

1) Calcular o número de bactérias após 2 horas e 50 minutos, após 4 horas e 35 minutos, após 9 horas e 13 minutos (usar calculadora científica); **2)** Calcular em quanto tempo o número de bactérias dobra, triplica, quadruplica e quintuplica (fazer aproximações, usando calculadora científica).

≫ *Situação 1.2.2: Tá precisando de dinheiro emprestado?*

1ª Etapa: Apresentação das situações-problema

(DANTE, 2016a, p. 149, ampliado). O grande problema são as taxas de juros! Essas taxas, aplicadas em dívidas contraídas em cartões de crédito ou cheque especial, por exemplo, estão entre as mais altas no Brasil, passando dos 10% ao mês. Os principais bancos do nosso país usam taxas menores, mas ainda assim, são consideradas altas para a nossa realidade. Segundo informações do Banco Central, em geral, os bacos cobram juros acima de 4% ao mês para empréstimo pessoal.

Modelo 6 Ana, que estava precisando com urgência de $R\$\,10\,000{,}00$ resolveu fazer um empréstimo pessoal, e para sua "sorte", encontrou um banco que ofereceu taxa de juros de 3% ao mês para que ela pagasse ao final de 3 meses.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.2.2** (Sugestões)

O montante a ser pago por Ana pelo empréstimo realizado, com taxa de juros de 3% ao mês, ao final de três meses, pode ser representado por $\boldsymbol{M}(\mathbf{3})$. Se considerarmos que o tempo de pagamento desse empréstimo é de $\boldsymbol{t}$ meses, então o montante a ser pago pelo empréstimo de $R\$\,10\,000{,}00$, com taxa de 3% ao mês, é uma função do tempo, representada por $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t})$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.2.2** (Sugestões)

Nessas condições, qual o montante a ser pago por Ana ao final dos 3 meses? Qual o montante que Ana pagaria se o prazo fosse 5 meses? Como seria uma expressão geral para o montante a ser pago por Ana se o prazo de pagamento fosse generalizado para t meses? E se generalizarmos também a taxa de juros, isto é, considerarmos i % ao mês, como seria a expressão geral desse montante? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da **Situação 1.2.2** (Sugestões)

1) Calcular o montante a ser pago por Ana ao final dos 3 meses, procedendo da seguinte maneira: primeiramente, calculando o montante no primeiro mês, que é $M(1)$, depois no segundo mês, que é $M(2)$, e por último no terceiro mês, que é $M(3)$; **2)** Se a dívida de Ana tivesse que ser paga ao final de 5 meses, dando prosseguimento na sequência iniciada no item 1), encontrar esse montante, isto é, $M(5)$; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 1.2.2** (Sugestão)

Em diálogo com os estudantes, o professor retoma o processo desenvolvido na Tarefa 1, quando encontraram a expressão $M(5) = 10000 \cdot (1{,}03)^5$, e questiona como seria uma expressão matemática que permite calcular o montante da dívida caso tivesse que ser paga ao final de 10 meses, 20 meses, 50 meses e t meses. A ideia é fazer os estudantes perceberem que a fórmula para esse montante é, respectivamente, $M(10) = 10\,000 \cdot (1{,}03)^{10}$, $M(20) = 10\,000 \cdot (1{,}03)^{20}$, $M(50) = 10\,000 \cdot (1{,}03)^{50}$ e $M(t) = 10\,000 \cdot (1{,}03)^t$, cujo modelo geral é da forma $M(t) = M_0 \cdot (1+i)^t$ se for generalizada também a taxa de juros para i % ao mês e o valor inicial do empréstimo para M_0.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *função exponencial* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 1.2.2** (Sugestões)

1) Calcular o montante a ser pago por Ana se o prazo fosse de 6 meses, 1 ano ou 3 anos (usar calculadora científica); **2)** Calcular em quanto tempo o montante a ser pago por Ana dobra ou quadruplica (fazer aproximações).

≫ Situação 1.2.3: Como está sua radiação hoje?

1ª Etapa: Apresentação das situações-problema

(DANTE, 2016a; IEZZI et al., 2016a; ENEM – 2013, Q. 166, adaptado). Estudos mostram que a radiação de celulares pode ser prejudicial à saúde[1]. Você sabia que o corpo humano também emite radiação? Que possui radioatividade? (sugerir pesquisa sobre o assunto). A radioatividade é um fenômeno que ocorre em núcleos de átomos instáveis por emitirem partículas e radiações. Os átomos radioativos estão presentes no meio ambiente (atmosfera, rochas, cavidades subterrâneas, hidrosfera etc.), alimentos e seres vivos. O núcleo de um átomo com excesso de energia tende a se estabilizar emitindo um grupo de partículas (radiação alfa ou beta) ou ondas eletromagnéticas (radiações gama). Em cada emissão de uma das partículas, há variação do número de prótons e nêutrons no núcleo e, deste modo, um elemento químico se transforma em outro, chamado **decaimento radioativo**.

Considerando uma grande quantidade de átomos de um mesmo elemento químico radioativo, espera-se certo número de emissões por unidade de tempo. Essa "taxa de emissões" é a atividade da amostra. Cada elemento radioativo se transmuta (desintegra) a uma velocidade que lhe é característica. Veja o caso do césio-137. Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior

[1] Disponível em: http://glo.bo/1JKsTd7. **Acesso em**: 21 ago. 2019.

acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população.

Figura 6: Acidente Radioativo em Goiânia (1987)

Técnicos orientando o carregamento de lixo radioativo depois do acidente com o césio-137. Goiânia-GO. Fotografia de 1987.

Fonte: Dante (2016a, p. 174).

Considerando que M_0 era a quantidade inicial dessa amostra e sabendo que a taxa de desintegração, obtida experimentalmente, é $0{,}023$, então a quantidade restante de massa do césio-137, após t anos, pode ser expressa pela expressão matemática:

Modelo 7

$$\boldsymbol{M(t) = M_0(2,7)^{-0,023t}}$$

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.2.3** (Sugestões)

A quantidade de massa inicial de uma amostra de césio-137 pode ser indicada por $\boldsymbol{M_0}$, sua taxa de desintegração (considerada constante e obtida experimentalmente) é $0{,}023$ e a base da potência $2{,}7$ é uma aproximação do número irracional $\boldsymbol{e}$ (número de Euler). Já a quantidade restante de massa do césio-137, após $\boldsymbol{t}$ anos de desintegração pode ser representada por $\boldsymbol{M}$ (uma função do tempo).

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.2.3** (Sugestões)

Que tipo de função é essa? Sabe-se que o lugar onde ocorreu o acidente só poderá ser habitado novamente quando a quantidade de massa radioativa de césio-137 se reduzir, por desintegração, a 3% da quantidade inicial, quanto tempo isso vai demorar (contando a partir da data do acidente, isto é, 1987)? Em que ano será? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da **Situação 1.2.3** (Sugestões)

1) Sabe-se que a **meia-vida** de um elemento radioativo é o intervalo de tempo necessário para que a sua massa radioativa seja reduzida à metade (50%) da quantidade inicial. Tentar estimar a meia-vida do césio-137; **2)** Tentar estimar em quanto tempo (por tentativa) a quantidade de massa desse elemento será reduzida à 32% da quantidade inicial.

Observação: No **MAE** referente a essa situação (**Situação 1.2.3**), para realização do item 1 da Tarefa 1, o professor pode reservar espaço na folha A4 disponibilizada para que os estudantes possam calcular e registrar a quantidade de massa radioativa remanescente após 10, 15, 20, 25, 30 e 35 anos. Usar a mesma ideia na realização do item 2.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 1.2.3** (Sugestão)

Em diálogo com os estudantes, o professor retoma o processo de decaimento radioativo representado pelo modelo $M(t) = M_0 \cdot (2{,}7)^{-0{,}023x}$, enfatizando que se trata de uma função exponencial (decrescente), cuja forma geral pode ser expressa por $M(t) = M_0 \cdot e^{-kt}$.

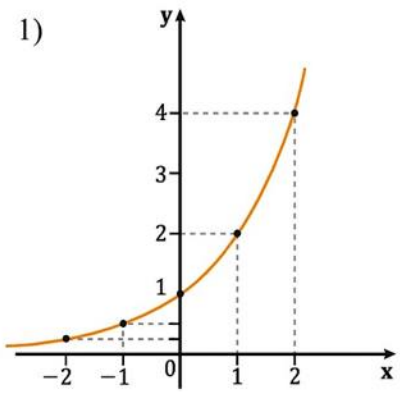
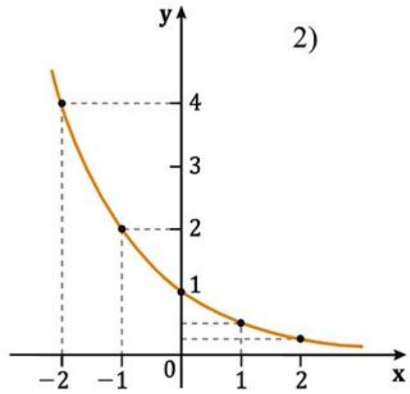
Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *função exponencial* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

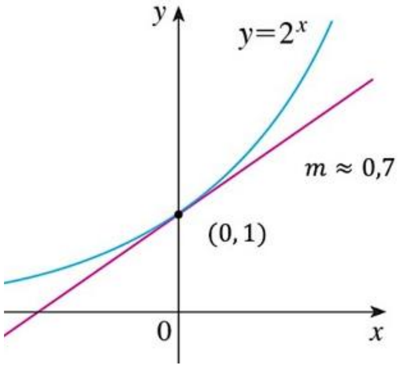
Tarefa 2: **Resolver os problemas** da **Situação 1.2.3** (Sugestões)

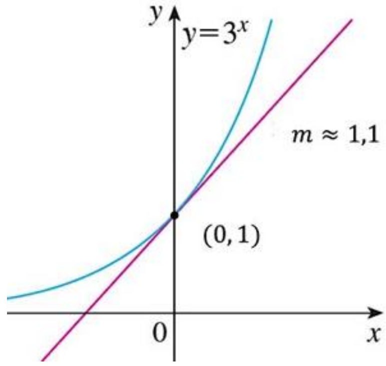
1) Calcular a massa radioativa remanescente de césio-137 após 5 anos, 10 anos e 50 anos (usar calculadora científica); **2)** Calcular em quanto tempo a massa radioativa de césio-137 será reduzida para 10% e 5% da massa inicial que tinha em 1987 (fazer aproximações, usando calculadora científica); **3)** Determinar o ano (cálculo por tentativa e aproximação, utilizando calculadora científica) em que o local onde ocorreu o acidente poderá ser habitado novamente com segurança, sabendo que isso só ocorrerá quando a quantidade massa radioativa de césio-137 se reduzir, por desintegração, a 3% da quantidade inicial.

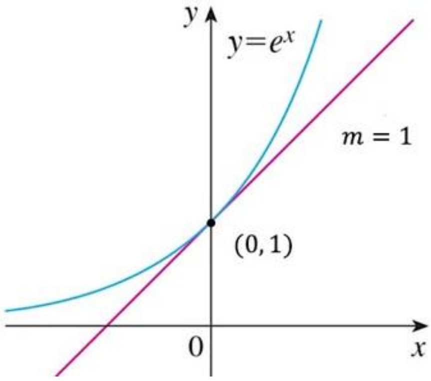
Observação: O desenvolvimento do conteúdo pode ser direcionado pela sugestão a seguir:

Tópicos	Desenvolvimento em resumo
Revisão de potenciação e radiciação	Considere números reais a, b, m e n, com $a > 0$ e $b > 0$. • Potência de base b e expoente n: $\boldsymbol{b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ fatores}}}$ • Raiz n-ésima de a: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a}$ **Algumas Propriedades:** **P1)** $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$ e $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$ **P2)** $(b^m)^n = b^{m \cdot n}$ **P3)** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ e $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

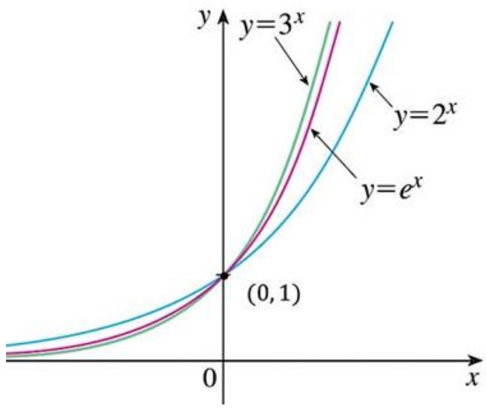
	Algumas Consequências: **C1)** $b^0 = 1$ e $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$ **C2)** $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ e $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
Definição da função exponencial	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+;\ \boldsymbol{y = b^x}$, com $b > 0$ e $b \neq 1$. **Exemplos gerais:** Identificar a base da função $y = f(x)$. **1)** $y = 2^x \quad \to \quad b = 2 > 1$ (Crescente) **2)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \to \quad b = \frac{1}{2} < 1$ (Decrescente) **3)** $y = e^x \quad \to \quad b = e \approx 2{,}7182\ldots > 1$ (Crescente). Esse número é chamado *Número de Euler*.
Valor da função exponencial num ponto	O **valor** da função exponencial $y = b^x$ num ponto α é o valor de y quando $x = \alpha$, isto é, o valor $y = f(\alpha)$. **Exemplos:** Calcular os valores indicados para a função $y = f(x)$: **1)** $y = 2^x \to f(-3);\ f(-2);\ f(-1);\ f(0);\ f(1);\ f(2);\ f(3)$ **2)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \to f(-3); f(-2); f(-1); f(0); f(1); f(2); f(3)$ **3)** $y = e^x \to f(-3);\ f(-2);\ f(-1);\ f(0);\ f(1);\ f(2);\ f(3)$
Gráfico da função exponencial	**Exemplos:** Representar graficamente a função $y = f(x)$ a partir dos pontos $(x, f(x))$ especificados. (Ver formato da curva abaixo). **1)** $y = 2^x \to \left(-3, f(-3)\right); \left(-2, f(-2)\right); \ldots; \left(3, f(3)\right)$ **2)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \to \left(-3, f(-3)\right); \left(-2, f(-2)\right); \ldots; \left(3, f(3)\right)$ **3)** $y = e^x \to \left(-3, f(-3)\right); \left(-2, f(-2)\right); \ldots; \left(3, f(3)\right)$   **Obs.:** *Inclinação* da reta tangente ao gráfico das funções $y = 2^x$ e $y = 3^x$ ponto $(0, 1)$:

<table>
<tr>
<td></td>
<td>






</td>
</tr>
<tr>
<td>O número irracional e e a função exponencial $\boldsymbol{e^x}$</td>
<td>
Discutir O Problema de Bernoulli (DANTE, 2016a, p. 169) para concluir que e $\approx 2{,}7182$ ... (Número de Euler).

Obs.: Comparação dos gráficos de $y = 2^x$, $y = 3^x$ e $y = e^x$:


</td>
</tr>
</table>

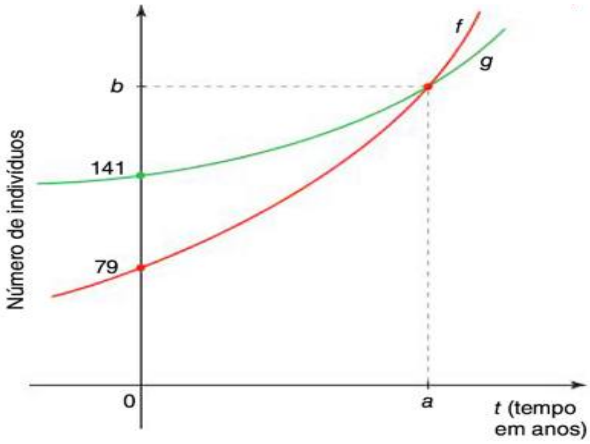
4ª Etapa: Aplicação

CC1.2 - Questões de Aplicação (Sugestão)

Q1. (C2/V1/q.25/p. 141) Em uma indústria alimentícia, verificou-se que, após t semanas de experiência e treinamento, um funcionário consegue empacotar n unidades de um determinado produto, a cada hora de trabalho. A lei que relaciona n e t é $n(t) = 55 - 30 \cdot e^{-0,2t}$. **a)** Quantas unidades desse produto o funcionário consegue empacotar sem experiência alguma? **b)** Qual o acréscimo na produção, por hora, que o funcionário experimenta da 1ª para a 2ª semana de experiência? **c)** Qual o limite máximo teórico que um funcionário pode empacotar por hora?

Q2. (C4/V1/q.30/p. 144) Determinado imóvel foi avaliado em 350 mil reais e, a partir daí, valoriza-se 10% anualmente. **a)** Determine a expressão matemática que dá o valor y (em milhares de reais) desse imóvel em função do tempo t (em anos); **b)** Qual será o valor desse imóvel após 3 anos da avaliação? **c)** E após 10 anos?

Q3. (C5/V1/q.33/p.232) As populações de dois vilarejos, **A** e **B**, variam de acordo com as funções $f(t) = 2^{t+2} + 75$ e $g(t) = 2^{t+1} + 139$, em que t é o tempo, em anos, e as expressões $f(t)$ e $g(t)$ representam o número de indivíduos desses vilarejos, respectivamente. Considerando o instante atual como instante zero, os gráficos de $f(t)$ e $g(t)$ são formados por pontos das curvas indicadas a seguir por f e g, respectivamente (essas curvas não são os próprios gráficos das funções, pois $f(t)$ e $g(t)$ só podem assumir valores naturais).



a) Determine os valores a e b na figura, coordenadas do ponto comum a f e g;

b) Daqui a quantos anos os dois vilarejos terão o mesmo número de indivíduos?

c) Daqui a 7 anos, qual será o número de indivíduos do vilarejo **A**?

d) Calcule a taxa média de variação de cada uma das funções f e g, quando t varia de 2 a 4 anos.

Q4. (C5/V1/q.30/p.232) Se o trabalho no campo não atende às necessidades mínimas de sobrevivência, o camponês se vê obrigado a procurar melhores condições de vida nas cidades, causando, assim, o chamado êxodo rural. É o fenômeno que tem ocorrido em uma determinada região do país. Assim, por meio de uma curva de tendência, os técnicos de um instituto de Geografia e Estatística concluíram que a população P dessa região, em milhares de habitantes, daqui a t anos, pode ser estimada pela função $P(t) = \frac{1560}{3+5\cdot 2^{0,5t}}$ · Responda: **a)** Qual é a estimativa da população atual dessa região? **b)** Qual é a estimativa da população dessa região daqui a 1 ano? **c)** E daqui a 2 anos? **d)** Supondo que essa estimativa continue válida por tempo suficiente, daqui a quantos anos a população dessa região será estimada em 36 mil habitantes?

Q5. (C6/V1/q.17/p.158) Segundo a *lei de resfriamento de Newton*, a temperatura de um corpo diminui exponencialmente. Por exemplo, sob certas condições, a temperatura T de batatas assadas, após saírem do forno, em graus Celsius, é dada por $T(t) = 20 + 160 \cdot e^{-6t}$, em que t é o tempo decorrido, em horas. **a)** Qual era a temperatura das batatas quando saíram do forno? **b)** Qual a temperatura das batatas 6 minutos após saírem do forno? **c)** E após 10 minutos? **d)** Em quanto tempo a temperatura das batatas será 28 °C? **e)** Qual a menor temperatura essas batatas podem atingir? **f)** O que significa isso?

Q6. (ENEM – 2015) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de $R\$ \ 1800,00$, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial s, em função do tempo de serviço t, em anos, é $s(t) = 1800 \cdot (1,03)^t$. **a)** Qual a taxa percentual de aumento do salário desses trabalhadores? **b)** De acordo com a proposta do sindicato, qual será o salário de cada profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço? **c)** E com 10 anos? **d)** Em quanto tempo o salário de um trabalhador dessa empresa dobrará?

CC1.3 – LOGARITMO

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Definição de Logaritmo • Logaritmos de base 10 e $\boldsymbol{e}$ • Propriedades operatórias dos logaritmos e Mudança de base	• Conhecimentos numéricos • Conhecimentos algébricos	C1 C5	H1, H3 H4, H5 H19, H21

≫ Situação 1.3.1: Crianças em crescimento!

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(PAIVA, 2016a, p. 258, adaptado). Um médico pediatra, após registrar por vários anos o crescimento de pacientes com idades de 1 a 12 anos, ajudado por um colega matemático, chegou à seguinte fórmula:

Modelo 8

$$\boldsymbol{10^{h-0,7} = \sqrt{i}}$$

a qual indica a altura média das crianças, sendo $\boldsymbol{h}$ a altura (em metros) e $\boldsymbol{i}$, a idade (em anos).

Figura 7: Médico Pediatra em uma consulta de rotina

Fonte: https://www.douradosagora.com.br/brasil-mundo/ciencia-saude/doencas-respiratorias-lotam-postos-pediatra-orienta-a-prevencao.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.3.1** (Sugestões)

A variável $\boldsymbol{h}$ indica a altura (em metros) de uma criança que tem a idade de $\boldsymbol{i}$ anos, sendo que $\boldsymbol{1 \leq i \leq 12}$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.3.1** (Sugestões)

Que tipo de equação é essa (Modelo 8)? Qual a idade aproximada de uma criança de 0,9 m? Qual a idade aproximada de uma criança de 1,0 m? Usando a equação (Modelo 8), qual a altura média de uma criança de 1 ano? E de 10 anos? E de 9 anos? etc.

Tarefa sugerida **...**

<u>Tarefa 1</u>: Ações exploratórias a partir da **Situação 1.3.1** (Sugestões)

1) Calcular a idade aproximada de uma criança de 0,9 m e de 1,0 m de altura (usar calculadora científica); **2)** Usando a fórmula (Modelo 8), calcular a altura média de uma criança de 1 ano de idade; **3)** Fazer o mesmo para uma criança de 10 anos; etc.

<u>3ª Etapa</u>: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

<u>Discussão</u> em torno da **Situação 1.3.1** (Sugestão)

A partir da fórmula $10^{h-0,7} = \sqrt{i}$ o professor pode propor aos estudantes que calculem a altura de uma criança de 9 anos de idade. A intenção é chagar à equação exponencial $10^{h-0,7} = 3$ e discutir o fato de não poder reduzir os dois lados desta à mesma base. O professor pode expressar a equação de modo simplificado, $10^x = 3$, ao fazer $x = h - 0,7$. A ideia é evidenciar valores aproximados de x (consequentemente de h) para resolver a equação ($10^x = 3$). Aqui, portanto, deve ser evidenciada a necessidade dos *logaritmos*.

<u>Observação</u>: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *logaritmos* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

<u>Tarefa 2</u>: Resolver os problemas da **Situação 1.3.1** (Sugestões)

1) Calcular a altura de uma criança de 5 anos de idade (usar calculadora científica para expressar os logaritmos); **2)** Calcular a altura de uma criança de 8 anos de idade (usar calculadora científica); **3)** Calcular a altura máxima de uma criança, por meio dessa fórmula (usar calculadora científica). Discutir nesse caso, a altura de uma criança que acabou de fazer 12 anos e outra que já tem quase 13.

≫ *Situação 1.3.2: Ainda tá precisando de dinheiro emprestado?*

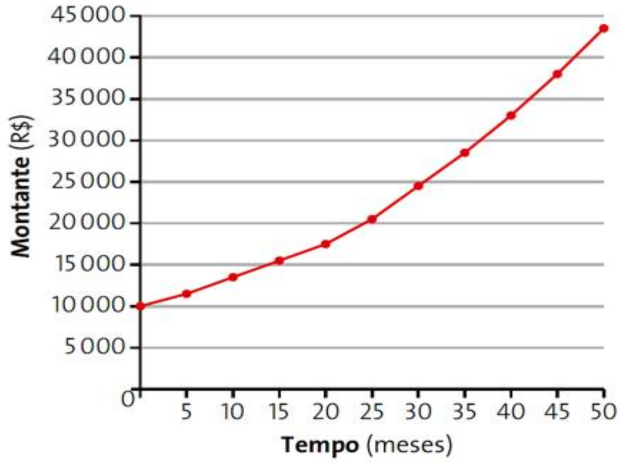
<u>1ª Etapa</u>: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016a, p. 149). Lembra do empréstimo bancário que Ana fez? (**Situação 1.2.2**) Ela estava precisando com urgência de $R\$\ 10\ 000{,}00$, e resolveu fazer um empréstimo pessoal. Para sua "sorte", encontrou um banco que ofereceu taxa de juros de 3% ao mês para que ela pagasse ao final de 3 meses. Vimos que se a dívida tivesse que ser paga ao final de t meses, a expressão matemática do montante dessa dívida era

Modelo 9 $$\boldsymbol{M(t) = 10\,000(1{,}03)^t}$$

A partir dessa expressão matemática, foi feita uma projeção da dívida para um período de 50 meses e obteve-se o seguinte gráfico:

Figura 8: Projeção do montante a ser pago por um empréstimo



Fonte: Dante (2016a, p. 149).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.3.2** (Sugestões)
A variável $\boldsymbol{M}$ representa o valor a ser pago por Ana ao final de $\boldsymbol{t}$ meses, devido ao empréstimo de $R\$\ 10\ 000{,}00$, com taxa fixa de 3% ao mês.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.3.2** (Sugestões)
De acordo com o gráfico (Figura 7), em quanto tempo o montante a ser pago por essa dívida dobra? Em quanto tempo triplica? Em quanto tempo quadruplica? Se não tivesse o gráfico, apenas a expressão matemática $M = 10000(1{,}03)^t$, como prever esses tempos em que o montante da dívida dobra, triplica ou quadruplica? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da **Situação 1.3.2** (Sugestões)
1) Prever, a partir do gráfico, em quanto tempo (aproximadamente) o montante a ser pago pela dívida de $R\$\ 10\ 000{,}00$ dobra, triplica e quadruplica; **2)** A partir do gráfico, prever qual o montante a ser pago por Ana se a dívida for quitada ao final de 5 meses? **3)** Fazer o mesmo do item anterior considerando que o prazo de pagamento da dívida é 10, 15, 18, 36 e 43 meses; **4)** Comparar os resultados do item anterior com resultados obtidos a partir da expressão (Modelo 9); etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 1.3.2** (Sugestão)

O professor pode instigar os estudantes a resolverem do item 1 da Tarefa 1, desconsiderando o gráfico (Figura 7), mas utilizando, para isso, apenas a expressão $M(t) = 10\,000 \cdot (1{,}03)^t$. A intensão é chegar às equações exponenciais $(1{,}03)^t = 2$, $(1{,}03)^t = 3$ e $(1{,}03)^t = 4$. A ideia é evidenciar valores aproximados de t para resolver essas equações, destacando, assim, a necessidade dos logaritmos.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *logaritmos* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 1.3.2** (Sugestões)

1) Considerando apenas o modelo $M(t) = 10\,000 \cdot (1{,}03)^t$ que prevê o montante da dívida a ser paga por Ana ao final de t meses, calcular em quanto tempo o montante da dívida dobra, triplica e quadruplica (fazer uso dos conhecimentos de logaritmos); **2)** Nas mesmas condições do item anterior, calcular o tempo em que o montante da dívida chegaria a $R\$\ 23\,500{,}00$; **3)** Faça o mesmo do item anterior, considerando que o montante da dívida é $R\$\ 34\,055{,}00$; etc.

≫ *Situação 1.3.3: Voltando a falar de Radioatividade!*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016a; IEZZI et al., 2016a; SMOLE; DINIZ, 2016a). Como foi visto anteriormente, a radioatividade é um fenômeno que, essencialmente, faz com que uma substância ou elemento radioativo emita energia sob forma de radiação (ondas eletromagnéticas ou partículas de alta energia), transformando-se em uma outra substância com propriedades físicas e químicas diferentes. O período de atividade dessas substâncias tem um “tempo de vida”, pois a radioatividade cai exponencialmente com o passar do tempo, diminuindo seu alcance e “poder”. Esse decaimento é calculado matematicamente pela função exponencial $y = f(t)$ dada por

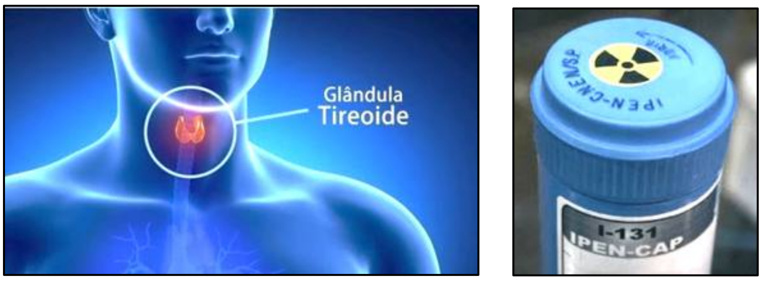
Modelo 10

$$\boldsymbol{y = y_0 e^{-kt}}$$

onde $\boldsymbol{k}$ é a taxa (constante) de decaimento nuclear, uma característica do núcleo do elemento químico em questão; $\boldsymbol{y_0 = f(0)}$ é o número de núcleos radioativos (quantidade de massa radioativa) em um instante inicial t_0; $\boldsymbol{e}$ é um número irracional, chamado número de Euler (que vale aproximadamente $2{,}7182$ ...); e $\boldsymbol{y}$ é a quantidade de massa radioativa remanescente em um instante posterior $\boldsymbol{t}$.

Vimos também que o tempo necessário para que a atividade radioativa seja reduzida à metade chama-se **meia-vida**. O diferencial entre as substâncias radioativas, além da quantidade analisada, naturalmente, está no tempo t. Algumas delas atingem a meia-vida em segundos, como o tecnécio-99, muito utilizado na medicina, enquanto outras levam milhões de anos, como o urânio-238. O cálculo da meia-vida de uma substância radioativa é, portanto, um processo de bastante importância, com variedade de aplicações e/ou investigações que dele dependem. Um exemplo são os exames diagnósticos e terapia específica para o tratamento de câncer de tireoide, para os quais a medicina nuclear utiliza iodo radioativo (iodo-131), cuja meia-vida é de 8 dias.

Figura 9: Tratamento do câncer de tireoide (Iodoterapia)



Fonte: https://br.pinterest.com/pin/492581277990862764/ e http://radiologia.blog.br/medicina-nuclear/o-que-sao-radiofarmacos-e-suas-aplicacoes.

Um outro exemplo é o método que determina a idade de seres que viveram muito tempo atrás, conhecido como *datação pelo carbono-14* (C-14). As plantas, animais e demais seres vivos recebem o C-14 por meio do alimento e da água e mantêm um nível constante desse elemento em sua estrutura. Enquanto existir vida, a porcentagem de C-14 no organismo dos seres vivos será igual à porcentagem presente na atmosfera. Quando ocorre a morte de um ser vivo, esse equilíbrio termina e o percentual de C-14 presente nele começa a decair ($y = y_0 e^{-kt}$).

Figura 10: Datação de fósseis pelo carbono-14

Fóssil animal *Fóssil humano* *Fóssil vegetal*

Fonte: https://www.altoastral.com.br/como-se-formam-os-fosseis/, https://www.haaretz.com/archaeology/.premium-fossils-offer-grim-proof-of-earliest-war-1.5257108, https://pt.wikipedia.org/wiki/Madeira_petrificada.

Como a meia-vida do C-14 é aproximadamente de 5730 anos, medindo a quantidade de carbono presente em uma amostra do espécime em análise, a estimativa da idade pode ser feita com certa precisão.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.3.3** (Sugestões)

A taxa de decaimento nuclear é um valor constante $\boldsymbol{k}$ que depende do próprio elemento químico radioativo. O número de núcleos radioativos (quantidade de massa radioativa) no instante inicial $\mathbf{0}$ é representado por $\boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{f}(\mathbf{0})$ e $\boldsymbol{e}$ é um número irracional, chamado número de Euler (vale aproximadamente $2{,}7182\ldots$). Já a quantidade de massa radioativa remanescente em um instante posterior $\boldsymbol{t}$ pode ser indicada por $\boldsymbol{y}$, sendo $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.3.3** (Sugestões)

Usando o modelo matemático $y = y_0 e^{-kt}$, como calcular a meia-vida de uma substância radioativa a partir dessa expressão? No caso do carbono-14, qual sua taxa de decaimento? Como calcular, por exemplo, a idade de um pergaminho descoberto atualmente com cerca de 80% da quantidade de C-14 encontrada na matéria viva? Quando estudamos função exponencial, vimos que o césio-137, elemento radioativo que causou um acidente catastrófico na cidade de Goiânia em 1987, tem meia-vida de 30 anos. Sabe-se que o lugar onde ocorreu esse acidente só poderá ser habitado novamente quando o nível de radiação de césio-137 for reduzido, por desintegração, a apenas 3% da quantidade inicial. Como calcular esse tempo (contado a partir de 1987), sabendo que a desintegração radioativa do césio-137 pode ser expressa pelo modelo $y = y_0 e^{-kt}$? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da **Situação 1.3.3** (Sugestões)

1) Considerando que a massa radioativa de uma substância química pode ser modelada pela função $y = y_0 e^{-0{,}04t}$, determinar sua taxa de desintegração (em anos); **2)** Determinar a porcentagem remanescente dessa substância após 10 anos de desintegração; **3)** Determinar a porcentagem remanescente dessa substância após 20 anos de desintegração; **4)** Tentar descrever um processo, a partir dessa expressão ($y = y_0 e^{-0{,}04t}$), que permita o cálculo da meia-vida da substância; **5)** Expressar a equação (exponencial) que sintetiza esse processo desenvolvido no item anterior; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 1.3.3** (Sugestão)

A partir das ideias desenvolvidas nos itens 4 e 5, da Tarefa 1, o professor pode propor aos estudantes que tentem encontrar a taxa de decaimento do C-14, sabendo que sua meia-vida é 5730 anos. A intensão é fazê-los chegar à equação (exponencial) $e^{5730k} = 2$, assim como se chegou à equação $e^{0{,}04t} = 2$ no item 5, da Tarefa 1. Para facilitar a discussão, o professor pode simplificar essas equações, expressando-as na forma $e^x = 2$, ao fazer a substituição $x = 5730k$ ou $x = 0{,}04t$, respectivamente. A ideia é evidenciar valores aproximados de x

(consequentemente de k e t) para resolver essas equações, destacando, assim, a necessidade dos logaritmos.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *logaritmos* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 1.3.3** (Sugestões)

1) Sabe-se que um fragmento de pergaminho, descoberto em 1950 nas cavernas de *Qumran*, no Mar Morte, tinha cerca de 80% da quantidade de carbono-14 encontrado na matéria viva. Evidenciar a expressão matemática $y = y_0 e^{-kt}$ (com o valor de k) do decaimento de C-14 para esse pergaminho e tentar calcular sua idade aproximada, utilizando uma calculadora científica; **2)** Sabe-se que o césio-137, elemento radioativo que causou um acidente catastrófico na cidade de Goiânia em 1987, tem meia-vida de 30 anos. Calcular em quanto tempo o lugar (na cidade de Goiânia) onde ocorreu o acidente radioativo com césio-137 poderá ser habitado novamente, sabendo que isso só ocorrerá quando o nível de radiação de césio-137 for reduzido, por desintegração, a apenas 3% da quantidade inicial (usar calculadora científica).

Observação: O desenvolvimento do conteúdo pode ser direcionado pela sugestão a seguir:

Tópicos	Desenvolvimento em resumo
Revisão de equação exponencial	Resolver as seguintes equações exponenciais: **a)** $3^x = 81$, **b)** $2^{0,05x} = 128$, **c)** $8^{2x} = 512$, **d)** $\left(\frac{1}{32}\right)^{2x} = 64^{x-20}$ **e)** $2^x = 600$ **f)** $10^x = 200$ **g)** $e^x = 4$ (Necessidade do Logaritmo)
Definição de Logaritmo Logaritmo de base **10** Logaritmo de base $\boldsymbol{e}$	x é o **Logaritmo** de a na base b $(a > 0, b > 0$ e $b \neq 1)$ $\boldsymbol{\log_b a = x \iff b^x = a}$ **Exemplos gerais:** Usando a definição de logaritmo, calcular x: **1)** $\log_3 81 = x \iff 3^x = 81$ ... **2)** $\log_{10} 200 = x \iff 10^x = 200$ ... (Usar calculadora) **3)** $\log_e 4 = x \iff e^x = 4$ ... (Usar calculadora) **Consequências da Definição:** **C1)** $\log_b 1 = 0$ **C2)** $\log_b b = 1$ **C3)** $\log_b b^n = n$
Propriedades Operatórias dos Logaritmos	Considere que $M > 0$, $N > 0$, $b > 0$, sendo $b \neq 1$. Valem: **P1)** $\log_b(M \cdot N) = \log_b M + \log_b N$ **P2)** $\log_b M^k = k \cdot \log_b M$ **P3)** $\log_b \left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$
Mudança de Base	Considere que $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, sendo $b \neq 1$ e $c \neq 1$. Vale:

	$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$ **Exemplos:** Fazer a mudança da base e calcular o valor do logaritmo indicado (Usar calculadora para o cálculo do logaritmo): **1)** $\log_{1,03} 2$, para a base 10 e para a base e; **2)** $\log_{1,03} 3$, para a base 10 e para a base e; **3)** $\log_{1,03} 4$, para a base 10 e para a base e.

4ª Etapa: Aplicação

CC1.3 - Questões de Aplicação (Sugestão)

Q1. (C3/V1/q.26/p.197) Pesquisa feita por biólogos de reserva florestal mostrou que a população de uma certa espécie de animal está diminuindo a cada ano. A partir do ano em que se iniciou a pesquisa, o número de exemplares desses animais é dado aproximadamente pela função $f(t) = 750 \cdot 2^{-0,09t}$, com t em anos, $t \geq 0$. **a)** Com base nessa função, determine em quantos anos a população de animais estará reduzida à metade da população inicial; **b)** Supondo que nada seja feito para conter o decrescimento da população, em quantos anos, de acordo com a função, haverá somente 200 exemplares dessa espécie de animal na reserva? **c)** E 100?

Q2. (C2/V2/q.22/p.141) Grande parte dos brasileiros guarda suas reservas financeiras na caderneta de poupança. O rendimento líquido anual da caderneta de poupança gira em torno de 6%. Isso significa que, a cada ano, o saldo dessa poupança cresce 6% em relação ao saldo do ano anterior. **a)** Expresse a expressão matemática que permite calcular o montante y de um capital inicial y_0 aplicado a essa taxa de 6% de juros durante um período de x anos; **b)** Nessas condições, se Maria aplicou hoje $R\$\ 2000,00$ na poupança, qual o saldo (montante) em cinco anos? **c)** Em quanto tempo Maria terá um montante de $R\$\ 2500,00$? **d)** E $R\$\ 3000,00$? **e)** Em quanto tempo o montante de Maria será o dobro do valor aplicado inicialmente?

Q3. (C4/V1/q.48/p.173) Uma represa de $2500\ m^2$ de superfície utilizada para *piscicultura* (criação de peixes) foi invadida por certa espécie de vegetação aquática. Como ela estava prejudicando o crescimento dos peixes, o proprietário contratou especialistas para realizarem um estudo. Ao analisar os $50\ m^2$ já invadidos pela vegetação, concluiu-se que, se nenhuma providência fosse tomada, a vegetação aquática aumentaria 35% ao ano. **a)** Escreva a expressão matemática que evidencia a área invadida A (em m^2) em função do tempo t (em anos), considerando que o proprietário não tome qualquer providência; **b)** Nessas condições, qual a área invadida dessa represa em cinco anos? **c)** Em quanto tempo a vegetação invadirá a metade da reserva? **d)** Em quantos anos (aprox.) a vegetação tomará completamente a reserva?

Q4. (C4/V1/q.50/p.173) Um dos maiores acidentes nucleares da história aconteceu em 1986 na central atômica de Chernobyl, localizada na cidade de Prypiat, Ucrânia (antiga União Soviética). Nesse acidente, houve uma explosão, contaminando com radiação acima do índice máximo tolerado uma região de cerca de $160\ 000\ km^2$. A cidade de Prypiat foi abandonada às pressas, o que a tornou uma "cidade fantasma". Milhares de pessoas contaminadas pela radioatividade continuam morrendo, principalmente em decorrência de câncer. Com a explosão, foram liberados na atmosfera vários elementos radioativos, entre eles o estrôncio-90, cuja meia-vida é de cerca de 28 anos.

Central nuclear de Chernobyl, Ucrânia

1986

2011

Sabe-se que a quantidade y de átomos radioativos remanescente no ambiente diminui conforme o modelo exponencial $y = y_0 \cdot e^{-kt}$, em que y_0 é a quantidade inicial, k é uma constante positiva que expressa a taxa de decaimento e t é o tempo em anos. **a)** Calcule o valor de k para o caso do estrôncio-90 e dê a expressão matemática $y = f(t)$; **b)** Atualmente qual a porcentagem de átomos radioativos de estrôncio-90 se encontra lá na região de Chernobyl? **c)** Considerando uma massa de $700\ g$ de estrôncio-90 lançada na atmosfera de Chernobyl, quanto tempo aproximadamente é necessário para que essa massa se reduza a $50\ g$? **d)** A região específica onde ocorreu o acidente só pode ser habitado novamente com certa segurança quando a porcentagem remanescente desse elemento radioativo for de 3%. Quando isso poderá ocorrer?

Q5. (ENEM – 2011) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada com MMS e denotada com M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica, sendo que M_w e M_0 se relacionam pela fórmula $M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log(M_0)$, onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o $dina \cdot cm$. O terremoto de Kobe (17/01/1995) foi um dos que causou grande impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7{,}3$. Assim, utilizando o modelo acima ($M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log(M_0)$), qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em $dina \cdot cm$)?

Q6. (ENEM – 2016) Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador *tsunami* no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada pela expressão matemática $M = \frac{2}{3}\log(E/E_0)$, sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente. **a)** Evidencie a expressão matemática da escala Richter para cada um desses terremotos; **b)** Qual a relação entre E_1 e E_2?

CC1.4 – TRIGONOMETRIA NUM TRIÂNGULO RETÂNGULO

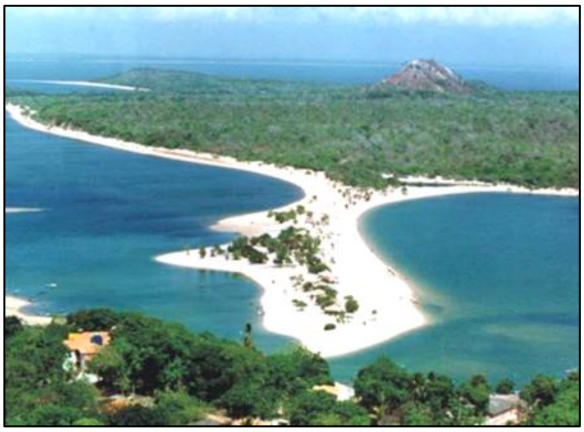
Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Relações métricas e em um triângulo retângulo • Relações trigonométricas em um triângulo retângulo	• Conhecimentos geométricos • Conhecimentos algébricos	C2 C3	H7 H8 H9 H10 H12 H13

≫ *Situação 1.4.1: Você conhece a serra Pira-Oca em Ater-do-Chão?*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016a, p. 235, adaptado). João, professor de Matemática do Ensino Médio de uma escola estadual de Santarém, com o "único objetivo de ensinar *Trigonometria*" a uma turma de estudantes, resolveu levá-los a Alter-do-Chão numa excursão de estudo e pesquisa. Na vila, como se sabe, há muitas atrações naturais que podem ser exploradas pelos visitantes. Uma dessas atrações é o morro *Pira-Oca*, mais conhecido como "serra Piroca", que fica ao fundo, na região da *ilha do amor,* acerca de 2,36 km de um ponto no início da praia (figura abaixo).

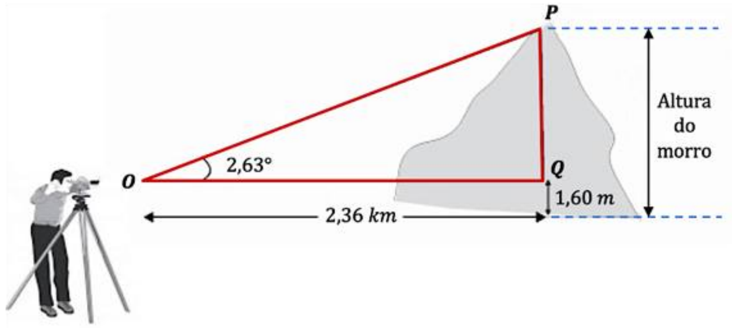
Figura 11: Praia de Alter-do-Chão - Ilha do amor



Fonte: https://br.pinterest.com/pin/593912888112063 51/?nic=1 e Google Maps.

Uma das várias experiências realizadas nessa excussão foi o cálculo da altura do morro. Para isso, os alunos usaram um teodolito de 1,60 m de altura (levado pelo professor), a distância 2,36 km e calculadora científica. Fixado o teodolito na praia (ponto inicial), mediu-se o ângulo formado entre a reta horizontal e a reta que passa pelo topo do morro, obtendo um ângulo de 2,63°. Com isso, formou-se um triângulo virtual ΔOPQ conforme indica a figura a seguir (Modelo 11).

Modelo 11



Fonte: Adaptado de https://blogdoenem.com.br/matematica-como-construcao-da-humanidade-simulado-encceja/.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.4.1** (Sugestões)
O topo do morro é visto sob um ângulo de visão de 2,63°, que é um dos ângulos agudos do triângulo retângulo que representa a situação apresentada. A distância do observador até a base do morro é 2,36 km e sua altura pode ser representada por $\boldsymbol{h}$, que são, respectivamente, os catetos, adjacente e oposto do triângulo. A hipotenusa pode ser representada por $\boldsymbol{x}$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.4.1** (Sugestões)
Ao posicionar o teodolito na praia, sua altura fica 1,50 m do chão, representada pela pequena seta que vai do chão até o ponto M. Para determinar a altura do morro, então, basta calcular qual medida do triângulo? Para calcular essa medida (cateto oposto), pode ser usado o teorema de Pitágoras diretamente? Por quê? Qual a importância do ângulo (2,63°) na resolução desse problema? Que conhecimento matemático pode ser usado para calcular a medida do cateto $\overline{MP}$? Você lembra do estudo de trigonometria (estudado no 9º ano do Ensino Fundamental)? Você acha que os conhecimentos de trigonometria podem ajudar a resolver esse problema? Se sim, como seria isso? etc.

Observação: Antes de propor a Tarefa 1 abaixo, o professor pode fazer uma breve revisão sobre triângulos, enfatizando as relações métricas num triângulo retângulo.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da **Situação 1.4.1** (Sugestões)
1) Usando uma calculadora científica, calcular o seno, cosseno e a tangente do ângulo 2,63°; **2)** Identificar, no triângulo (Modelo 11), o ângulo oposto ao lado 2,36 km; **3)** Usando uma calculadora científica, calcular o seno, cosseno e a tangente desse ângulo; **4)** Pesquisar a definição dessas razões trigonométricas (pesquisar na *internet* ou no livro didático); etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 1.4.1** (Sugestão)

O professor, em diálogo com os estudantes, pode propor a eles que expressem as razões trigonométricas do ângulo 2,63° no Modelo 11, comparando os resultados obtidos nos itens 1) e 4), da Tarefa 1. A intensão é fazer com que eles consigam expressar as identidades $sen(2{,}63°) = \frac{h}{x}$, $cos(2{,}63°) = \frac{2{,}36}{x}$ e $tg(2{,}63°) = \frac{h}{2{,}36}$. Aqui o professor pode questionar qual das três identidades pode ser utilizada para calcular a altura do morro (h). Destacar a necessidade de se conhecer as razões trigonométricas para resolver problemas desse tipo.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *trigonometria no triângulo retângulo* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 1.4.1** (Sugestões)

1) Calcular a altura do morro; **2)** Calcular a hipotenusa do triângulo (Modelo 11); **3)** Suponha que o teodolito seja deslocado do ponto onde está fixado na direção do morro até um segundo ponto onde o ângulo de visão do topo do morro seja 10°. Determinar a distância entre esses dois pontos; **4)** Suponha agora que o teodolito seja deslocado 500 m do ponto onde está fixado na direção do morro até um segundo ponto. Determinar o ângulo de visão do topo do morro nesse ponto; etc.

Observação: No **MAE** referente a essa situação (**Situação 1.4.1**), para realização dos itens 3 e 4 da Tarefa 2, o professor pode reservar espaços na folha A4 disponibilizada para que os estudantes possam fazer desenhos dessas situações a partir do Modelo 11.

≫ *Situação 1.4.2: Santarém e o encontro das águas... que bela vista!*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(IEZZI et al., 2016a, p.222; SMOLE; DINIZ, 2016a, p. 243, adaptado). De volta à Santarém, o professor João e seus alunos, após terem resolvido o problema da altura da “serra Piroca” e vários outros problemas envolvendo Trigonometria no Triângulo Retângulo, desceram do ônibus em frente ao Mercadão 2000. Justamente nesse momento, estava saindo um barco indo em direção à Ponta Negra, e uma das alunas questionou: “Será que dá pra calcular a distância daqui (tablado) até lá (Ponta Negra) usando o que a gente aprendeu de Trigonometria?” Ela mesma respondeu de imediato: “dá sim!”.

Figura 12: Cidade de Santarém – encontro das águas (rios Tapajós e Amazonas)

Fonte: https://www.brasilturismo.com/pa/santarem e Google Maps.

A figura acima (à direita) representa o que os estudantes fizeram.

Modelo 12 Marcaram dois pontos (**A** e **B**) numa reta imaginária passando sobre a Orla, com distância de 1,0 km entre eles. O ponto **A**, indicava o lugar de onde saiu o barco e o ponto **B**, o Porto de Embarque Lancha Tapajós. A Ponta Negra foi representada com o ponto **C,** e com o teodolito do professor João mediram os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}C$, encontrando 60° e 90°, respectivamente.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.4.2** (Sugestões)

A distância do tablado (ponto A) até a Ponta Negra (ponto C) pode ser representada por $\boldsymbol{x}$. A medida do lado adjacente ao ângulo 60° do triângulo é 1,0 km, que é a distância do tablado (ponto A) até o Porto de Embarque Tapajós (ponto B). A distância de B a C pode ser representada por $\boldsymbol{y}$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.4.2** (Sugestões)

Que tipo de triângulo é esse (Figura 11)? O que representa a medida x no triângulo retângulo construído (ΔABC)? A distância que queremos calcular ($\overline{AC}$) representa o que desse triângulo? E $\overline{AB}$? Para calcular $\overline{AC}$, pode ser usado o teorema de Pitágoras diretamente? Por quê? Qual a importância dos ângulos (60° e 90°) na resolução desse problema? Que conhecimento matemático pode ser usado para calcular a medida do cateto $\overline{MP}$? Você lembra do estudo de trigonometria (estudado no 9º ano do Ensino Fundamental)? Você acha que os conhecimentos de trigonometria podem ajudar a resolver esse problema? Se sim, como seria isso? etc.

Observação: Antes de propor a Tarefa 1 abaixo, o professor pode fazer uma breve revisão sobre triângulos, enfatizando as relações métricas num triângulo retângulo.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da **Situação 1.4.2** (Sugestões)

1) Usando uma calculadora científica, calcular o seno, cosseno e a tangente do ângulo 60°; **2)** Identificar, no triângulo (Figura 11), o ângulo oposto ao lado 1,0 km; **3)** Usando uma calculadora científica, calcular o seno, cosseno e a tangente desse ângulo; **4)** Pesquisar a definição dessas razões trigonométricas (pesquisar na *internet* ou no livro didático); etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 1.4.2** (Sugestão)

O professor, em diálogo com os estudantes, pode propor a eles que expressem as razões trigonométricas do ângulo 60° na Figura 11, comparando os resultados obtidos nos itens 1) e 4), da Tarefa 1. A intensão é fazer com que eles consigam expressar as identidades $sen(60°) = \frac{y}{x}$, $cos(60°) = \frac{1{,}0}{x}$ e $tg(60°) = \frac{y}{1{,}0}$. Aqui o professor pode questionar qual das três identidades pode ser utilizada para calcular a distância pretendida (x). Destacar a necessidade de se conhecer as razões trigonométricas para resolver problemas desse tipo.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *trigonometria no triângulo retângulo* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 1.4.2** (Sugestões)

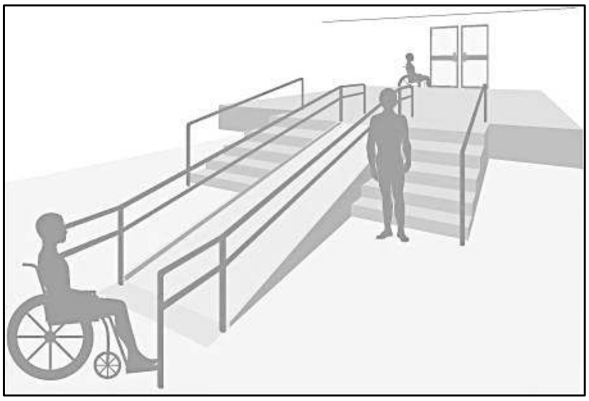
1) Calcular a distância percorrida pelo barco desde o tablado do Mercadão 2000 até a Ponta Negra (x); **2)** Calcular a largura do Rio Tapajós na frente da cidade de Santarém (y) (fazer uso de calculadora científica); etc.

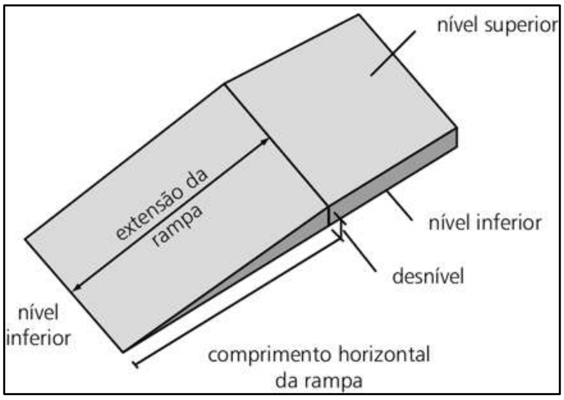
≫ Situação 1.4.3: Acessibilidade... direito de ir e vir!

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016a, p. 263; IEZZI et al., 2016a, p. 218). A questão da acessibilidade nas cidades é um desafio para o poder público. De acordo com a Norma Brasileira nº 9050, de 2004, da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), uma pessoa com mobilidade reduzida é aquela que, por qualquer motivo, tem dificuldade de se movimentar, mesmo não sendo portadora de deficiência. Para que todas as pessoas, deficientes ou não, possam frequentar os mesmos lugares e usufruir dos mesmos bens e serviços, é necessária a implantação de meios que possibilitem o acesso de pessoas com restrição de mobilidade. De acordo com a ABNT, a declividade das rampas com o plano horizontal deve variar de 5% a 8,33%. A fim de implementar as políticas inclusivas, a ABNT criou normas para acessibilidade arquitetônica e urbanística. Entre elas estão as de construção de rampas de acesso, como mostra a figura abaixo:

Figura 13: Acessibilidade por meio de rampas

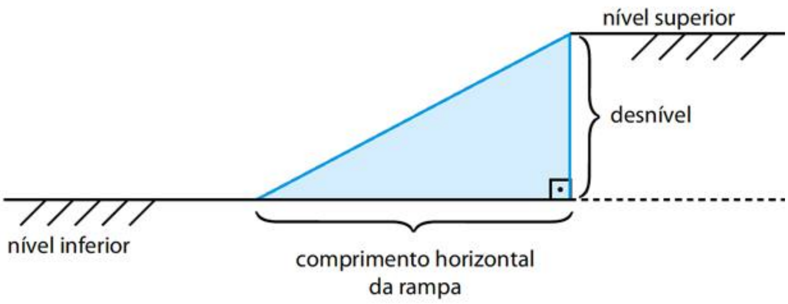




Fonte: https://minutoacessivel.blogspot.com/2017/04/um-lugar-para-todos.html e IEZZI et al. (2016a, p. 215).

A **declividade** (inclinação) de uma rampa pode ser entendida como a razão (divisão) entre o desnível a ser vencido e o comprimento horizontal da rampa (figura abaixo):

Modelo 13



Fonte: IEZZI et al. (2016a, p. 216).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.4.3** (Sugestões)

Um triângulo retângulo representa a rampa, cujo comprimento ($\boldsymbol{a}$) é a hipotenusa desse triângulo. O desnível a ser vencido na mesma ($\boldsymbol{c}$) e o comprimento horizontal ($\boldsymbol{b}$) são, respectivamente, os catetos oposto e adjacente ao ângulo $\boldsymbol{\theta}$ (que é o ângulo formado pelos lados $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$). A declividade (inclinação) da rampa, definida pela razão entre as medidas $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{b}$, pode ser expressa por $\frac{Cateto\ Oposto\ (\boldsymbol{c})}{Cateto\ Adjacente\ (\boldsymbol{b})}$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.4.3** (Sugestões)

O que significa uma *declividade* de 5%? Note que a declividade envolve lados de um triângulo. Que tipo de triângulo é esse? Como chamam os lados desse tipo de triângulo? Note que a declividade da rampa envolve o *ângulo* formado entre o comprimento da rampa e o comprimento horizontal da rampa. Em relação a esse ângulo, como pode ser definida a *declividade* usando os lados do triângulo? Essa definição é conhecida como uma das três *razões trigonométricas* fundamentais (Seno, Cosseno e Tangente), você sabe como se chama? Qual é a definição de cada uma dessas razões trigonométricas? Como destacado no texto acima, de acordo com as normas de acessibilidade a declividade de uma rampa deve variar de 5% a 8,33%. Uma declividade de 5% corresponde a um ângulo de quantos graus? E 8,33%? etc.

Observação: Antes de propor a Tarefa 1 abaixo, o professor pode fazer uma breve revisão sobre triângulos, enfatizando as relações métricas num triângulo retângulo.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da **Situação 1.4.3** (Sugestões)

1) Se uma rampa tem altura (desnível) de 80 cm, encontrar seu comprimento horizontal, sabendo que a declividade é de 5%, 6,4%, 7,25% e 8,33% (evidenciar o conceito de *tangente* de um ângulo, cuja definição é o mesmo que a declividade da rampa); **2)** Utilizando o Teorema de Pitágoras, calcular o comprimento da rampa (hipotenusa) nesses casos; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 1.4.3** (Sugestão)

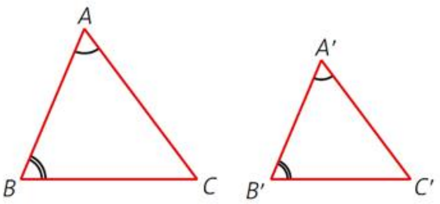
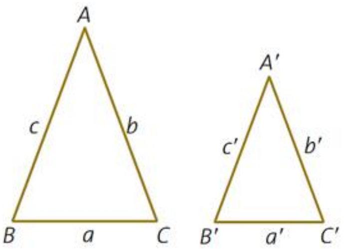
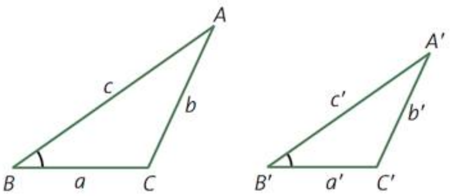
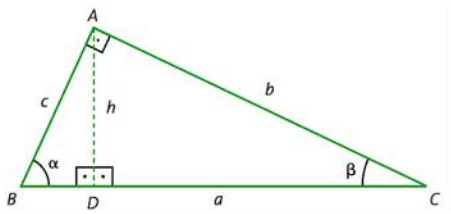
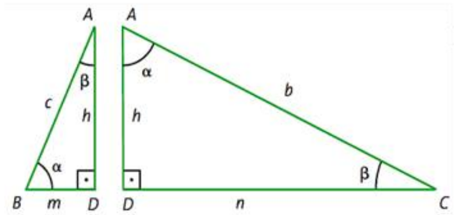
O professor, em diálogo com os estudantes, pode lembra-los que cada inclinação (5%, 6,4%, 7,25% e 8,33%) apresentada na Tarefa 1 corresponde a *tangente* e um ângulo θ_i. Aqui o professor pode propor a eles que expressem essa correspondência. A intensão é fazer com que eles consigam expressar as identidades $tg(\theta_1) = 0{,}05$, $tg(\theta_2) = 0{,}064$, $tg(\theta_3) = 0{,}0725$ e $tg(\theta_4) = 0{,}0833$. Aqui o professor pode questionar qual o valor dos ângulos em cada caso e evidenciar a necessidade de se conhecer o conceito de *arc-tangente*. O professor pode ainda destacar que existem outros tipos de razões (seno e cosseno) envolvendo os lados do triângulo, relacionados a esses ângulos.

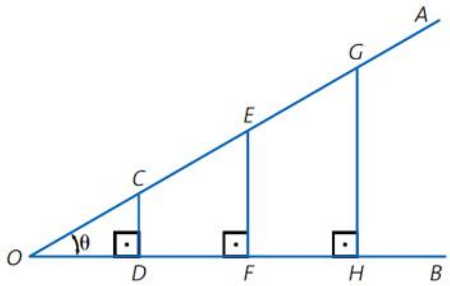
Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *trigonometria no triângulo retângulo* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 1.4.3** (Sugestões)

1) Utilizando uma calculadora científica, encontrar os ângulos correspondentes às declividades de 5%, 6,4%, 7,25% e 8,33% de uma rampa (arc-tangente); **2)** Calcular o seno e cosseno dos ângulos encontrado no item 1) (utilizar calculadora científica); **3)** Utilizando os valores encontrados no item 2), discutir e evidenciar a necessidade dessas razões trigonométricas num triângulo retângulo (seno e cosseno), visando determinar (de um modo diferente) o comprimento da rampa nos casos do item 1) da Tarefa 1; etc.

Observação: O desenvolvimento do conteúdo pode ser direcionado pela sugestão a seguir:

Tópicos	Desenvolvimento em resumo
Revisão de semelhança de triângulos	**Casos de semelhança** 1º Caso: **AA** (Ângulo, Ângulo)  $\left.\begin{matrix}\hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}'\end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 2º Caso: **LLL** (Lado, Lado, Lado)  $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 3º Caso: **LAL** (Lado, Ângulo, Lado)  $\left.\begin{matrix}\hat{B} \cong \hat{B}' \\ \dfrac{c}{c'} = \dfrac{a}{a'}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
Revisão de relações métricas num triângulo retângulo	**Relações métricas num triângulo retângulo**   Pelo 1º Caso de semelhança, temos: $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$

	Da semelhança entre $\triangle ABC$ e $\triangle DBA$, segue que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BA}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow \boxed{c^2 = am}$ (I) Da semelhança entre $\triangle ABC$ e $\triangle DAC$, temos: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow \boxed{ah = bc}$ (II) $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow \boxed{b^2 = an}$ (III) Da semelhança entre $\triangle DBA$ e $\triangle DAC$, segue que: $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DA}} \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow \boxed{h^2 = mn}$ (IV) Somando membro a membro (I) e (III), temos: $\begin{array}{l} \quad c^2 = am \\ + \\ \quad b^2 = an \\ \hline b^2 + c^2 = am + an \end{array} \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m+n) \Rightarrow \boxed{b^2 + c^2 = a^2}$ (V)
Relações trigonométricas num triângulo retângulo	Considere os triângulos retângulos ΔOCD, ΔOEF, ΔOGH, $\cdots$  Pela semelhança de triângulos, $\Delta OCD \sim \Delta OEF \sim \Delta OGH \sim \cdots$ Temos então as seguintes **relações trigonométricas**: **1)** $\frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} = \cdots = \text{Constante } K_1$ $\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\theta} := K_1 = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{medida da hipotenusa}}$ **2)** $\frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = \cdots = \text{Constante } K_2$ $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} := K_1 = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{medida da hipotenusa}}$ **3)** $\frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH} = \cdots = \text{Constante } K_3$

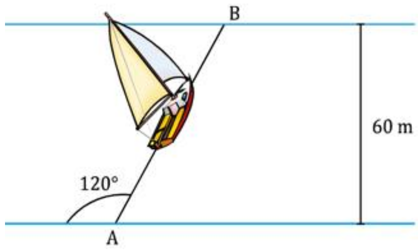
	$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\theta} := K_1 = \dfrac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \theta}$

4ª Etapa: Aplicação

CC1.4 - Questões de Aplicação (Sugestão)

Q1. (C3/V1/q.31/p.243) Em 2010 uma baixa história no nível das águas do rio Amazonas em sua parte peruana deixou o Estado do Amazonas em situação de alerta e a Região Norte na expectativa da pior seca desde 2005. Em alguns trechos, o rio Amazonas já não tem profundidade para que balsas com mercadorias e combustível para energia elétrica cheguem até as cidades. A Defesa Civil declarou situação de atenção em 16 municípios e situação de alerta – etapa imediatamente anterior à situação de emergência – em outros nove. Porém, alguns trechos do rio Amazonas ainda permitem plenas condições de navegabilidade.

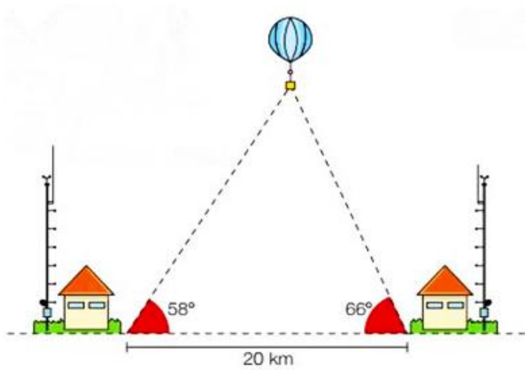
A figura ao lado ilustra o deslocamento de um barco que parte de um ponto A para atravessar o rio Amazonas. A direção desse deslocamento forma um ângulo de $120°$ com a margem do rio, sendo a largura do rio $60\ m$ num trecho em que as margens são praticamente paralelas.



Baseado nesses dados, calcule a distância percorrida pela embarcação entre os pontos A e B.

Q2. (C4/V1/q.55/p.259) A partir de informações como umidade, temperatura e pressão atmosférica, os meteorologistas realizam previsões, com certa confiabilidade, das condições climáticas em determinada região, por certo período. Um dos instrumentos utilizados pelos meteorologistas para obter informações são os balões meteorológicos.

Em uma certa região estão localizadas duas estações meteorológicas, a 20 km uma da outra. De uma delas é possível avistar, em determinado instante, um balão meteorológico sob um ângulo de $58°$ em relação ao plano horizontal, e da outra pode-se avistar o balão, nesse mesmo instante, sob um ângulo de $66°$, conforme a figura ao lado.



Qual a altura do balão em relação ao plano horizontal no instante dessas observações?

Q3. (C5/V2/q.17/p.49) Em plantas topográficas, uma curva de nível é uma linha imaginária formada por todos os pontos de igual altitude da região representada. Por exemplo, a figura 1 abaixo representa um morro onde são destacadas as curvas de nível de $30\ m$, $60\ m$ e $90\ m$ de altitude em relação ao nível do mar ($0\ m$). A projeção ortogonal dessas curvas em um plano paralelo aos planos das curvas de nível é chamada mapa de curvas de nível. Para a construção do mapa, adota-se uma escala conveniente e costuma-se espaçar igualmente as altitudes representadas pelas curvas de nível. No exemplo abaixo elas foram espaçadas em $30\ m$.

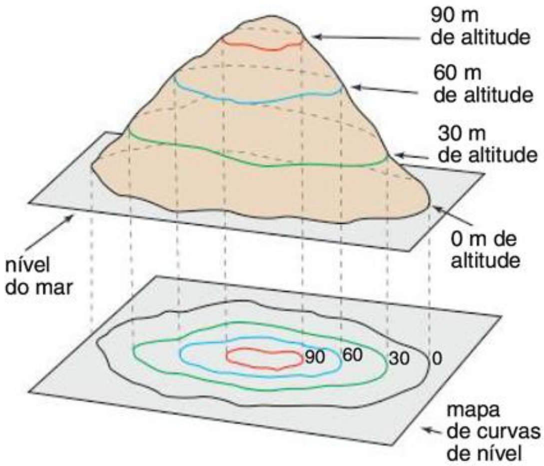


figura 1

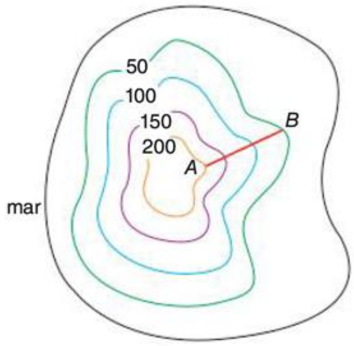
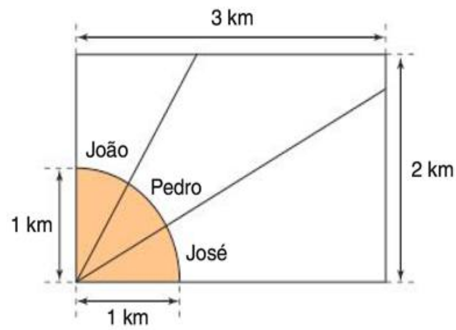


figura 2

De acordo com esses conceitos, considere que uma montanha foi representada pelo mapa de curvas de nível (figura 2), em que as altitudes são dadas em metros. A e B representam pontos em curvas de nível diferentes. A distância real entre eles é $400\,m$. Calcule a medida da inclinação α, em relação ao plano horizontal, do segmento que une os correspondentes dos pontos A e B na montanha ($0° < \alpha < 90°$).

Q4. (ENEM – 2009) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km por 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km aproximadamente a partir do canto inferior esquerdo da propriedade.

Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos concordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura ao lado. De acordo com a partilha proposta pelos três irmãos, qual a porcentagem da área do terreno coube a cada um deles?



CC1.5 – FUNÇÕES: GENERALIDADES (ETAPAS REDUZIDAS)

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Noção intuitiva de função • Representação de função: tabela, gráfico, expressão algébrica • Domínio, contradomínio e imagem • Crescimento e decrescimento	• Conhecimentos numéricos • Conhecimentos algébricos • Conhecimentos algébricos/geométricos	C1 C4 C5	H1, H3 H15 H20 H21 H22

≫ ***Situação 1.5.1*: *Esfria a cabeça... toma um suco natural!***

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(IEZZI; et al., 2016a, p. 39, adaptado). A barraca "Frutas do Norte" na praia de Alter-do-Chão, em Santarém, vende sucos naturais ao preço de $R\$ \ 3{,}50$ o copo. Para facilitar seu trabalho, o proprietário montou um quadro, destacado abaixo.

Modelo 14

Número de copos	Preço (R$)
1	3,50
2	7,00
3	10,50
4	14,00
5	17,50
6	21,00
7	24,50
8	28,00
9	31,50
10	35,00

Fonte: Iezzi et al. (206a, p. 39).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.5.1** (Sugestões)

Duas grandezas estão relacionadas na tabela (Modelo 13). O número de copos de suco natural, que pode ser representado pela variável $\boldsymbol{x}$ e o respectivo preço, que será indicado por $\boldsymbol{y}$. A cada quantidade de copos $\boldsymbol{x}$ corresponde um único preço $\boldsymbol{y}$. Dizemos, por isso, que o preço $\boldsymbol{y}$ é **função** do número de copos $\boldsymbol{x}$, e representamos por $\boldsymbol{y = f(x)}$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.5.1** (Sugestões)

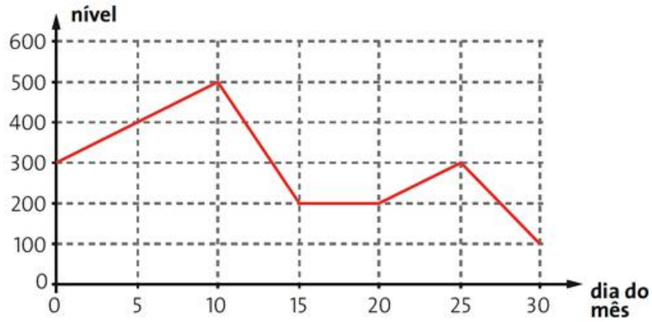
Se considerarmos que o valor a receber pela venda de suco depende do número de copos vendidos, é possível encontrar uma fórmula geral que estabelece essa relação de interdependência entre as grandezas? Como seria essa fórmula? etc.

» *Situação 1.5.2: Não desperdice água!*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016a, p. 71, adaptado). O gráfico abaixo mostra o nível de água (em centímetros) no reservatório de uma pequena cidade no Estado do Pará.

Modelo 15



Fonte: Dante (2016a, p. 71).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.5.2** (Sugestões)
De acordo com o gráfico (Modelo 14), pode-se dizer que o nível da água no reservatório é uma **função** do tempo (em dias), fenômeno que foi observado e registrado durante o período de 30 dias. Dizer que o nível da água é uma função do tempo, é dizer que $\boldsymbol{y = f(x)}$, onde $\boldsymbol{y}$ representa o nível da água e $\boldsymbol{x}$, o tempo.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.5.2** (Sugestões)
De acordo como o gráfico (Modelo 14), em quanto tempo foi observado e registrado o nível da água do reservatório (Domínio da função)? Qual a variação do nível da água do reservatório nesse tempo (Imagem da função)? Em termos do nível da água, o que representa a parte do gráfico nos 10 primeiros dias de observação? E entre os dias 10 e 15? E entre os dias 15 e 20? O que você entende por *variação diária* ou *taxa média de variação* do nível da água do reservatório no decorrer do tempo de observação? etc.

» *Situação 1.5.3: Quanto você calça?*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

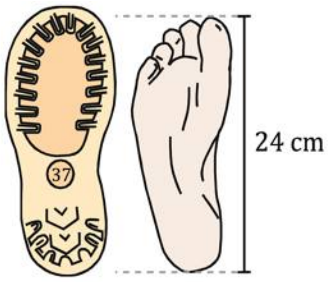
(SMOLE; DINIZ, 2016a, p. 76). A numeração usada na confecção de sapatos depende (é **função**) do comprimento do pé das pessoas. Os fabricantes de calçados brasileiros usam a fórmula:

Modelo 16

$$\boldsymbol{N = \frac{5c + 28}{4}}$$

onde $\boldsymbol{c}$ representa o comprimento do pé (em cm) e $\boldsymbol{N}$, o número do calçado.

Figura 14: Tamanho de um pé e o número do sapato correspondente



Fonte: Smole e Diniz (2016a, p. 76).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.5.3** (Sugestões)
A variável $\boldsymbol{c}$ representa o comprimento do pé (em centímetros) e $\boldsymbol{N}$, o número do calçado, de modo que $\boldsymbol{N}$ é uma **função** de $\boldsymbol{c}$, isto é, $\boldsymbol{N = f(c)}$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.5.3** (Sugestões)
Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, que tipo de gráfico contínuo essa expressão matemática indica? Alguém, cujo pé medo 20 cm, qual o número do seu sapato? E se, sabe-se que essa pessoa calça número 33, qual o comprimento do pé? Essa fórmula dá certo para o número do seu sapato? Como se chega a essa fórmula? etc.

CC1.6 – FUNÇÃO AFIM (ETAPAS REDUZIDAS)

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Definição da função afim • Valor da função num ponto • Raiz da função afim • Gráfico da função afim	• Conhecimentos algébricos • Conhecimentos algébricos/geométricos • Conhecimentos numéricos	C1 C5	H4, H19 H20, H21 H22, H23

» *Situação 1.6.1*: *Planos de telefonia celular*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016a, p. 89). Há bem pouco tempo atrás, os serviços de telefonia celular eram voltados, essencialmente, para fazer ligações. Os planos, além de terem um custo fixo, pagava-se também um valor pelo tempo de uso em ligação (em minutos). Para exemplificar essa situação, apresenta-se na tabela abaixo, três desses planos:

Modelo 17

Plano	Custo fixo mensal	Custo adicional por minuto
A	R$ 35,00	R$ 0,50
B	R$ 20,00	R$ 0,80
C	0	R$ 1,20

Fonte: Dante (2016a, p. 89).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.6.1** (Sugestões)

O custo total a ser pago por cada um desses planos pode ser representado pela variável y que depende (é uma função) do número de minutos utilizados em ligações por mês, e será representado por x.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.6.1** (Sugestões)

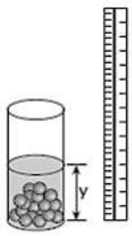
Como seria uma equação do custo total a ser pago por cada um dos planos apresentados? Em que condições cada um dos planos é mais vantajoso para o usuário? etc.

» *Situação 1.6.2*: *Eureka! Um experimento à la Arquimedes!*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(ENEM – 2009, Q. 159). Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo cilíndrico com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir, onde é indicado alguns resultados do experimento.

Modelo 18



número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Fonte: ENEM 2009 – Q. 159 (prova azul).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.6.2** (Sugestões)
O resultado do experimento indica que o nível da água ($\boldsymbol{y}$) é uma função do número de bolas de vidro ($\boldsymbol{x}$) que são colocadas dentro do copo.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

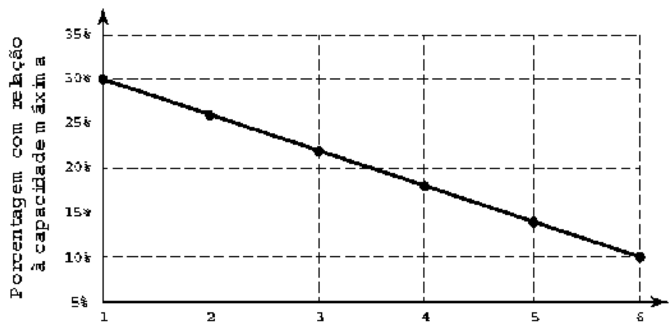
Possíveis questões a partir da **Situação 1.6.2** (Sugestões)
Considerando que o nível da água y depende (está em função) do número de bolas x colocadas dentro do copo, que tipo de gráfico representa esse fenômeno? Como é a expressão algébrica dessa função, isto é, a equação $y = f(x)$? etc.

≫ *Situação 1.6.3: Recursos hídricos*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(ENEM – 2016, Q. 158). Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório (medido em porcentagem) foi monitorado por um período de seis meses, cuja tendência de esvaziamento é linear. O resultado mostrado no gráfico abaixo.

Modelo 19



Fonte: ENEM 2016 – Q. 158 (prova azul).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.6.3** (Sugestões)
Sabe-se que essa tendência linear observada no monitoramento se prolonga pelos próximos meses, sendo o nível da água (y - em porcentagem) uma função do tempo (x - em meses).

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.6.3** (Sugestões)
O que significa dizer que a tendência do esvaziamento é “linear”? O esvaziamento desse reservatório é constante, isto é, a variação do nível da água é o mesmo em todo intervalo de tempo medido? etc.

CC1.7 – SEQUÊNCIAS (ETAPAS REDUZIDAS)

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Sequência numérica: definição • Termo geral de uma sequência • PA e PG: termo geral e soma	• Conhecimentos numéricos • Conhecimentos algébricos	C1 C5	H2, H3, H4 H21, H22 H23

≫ *Situação 1.7.1: "Adivinha" essa ... Qual o próximo número?*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

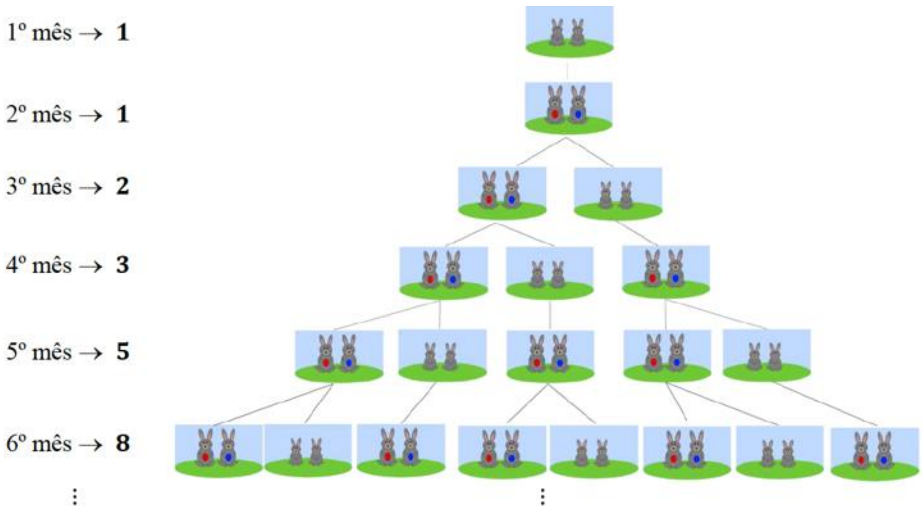
(DANTE, 2016a; IEZZI et al., 2016a; SMOLE; DINIZ, 2016a). Em 1202, o matemático italiano Leonardo de Pisa (c.1180-1250), mais conhecido como Fibonacci, publicou seu livro intitulado *Líber Abaci*, onde apresentou o seguinte problema (Sequência de Fibonacci) que o consagrou:

Quantos casais de coelhos serão gerados em um ano, sabendo que: No início, há apenas um casal que acabou de nascer; Os casais atingem a maturidade sexual (no final do segundo mês) e se reproduzem ao final do terceiro mês; Um mês é o período de gestação dos coelhos; Todos os meses, cada casal maduro dá à luz um novo casal; Os coelhos nunca morrem?


Retrato de Finonacci

Observe como fica o desenvolvimento do problema nos 6 primeiros meses:

Modelo 20



Fonte: Adaptado de https://pt.wikipedia.org/wiki/Sequ%C3%AAncia_de_Fibonacci.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.7.1** (Sugestões)

O número de casais de coelhos pode ser representado por x_k, sendo $k = 1, 2, 3, \dots$ o mês da contagem. Significa que: x_1 representa o número de casais de coelhos no primeiro mês; x_2, o número de casais de coelhos no segundo mês; x_3, o número de casais de coelhos no terceiro mês; e assim, sucessivamente.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.7.1** (Sugestões)
Como determinar um elemento dessa sequência a partir dos anteriores? Como seria uma lei de formação ou expressão geral para essa sequência? Dividindo cada elemento dessa sequência, a partir do segundo, pelo anterior, que valores encontramos? Há alguma relação desses valores com o "número de ouro"? etc.

≫ *Situação 1.7.2*: *Futebol mágico!*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(IEZZI et al., 2016a, p. 177). O Brasil é o maior vencedor de Copas do Mundo até hoje, com cinco títulos: em 1950 - Suécia; 1962 - Chile; 1970 - México; 1994 - Estados Unidos; 2002 - Coreia do Sul/Japão.

Figura 15: Brasil Campeão do Mundo


1958


1962


1970


1994


2002

Fonte: https://br.pinterest.com/pin/42502790218587621/?lp=true,
https://br.pinterest.com/pin/418764465324518988/,
https://br.pinterest.com/pin/332070172519401580/,
https://br.pinterest.com/pin/355643701817859082/,

http://www.espn.com.br/noticia/750914_aposentadoria-do-menino-prodigio-kaka-deixa-apenas-dois-campeoes-mundiais-de-2002-em-acao.

Com tudo isso, uma copa que certamente não vai sair da lembrança dos brasileiros, é a Copa de 2014, realizada no Brasil, quando perdemos para a Alemanha (semifinais) por 7 a 1. Triste lembrança! Mas, deixando a tristeza de lado, sabe-se, contudo que:

Modelo 21 A Copa do Mundo de Futebol é um evento que ocorre de quatro em quatro anos. A 1ª Copa foi realizada em 1930, no Uruguai. De lá para cá, apenas nos anos de 1942 e 1946 a Copa não foi realizada, devido à 2ª Guerra Mundial.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.7.2** (Sugestões)

O ano em que cada Copa é realizada (sem interrupção) pode ser representado por $\boldsymbol{a_k}$, sendo $k = 1, 2, 3, \ldots$ a ordem do evento. Significa que: $\boldsymbol{a_1}$ indica o ano em que ocorreu a primeira copa; $\boldsymbol{a_2}$, o ano em que ocorreu a segunda copa; $\boldsymbol{a_3}$, o ano em que ocorreu a terceira copa; e assim, sucessivamente. Além disso, como a Copa do Mundo de Futebol ocorre somente de 4 em 4 anos, diz-se que a **razão** (diferença entre cada termo e o anterior, representada por $\boldsymbol{r}$) da sequência desse evento é 4.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.7.2** (Sugestões)

Quais Copas do Mundo, em termos de ordem sequencial do evento, teriam sido realizadas em 1930 e 1942? Em qual ordem do evento o Brasil foi campeão? Considerando que as próximas Copas ocorram seguindo o mesmo padrão e que não existam imprevistos que impeçam sua realização, quando será a trigésima Copa? E a quadragésima? Haverá Copa em 2100? E em 2150? Como pode ser caracterizada esse tipo de sequência? etc.

≫ *Situação 1.7.3: Voltando a falar da bactéria E. coli!*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016a, p. 148, adaptada). Como visto anteriormente, a *E. coli* (*Escherichia coli*) é uma bactéria que habita naturalmente no intestino de humanos e de alguns animais, mas que em grandes quantidades pode causar infecções intestinais e urinárias. Por isso, é preciso ter bastante cuidado para não consumir água ou alimentos contaminados. Foi visto também que, em condições ideais:

Modelo 22 A quantidade de bactérias *E. coli* dobra a cada período de 20 minutos, aproximadamente.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 1.7.3** (Sugestões)

O número de bactérias *E. Coli*, contado a cada 20 minutos, será representado por $\boldsymbol{y_k}$, sendo $k = 1, 2, 3, \ldots$ a ordem das contagens. Significa que: $\boldsymbol{y_1}$ é o número de bactérias na primeira contagem, isto é, a quantidade inicial dessa cultura; $\boldsymbol{y_2}$, o número de bactérias na segunda contagem; $\boldsymbol{y_3}$, o número de bactérias na terceira contagem; e assim, sucessivamente. Além disso, como o número dessas bactérias dobra a cada período de tempo, diz-se que a **razão** (quociente da divisão entre cada termo e o anterior, representada por $\boldsymbol{q}$) da sequência desse fenômeno é 2.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 1.7.3** (Sugestões)

Considerando que, a cada período de 20 minutos, o número dessas bactérias é observado e contado, formando uma sequência ordenada de números, como seria uma lei de formação ou expressão geral que prevê os termos dessa sequência, isto é, o número de bactérias em cada observação? etc.

CONTEÚDO CURRICULAR - 2º ANO

CC2.1 – TRIGONOMETRIA NUM TRIÂNGULO QUALQUER

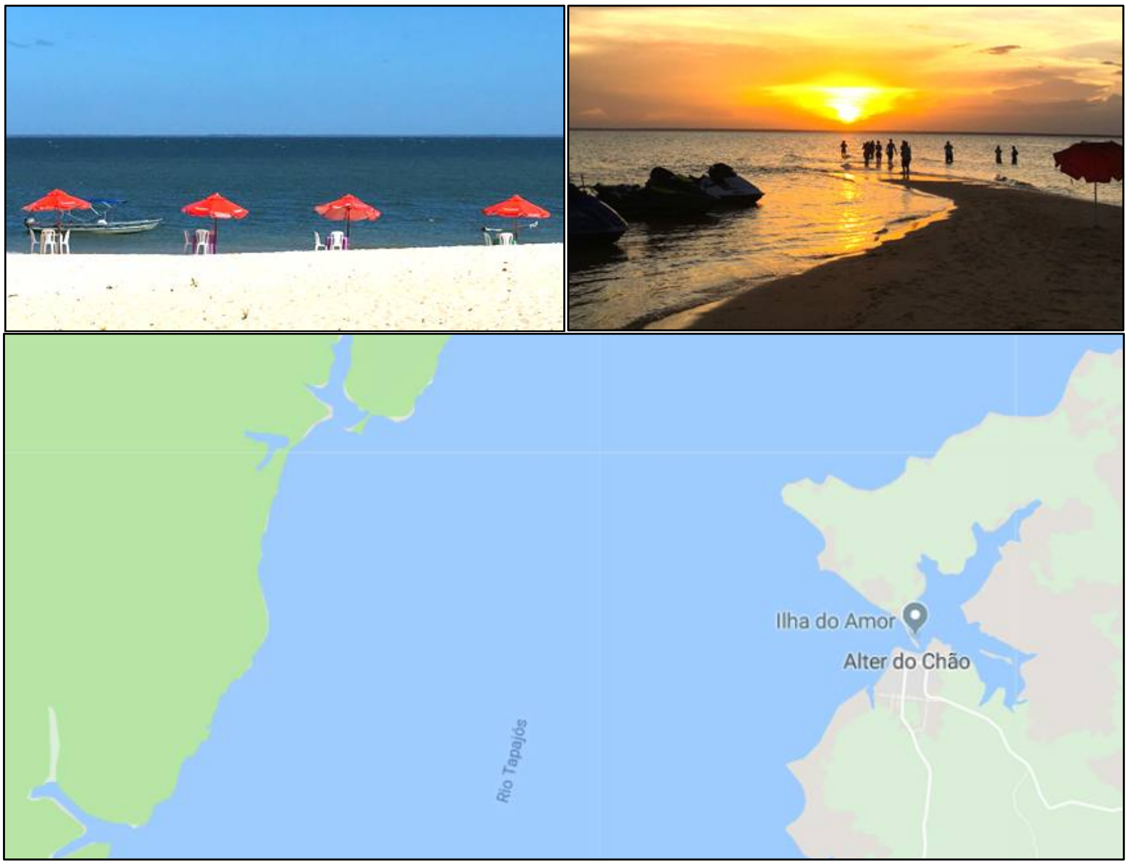
Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Lei dos Senos • Lei dos Cossenos	• Conhecimentos geométricos • Conhecimentos algébricos	C2 C3	H7, H8, H9, H10, H12, H13

≫ *Situação 2.1.1: Rio Tapajós... que imensidão!*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(IEZZI et al., 2016b, p. 36, adaptado). Lembra o professor João que levou seus alunos para estudar Trigonometria em Alter-do-Chão? Pois é, além da altura da “serra Piroca”, fizeram outras investigações. Uma delas foi estimar a largura do rio Tapajós em frente à vila. A experiência exigiu bem mais dos estudantes, pois quase não dá para ver o outro lado do rio nesse trecho (veja figura abaixo).

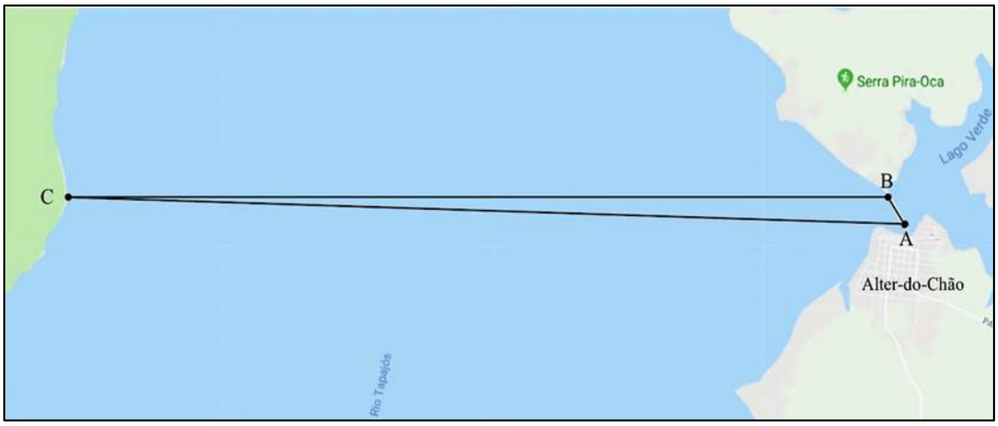
Figura 16: Rio Tapajós em Alter-do-Chão



Fonte: https://www.viajenaviagem.com/2017/06/alter-do-chao-duas-visitas/ e Google Maps.

Para realizar essa investigação, o professor João orientou os estudantes a construírem um triângulo ABC, procedendo da seguinte forma: No mesmo ponto inicial onde foi fixado o teodolito no problema da altura da "serra Piroca", identificou-se aí um ponto **A**. A partir desse ponto, mediu-se a distância de $500\ m$ sobre a praia, onde fixou-se um outro ponto (**B**). Olhando para o outro lado do rio, identificou-se um ponto de referência (**C**) e mediu-se com o teodolito, a partir dos dois pontos na praia, os ângulos $\hat{A} = 55{,}2°$ e $\hat{B} = 123{,}3°$ (figura abaixo):

Modelo 23



Fonte: Adaptado a partir do Google Maps.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.1.1** (Sugestões)

O lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC (Modelo 19) indica a largura do Rio Tapajós que queremos calcular, a qual será representada pela variável $\boldsymbol{x}$. O lado $\overline{AB}$ do triângulo mede $500\ m$, estabelecido pelo grupo de estudantes na praia. Com o teodolito fixado nos pontos A e B, encontrou-se os ângulos $\hat{A} = 55{,}2°$ e $\hat{B} = 123{,}3°$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.1.1** (Sugestões)

Que tipo de triângulo é esse (ΔABC)? Quanto vale o ângulo $\hat{C}$? De modo direto, dá para usar o teorema de Pitágoras para calcular da distância $\overline{BC}$? Por quê? E as razões trigonométricas (Seno, Cosseno, Tangente), podem ser usadas para resolver esse problema? Como calcular essa distância $\overline{BC}$? etc.

Observação: Antes de propor a Tarefa 1 abaixo, o professor pode relembrar e reforçar alguns resultados da Geometria Plana, como: "ângulos inscritos numa circunferência a partir de uma mesma corda têm medidas congruentes"; "todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo"; etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 2.1.1)

1) Calcular o valor do ângulo $\hat{C}$; **2)** Calcular o *seno* dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo da situação apresentada (Modelo 23); **3)** Representar o triângulo da situação apresentada (Modelo 23), inscrito numa circunferência, e tentar, a partir das informações *R1* – "ângulos inscritos numa circunferência a partir de uma mesma corda têm medidas congruentes"; *R2* – "todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo", expressar o $sen(\hat{C})$; etc.

Observação: No **MAE** referente a essa situação (**Situação 2.1.1**), para realização do item 3 da Tarefa 1, o professor pode reservar na folha A4 disponibilizada, desenho de círculos para os estudantes apenas desenharem (inscrito neles) o triângulo ABC (Modelo 23).

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 2.1.1** (Sugestão)

A partir do resultado obtido na Tarefa 1, especialmente no item 3, o professor pode propor que os estudantes repitam o mesmo procedimento, agora para expressar o $sen(\hat{A})$ e $sen(\hat{B})$. A intensão é fazer os estudantes expressarem as identidades $sen(\hat{A}) = \frac{BC}{2R}$, $sen(\hat{B}) = \frac{AC}{2R}$ e $sen(\hat{C}) = \frac{AB}{2R}$ e perceberem que tem algo comum nessas expressões, isto é, $2R$ (lembrando que R é o raio da circunferência onde o triângulo ABC (Modelo 23) foi inscrito). Aqui se evidencia a necessidade da *Lei dos Senos* para resolver problemas do tipo proposto inicialmente.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *trigonometria num triângulo qualquer (Lei dos Senos)* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 2.1.1** (Sugestões)

Calcular a largura do rio Tapajós a partir do ponto B na praia até o ponto C, tendo conhecimento dos ângulos $\hat{A} = 55{,}2°$ e $\hat{B} = 123{,}3°$ (usar a *Lei dos Senos* e fazer uso de calculadora científica).

» Situação 2.1.2: Lago Verde... lindo de se vê!

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

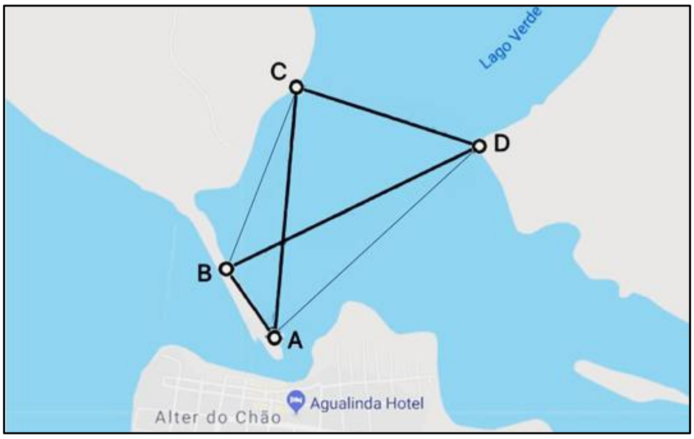
(SMOLE; DINIZ, 2016a, p. 263, adaptado). Voltando-se para o outro lado da praia (Alter-do-Chão), a vista agora é do belo Lago Verde (figura abaixo)! O professor João propôs, então, que os estudantes calculassem a largura do lago, entre dois pontos das margens opostas do lago que pudessem ser vistos de onde eles estavam, sem precisar ir lá.

Figura 17: Lago Verde à direita da praia em Alter-do-Chão

Fonte: https://g1.globo.com/pa/santarem-regiao/noticia/2018/12/21/alter-do-chao-no-pa-fica-entre-os-10-melhores-destinos-do-mundo-para-conhecer-em-2019.ghtml.

Para isso, o professor orientou os estudantes em algumas ações. Na praia, de frente para o lago, os estudantes marcaram dois pontos (**A** e **B**), com $400\ m$ de distância entre eles. Em seguida, identificaram ao longe dois pontos (**C** e **D**) nas margens opostas do lago, cujo segmento $\overline{CD}$ representa a largura do lago naquele trecho. Com o teodolito fixado nos pontos **A** e **B**, os estudantes registraram os ângulos $C\hat{B}D = 43°$, $A\hat{B}D = 79°$, $B\hat{A}C = 38°$ e $C\hat{A}D = 42°$ conforme ilustrado na figura abaixo.

Modelo 24



Fonte: Adaptado a partir do Google Maps.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.1.2** (Sugestões)
Queremos calcular a distância entre os pontos C e D. Essa medida $\overline{CD}$ será representada pela variável $\boldsymbol{x}$. Já os pontos A e B foram fixados na praia pelo grupo de estudantes quando fizeram a medição $\overline{AB} = 400\ m$. Em seguida, utilizando um teodolito (fixado nos pontos A e B), registraram os ângulos $C\hat{B}D = 43°$, $A\hat{B}D = 79°$, $B\hat{A}C = 38°$ e $C\hat{A}D = 42°$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.1.2** (Sugestões)

Queremos calcular a distância $\overline{CD}$. Para fazer isso é preciso conhecer os ângulos $A\hat{C}B$ e $A\hat{D}B$ e calcular as distâncias $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$. Por quê? Como fazer isso a partir dos pontos na praia (**A** e **B**)? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 2.1.2)

1) Calcular a medida dos ângulos $A\hat{C}B$ e $A\hat{D}B$; **2)** Usando a Lei dos Senos, calcular as distâncias $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$; **3)** Discutir a (im)possibilidade de calcular a distância $x = \overline{CD}$ usando diretamente a Lei dos Senos; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 2.1.2** (Sugestão)

A partir da (im)possibilidade de calcular a distância $x = \overline{CD}$ usando diretamente a Lei dos Senos como visto na Tarefa 1, o professor pode propor a exploração, por exemplo, do ΔBCD do Modelo 24, estabelecendo como base o lado $\overline{BC}$ e projetando sua altura, a partir do ponto D, sobre essa base a fim de deduzir a Lei dos Cossenos, evidenciando sua necessidade para calcular $x = \overline{CD}$.

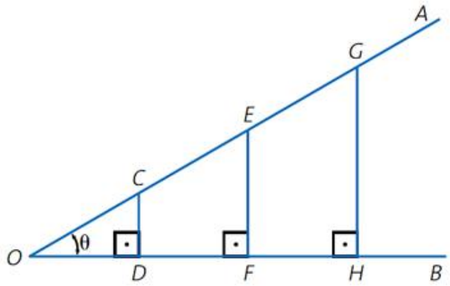
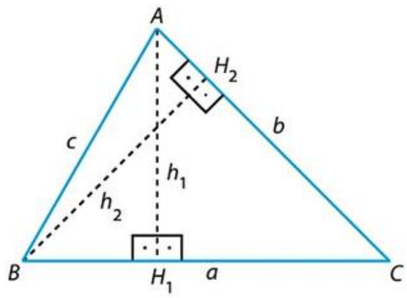
Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *trigonometria num triângulo qualquer (Lei dos Cossenos)* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...** Para tanto, o professor pode começar chamando a atenção dos estudantes para o fato de a figura (Modelo 24) indicar pelo menos quatro triângulos não retângulos (ΔABC, ΔABD, ΔACD e ΔBCD). Em seguida orienta-os a proceder da seguinte maneira: *i*) Calcular c^2 no ΔBHD e em seguida isolar h^2; *ii*) Calcular x^2 no ΔCHD, substituindo h^2 pela expressão encontrada em *i*; *iii*) Expressar $\cos(\hat{B})$ e isolar m; *iv*) Expressar x^2, substituindo a variável m pela expressão encontrada em *iii*; Eis aí a *Lei dos Cossenos*!

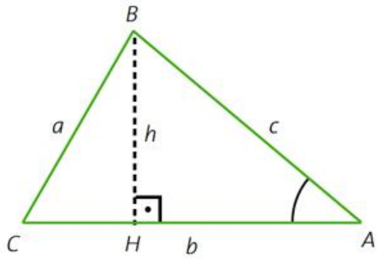
Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 2.1.2** (Sugestões)

Calcular a largura do rio Tapajós entre os pontos C e D (usar *Lei dos Cossenos* e calculadora).

Observação: O desenvolvimento do conteúdo pode ser direcionado pela sugestão a seguir:

Tópicos	Desenvolvimento em resumo

Relembrando as relações trigonométricas num triângulo retângulo	Considere os triângulos retângulos $\Delta OCD, \Delta OEF, \Delta OGH, \cdots$  Pela semelhança de triângulos, $\Delta OCD \sim \Delta OEF \sim \Delta OGH \sim \cdots$ Temos então as seguintes **relações trigonométricas**: **1)** $\frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} = \cdots = \text{Constante } K_1$ $\textbf{sen}\,\boldsymbol{\theta} := K_1 = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{medida da hipotenusa}}$ **2)** $\frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = \cdots = \text{Constante } K_2$ $\textbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} := K_1 = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{medida da hipotenusa}}$ **3)** $\frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH} = \cdots = \text{Constante } K_3$ $\textbf{tg}\,\boldsymbol{\theta} := K_1 = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \theta}$
Triângulo qualquer: Lei dos Senos	Considere o triângulo acutângulo ΔABC a seguir. A partir das alturas h_1 e h_2 obtemos os seguintes triângulos retângulos: ΔABH_1, ΔACH_1, ΔABH_2 e ΔCBH_2  Calculando o sen Â, sen $\hat{B}$ e sen $\hat{C}$ concluímos (**Lei dos Senos**): $\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$ **Observação:** Essa lei vale também se o triângulo for obtusângulo!
Triângulo qualquer: Lei dos Cossenos	Considere o triângulo acutângulo ΔABC a seguir. A partir da altura h obtemos os seguintes triângulos retângulos: ΔABH e ΔCBH

<table>
<tr><td></td><td>


Calculando o $\cos \hat{A}$ no ΔABH e utilizando algumas das relações métricas no triângulo retângulo concluímos (Lei dos Cossenos):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

De modo análogo, concluímos a Lei dos Cossenos para os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, isto é, valem também:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

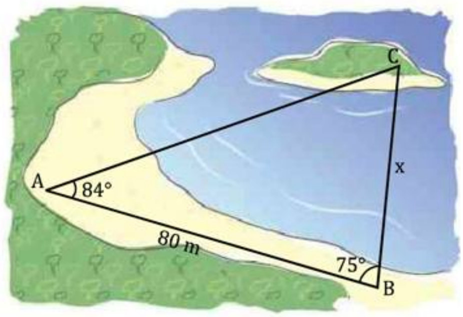
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Observação: Essa lei vale também se o triângulo for obtusângulo!
</td></tr>
</table>

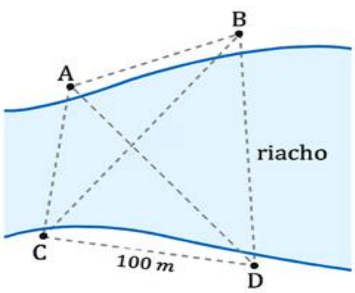
4ª Etapa: Aplicação

CC2.1 - Questões de Aplicação (sugestão)

Q1. (C3/V1/q.11/p.259) Com o uso de um teodolito, um topógrafo esquematizou um desenho ilustrativo (figura abaixo) que indica a distância entre um ponto B na praia e um ponto C na ilha, isto é, a distância x. Calcule essa distância.



Q2. (C3/V1/q.29/p.262) Um topógrafo deseja calcular a distância entre pontos situados à margem de um riacho, como mostra a figura a seguir. O topógrafo determinou as distâncias mostradas na figura, bem como os ângulos $A\hat{C}B = 30°$, $B\hat{C}D = 60°$, $B\hat{D}C = 70°$ e $A\hat{D}C = 40°$, obtidos com a ajuda de um teodolito. Calcule:



a) A distância entre os pontos B e C (identifique por y);

b) A distância entre os pontos B e D (identifique por z);

c) A distância entre os pontos A e C (identifique por w);

d) A distância entre os pontos A e B (identifique por x).

CC2.2 – ANÁLISE COMBINATÓRIA

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Princípio Multiplicativo • Arranjos simples • Combinações simples	• Conhecimentos numéricos	C1	H2, H3 H4 H5

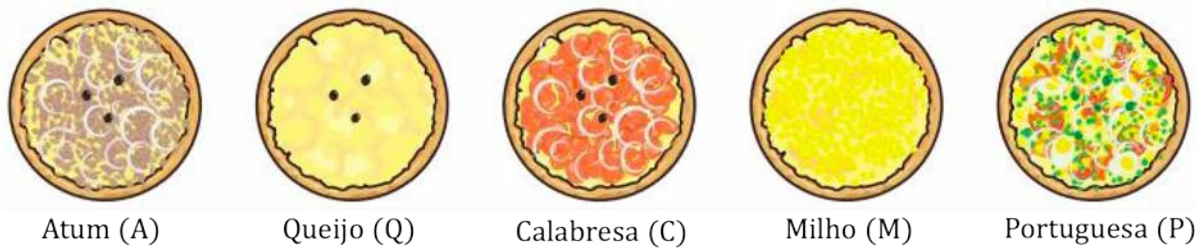
≫ *Situação 2.2.1: Pizza! Quem quer uma pizza? Pode escolher o seu sabor!*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(SOUZA; GARCIA, 2016b, p. 111, adaptado). Você sabe quem inventou a pizza? Seus criadores foram mesmo os italianos. Mas existem várias hipóteses para explicar a chegada do ancestral da pizza à Itália. A principal delas conta que, três séculos a.C., os fenícios costumavam acrescentar ao pão redondo e chato como um disco coberturas de carne e cebola. A mistura também foi adotada pelos turcos, que preferiam cobertura à base de carne de carneiro e iogurte fresco. “Durante as Cruzadas, no século 11, o pão turco foi levado para o porto italiano de Nápoles”, conta o sociólogo Gabriel Bollaffi, da USP. Os napolitanos tomaram gosto pelo petisco e foram aperfeiçoando-o com trigo de boa qualidade para a massa e coberturas variadas, especialmente queijo. Nascia, então, a pizza quase como a conhecemos hoje. Faltava só o tomate, introduzido na Itália no século 16, vindo da América, e incorporado como ingrediente tão básico quanto o queijo. A mais antiga pizzaria que se conhece está em Nápoles e foi fundada em 1830. A pizza margherita também surgiu nessa cidade, em 1889, feita de encomenda para o rei Umberto I e a rainha Margherita.[2]

Em Santarém, uma das pizzarias mais visitadas é a Pizzaria “Bom Pão”, que oferece pizzas comuns e especiais. Para as pizzas comuns, o *pizzaiolo* tem à sua disposição ingredientes para fazer pizzas em 5 sabores, conforme está representado na figura a seguir (Figura 18).

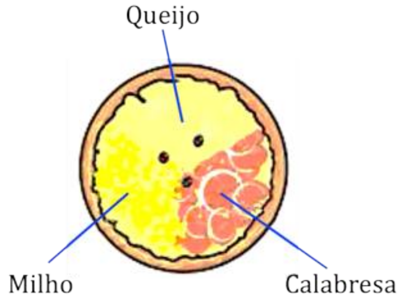
Figura 18: Pizza comum da Pizzaria "Bom Pão"



Fonte: Souza e Garcia (2016b, p. 111).

[2] Disponível em: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/qual-e-a-origem-da-pizza/. **Acesso em**: 11 jul. 2018.

Modelo 25 A fim de atender a preferência dos clientes, a pizzaria oferece até três sabores na pizza grande, de modo que cada possibilidade pode ser expressa por uma terna. Um exemplo disso é a terna $\{Q, M, C\}$, que representa uma dessas possibilidades, ilustrada por:



Fonte: Souza e Garcia (2016b, p. 111).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.2.1** (Sugestões)

Cada possibilidade é representada por uma terna, formada por três sabores diferentes de pizzas, que são escolhidos entre os cinco possíveis, isto é, entre os elementos do conjunto $\{A, Q, C, M, P\}$. Cada um desses elemento indica, respectivamente, a inicial dos sabores Atum, Queijo, Calabresa, Milho e Portuguesa.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.2.1** (Sugestões)

Quais seriam as ternas que representam todas as possibilidades de pizzas com três sabores, escolhidos entre os cinco apresentados acima? Qual total de possibilidades encontradas? O que você acha das possibilidades $\{Q, M, C\}$, $\{Q, C, M\}$, $\{M, Q, C\}$, $\{M, C, Q\}$, $\{C, Q, M\}$ e $\{C, M, Q\}$ por exemplo? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 2.2.1)

1) Tentar montar, na forma de ternas, como no exemplo apresentado, todas as possibilidades de pizzas com três sabores, escolhidos entre os cinco disponíveis; **2)** Expressar esse número; **3)** Discutir se há diferença ou não entre as possibilidades $\{Q, M, C\}$ e $\{Q, C, M\}$; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 2.2.1** (Sugestão)

Em diálogo com os estudantes, o professor pode instigá-los a perceber o que diferencia duas possibilidades quaisquer de pizzas, como do exemplo destacado no item 3) da Tarefa 1. A intenção é fazê-los identificar que possibilidades como $\{Q, M, C\}$ e $\{Q, C, M\}$ representam a mesma pizza, pois os sabores foram registrados apenas em ordem diferente. Destacar que esse tipo de agrupamento é chamado *Combinação simples*.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *análise combinatória (Combinação Simples)* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 2.2.1** (Sugestões)

1) Calcular o número total de possibilidades de pizzas com três sabores diferentes, escolhidos entre os cinco apresentados; **2)** Calcular o número total de possibilidades de pizzas com dois e quatro sabores diferentes, escolhidos entre os cinco apresentados; etc.

≫ *Situação 2.2.2: Quem quer ser um milionário?*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(SOUZA; GARCIA, 2016b, p. 97, adaptado). Esse é o título de um filme vencedor do Oscar em 2009 (Figura 17). Lembra dele? Conta a história de um jovem indiano, Jamal Malik, órfão e pobre que começa a viver na rua junto com seu irmão, Salim, depois da morte da mãe num ataque étnico, que num golpe de sorte consegue participar de um programa de televisão sensação no seu país que dá como prêmio máximo até 20 milhões de rúpias. Jamal participa do programa e consegue ganhar esse prêmio.

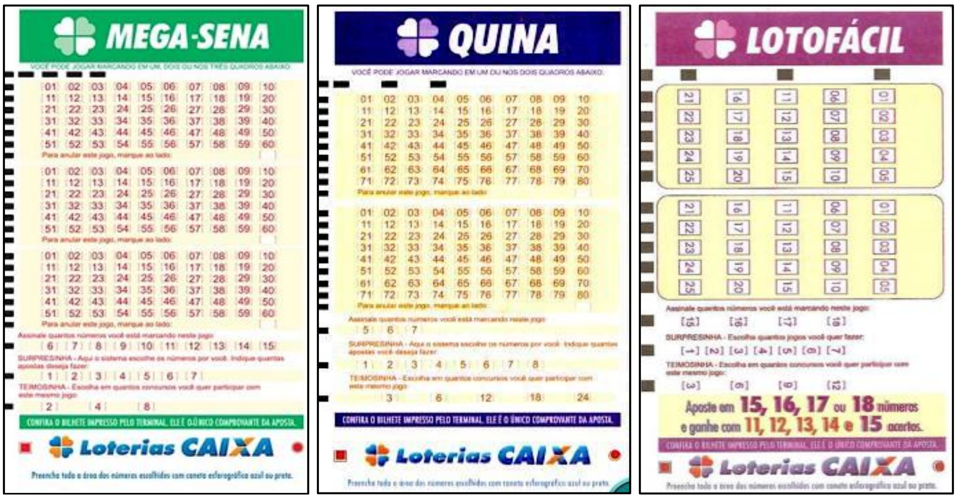
Figura 19: Filme - Quem quer ser um milionário?

Fonte: https://cineboxcs.com/2017/05/10/quem-quer-ser-um-milionario-blu-ray-rip-720p-torrent-dublado-2008/.

E você, já sonhou em se tornar um milionário? Muitos brasileiros ficam empolgados com essa ideia e arriscam a sorte nas loterias organizadas pela Caixa Econômica Federal. Para ganhar na loteria e tornar esse sonho uma realidade, no entanto, é preciso muita sorte. Muita sorte mesmo! A *Mega-Sena*, por exemplo, é uma dessas modalidades de loteria, cujo prêmio varia conforme o sorteio. Para apostar é preciso escolher no mínimo 6 e no máximo 15 números, dentre 60 disponíveis. Ganha o prêmio máximo (sena), quem acertar os 6 números sorteados. Se acertar 5 ou 4 números, o apostador também recebe prêmios, porém menores. Na *Quina*, um apostador marca de 5 a 15 números dentre 80 disponíveis no volante, podendo ganhar prêmios os acertadores de 2 a 5 números. Já na *Lotofácil*, marcam-se de 15 a 18 números, dentre 25 disponíveis no volante, e faturam prêmios os apostadores que acertarem de 11 a 15 números.

Modelo 26

Cartões de loterias



Fonte: Souza e Garcia (2016b, p. 97).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.2.2** (Sugestões)
As três loterias apresentadas (Modelo 26) têm número de possibilidades de jogadas diferentes. Um jogo da Mega-Sena é feito, escolhendo-se de 6 a 15 números entre os 60 disponíveis. Na Quina, escolhe-se de 5 a 15 números entre 80 disponíveis, e na Lotofácil, escolhe-se de 15 a 18 números entre 25.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.2.2** (Sugestões)
Você conhece alguém que já ganhou nas loterias? Em qual modalidade? O que significam as chances de ganhar o prêmio máximo citados para as loterias acima (Mega-Sena, Quina e Lotofácil)? Como se chega a essas contagens (50 063 860, 24 040 016 e 3 268 760)? Considerando que uma pessoa realize todas as apostas mínimas diferentes possíveis na Mega-Sena, cada uma delas custando R$ 3,50, quanto ela gastaria fazendo todas essas apostas? Em

sua opinião, seria vantajoso financeiramente realizar essa aposta? Na Mega-Sena, realizando uma aposta com 15 números, as chances de ganhar o prêmio máximo são maiores ou menores, quando comparadas à aposta mínima? Qual essa chance? Vale a pena financeiramente fazer todas as apostas desse tipo de loteria (com 15 números)? Na Quina, quantas apostas distintas com 7 números podem ser realizadas ao todo nesta loteria? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 2.2.2)

1) Fazer três jogos simples da Mega-Sena; **2)** Usando o Princípio Fundamental da Contagem (já deve ter sido estudado) tentar esboçar o processo que permite calcular o número total de possibilidades de jogos (simples) diferentes da Mega-Sena; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 2.2.2** (Sugestão)

Após a realização da Tarefa 1, o professor pode pedir aos estudantes que apresentem para a turma (pode ser no quadro) o esboço que fizeram para resolver o item 2). Sem fazer comentários (pelo menos por enquanto), o professor pode propor a seguinte questão: Suponha que alguém tenha anotado os seguintes jogos da Mega-Sena: 34-12-57-05-44-21 e 05-34-21-57-44-12. O que você acha? A intensão aqui é fazer com que os estudantes percebam que se trata de um mesmo jogo, uma vez que os números apenas estão em ordem diferente, o que não influencia para ser um jogo diferente. A ideia é evidenciar para os estudantes que, quando no item 2) da Tarefa 1, eles propuseram o esboço $60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55$ (é de se esperar que pelo menos um estudante tenha proposto) como solução, estavam repetindo jogos. A pergunta que o professor pode fazer em seguida é: quantas vezes são repetidos cada jogo? Aqui o professor pode tomar o exemplo apresentado acima (34-12-57-05-44-21) e propor que os estudantes tentem descobrir de quantas maneiras diferentes podem ser dispostos esses números. A ideia é instigá-los a concluir que a resposta é 6! Daí, então, chegar a conclusão de que o total de jogos (simples) diferentes da Mega-Sena que se pode fazer pode ser dado por $\frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{6!}$. Destacar que esse tipo de agrupamento é chamado *Combinação simples*.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *análise combinatória (Combinação Simples)* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 2.2.2** (Sugestões)

1) Considerando que uma pessoa realize todas as apostas mínimas possíveis na Mega-Sena, cada uma delas custando R$ 3,50, calcular quanto ela gastaria fazendo todas essas apostas; **2)** Calcular as chances de alguém ganhar o prêmio máximo da Mega-Sena, realizando uma aposta com 15 números; **3)** Discutir se há vantagem financeira ao realizar essa aposta e comparar; **4)** Comparar os dois casos de jogos, isto é, as apostas com 6 e 15 números, verificando se há alguma vantagem financeira em alguma dessas “loucuras”; **5)** Percebe-se que o número de possibilidades de jogos simples da Quina e Lotofácil também são problemas de Combinações simples do tipo $C_{80,\,5}$ e $C_{25,\,15}$, respectivamente. Calcular essas combinações; **4)** Calcular o número de apostas distintas com 7 números poder ser realizadas na Quina; etc.

≫ Situação 2.2.3: As piores senhas do mundo!

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(PAIVA, 2016b, p. 128 e 141). Para acessar tudo o que se tem de importante na internet – seja o *e-mail*, seja o perfil no site de relacionamento, seja a conta do banco – é preciso ter uma senha secreta. Uma senha é uma sequência de caracteres numéricos, literais ou especiais como %, &, #, etc., ou uma mescla deles. Mas algumas senhas não são tão secretas assim. No fim de 2009, um *hacker* aproveitou um defeito em um site comercial e colocou na internet as senhas de 32 milhões de clientes da empresa, mostrando que as mesmas sequências apareciam milhares de vezes. Dentre elas, destacam-se, além do próprio nome das pessoas usuárias da rede, sequências como: “senha”; “123456”; “qwerty”; “abc123”; etc. A sugestão dos especialistas em segurança virtual é que se crie “senhas fortes”. A recomendação é usar muitos e variados caracteres (letras maiúsculas e minúsculas, números e símbolos). A “força” de uma senha depende do número de caracteres e do tipo de caractere utilizado. Quanto maior for a variedade de caracteres da senha, mais difícil será quebrá-la. Para exemplificar, vamos considerar o teclado a seguir:

Modelo 27 **Teclado de um Notebook com caracteres possíveis para uma senha**

Fonte: Paiva (2016b, p. 129).

É possível “contar” 10 000 000 000 senhas diferentes formadas por dez caracteres numéricos (não necessariamente distintos). Com apenas letras minúsculas, é possível “contar” 141 167 095 653 376 possibilidades de senhas com dez caracteres (não necessariamente distintos). Considerando o teclado (94 caracteres), incluindo letras maiúsculas e minúsculas, e caracteres especiais, podem ser criadas 53 861 511 409 489 970 176 senhas diferentes com dez caracteres (não necessariamente distintos).

Se, porem, for considerando apenas letras minúsculas, algarismos e outros caracteres especiais, o teclado acima apresenta 68 caracteres possíveis para serem utilizados na criação de senhas. Foi nessas condições que duas amigas, Jéssica e Fernanda, para comprar um *smartphone* em um *site*, deviam criar uma senha com 6 caracteres no teclado acima. Jéssica resolveu escolher, aleatoriamente, os 6 caracteres no teclado, sendo todos eles distintos. Já Fernanda pretende escolher, aleatoriamente, os 6 caracteres entre as letras e os algarismos desse teclado, não necessariamente distintos.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.2.3** (Sugestões)

As senhas podem ser criadas a partir dos caracteres do teclado apresentado (Modelo 27). São 10 caracteres numéricos (0 a 9), 26 letras e 32 caracteres especiais, totalizando 68 caracteres. Se considerarmos, porém, que letras maiúsculas e minúsculas são distintas na criação de senhas, então, o total de caracteres do teclado apresentado sobe para 94.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.2.3** (Sugestões)

Como você acha que foi "contada" a quantidade de senhas apresentada acima (10 000 000 000, 141 167 095 653 376 e 53 861 511 409 489 970 176) a partir dos caracteres do teclado? Quantas seriam as possibilidades para essas mesmas situações, considerando que os caracteres das senhas criadas sejam necessariamente distintos? No caso da compra do *smartphone* na situação apresentada acima, quantas senhas diferentes Jéssica pode formar? E Fernanda? Sabe-se que as senhas que têm pelo menos um caractere especial são "mais fortes" do que qualquer senha formada apenas por letras e algarismos. Das senhas que podem ser criadas por Jéssica, quantas podem ser consideradas "mais fortes"? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 2.2.3)

1) Criar duas senhas diferentes formada por quatro algarismos distintos do teclado (Modelo 27); **2)** Usando o princípio multiplicativa (conteúdo que já deve ter sido estudado) para tentar esboçar um processo que permita chegar a 10 000 000 000, 141 167 095 653 376 e 53 861 511 409 489 970 176 que indicam as quantidades de senhas formadas com os caracteres do teclado (Modelo 27); **3)** Realizar o mesmo procedimento do item anterior para tentar "contar" a quantidade de possibilidades para as mesmas situações, considerando, porém, que os caracteres das senhas criadas sejam necessariamente distintos (utilizar o principio multiplicativo); etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 2.2.3** (Sugestão)

Após a realização da Tarefa 1, o professor pode pedir aos estudantes que apresentem para a turma (pode ser no quadro) o esboço que fizeram para resolver os itens 2) e 3). Sem fazer comentários (pelo menos por enquanto), o professor pode propor a seguinte questão: Suponha que alguém tenha criado as seguintes senhas no item 1): 3581 e 5183. O que você acha? São senhas diferentes ou não? A intensão aqui é fazer com que os estudantes percebam que, a pesar de serem os mesmos algarismos nas duas senhas, a ordem dos algarismos torna as senhas diferentes. A ordem dos algarismos influencia na criação de novas senhas. A ideia é evidenciar para os estudantes que, quando no item 2) da Tarefa 1, por exemplo, eles propuseram o esboço $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ (é de se esperar que pelo menos um estudante tenha proposto) como solução, estavam corretos. Destacar que esse tipo de agrupamento é chamado *Arranjo simples*.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *análise combinatória (Arranjo Simples)* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 2.2.3** (Sugestões)

1) No caso da compra do *smartphone* na situação apresentada acima, tentar calcular a quantidade de senhas diferentes que Jéssica e Fernanda podem formar; **2)** Como visto acima, as senhas que têm pelo menos um caractere especial são "mais fortes" do que qualquer senha formada apenas por letras e algarismos. Das senhas que podem ser criadas por Jéssica, tentar calcular quantas podem ser consideradas "mais fortes"; etc.

Observação: O desenvolvimento do conteúdo pode ser direcionado pela sugestão a seguir:

Tópicos	Desenvolvimento em resumo
Princípio Fundamental da Contagem	Um evento E ocorre em k etapas sucessivas e independentes, representado pela sequência $(E_1, E_2, E_3, \dots, E_k)$ de tal modo que: # E_1 pode ser escolhido de m_1 maneiras distintas; # E_2 pode ser escolhido de m_2 formas diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores; # E_3 pode ser escolhido de m_3 modos diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores; ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ # E_k pode ser escolhido de m_k maneiras diferentes, a partir das escolhas anteriores. Então, o número total de possibilidades para construir a sequência $(E_1, E_2, E_3, \dots, E_k)$ é dado por: $\boldsymbol{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_k}$ Esse resultado é chamado **Princípio Fundamental da Contagem** (PFC) ou **Princípio Multiplicativo**.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Exemplos: Utilizar o PFC em cada situação:

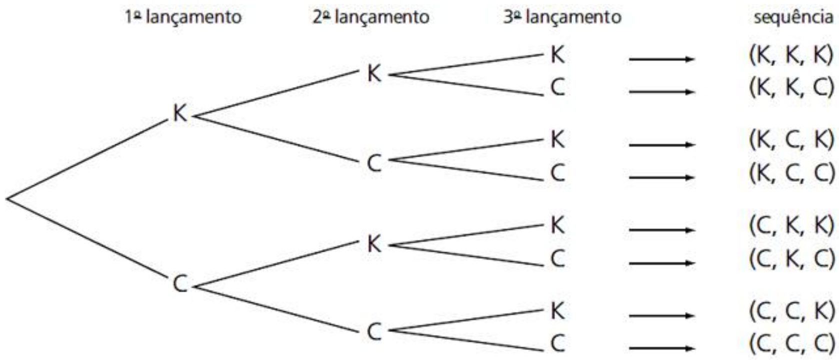
1) Uma moeda (cara - K e coroa - C) é lançada três vezes sucessivamente.

O evento E é o lançamento sucessivo da moeda por três vezes, representado pela sequência (E_1, E_2, E_3), onde:

E_1 pode ser K ou C $\rightarrow$ $m_1 = 2$;
E_2 pode ser K ou C $\rightarrow$ $m_2 = 2$;
E_3 pode ser K ou C $\rightarrow$ $m_3 = 2$.

Portanto, o Total de possibilidades desse evento é $\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 2 = 8}$.

Ilustração do evento

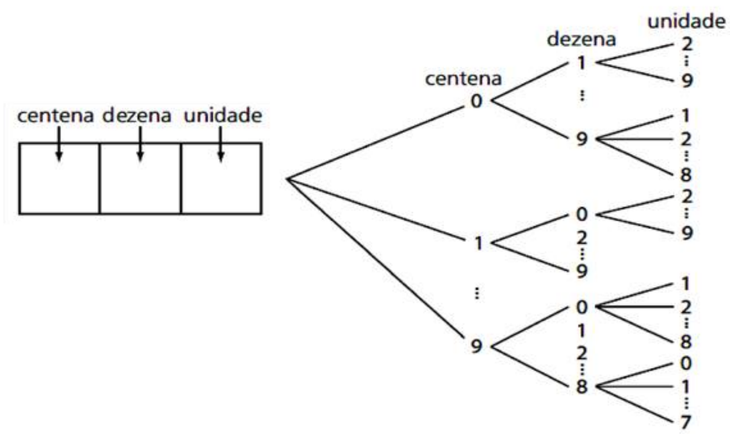


2) Senha de três algarismos distintos (0 a 9).

O evento E é a criação de uma senha de três algarismos distintos, representado pela sequência (E_1, E_2, E_3), de modo que:

E_1 (algarismo das centenas) tem $m_1 = 10$ possibilidades;
E_2 (algarismo das dezenas) tem $m_2 = 9$ possibilidades;
E_3 (algarismo das unidades) tem $m_3 = 8$ possibilidades.
Portanto, o Total de possibilidades desse evento é $\mathbf{10 \cdot 9 \cdot 8 = 720}$.

Ilustração do evento



</td>
</tr>
<tr>
<td>Arranjos Simples e Permutações Simples</td>
<td>

Arranjo simples de n elementos distintos, tomados p a p, indicado por $\boldsymbol{A_{n,p}}$, é todo agrupamento ordenado, formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados $(p \leq n)$.

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>

Obs.: Seus elementos são diferenciados pela natureza e pela ordem.

Ilustração do Arranjo simples utilizando o PFC

Escolha	Número de possibilidades
Do 1º elemento	n
Do 2º, depois de escolhido o 1º	$n-1$
Do 3º, depois de escolhidos o 1º e o 2º	$n-2$
⋮	⋮
Do p-ésimo, depois de escolhidos os anteriores	$n-(p-1)$

Portanto:

$$A_{n,1} = n$$
$$A_{n,2} = n(n-1)$$
$$A_{n,3} = n(n-1)(n-2)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)]$$

Forma Fatorial do Arranjo Simples

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Obs.: Se $n = p$, $A_{n,n} = n!$ e passa a ser representada simplesmente por $\boldsymbol{P_n = n!}$. Esse tipo de agrupamento é chamado **Permutação Simples**.

Exemplos: Resolver os problemas de Arranjo simples:

1) A criação de senhas com três algarismos distintos (0 a 9) é um exemplo de Arranjo simples do tipo $A_{10,3}$, ou seja,

$$\boldsymbol{A_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720}$$

2) A formação de *anagramas* da palavra AMOR é um exemplo de Arranjo simples do tipo $A_{4,4}$, ou seja, é uma Permutação simples do tipo P_4 que é calculada da seguinte forma:

$$\boldsymbol{P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24}$$

</td></tr>
<tr><td>Combinações Simples</td><td>

Combinação simples de n elementos distintos, p a p, indicado por $\boldsymbol{C_{n,p}}$, é todo agrupamento não ordenado, formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados ($p \leq n$).

Obs.: Seus elementos são diferenciados apenas pela natureza.

Após explorar a Situação 2.3.**1**, concluir que:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

</td></tr>
</table>

	Exemplo: Preparação de uma salada de frutas, escolhendo três entre quatro disponível, isto é, abacate (A), banana (B), caju (C) e damasco (D). Note que **a ordem** da escolha das três frutas **não importa** para fazer a salada. Portanto, o número de possibilidades de saladas diferentes é uma Combinação simples do tipo $C_{4,\,3}$ que pode ser calculada por: $\boldsymbol{C_{4,\,3} = \frac{A_{4,\,3}}{P_3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4}$ Exibindo essas possibilidades, temos: ABC, ABD, ACD e BCD.

4ª Etapa: Aplicação

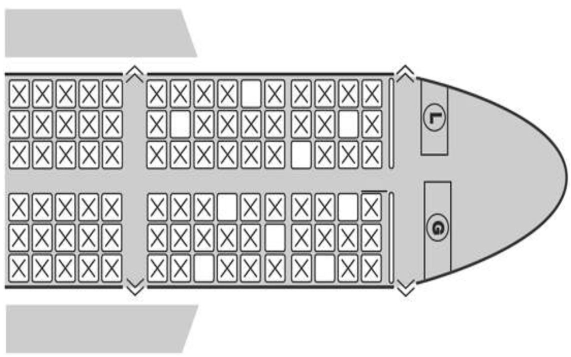
CC2.2 - Questões de Aplicação (sugestão)

Q1. (C4/V2/q.27/p.108) O Senado Federal do Brasil é composto por 81 senadores, que representam todas as 27 unidades da federação. A mesa diretora do Senado é eleita internamente e tem a seguinte composição (com exceção dos suplentes):

a) Sabendo que cada unidade da federação é representada igualmente no Senado Federal, quantos senadores representam cada uma delas? **b)** De quantas maneiras distintas pode ser composta a mesa diretora do Senado Federal em eleição interna? **c)** Pesquisar e discutir sobre Senado, unidades da federação, senador e sus atribuições e responsabilidades, além de identificar os senadores que representam a unidade da federação onde você mora.

Q2. (C5/V2/q.12/p.164) Na formação de um Comissão Parlamentar de Inquérito (CPI), cada partido indica um certo número de membros, de acordo com o tamanho de sua representação no Congresso Nacional. Nessa CPI faltam apenas dois partidos para indicar seus membros. O partido A tem 40 deputados e deve indicar 3 membros, enquanto o partido B tem 15 deputados e deve indicar 1 membro. **a)** Determine o número de possibilidades diferentes para a composição dos membros desses dois partidos nessa CPI; **b)** Pesquisar e discutir sobre CPI, Congresso Nacional, deputados (federais e estaduais) e suas atribuições e responsabilidades.

Q3. (ENEM – 2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de uma viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura abaixo, disponibilizada pelo *site*, as poltronas ocupadas estão marcadas com "×" e as únicas poltronas disponíveis soa as mostradas em branco. Determine o número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo.



Q4. (ENEM – 2013) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet.

Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do *coeficiente de melhora*, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. Determine o coeficiente de melhora da alteração recomendada.

Q5. (C4/V2/q.29/p.108) Um concurso promovido por uma emissora de televisão vai formar uma nova banda de rock. Classificaram-se para a etapa final três bateristas, quatro baixistas, cinco guitarristas e dois vocalistas. A banda vencedora do concurso será formada por um baterista, um baixista, dois guitarristas e um vocalista. **a)** De quantas maneiras pode ser formada a banda, a partir dos candidatos finalistas, sabendo que os guitarristas possuem funções diferentes nessa banda? **b)** E se os guitarristas pudessem exercer as mesmas funções na banda (sem distinção), de quantas maneiras diferentes poderia ser formada a banda?

Q6. (C5/V2/q.8/p.164) As embalagens dos vários produtos vendidos por uma empresa apresentam uma sequência formada por barras verticais, chamado Código de Barras. A parte principal de um desses Códigos é formada por quatro barras com 1,5 mm de largura, três com 0,5 mm e duas com 0,25 mm, conforme indica a figura abaixo:

Cada Código de Barras indica o preço de um produto. Quantos preços diferentes podem ser indicados utilizando as barras desse sistema de códigos?

CC2.3 – PROBABILIDADE

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Experimentos aleatórios, espaço amostral e evento • Definição de probabilidade	• Conhecimentos de probabilidade	C7	H28 H29 H30

≫ *Situação 2.3.1: “Alea jacta est” – “A sorte está lançada!”*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016b, p. 232, adaptado e ampliado). Esse brado (em latim), atribuído a Júlio César, é sinônimo de afirmação de irreversibilidade da decisão tomada sobre o que fazer, numa situação de grave perigo, afastada totalmente a possibilidade de voltar atrás. Segundo os historiadores, essa frase foi realmente pronunciada por Júlio César em 11 de janeiro de 49 a.C., no momento em que atravessou o Rubicão, rio que marcava as fronteiras da Itália e que, portanto, nenhum comandante poderia atravessar armado, sem tornar-se, automaticamente, inimigo de Roma. Esse ato foi indicado como início oficial da guerra civil contra Pompeu. [...] Os soldados romanos, principalmente, costumavam “jogar dados”, valendo-se de um osso do tarso (ossos do pé, como o *cuboide*), que mais se aproxima do formato de um cubo.[3] Um exemplo disso é visto na Bíblia Sagrada, após a crucificação de Jesus Cristo. No Evangelho de João capítulo 3, versos 23 e 24, é narrado que os soldados que crucificaram Jesus, repartiram as suas vestes e lançaram sortes sobre sua túnica.

Falando de **sorte**, percebe-se, até de modo natural, que há certos fenômenos (ou experimentos) que, embora sejam repetidos muitas vezes sob condições idênticas, não apresentam os mesmos resultados. Por exemplo, no lançamento de uma moeda perfeita, o resultado é imprevisível; não se pode determiná-lo antes de ser realizado. Não sabemos se sairá cara ou coroa. No caso de um dado *não viciado*, ao lançá-lo, não se sabe a face que resultará. Aos fenômenos (ou experimentos) desse tipo damos o nome de **fenômenos aleatórios** (ou **casuais**), e pelo fato de não sabermos o resultado exato de um fenômeno aleatório é que buscamos os resultados prováveis, as chances, as **probabilidades** de determinado resultado ocorrer. Veja exemplos:

Modelo 28

Lançamento de uma moeda

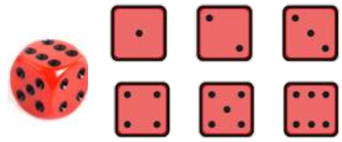
Ao lançar uma moeda perfeita, duas possibilidades podem ocorrer: *cara* ou *coroa*.

[3] Disponível em: http://www.migalhas.com.br/Latinorio/34,MI159269,91041-Alea+jacta+est. **Acesso em**: 13 jul. 2018.

Modelo 29

Lançamento de um dado

Ao lançar um dado (não viciado), seis possibilidades podem ocorrer. Veja a figura ao lado:



Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.3.1** (Sugestões)

Tem-se dois eventos aleatórios. O lançamento de uma moeda e o lançamento de um dado. No lançamento da moeda há *duas possibilidades* de resultados, isto é, ou é cara, representada por **C**, ou é coroa, indicada por **K**. Já no lançamento do dado, *seis possibilidades* podem ocorrer, que são as faces de um cubo, sendo que cada face é representada por um numeral de **1** a **6**. Introduzir o conceito de **Espaço Amostral** e **Evento**.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.3.1** (Sugestões)

Dizer que a moeda é perfeita, é dizer que as duas possibilidades (cara ou coroa) têm as mesmas chances de ocorrer. Qual a chance (probabilidade) de ocorrer cada uma dessas possibilidades? Da mesma forma, dizer que o dado é não viciado, é dizer que as seis possibilidades (1, 2, 3, 4, 5 e 6) têm as mesmas chances de ocorrer. Qual a chance (probabilidade) de ocorrer cada uma dessas possibilidades? Qual a chance (probabilidade) de ocorrer um *número de Fibonacci* no lançamento de um dado? Lançando simultaneamente uma moeda e um dado, quantas possibilidades diferentes temos? Qual a chance (probabilidade) de o resultado da moeda ser cara e do dado ser um número par? Se lançarmos dois dados simultaneamente, um vermelho e um verde, quantas possibilidades diferentes podemos ter? Qual a probabilidade de o resultado ter soma 6? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 2.3.1)

1) No lançamento de uma moeda perfeita, expressar o Espaço Amostral e os Eventos possíveis nesse experimento aleatório; **2)** No lançamento de um dado honesto (não viciado), expressar o Espaço Amostral e os seguintes eventos: apenas com números ímpares; apenas com números primos; apenas com números de *Fibonacci*; **3)** Na escolha dos números da Mega-Sena, expressar o Espaço Amostral e os seguintes eventos: apenas números múltiplos de 8; apenas números de *Fibonacci*; apenas números primos; **4)** Tentar expressar as chances (probabilidades) de ocorrer cada evento identificado nos itens anteriores; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 2.3.1** (Sugestão)

Após a realização da Tarefa 1, o professor pode avançar um pouco mais e questionar os estudantes: “se lançarmos simultaneamente uma moeda e um dado, quais as chances de a moeda ser cara (C) e o dado se um número par?" A intensão aqui é levar os estudantes a perceberem outros tipos de experimentos aleatórios. Primeiramente o professor pode solicitar que os estudantes expressem o Espaço Amostral desse experimento para, em seguida, tentar resolvê-lo. Aqui o professor pode destacar para os estudantes que esse, e outros problemas mais complexos, pode ser estudado na perspectiva da *teoria das probabilidades*, estudo esse que estava sendo iniciado naquele momento.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *probabilidade* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 2.3.1** (Sugestões)

1) Calcular a probabilidade de, no lançando simultaneamente de uma moeda e um dado, o resultado ser *coroa* (para a moeda) e um número *primo* (para o dado); **2)** Calcular a probabilidade de, no lançarmos simultaneamente de dois dados (vermelho e verde), o resultado ter soma 6; **3)** Idealizar um experimento aleatório envolvendo mais de um componente e expressar seu Espaço Amostral, especificando pelo menos dois eventos; etc.

≫ *Situação 2.3.2: Quantos amigos você tem?*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016b, p. 256). Nunca foi tão fácil manter contato e conhecer gente nova pela internet. Graças às redes sociais, nunca tivemos tantos amigos. Mas isso está transformando a própria definição de amizade.

Figura 20: Mídias Sociais

Fonte: http://portalcoroado.com.br/home/2019/03/13/psicologa-fala-por-que-as-pessoas-sao-agressivas-na-internet/.

Há diversos estudos comprovando que interagir com outras pessoas, principalmente com amigos, é o que mais fazemos na internet. A internet é a ferramenta mais poderosa já inventada no que diz respeito à amizade. E está transformando nossas relações: tornou muito mais fácil manter contato com os amigos e conhecer gente nova. Mas será que as amizades *on-line* não fazem com que as pessoas acabem se isolando e tenham menos amigos *off-line*, "de verdade"? Essa tese, geralmente citada nos debates sobre o assunto, foi criada em 1995 pelo sociólogo americano Robert Putnam. E provavelmente está errada. Uma pesquisa feita pela Universidade de Toronto constatou que a internet faz você ter mais amigos - dentro e fora da rede. Durante a década passada (anos 2000), período de surgimento e ascensão dos sites de rede social, o número médio de amizades das pessoas cresceu. E os chamados *heavy users*, que passam mais tempo na internet, foram os que ganharam mais amigos no mundo real - 38% mais. Já quem não usava a internet ampliou suas amizades em apenas 4,6%. Então as pessoas começam a se adicionar e no final todo mundo vira amigo? Não é bem assim. A internet raramente cria amizades do zero - na maior parte dos casos, ela funciona como potencializadora de relações que já haviam se insinuado na vida real.[4]

Em Santarém, três colegas do 2º ano do Ensino Médio de uma escola (Elisa, Martha e João), fazem parte de uma determinada rede social, e combinaram de convidar, além dos parentes próximos, apenas os amigos dessa rede social que moram na mesma cidade deles para participarem da festa de aniversário de Martha. Após consultarem os amigos da rede social (somente os que moram na mesma cidade deles), verificaram que:

Modelo 30 Elisa tem 28 amigos, Martha 32 e Joao, 20. Verificaram que Elisa e Martha têm 5 amigos em comum, Elisa e João têm 10, Martha e João têm 6. Além disso, descobriram que há 4 amigos comuns aos três. Sabe-se que todos os convidados compareceram à festa e, como parte da comemoração, foi sorteado entre eles, um smartphone de última geração, oferecido pelo pai da aniversariante. Foi realmente uma surpresa para todos, embora o resultado do sorteio não! Foi bem coerente com as **chances** dos convidados, dentro das **probabilidades**! Um dos amigos de Martha foi o sorteado!

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.3.2** (Sugestões)

Há três grupos de pessoas, os amigos de Martha, os amigos de Elisa e os amigos de João. Esses grupos podem ser representados por conjuntos e indicados por $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{J}$, respectivamente, os quais explicitarão o número de amigos de cada um dos três colegas de escola destacados (Martha, Elisa e João).

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.3.2** (Sugestões)

Qual o total de amigos dos três (Elisa, Martha e João) que compareceram à festa? O que significa que o resultado do sorteio foi "coerente com as *chances*", "dentro das

[4] Disponível em: http://super.abril.com.br/comportamento/como-a-internet-esta-mudando-a-amizade. **Acesso em**: 12 jul. 2018.

probabilidades"? Qual foi essa probabilidade? Como calcular? O sorteado, amigo de Martha, era amigo de Elisa também? De Martha e João? Dos três ao mesmo tempo? Qual a probabilidade para que cada uma dessas possibilidades ocorra? Qual a probabilidade para que o sorteado seja amigo exclusivo de Martha? E de Elisa? E de João? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 2.3.2)

1) Expressar o total de amigos dos três colegas de escola (Elisa, Martha e João) que compareceu à festa; **2)** Expressar o total de amigos apenas de Elisa que compareceu à festa; **3)** Expressar o total de amigos apenas de Martha que compareceu à festa; **4)** Expressar o total de amigos apenas de João que compareceu à festa; **5)** Expressar o total de amigos de Elisa ou Martha que compareceu à festa; **6)** Expressar o total de amigos de Elisa ou João que compareceu à festa; **7)** Expressar o total de amigos de Martha ou João que compareceu à festa; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 2.3.2** (Sugestão)

Em diálogo com os estudantes, o professor pode levantar alguns questionamentos, visando discutir, por exemplo, o significado de o resultado do sorteio ter sido "coerente com as *chances*", "dentro das *probabilidades*". Discutir se o sorteado, amigo de Martha, também era amigo de Elisa, isto é, se era amigo de Martha e Elisa. Ou ainda, se era amigo de Martha e João, ou dos três ao mesmo tempo. Aqui o professor pode destacar para os estudantes que esses, e outros problemas mais complexos, podem ser estudados na perspectiva da *teoria das probabilidades*, estudo esse que estava sendo iniciado naquele momento.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *probabilidade* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 2.3.2** (Sugestões)

1) Calcular a probabilidade de o sorteado com o *smartphone* ser amigo exclusivo de Martha; **2)** Calcular a probabilidade de o sorteado (amigo de Martha) ser amigo de Elisa e não de João; **3)** Calcular a probabilidade de o sorteado (amigo de Martha) ser amigo de João e não de Elisa; **4)** Calcular a probabilidade do sorteado (amigo de Martha) ser amigo de Elisa ou João; **5)** Calcular a probabilidade de o sorteado ser amigo dos três ao mesmo tempo; etc.

Observação: O desenvolvimento do conteúdo pode ser direcionado pela sugestão a seguir:

Tópicos	Desenvolvimento em resumo

Experimentos aleatórios, espaço amostral e evento	**Experimento aleatório** é todo experimento (ou fenômeno) cujo resultado depende exclusivamente do acaso, isto é, mesmo repetido várias vezes sob as mesmas condições, apresenta resultados imprevisíveis. **Exemplos:** o lançamento de uma moeda perfeita ou de um dado honesto (não viciado), a escolha dos números da Mega-Sena, etc., são exemplos de experimentos aleatórios. O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado **espaço amostral** ($\mathcal{A}$). Todo subconjunto de um espaço amostral $\mathcal{A}$ é chamado **evento** (E). **Exemplos:** Identificar nos experimentos aleatórios o espaço amostral $\mathcal{A}$ e eventos E_i relacionados: **1)** Lançamento de uma moeda perfeita $\mathcal{A} = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$ $E_1 = \{\text{cara}\}$ e $E_2 = \{\text{coroa}\}$ **2)** Lançamento de um dado honesto (não viciado) $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $E_1 = \{3\}$, $E_2 = \{2, 4, 6\}$, $E_3 = \{1, 2, 3, 5\}$, etc. **3)** Escolha dos números da Mega-Sena $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, ..., 60\}$ $E_1 = \{1, 3, 5, ..., 59\}$, $E_2 = \{1, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\}$, etc.
Noção intuitiva de probabilidade	Considere o experimento aleatório de laçar um dado honesto. Como visto, o espaço amostral é $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e alguns eventos podem ser $E_1 = \{3\}$, $E_2 = \{2, 4, 6\}$ e $E_3 = \{1, 2, 3, 5\}$. Dizemos que a **chance** ou **probabilidade** do evento E_1 ocorrer é *uma* em *seis*, isto é, $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$ ou 17% A **chance** ou **probabilidade** de ocorrer um número par, ou seja, o evento E_2, é *três* em *seis*, isto é, $\frac{3}{6} \approx 0{,}5$ ou 50% Já a **chance** ou **probabilidade** de ocorrer um número de Fibonacci, ou seja, o evento E_3, é *quatro* em *seis*, isto é, $\frac{4}{6} \approx 0{,}67$ ou 67%
Definição de probabilidade e consequências	A **probabilidade** de ocorrer um evento E de um espaço amostral $\mathcal{A}$ finito é dado por: $\boldsymbol{P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\mathcal{A})}}$ onde $n(E)$ e $n(\mathcal{A})$ indicam o número de elementos de E e $\mathcal{A}$, respectivamente.

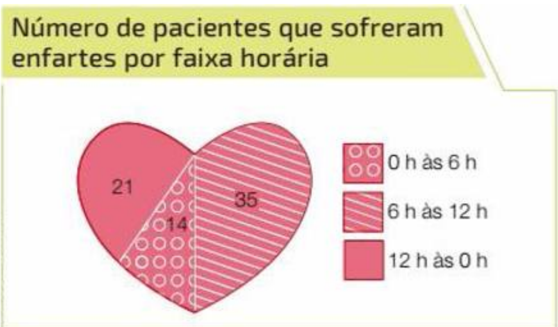
	Obs.: A probabilidade definida assim só é válida se todos os elementos de $\mathcal{A}$ tiverem a mesma chance de ocorrer, isto é, se $\mathcal{A}$ é um espaço amostral **equiprovável**, finito e não vazio. **Consequências:** **C1)** $\emptyset \subset E \subset \mathcal{A} \implies n(\emptyset) \le n(E) \le n(\mathcal{A})$ $\implies \frac{n(\emptyset)}{n(\mathcal{A})} \le \frac{n(E)}{n(\mathcal{A})} \le \frac{n(\mathcal{A})}{n(\mathcal{A})} \implies \mathbf{0 \le P(E) \le 1}$ Portanto, a probabilidade de ocorrer um evento E varia de 0 a 1, ou seja, de 0% a 100%. **C2)** Se E é um evento **impossível**, isto é, $E = \emptyset$, então $\mathbf{P(E) = P(\emptyset) = 0}$ **C3)** Se E é um evento **certo**, isto é, $E = \mathcal{A}$, então $\mathbf{P(E) = P(\mathcal{A}) = 1}$

4ª Etapa: Aplicação

CC2.3 - Questões de Aplicação (sugestão)

Q1. (C1/V2/q.37/p.248) Uma pesquisa sobre os grupos sanguíneos ABO, na qual foram testadas 6000 pessoas de uma mesma raça, revelou que 2527 têm o antígeno A, 2234, o antígeno B e 1846 não têm nenhum antígeno. Nessas condições, qual a probabilidade de uma dessas pessoas, escolhida aleatoriamente, tenha os dois antígenos?

Q2. (C4/V2/q.14/p.133) Momentos antes de acordar, nosso organismo envia cortisol e adrenalina para circular pelo corpo. Esses hormônios são responsáveis por nos deixar mais dispostos, e no sistema cardiovascular aumentam a pressão arterial e aceleram a frequência cardíaca. Contudo, o cortisol e a adrenalina favorecem a formação de placas de gordura nas artérias, o que pode provocar um enfarte durante a manhã. Certo grupo de médicos cardiologistas realizou uma pesquisa com os pacientes que deram entrada no hospital em determinado mês, obtendo como resultado os dados do gráfico a seguir:



a) Em qual faixa horária esse hospital deveria colocar a maior quantidade de médicos de plantão? Por quê? **b)** Considerando que a proporção de pacientes com enfartes se mantenha, qual a probabilidade de uma pessoa enfartada dar entrada nesse hospital no horário de 0h às 6h? **c)** E no horário de 0h às 12h? **d)** Pesquisar e discutir sobre problemas cardíacos (causas e cuidados).

Q3. (ENEM – 2010) Os estilos musicais preferidos pelos jovens brasileiros são o samba, o rock e a MPB. O quadro a seguir registra o resultado de uma pesquisa relativa à preferência musical de um grupo de 1000 estudantes de uma escola. Alguns alunos disseram não ter preferência por nenhum desses três estilos.

preferência musical	*rock*	samba	MPB	*rock* e samba	*rock* e MPB	samba e MPB	*rock*, samba e MPB
número de alunos	200	180	200	70	60	50	20

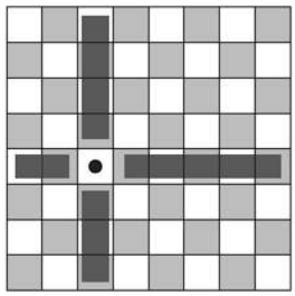
Se for selecionado ao acaso um estudante no grupo pesquisado qual a probabilidade de ele: **a)** Preferir somente MPB? **b)** Preferir somente *rock*? **c)** Preferir *rock* e samba? **d)** Preferir os três estilos musicais? **e)** Não preferir nenhum dos estilos?

Q4. (ENEM – 2014) Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste: 1) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO; 2) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO; 3) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO; 4) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO. Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença. O quadro a seguir refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicando em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do teste	Doença A	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

Conforme o quadro do teste proposto, determine a sensibilidade desse paciente.

Q5. (ENEM – 2018) Um *designer* de jogos planeja um jogo que faz uso de um tabuleiro de dimensão $n \times n$, com $n \geq 2$, no qual cada jogador, na sua vez, coloca uma peça sobre uma das casas vazias do tabuleiro. Quando uma peça é posicionada, a região formada pelas casas que estão na mesma linha ou coluna dessa peça é chamada de zona de combate dessa peça. Na figura ao lado está ilustrada a zona de combate de uma peça colocada em uma das casas de um tabuleiro de dimensão 8×8. Este deve ser dimensionado de forma que a probabilidade de se posicionar a segunda peça aleatoriamente, seguindo a regra do jogo de modo que



esta fique sobre a zona de combate da primeira seja inferior a $\frac{1}{5}$. Qual a dimensão mínima a ser adotada para esse tabuleiro?

CC2.4 – GEOMETRIA ESPACIAL: PRISMAS E CILINDROS

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Área de figuras planas • Prismas e Cilindros • Volume de Prismas e Cilindros	• Conhecimentos geométricos • Conhecimentos algébricos	C2 C3	H7, H8, H9 H10, H12 H13, H14

≫ *Situação 2.4.1: Como preservar nossas florestas?*

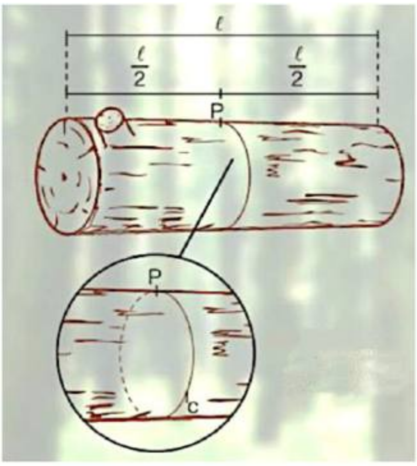
1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(SOUZA; GARCIA, 2016b, p. 242; ENEM 2010.1, Q. 158). O manejo florestal sustentável é a denominação para a exploração consciente de riquezas das florestas. É possível, por exemplo, potencializar o turismo, extrair frutos, sementes, resina e, até mesmo, madeira, sem prejudicar o ambiente. Contudo, essa exploração deve ser autorizada pelo Serviço Florestal Brasileiro, órgão público ligado ao Ministério do Meio Ambiente.

Em povoamentos florestais, quantificar o volume de madeira (*cubar*) de cada árvore se torna indispensável para o estabelecimento de planos do manejo florestal sustentável. Essa quantificação, que consiste em uma das etapas de um *inventário florestal*, pode ser um meio de ajudar o produtor florestal no momento da sua comercialização, pois o auxilia na negociação de preços com base em dados consistentes do volume de madeira.

Quando uma árvore é transformada em tora, seu volume pode ser obtido por meio de vários métodos, sendo os métodos *geométrico* e de *Francon* dois desses métodos (ilustração abaixo). O primeiro consiste em aproximar o volume de uma tora ao volume de um cilindro reto.

Modelo 31



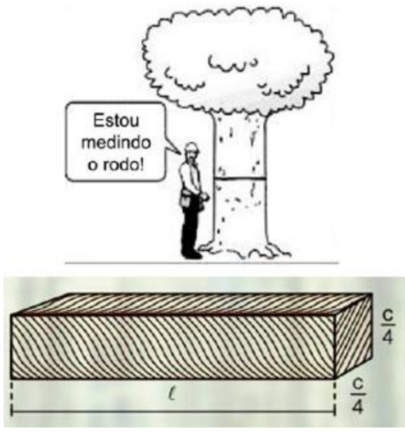
- Estima-se o ponto central P da tora de madeira;
- Mede-se o comprimento C da circunferência que passa pelo ponto P;
- A partir de C e do comprimento ℓ, aproxima-se o formato da tora ao de um cilindro;
- Em seguida, obtém-se o raio r e calcula-se o volume do cilindro, utilizando a fórmula

$$V_c = \pi \cdot r^2 \cdot \ell$$

Fonte: Souza e Garcia (2016b, p. 242).

O segundo (método de Francon), desconsidera partes da tora que não são aproveitadas pela serraria por serem ocas e podres (como a casca) ou apresentarem outros defeitos.

Modelo 32



- Mede-se o perímetro da circunferencia C a uma altura aproximada de 1,30 m do chão (essa medida é denominada "rodo" da árvore);
- Aproxima-se o formato da tora ao de um paralelepípedo reto de base quadrada, com lado igual a $\frac{C}{4}$ e altura ℓ;
- Por fim, utiliza-se a fórmula

$$V = \left(\frac{C}{4}\right)^2 \cdot \ell$$

que pode ser expressa também por

$$V = C^2 \cdot \ell \cdot 0,06$$

Fonte: Souza e Garcia (2016b, p. 242) e ENEM 2010.1 - Q. 158 (prova azul).

Considere a seguinte situação: Um técnico em manejo florestal (figura ao lado) recebe a missão de cubar, abater e transportar cinco toras de madeira, de duas espécies diferentes, sendo: 3 toras da espécie I, com 3 m de rodo, 12 de comprimento e densidade 0,77 toneladas/m^3; 2 toras da espécie II, com 4 m de rodo, 10 m de comprimento e densidade 0,78 toneladas/m^3. Após realizar seus cálculos, o técnico solicitou que enviassem caminhões para transportar a carga.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.4.1** (Sugestões)

Há dois modelos matemáticos para se calcular o volume da tora de uma árvore. O primeiro é o *modelo geométrico* (Modelo 31) que considera a tora, simplesmente, como um cilindro reto, onde $\boldsymbol{r}$ (medido em metros) representa seu raio, e $\boldsymbol{\ell}$ (medido em metros), o comprimento da tora. Já o segundo modelo, chamado *modelo de Francon* (Modelo 32), considera a tora como um paralelepípedo reto de base quadrada. Para isso, primeiramente faz-se a medição do "rodo" da árvore, que é o perímetro de sua circunferência, representada por $\boldsymbol{C}$ (medida em metros), a uma altura aproximada de 1,30 m do chão, e $\boldsymbol{\ell}$ (medido em metros), é o comprimento da tora. Em seguida, desconsiderando as partes da tora que não são aproveitadas, como a casca e outros defeitos, considera-se a tora como um paralelepípedo reto, cuja base quadrada tenha aresta medindo $\boldsymbol{C/4}$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.4.1** (Sugestões)

O que é um cilindro reto? O que é um paralelepípedo reto? Utilizando os dois métodos de cubagem de madeira, qual o volume de cada espécie nesse manejo? Sabendo que a densidade de um corpo é definida por $d = \frac{M}{V}$, sendo M a massa (nesse caso em toneladas) e V é o volume (nesse caso em m^3), quantas toneladas serão contabilizadas nesse manejo em cada um dos métodos de cubagem apresentados? Qual dos dois métodos apresenta um maior volume para a madeira manejada? Qual dos dois é mais coerente no processo de cubagem? Por quê? Qual a relação entre esses dois métodos? Se o volume de certa tora de madeira, com 12 m de comprimento, foi calculado em 9,42 m^3 pelo método geométrico, qual será o volume dessa tora calculada pelo método de Francon? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 2.4.1)

1) Utilizando os dois métodos de cubagem de madeira (*geométrico* e *Francon*), calcular o volume de cada espécie no manejo da situação acima; **2)** Utilizando o conceito de densidade de um corpo, tentar calcular a quantidade (em toneladas) de madeira contabilizada nesse manejo em cada um dos métodos de cubagem; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 2.4.1** (Sugestão)

Com os resultados obtidos na Tarefa 1, o professor pode discutir e analisar junto com os estudantes a coerência dos métodos de cubagem (*geométrico* e *Francon*). Além disso, o professor pode instigar os estudantes, questionando-os como foram obtidas as fórmulas dos dois métodos de cubagem, destacando, aqui, a necessidade do estudo de *prismas* e *cilindros*.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *prismas e cilindros* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 2.4.1** (Sugestões)

Identificar que no método de Francon, está envolvido o cálculo do volume de um *prisma* (paralelepípedo) e no método geométrico, de um *cilindro*. Assim, se o volume de certa tora de madeira, com 12 m de comprimento, foi encontrado 9,42 m^3 pelo método geométrico, calcular o volume dessa tora pelo método de Francon; etc.

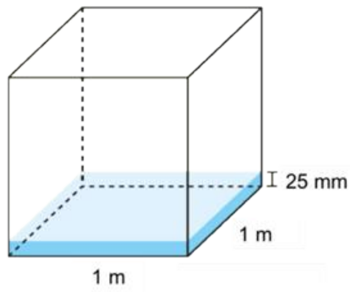
≫ *Situação 2.4.2: Quanto tem chovido em sua cidade?*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(IEZZI et al., 2016b, p. 197-198). O agravamento da crise hídrica na região Sudeste nos últimos anos, as secas "permanentes" em algumas regiões do Nordeste e os eventos climáticos extremos decorrentes do aquecimento global fizeram com que assuntos como *índice pluviométrico*, nível dos mananciais que abastecem a população, desperdício e consumo consciente de água ganhassem cada vez mais espaço no cotidiano do brasileiro. Conhecer o índice pluviométrico de uma região é importante para que se reúnam informações úteis para a economia local (agricultura, pecuária etc.), além de auxiliar no planejamento urbano, prevendo usos mais adequados para áreas onde possam ocorrer desabamentos, deslizamentos de terra ou inundações, por exemplo.

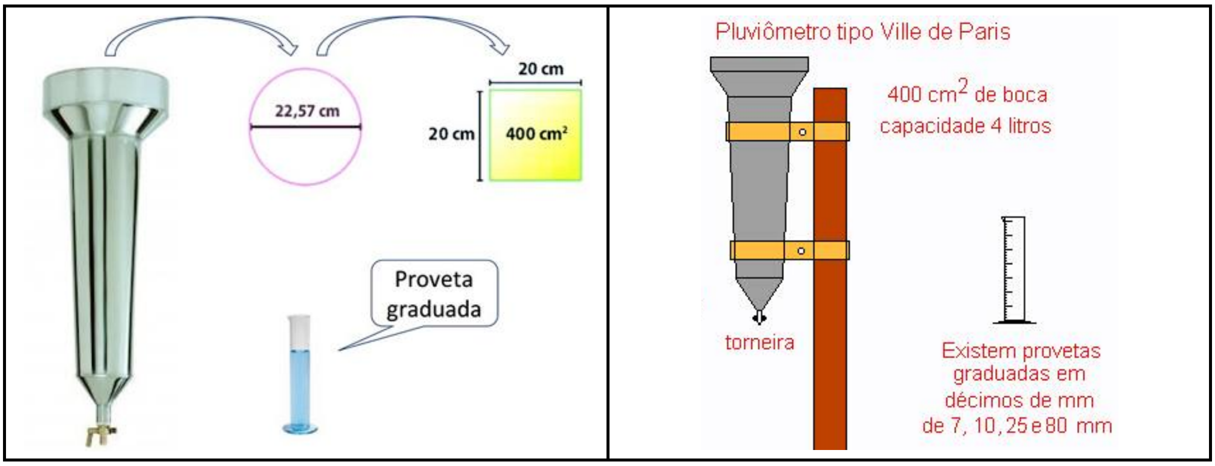
E você? Quando ouve notícias com dados do índice pluviométrico, como “Nesta semana, as chuvas em determinada cidade superaram o índice de $25\ mm$”, sabe o que significa? O índice pluviométrico indica a **quantidade de chuva por metro quadrado** registrada em certo local, em um determinado período de tempo.

O *pluviômetro* é um instrumento utilizado para fazer essa medição (em mm). Assim, quando dizemos, por exemplo, que o índice pluviométrico em certa região foi de $25\ mm$ na semana, significa que, se tivéssemos um reservatório aberto de $1\ \mathrm{m}^2$ da área de base, o nível de água atingiria a altura de $25\ mm$ (figura ao lado).



É claro que os pluviômetros não precisam ter, como base, um quadrado de área $1\ m^2$. Há vários tipos de pluviômetros e, no Brasil, o Instituto Nacional de Meteorologia (Inmet) utiliza o modelo *Ville de Paris*, cujo bocal de $22{,}57\ cm$ de diâmetro, equivale a uma área de captação de chuvas de $400\ cm^2$, medida recomendada pelas normas internacionais. (figura abaixo).

Figura 21: Pluviômetro modelo *Ville de Paris*



Fonte: Adaptado a partir de https://www.hexis.com.br/produto/pluviometro-em-inox-ville-de-paris-125mm-com-proveta e http://www.observatorio-phoenix.org/k_ensaios/24_k16_a.htm.

No *Ville de Paris* a leitura do índice pluviométrico é feita com o auxílio de uma **proveta**, tubo cilíndrico de vidro ou plástico graduado em milímetros (figura acima), sendo que cada 1 mm indicado na proveta significa a precipitação de água da chuva de 1 l/m^2. Vale destacar que em cidades grandes, geralmente, há várias estações de medição da intensidade da chuva. A média das intensidades de precipitação medidas nesses pontos, em certo período (mês, por exemplo), fornece o **índice pluviométrico** da região, no período considerado.

Em 2013, um grupo de pesquisadores da UFOPA apresentou, na 65ª Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC), um estudo sobre o índice pluviométrico da região de Santarém (PA) entre os anos de 1969 e 2010[5]. Comprovaram que o regime pluviométrico nessa região é dividido em dois períodos: chuvoso (janeiro a junho) e menos chuvoso (agosto a dezembro), sendo julho e dezembro os meses de transição do período chuvoso para o seco e do período seco para o chuvoso, respectivamente. Os três meses com maiores índices foram fevereiro, março e abril, enquanto que setembro, outubro, novembro e dezembro, foram os mais representativos da estação menos chuvosa. Verificou-se, finalmente que, a média anual pluviométrica nesses 41 anos foi de 2318 mm, detalhada na tabela abaixo:

Modelo 33

Pluviosidade média mensal (em mm) **em Santarém – PA (1969-2010)**

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
256	330	435	395	324	150	101	60	31	40	65	131

De acordo com o estudo, a demanda anual de água no município é de $21\,000\,000\ \mathrm{m}^3$ por ano. Além disso, da área total do município (aprox. $18\,000\,000\ \mathrm{m}^2$), $5\,000\,000\ \mathrm{m}^2$ tem potencial de captação de água das chuvas, sendo que, somente $2\,588\,500\ \mathrm{m}^2$ podem ser utilizados efetivamente para essa captação.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.4.2** (Sugestões)

Cada valor que aparece na tabela (Modelo 33) indica a média mensal do índice pluviométrico (em mm) na cidade de Santarém-PA. Com esses números, porém, pode-se medir a **quantidade média de chuva** (em m^3) que cai uniformemente sobre a cidade de Santarém-PA em cada mês do ano. A demanda anual de água nessa cidade representa o volume indicado por $\boldsymbol{V_T = 21\,000\,000\ m^3}$, sendo que a área total da cidade com potencial de captação de água da chuva é $\boldsymbol{A_T = 5\,000\,000\ m^2}$, embora a área que pode ser efetivamente considera para essa captação é $\boldsymbol{A_E = 2\,588\,500\ m^2}$. Esses valores ($\boldsymbol{A_T}$ e $\boldsymbol{A_E}$) representam as áreas das bases quadradas de paralelepípedos retos, a partir dos quais, utilizando os índices pluviométricos indicados na tabela (Modelo 33), pode-se calcular, respectivamente, a quantidade média mensal/anual de água da chuva que poderia ser captada em todo seu potencial e a quantidade que é realmente possível.

[5] Disponível em: http://www.sbpcnet.org.br/livro/65ra/resumos/resumos/2250.htm. **Acesso em**: 19 jul. 2018.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.4.2** (Sugestões)

De acordo com essas informações, qual o volume anual de água que pode ser captado das chuvas se utilizada a área com efetivo potencial ($2\,588\,500\ m^2$) para essa captação? Se forem utilizados reservatórios cilíndricos com diâmetro da base de $6\ m$ e altura $5\ m$, quantos desses reservatórios poderiam ser enchidos durante um ano com a água captada? E se os reservatórios forem prismas quadrangulares retos (paralelepípedo reto-retângulo) com $6\ m$ de aresta da base e $5\ m$ de altura, quantos podem ser enchidos com a água captada durante um ano? E se os reservatórios forem prismas hexagonais regulares retos, com aresta da base medindo $3\ m$ e altura $5\ m$? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 2.4.2)

1) Com base nos dados do Modelo 33, calcular a pluviosidade média anual (em mm) no município de Santarém/PA; **2)** De acordo com as informações fornecidas, tentar calcular o volume anual de água que pode ser captado das chuvas em Santarém se utilizada a área com efetivo potencial ($2\,588\,500\ m^2$) para essa captação; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 2.4.2** (Sugestão)

Chamar a atenção dos estudantes para o fato de que o sólido geométrico utilizado para calcular o volume de água no item 2) da Tarefa 1 é um paralelepípedo reto-retângulo (prisma). O professor pode destacar que outros tipos de sólidos geométricos podem ser utilizados para captação e armazenamento de água. Aqui pode ser evidenciada a necessidade do estudo de *prismas* e *cilindros*.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *prismas e cilindros* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 2.4.2** (Sugestões)

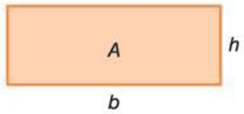
1) Utilizando reservatórios cilíndricos com diâmetro da base de $6\ m$ e altura $5\ m$, tentar encontrar o número de reservatórios que poderiam ser enchidos durante um ano com a água captada da chuva no município de Santarém/PA; **2)** Fazer o mesmo do item anterior para o caso de os reservatórios serem prismas quadrangulares retos com $6\ m$ de aresta da base e $5\ m$ de altura; **3)** Fazer o mesmo do item anterior para o caso de os reservatórios serem prismas hexagonais regulares retos, com aresta da base medindo $3\ m$ e altura $5\ m$; etc.

Observação: O desenvolvimento do conteúdo pode ser direcionado pela sugestão a seguir:

<table>
<tr><th>Tópicos</th><th>Desenvolvimento em resumo</th></tr>
<tr><td>Revisão sobre área de figuras planas</td><td>

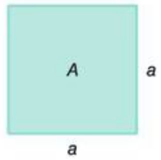
Área de algumas figuras planas

Retângulo



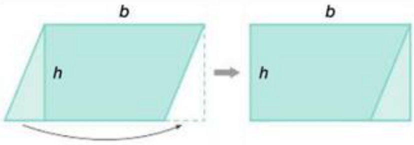
$$\ll A = b \cdot h \gg$$

Quadrado



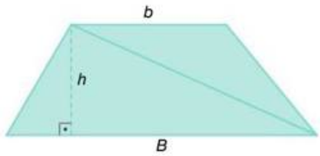
$$\ll A = a \cdot a = a^2 \gg$$

Paralelogramo



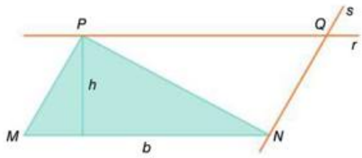
$$\ll A = b \cdot h \gg$$

Trapézio



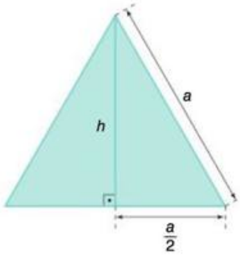
$$\ll A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} \gg$$

Triângulo



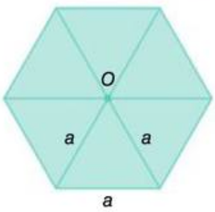
$$\ll A = \frac{b \cdot h}{2} \gg$$

Triângulo Equilátero



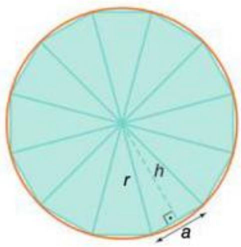
$$\ll A = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \gg$$

Hexágono Regular



$$\ll A = \frac{3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \gg$$

Circulo



$$\ll A = \pi \cdot r^2 \gg$$

</td></tr>
<tr><td>Prismas</td><td>

Considere dois planos $\alpha \parallel \beta$, um polígono convexo $\boldsymbol{P} \subset \alpha$, e uma reta r que intersecta α e β nos pontos X e Y.

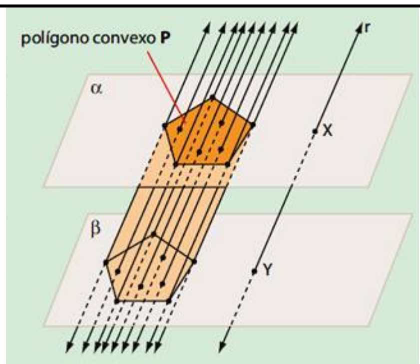
Por todos os pontos de $\boldsymbol{P}$, trace retas paralelas a r e observe que todos os segmentos formados pela interseção dessas retas com os planos α e β são congruentes ao segmento XY.

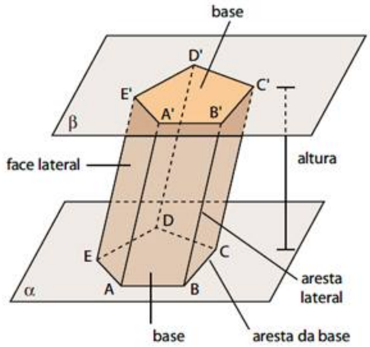
A reunião de todos esses segmentos é um sólido chamado **prisma**.

Ilustração e elementos de um prisma

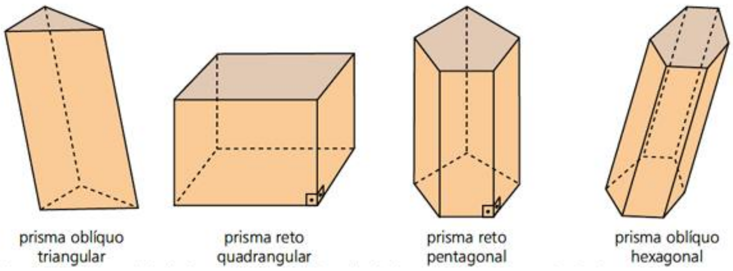
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>



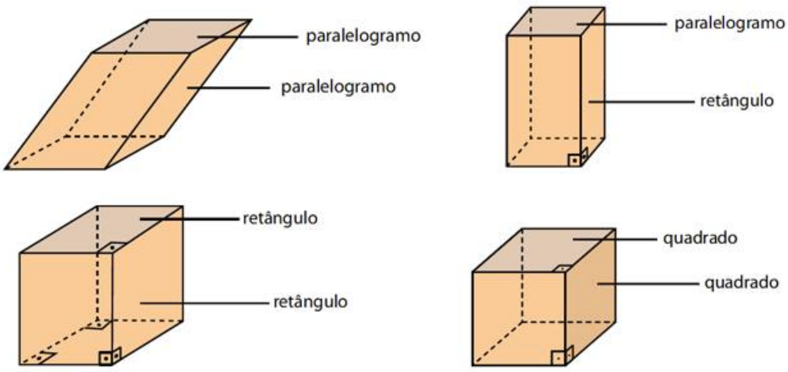


Classificação de prismas



Obs.: Se as bases de um prisma são polígonos regulares, ele é chamado **prisma regular**.

Paralelepípedo: é todo prisma cujas bases são paralelogramos.



</td>
</tr>
<tr>
<td>Cilindros</td>
<td>

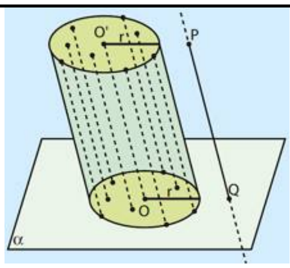
Considere um círculo de cento $\boldsymbol{O}$ e raio $r \subset \alpha$, e um segmento PQ, cuja reta suporte intersecta α.

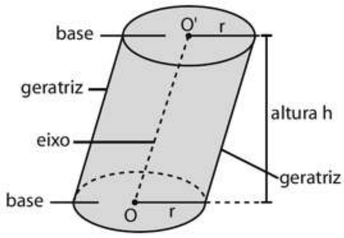
Tome segmentos paralelos e congruentes a PQ, cada um com uma extremidade em um ponto do círculo e com a outra extremidade em um mesmo semiespaço determinado por α.

A reunião de todos esses segmentos é um sólido chamado **cilindro circular** ou, simplesmente, **cilindro**.

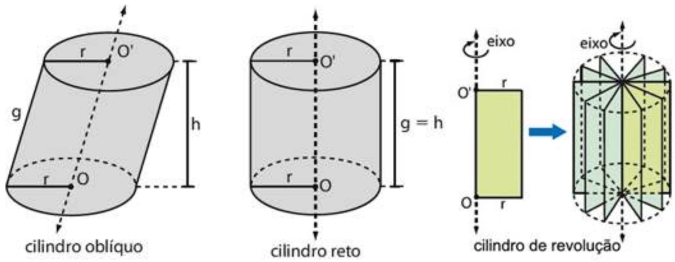
Ilustração e elementos de um cilindro

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>




Classificação de cilindros

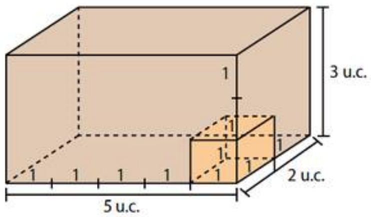


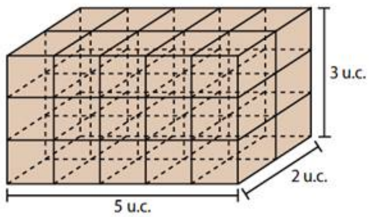
</td>
</tr>
<tr>
<td>Volume de Prismas e Cilindros</td>
<td>
O cubo unitário (aresta mede 1 uc - unidade de comprimento) é a unidade de medida de volume. Significa que:

$$\text{um } \textbf{cubo unitário} = 1\ (uc)^3$$

Volume de um paralelepípedo reto retângulo

Considere um paralelepípedo reto retângulo $\boldsymbol{P}$, medindo 5 uc de comprimento, 2 uc de largura e 3 uc de altura. O volume de $\boldsymbol{P}$ pode ser calculado, fazendo $(5\ uc) \cdot (2\ uc) \cdot (3\ uc) = 30\ (uc)^3$.





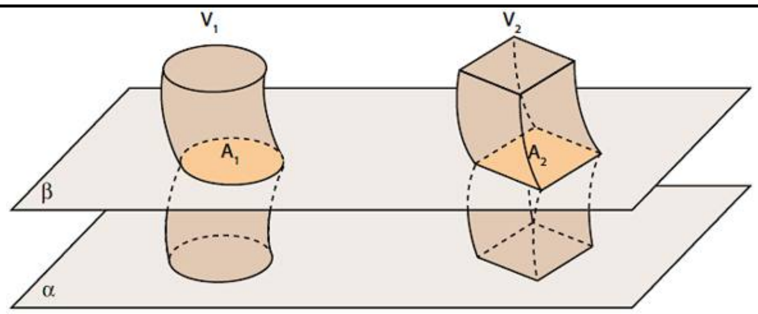
Significa que cabe exatamente 30 cubos unitários dentro de $\boldsymbol{P}$.

De modo geral, se um paralelepípedo reto retângulo tem $\boldsymbol{a}\ uc$ de comprimento, $\boldsymbol{b}\ uc$ de largura e $\boldsymbol{c}\ uc$ de altura, seu volume pode ser definido por:

$$\boldsymbol{V(P) = a \cdot b \cdot c} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{V(P) = A_b \cdot h}$$

sendo $\boldsymbol{A_b = a \cdot b}$ a área da base do paralelepípedo e $\boldsymbol{h = c}$, a altura.

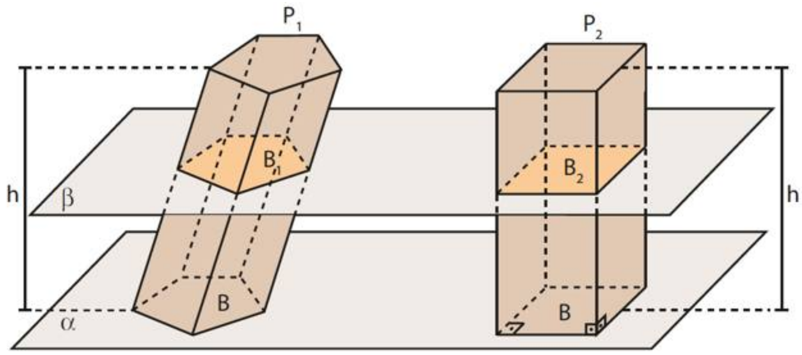
Princípio de Cavalieri: Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).
</td>
</tr>
</table>



$$A_1 = A_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_2$$

Volume de um prisma qualquer

Considere um prisma qualquer P_1 e um paralelepípedo reto retângulo P_2, como indicado abaixo:

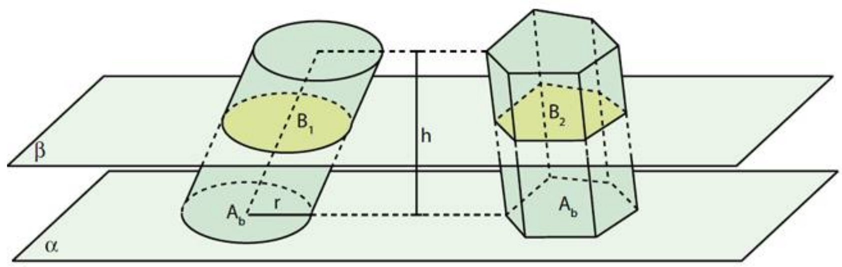


Se $B_1 = B_2$, então pelo *princípio de Cavalieri* $V(P_1) = V(P_2)$. Portanto,

$$\boldsymbol{V(P_1) = B \cdot h} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{V(P_1) = A_b \cdot h}$$

Volume de um cilindro

Considere um Cilindro C e um prisma P, como indicado abaixo:



Se $B_1 = B_2$, então pelo *princípio de Cavalieri* $V(C) = V(P)$. Portanto,

$$\boldsymbol{V(C) = A_b \cdot h} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{V(C) = \pi \cdot r^2 \cdot h}$$

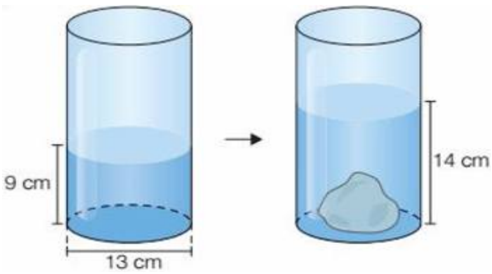
4ª Etapa: Aplicação

CC2.4 - Questões de Aplicação (sugestão)

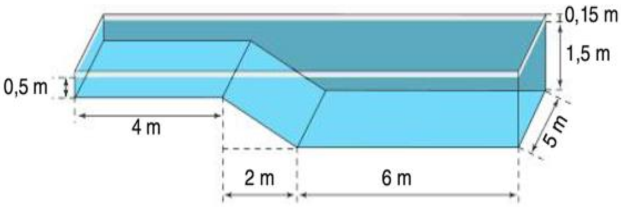
Q1. (C4/V2/q.103/p.238) Um dos aquários mais interessantes do mundo está localizado em um hotel de Berlim, na Alemanha. Esse aquário, denominado *AquaDom*, tem forma cilíndrica, com um elevador em seu interior, o qual ocupa um espaço também cilíndrico. O *AquaDom* abriga mais de 1500 peixes de várias espécies. Sua base tem diâmetro de aproximadamente $11{,}23\ m$ e sua altura mede $25\ m$.

Sabe-se que o espaço reservado para o elevador no interior do aquário tem aproximadamente $1475\ m^3$. Qual a capacidade desse aquário na parte destinada para armazenar água?

Q2. (C4/V2/q.113/p.241) Para medir o volume de um sólido irregular, Beatriz o submergiu totalmente em um recipiente cilíndrico com água, conforme o esquema abaixo. **a)** Discutir o procedimento para realizar o cálculo do volume desse sólido; **b)** Calcule o volume desse sólido; **c)** Pesquisar sobre a experiência semelhante realizada por Arquimedes.

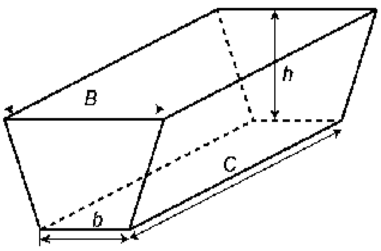


Q3. (C5/V2/q.24/p.213) A base de uma piscina de paredes verticais é formada por duas plataformas retangulares horizontais, situadas em níveis diferente, as quais correspondem à parte rasa e à parte funda da piscina, além de uma rampa também retangular, interligando as plataformas, conforme mostra a figura a seguir. Determine o que se pede:



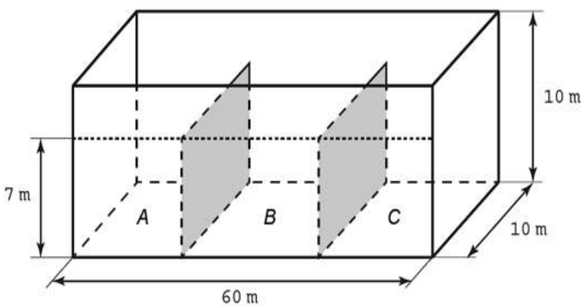
a) O volume de água na piscina, caso esteja totalmente cheia;
b) O volume de água na piscina, caso esteja "cheia" somente até $1\ m$ na parte mais funda.

Q4. (ENEM – 2014) Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, coloca-la no solo, compacta-la e protege-la com uma vedação denomina-se *silagem*. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal (figura abaixo):



Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa $2\ m^3$ desse tipo de silo. Sendo assim, qual a quantidade máxima de forragem que cabe nesse silo (em toneladas)?

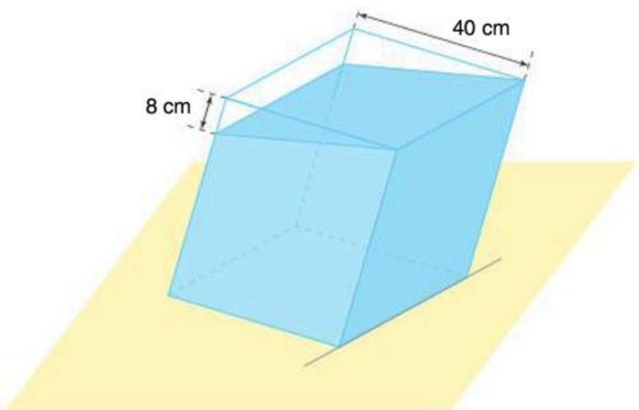
Q5. (ENEM – 2016) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões 60 m x 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura abaixo. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Um desastre ocorreu com o petroleiro quando este estava com sua carga máxima. Ele sofreu um acidente que ocasionou um furo no fundo do compartimento C. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias. Após o fim do vazamento, qual o volume de petróleo derramado?

Q6. (ENEM – 2015.1) O índice pluviométrico é utilizado para mensurar a precipitação de água da chuva (em milímetros - mm) em determinado período de tempo. Seu cálculo é feito de acordo com o nível de água da chuva acumulada em 1 m^2, ou seja, se o índice for de 10 mm, significa que a altura do nível de água acumulada em um tanque aberto, em formato de um cubo com 1 m^2 de área da base, é de 10 mm. Em uma região, após um forte temporal, verificou-se que a quantidade de chuva acumulada em uma lata de formato cilíndrico, com raio 30 cm e altura 120 cm, era de um terço da sua capacidade. Considerando 3 como uma aproximação de π, calcule o índice pluviométrico da região (em mm) durante o período do temporal.

Q7. (C5/V2/q.23/p.213) Um recipiente tem internamente a forma de um cubo com 40 cm de aresta, e sua base está em um plano horizontal. Esse recipiente, cheio de água, é inclinado em torno de uma aresta, que permanece na horizontal. De acordo com as medidas indicadas na figura abaixo, quantos litros de água foram derramados com essa inclinação?



CC2.5 – MATRIZES (ETAPAS REDUZIDAS)

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Adição e Subtração de matrizes • Multiplicação de um número real por uma matriz • Multiplicação de matrizes	• Conhecimentos numéricos • Conhecimentos algébricos/geométricos	C1 C5	H1 H3 H21, H22

≫ *Situação 2.5.1: Mensagens criptografadas!*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016b, p. 77). Atualmente, com a comunicação eletrônica, muitas atividades dependem do sigilo na troca de mensagens, principalmente as que envolvem transações financeiras. Os sistemas de envio e recepção de mensagens codificadas chamam-se *Criptografia*.

Uma forma de codificar mensagens, por exemplo, é trocar letras por números, como indicado na tabela-código ao lado. Nessa tabela-código, uma letra é identificada pelo número formado pela linha e pela coluna, nessa ordem. Assim, o número 32 corresponde à letra N.

	1	2	3	4	5
1	Z	Y	X	V	U
2	T	S	R	Q	P
3	O	N	M	L	K
4	J	I	H	G	F
5	E	D	C	B	A

A mensagem final $\boldsymbol{M}$ é dada por:

Modelo 34

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{M}$$

onde $\boldsymbol{B}$ é uma **matriz** fixada (matriz decodificadora), que deve ser mantida em segredo, e $\boldsymbol{A}$ é uma **matriz** enviada ao receptor legal. Cada linha da **matriz** $\boldsymbol{M}$ corresponde a uma palavra da mensagem, sendo o 0 (zero) a ausência de letras ou o espaço entre palavras.

José, que é estudante de Direito na UFOPA, trabalha como estagiário num escritório de advocacia na avenida Mendonça Furtado, próximo ao Fórum de Santarém. Sem se dar conta que estava sendo observado, José "tuitava" durante o horário de trabalho (o que não é permitido nesse escritório) quando recebeu uma mensagem do seu chefe, que continha uma matriz $\boldsymbol{A}$ (abaixo). De posse da matriz $\boldsymbol{B}$ (abaixo) e da tabela-código, José decodificou a mensagem.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 12 & 20 & 13 & 8 & 50 & 25 & 1 \\ 0 & 0 & 34 & 32 & 3 & 4 & 0 \\ 45 & 26 & 13 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 45 & 16 & 20 & 11 & 17 & 0 \\ 1 & 50 & 21 & 3 & 35 & 42 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 10 & 15 & -8 & 30 & -1 \\ 14 & 31 & 19 & 19 & -3 & -4 & 0 \\ 6 & -4 & 8 & 31 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 6 & 16 & 32 & 20 & -17 & 0 \\ 44 & -8 & 13 & 30 & 20 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.5.1** (Sugestões)

B é uma **matriz** fixa, chamada *matriz decodificadora*, que deve ser mantida em segredo, e ***A*** é a **matriz** que contém a mensagem "oculta" codificada, enviada ao receptor legal. Cada linha da **matriz** ***M*** corresponde a uma palavra da mensagem, sendo o 0 (zero) a ausência de letras ou o espaço entre palavras.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.5.1** (Sugestões)

O que é uma *matriz*? O que são as *linhas* e *colunas* de uma matriz? O que é a *ordem* de uma matriz? Qual a ordem das matrizes ***A*** e ***B*** acima? Que condição é necessária (e suficiente) para que seja possível a *soma* de duas matrizes? É possível fazer a soma das matrizes ***A*** e ***B*** acima? Por quê? Qual a mensagem criptografada enviada à José pelo seu chefe? Levando em consideração a advertência que recebeu, José decidiu pedir desculpas ao chefe e enviou uma mensagem codificada com a seguinte frase: "DESCULPE ME CHEFE". Qual será a matriz ***M***? Qual deverá ser a matriz ***A*** enviada à chefia? É única essa matriz? etc.

≫ Situação 2.5.2: Fabricação de televisores em Manaus/AM

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(SMOLE; DINIZ, 2016b, p. 241, adaptado). Uma fábrica do Polo Industrial de Manaus fabrica três modelos diferentes de televisores: **A**, **B** e **C**.

Figura 22: Produção de Televisores no Polo Industrial de Manaus-AM

Fonte: https://d.emtempo.com.br/economia/143307/producao-de-tv-tem-queda-brusca-no-pim-no-primeiro-bimestre e https://tecnologia.ig.com.br/lg-lanca-tv-com-internet-aplicativos-e-3d-no-brasil/n1597127124728.html.

A tabela I (abaixo) mostra o número de componentes (Teclas e Alto-falantes) usados em cada modelo, e a tabela II (abaixo) mostra uma encomenda desses televisores para os meses de novembro e dezembro.

Modelo 35

Tabela I

	A	B	C
Teclas	10	12	15
Alto-falantes	2	2	4

Tabela II

	Novembro	Dezembro
Modelo A	80	200
Modelo B	100	150
Modelo C	50	100

Fonte: Smole e Diniz (2016b, p. 241).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.5.2** (Sugestões)

A tabela I pode ser representada por uma **matriz** $\boldsymbol{M_1}$, formada por duas linhas e três colunas, indica o número de componentes (teclados e alto-falantes) necessários para cada modelo de TV (**A**, **B** e **C**). As linhas de $\boldsymbol{M_1}$ representam os componentes, e as colunas, os modelos. Já a tabela II, representada por uma **matriz** $\boldsymbol{M_2}$, formada por três linhas e duas colunas, descreve uma encomenda para os meses de novembro e dezembro (são as linhas) de televisores nos três modelos **A**, **B** e **C** (são as colunas). Por fim, a tabela que indica o preço dos três modelos de televisores poderá ser representada por uma matriz coluna $\boldsymbol{P}$, formada por três linhas.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.5.2** (Sugestões)

Quantos componentes (Teclas e Alto-falantes) serão necessários para atender a demanda (encomenda) nesses dois meses? Nessa encomenda, quanto a fábrica receberá por cada modelo de TV, sabendo que cada aparelho é vendido por $R\$\ 500{,}00$ (modelo **A**), $R\$\ 600{,}00$ (modelo **B**) e $R\$\ 800{,}00$ (modelo **C**)? Considere que a Tabela III é a tabela de preços dos três modelos de televisores. Se, ao adquirir os componentes para a encomenda solicitada, constatou-se um desconto total de 5% no valor previsto e a fábrica deseja repassar esse desconto para o cliente nos valores de cada modelo de TV, como fica a nova tabela de preços?

≫ Situação 2.5.3: A câmera de seu Smartphone tem boa resolução?

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016b, p. 86; IEZZI et al., 2016b, p. 91). Você sabia que uma imagem na tela de um computador ou de uma televisão de tecnologia mais moderna, ou uma foto tirada em uma câmera digital podem ser representadas por matrizes? Pois é! Essas imagens são na verdade formadas por pequenos pontos (**pixels**), elementos de uma matriz. O pixel é a menor unidade (elemento) de uma imagem digital. Em linguagem informal, pixels são minúsculos "pontinhos" coloridos que, reunidos, compõem uma imagem. Por exemplo, uma imagem de resolução 800×600 tem $800 \cdot 600 = 480\,000$ pixels distribuídos em 800 colunas e 600 linhas. A figura abaixo mostra uma mesma imagem (modelo sueca *Lena Söderberg* em 1972 – "first lady of the internet") com resoluções diferentes.

Figura 23: Resoluções de uma imagem

512×512 **256×256** **128×128** **64×64**

Fonte:
https://docs.google.com/viewer?url=http%3A%2F%2Fhpc.ct.utfpr.edu.br%2F~charlie%2Fdocs%2FPID%2FPID_AULA_09.pdf.

O **megapixel** é um múltiplo do pixel e corresponde a 1 milhão de pixels. Por exemplo, uma imagem digital obtida por uma câmera com resolução de 3 840 pixels na horizontal e 2 400 pixels na vertical ($3\,840 \times 2\,400$) corresponde a um total de 9 216 000 pixels (pois $3\,840 \cdot 2\,400 = 9\,216\,000$), ou seja, aproximadamente 9 megapixels. Uma imagem pode ser associada por meio de um algoritmo computacional a uma matriz cujos elementos são os pixels.

Figura 24: Imagens e matrizes correspondentes

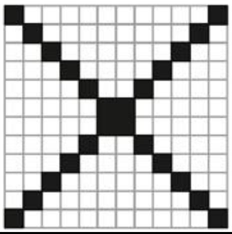
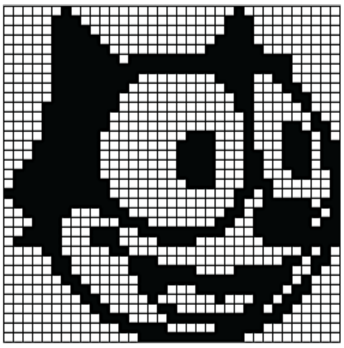
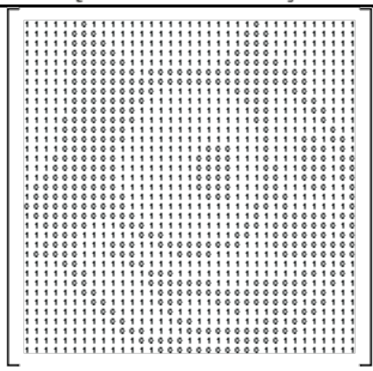
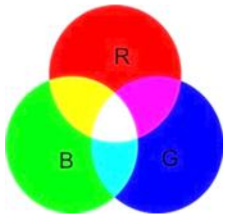
Imagem binária (0 e 1) Matriz 12x12		$M = \begin{bmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0 \\ 1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1 \\ 1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1 \\ 1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1 \\ 1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1 \\ 1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1 \\ 1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0 \end{bmatrix}$
Imagem binária (0 e 1) Matriz 35x35		
Imagem tons cinza (256 tonalidades) Matriz 10x10		

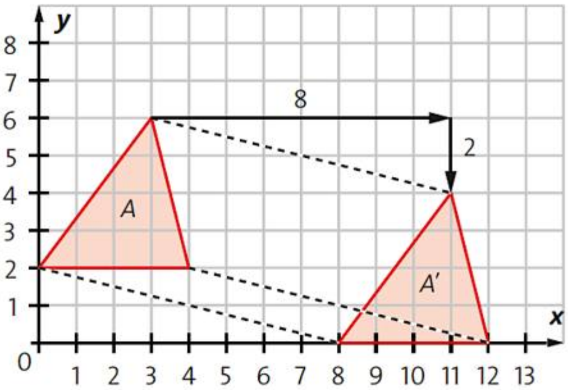
Imagem colorida RGB (16 mil tonalidades)		

Fonte: Organizado a partir de Iezzi et al. (2016b, p. 73-74) e https://craftofcoding.wordpress.com/2017/02/15/image-processing-why-lena-doesnt-matter-anymore/.

Quando um programa gráfico altera a posição, reflete, rotaciona ou muda a escala de uma imagem, na verdade está mudando a posição dos pixels que a formam. Em computação gráfica isso tudo é feito por *operações de matrizes*; é o que se chama de **transformações geométricas**. Basicamente, as transformações geométricas no plano são três: **translação, reflexão** e **escala**. As figuras abaixo, representas por A e identificadas como matrizes, foram submetidas a essas transformações, obtendo-se em seguida as figuras A'.

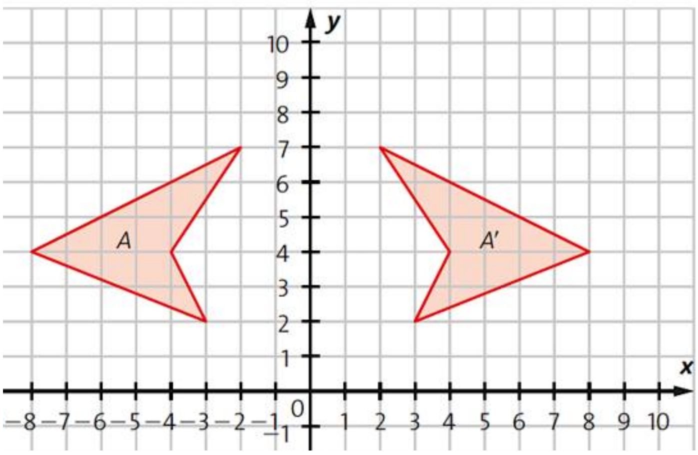
Modelo 36

Translação: deslocamento (vertical ou horizontal) sem alterar forma e dimensões.



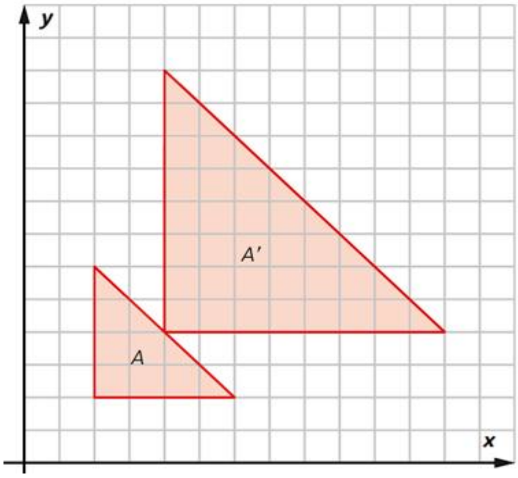
Modelo 37

Reflexão: espelhamento de uma figura (simetria axial).



Modelo 38

Escala: modificação no tamanho da figura (ampliação ou redução).



Fonte: Dante (2016b, p. 87-91).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.5.3** (Sugestões)
As figuras (Modelos 36, 37 e 38) podem ser representas por $\boldsymbol{A}$, **matrizes** que são submetidas a transformações geométricas (*translação*, *reflexão* e *escala*). Já as figuras identificadas por $\boldsymbol{A'}$, representam o resultado dessas transformações quando aplicadas a $\boldsymbol{A}$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.5.3** (Sugestões)
Quais os vértices da figura A em cada modelo acima? E da figura A'? Como representar na forma matricial as figuras A e A' em cada caso acima? Que operação matricial ocorre no Modelo 36 (translação)? E nos outros modelos (rotação, reflexão e escala)? etc.

CC2.6 – SISTEMAS LINEARES (ETAPAS REDUZIDAS)

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Sistema linear: definição • Resolução de Sistema linear 2×2 por adição e substituição • Resolução de Sistema linear por Escalonamento: classificação	• Conhecimentos numéricos • Conhecimentos algébricos • Conhecimentos algébricos/geométricos	C1 C5	H1 H3 H19, H21 H22, H23

≫ *Situação 2.6.1: Você se alimenta de modo saudável?*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016b, p. 109). O organismo humano, bem como o de outros animais, para seu bom funcionamento necessita de vários tipos de substâncias, sais minerais, vitaminas, proteínas, etc. Considere o caso de uma pessoa que, por recomendação médica, necessita fazer uma receita de modo que a quantidade de cada alimento a ser ingerido corresponda às necessidades diárias de vitamina C, cálcio e magnésio. Ela se alimentará de três diferentes ingredientes, e cada um deles possui uma determinada quantidade de nutrientes (expressa em miligramas - mg) por unidade de ingrediente (por exemplo, por colher), conforme apresentado na tabela a seguir.

Modelo 39

Tipo de alimentos (**1**, **2** e **3**) e respectivas quantidades de nutrientes (mg):

Nutriente	1	2	3	Total necessário de nutrientes (mg)
Vitamina C	10	20	30	100
Cálcio	40	40	10	210
Magnésio	20	10	30	110

Fonte: Dante (2016b, p. 109).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.6.1** (Sugestões)

As quantidades dos três alimentos (1, 2 e 3) que atende a necessidade simultânea dos três nutrientes (Vitamina C, Cálcio e Magnésio), serão identificadas pelas variáveis x, y e z respectivamente.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.6.1** (Sugestões)

Que quantidade dos três alimentos (1, 2 e 3) é necessária para que a receita satisfaça as necessidades de Vitamina C? Essa quantidade atende a necessidade de Cálcio? E de Magnésio? É possível representar essa situação de modo generalizado, isto é, identificando a quantidade dos três alimentos (1, 2 e 3) por variáveis. Que variáveis são essas? Que modelo matemático pode representar a situação utilizando essas variáveis? Por meio desse modelo, como resolver o problema de encontrar a quantidade dos três alimentos necessária para que a receita satisfaça as necessidades dos três nutrientes (Vitamina C, Cálcio e Magnésio)?

≫ *Situação 2.6.2: Reação química... que é isso?*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(IEZZI et al., 2016b, p. 121; SMOLE; DINIZ, 2016b, p. 229). Uma reação química é um rearranjo de moléculas para formar novas substâncias químicas, em que *reagentes* são transformados em *produtos*. Existem muitos exemplos de reações químicas no cotidiano. Dentre eles estão a formação de ferrugem num pedaço de ferro, a liberação de gás carbônico (bolhas que vemos subir num copo) por um comprimido efervescente em contato com água, o apodrecimento dos alimentos, a produção de humos (matéria orgânica depositada no solo), a queima de gás num fogão e de gasolina, etanol ou óleo diesel no motor de um veículo, etc.

Figura 25: Reações químicas

O ferro sofre oxidação na presença de oxigênio e água em um processo conhecido como ferrugem.	Um comprimido efervescente em contato com a água, ocorrendo a liberação de gás carbônico.
	

Fonte: Smole e Diniz (2016b, p. 229).

Em uma reação química, a estrutura dos átomos, enquanto elementos químicos ficam inalterados. Os átomos de um elemento não se transformam em átomos de outro elemento. Também não há perda ou criação de átomos novos (Lei de Lavoisier). O número de átomos dos reagentes deve ser igual ao número de átomos dos produtos. Quando isso acontece, dizemos que a equação química está *balanceada*.

Por exemplo, a água (H_2O) é decomposta em hidrogênio (H_2) e oxigênio (O_2) na presença de corrente elétrica. Assim, essa reação química pode ser representada pela equação abaixo (não balanceada), onde H_2O é a fórmula do reagente, H_2 e O_2, dos produtos. $H_2O \rightarrow H_2 + O_2$.

Nesta representação, falta, porém a proporção correta entre as quantidades de moléculas envolvidas, pois no reagente há dois átomos de hidrogênio e um de oxigênio, enquanto no produto há dois átomos de hidrogênio e dois de oxigênio.

Modelo 40 Uma forma de balancear essa equação é encontrar números inteiros x, y e z em

$$xH_2O \to yH_2 + zO_2$$

de modo que a quantidade de moléculas se equilibre. Teremos o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 2H_2O \to 2H_2 + 1O_2$$

Considere a reação a seguir (equação não balanceada) que representa o processo de obtenção do etanol (C_2H_5OH) a partir da sacarose ($C_{12}H_{22}O_{11}$), $C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O \to C_2H_5OH + CO_2$. Assim, atribuindo incógnitas aos coeficientes de cada composto, podemos escrevê-la na forma:

Modelo 41

$$xC_{12}H_{22}O_{11} + yH_2O \to zC_2H_5OH + wCO_2$$

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.6.2** (Sugestões)

Os *coeficientes estequiométricos* que permitem o balanceamento da equação química (Modelo 41) serão indicados por $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{w}$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.6.2** (Sugestões)

Contando a quantidade de átomos na equação (Modelo 41) e, igualando a quantidade no lado dos reagentes à quantidade no lado dos produtos, qual o sistema linear que representa esse balanceamento? Esse sistema obtido é formado por quantas equações? Quantas incógnitas? Passando todas as incógnitas para o primeiro membro de cada equação linear, o segundo membro fica igual a quanto? Você sabe como se chama esse tipo de sistema? Que solução é imediata para esse sistema? Essa solução serve para balancear a equação química? Por quê? Existe outra solução? Se sim, como encontrá-la? Antes de resolver esse sistema, veja como foi resolvido o sistema anterior, do balanceamento da equação que dá a decomposição da água (H_2O) em hidrogênio (H_2) e oxigênio (O_2). Como se chegou à solução $(2, 2, 1)$? etc.

≫ *Situação 2.6.3: Como funciona uma economia (Modelos de Leontief)?*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(ANTON; RORRES, 2012, p. 85; LAY, 2013, p. 43, adaptado). Em 1973, o economista russo *Wassily Leontief*, professor em Harvard, foi agraciado com o Prêmio Nobel pelo seu trabalho em modelagem econômica, no qual utilizou métodos matriciais para estudar as relações entre diferentes **setores** de uma economia. Uma economia simples, por exemplo, pode estar dividida em três setores: manufatura, agricultura e serviços. Tipicamente, um setor produz certos **produtos**, mas requer **insumos** dos outros setores e de si mesmo. Por exemplo, o setor agrícola pode produzir trigo como produto, mas requer insumo de máquinas agrícolas do setor manufatureiro, energia elétrica do setor de serviços e alimento de seu próprio setor para alimentar seus trabalhadores.

A maioria dos setores de uma economia produzirá produtos, mas podem existir setores que consomem produtos sem produzir nenhum produto (por exemplo, o setor dos consumidores). Aqueles setores que não produzem produtos são denominados **setores abertos**. Economias sem setores abertos são denominadas **economias fechadas**, e economias com um ou mais setores abertos são denominadas **economias abertas**. Os dois modelos que constituem essas economias são geralmente chamados, respectivamente, *modelo fechado* e *modelo aberto*.

O *modelo fechado*, como a própria designação indica, consiste em determinar os preços de produtos produzidos e consumidos por um grupo de indústrias de modo que o total dos gastos de cada indústria seja igual ao total recebido. Já no *modelo aberto*, os preços dos produtos são fixados e o objetivo é determinar os níveis de produção necessários para o setor produtivo sustentar a si mesmo (demanda interna) e satisfazer a demanda do setor aberto (demanda externa). O *modelo fechado* pode ser representado pela equação matricial:

Modelo 42

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{P}$$

onde $\boldsymbol{P}$ é uma matriz (coluna) que representa a receita dos setores, isto é, o preço total dos produtos (bens ou consumo) de cada setor, $\boldsymbol{E}$ é a matriz (quadrada) de troca (equilíbrio) entre os setores, e $\boldsymbol{EP}$ é a matriz (coluna) que representa a despesa total dos setores e é obtida pela multiplicação das matrizes $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{P}$. Para melhor compreender esse modelo, considere o exemplo:

Ex.1) Três colegas de trabalho descobriram recentemente que durante o fim-de-semana se dedicam a três atividades distintas: pesca, produção de pupunha e produção de açaí (Figura 26).

Figura 26: Modelo fechado de uma economia simples

Pesca **Pupunha** **Açaí**

Fonte: http://www.jesocarneiro.com.br/cidade/foto-do-dia-tarrafa-no-aracu.html,
http://reporterdaamazonia.blogspot.com/2010/01/pupunha-uma-fruta-indispensavel-ao.html,

https://correiodecarajas.com.br/acai-para-representa-95-da-producao-nacional-do-ouro-roxo/, http://seplan.pa.gov.br/estado-elabora-pol%C3%ADtica-p%C3%BAblica-para-cadeia-do-a%C3%A7a%C3%AD.

Dada a conjuntura atual, os três colegas objetivam a venda dos produtos que conseguem, uma vez que consideram os seus salários bastante reduzidos e é nestas três atividades que procuram refúgio para alcançar algum conforto econômico. Decidiram que toda segunda-feira **trocariam** alguns desses produtos. Combinaram, então, que, de cada unidade (quilograma, cacho e litro) dos produtos adquiridos/produzidos (peixes, pupunha e açaí) fariam a seguinte **troca**:

Quadro 3: Quantidade de produtos trocados

		Produtos recebidos por:		
		Pesca	**Pupunha**	**Açaí**
Produtos entregues por:	**Pesca**	0,5	0,4	0,2
	Pupunha	0,2	0,3	0,1
	Açaí	0,3	0,3	0,7

Fonte: Elaborado pelo autor.

Já o *modelo aberto* pode ser representado pela equação matricial:

Modelo 43 $$X = CX + D$$

onde X é a matriz que representa a quantidade total produzida pelos setores, C é a matriz de consumo dos setores, CX é a matriz que representa a demanda intermediária dos setores e D é a matriz que representa a demanda externa. Para melhor compreendê-lo, veja o exemplo:

Ex.2) Uma economia aberta é composta por três setores: Moradia, Alimentação e Serviços. Após cuidadoso estudo, verificou-se que a relação entre esses setores, em termos produtivos, pode ser descrita pela tabela abaixo, onde o insumo é dado em unidades monetárias ($) necessárias para $1,00 de produto.

Figura 27: Quantidade trocada pelos setores numa economia aberta

		Insumo requerido para produzir $1		
		Moradia	Alimentação	Serviços
Fornecedor	Moradia	$ 0,10	$ 0,60	$ 0,40
	Alimentação	$ 0,30	$ 0,20	$ 0,30
	Serviços	$ 0,40	$ 0,10	$ 0,20

Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 90).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.6.3** (Sugestões)

O modelo fechado (ilustrado pelo **Ex.1**) é representado por um sistema linear do tipo $P = EP$, cuja matriz de troca E é formada pelos elementos da tabela representada pela Figura 25, e a matriz (coluna) de preços é $\boldsymbol{P}$, cujos elementos são as variáveis $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ que indicam os preços unitários dos produtos trocados (peixe, frutas/legumes e açaí) pelos três colegas de trabalho, respectivamente. O modelo aberto (ilustrado pelo **Ex.2**) é representado por um sistema linear do tipo $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{D}$, cuja matriz de consumo é $\boldsymbol{C}$; a matriz (coluna) de demanda é $\boldsymbol{D}$ dos setores moradia ($1 930), alimento ($3 860) e serviços ($790), respectivamente; e $\boldsymbol{X}$ é a matriz (coluna) de produção total dos setores moradia $(\boldsymbol{x})$, alimento $(\boldsymbol{y})$ e serviços $(\boldsymbol{z})$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.6.3** (Sugestões)

No **Ex.1**, considerando os preços unitários dos produtos trocados pelos três colegas de trabalho, respectivamente, a fim de garantir uma economia fechada, como será expressa a forma matricial $(\boldsymbol{P} = \boldsymbol{EP})$ para essa economia? Qual o preço unitário desses três produtos que dá o equilíbrio? No **Ex.2**, qual a matriz de consumo para essa economia? Sabendo que o setor aberto dessa economia tem uma demanda de $1 930 de moradia, $3 860 de alimento, e $5 790 de serviços, qual a equação de produção $(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{D})$? Qual a produção necessária $(\boldsymbol{X})$ de cada setor que atende essa demanda? etc.

CC2.7 – FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: SENO E COSSENO (ETAPAS REDUZIDAS)

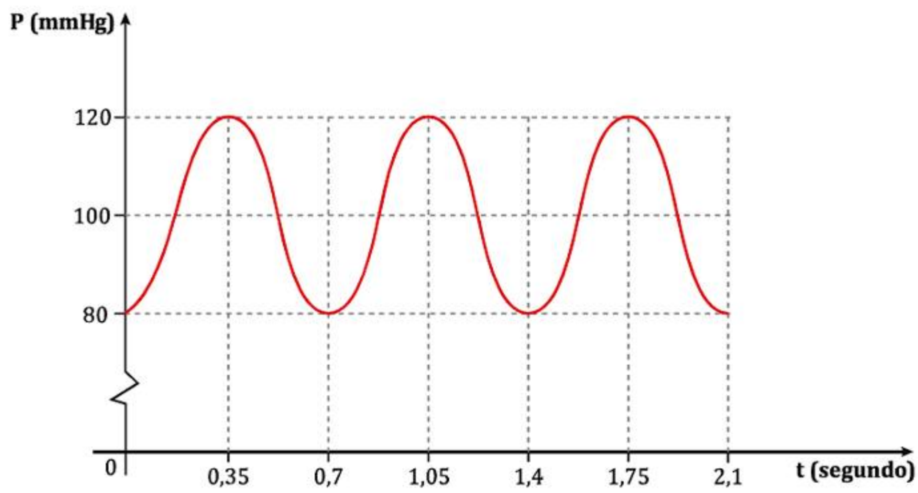
Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Funções periódicas: definição e propriedades • Estudo da função seno • Estudo da função cosseno	• Conhecimentos geométricos • Conhecimentos algébricos	C2 C5	H7, H8, H19, H20, H21, H22, H23

≫ *Situação 2.7.1: Como está sua pressão arterial?*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(SMOLE; DINIZ, 2016b, p. 9 e 67). Muitos diagnósticos em medicina são obtidos pela monitoração de sinais vitais do paciente, como a pressão arterial, ou seja, a pressão nas paredes dos vasos sanguíneos. Uma pessoa em repouso pode ter sua pressão sanguínea descrita (modelada) por um gráfico (figura abaixo) que mostra um comportamento cíclico.

Modelo 44



Fonte: Smole e Diniz (2016b, p. 9).

De acordo com as informações apresentadas no gráfico, esse fenômeno (pressão sanguínea no decorrer do tempo) pode ser expresso por uma função trigonométrica do tipo:

Modelo 45

$$\boldsymbol{P(t) = D + A\cos[B(t - C)]}$$

em que A, B, C e D são constantes reais.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.7.1** (Sugestões)
A pressão sanguínea (em mmHg) de uma pessoa em repouso é representada pela variável $\boldsymbol{P}$ e o tempo em que é medido essa pressão será indicada por $\boldsymbol{t}$ (em segundos).

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.7.1** (Sugestões)

A pressão indicada no gráfico obedece a um ciclo, sendo que cada ciclo completo equivale a um batimento cardíaco. Em quanto tempo (**período** p) ocorre esse ciclo? Qual a **frequência** F (definida por $\frac{1}{p}$) cardíaca do individuo avaliado? O que representam as constantes reais A, B, C e D no Modelo 44? Qual a maior e a menor pressão apresentada no gráfico (Modelo 44)? A pressão desse indivíduo é considerada boa? Como modelar, por meio de uma função trigonométrica (Modelo 45), a regularidade retratada pelos dados apresentados no gráfico (Modelo 44)? Que tipo de gráfico é esse? etc.

≫ *Situação 2.7.2*: *Fenômeno das marés*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016b, p. 50; IEZZI et al., 2016b, p. 44 e 64). Os movimentos periódicos de elevação e abaixamento da superfície de oceanos, mares e lagos são provocados pela força gravitacional da Lua e do Sol sobre a Terra. As marés ocorrem em intervalos regulares de 6 horas e 12 minutos. Portanto, a cada 24 horas e 48 minutos, o mar sobe e desce duas vezes, constituindo o fluxo e refluxo das águas. À medida que a Terra gira, outras regiões passam a sofrer elevações, como se a subida de nível se deslocasse, seguindo a Lua. No lado oposto da Terra dá-se o mesmo fenômeno: as águas também se erguem, de forma que uma elevação compensa a outra. Assim, nas regiões da costa, essas elevações das águas correspondem às marés altas. Enquanto o nível das águas sobe em dois lados opostos na Terra, em outras duas regiões do globo (também diametralmente opostas) ele desce: é a maré baixa.

Figura 28: Esquema do movimento das marés

Fonte: http://astronomiatrabalhosaoluiz.blogspot.com/2015/03/efeito-da-lua-na-terra-efeito-das-mares.html.

Na tabela abaixo, constam as previsões para a maré alta e para a maré baixa durante três dias consecutivos de maio de 2015, para o porto de Ilhéus, no sul do Estado da Bahia.

Modelo 46

Latitude: 14°46,8'S **Instituição**: DHN — **Longitude**: 39°01,6'W **40 Componentes** — **Fuso**: +03 **Nível Médio**: 1,12 m — **Ano**: 2015 **Carta**: 01201

	Hora	Altura (m)
SÁB 4/5/2015	3 h 41 min	2,0
	9 h 51 min	0,2
	16 h 02 min	2,1
	22 h 06 min	0,2
DOM 5/5/2015	4 h 09 min	2,0
	10 h 21 min	0,2
	16 h 38 min	2,0
	22 h 43 min	0,2
SEG 6/5/2015	4 h 47 min	2,0
	10 h 56 min	0,2
	17 h 09 min	2,0
	23 h 15 min	0,3

Fonte: Iezzi et al. (2016b, p. 44).

Com base nos dados dessa tabela (Modelo 46), observa-se que: As marés altas e as baixas ocorrem de 12 em 12 horas, aproximadamente; As alturas da maré alta praticamente se repetem de 12 em 12 horas: com apenas uma exceção, todas as alturas previstas para a maré alta medem 2,0 m; As alturas da maré baixa praticamente se repetem de 12 em 12 horas: com apenas uma exceção, todas as alturas previstas para a maré baixa medem 0,2 m.

O fenômeno descrito caracteriza-se pela repetição em intervalos de tempo aproximadamente iguais. É chamado **fenômeno** ou **movimento periódico**, o qual pode ser descrito (modelado), de maneira aproximada, por modelos matemáticos que envolvem, geralmente, funções trigonométricas do tipo $y = D + Asen[B(x - C)]$ ou $y = D + Acos[B(x - C)]$ em que A, B, C e D são constantes reais.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.7.2** (Sugestões)

A altura das marés será representada por $\boldsymbol{y}$ (em metros) e os instantes em que foram observadas e registradas essas alturas, será indicada por $\boldsymbol{x}$ (em horas).

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.7.2** (Sugestões)

Considerando que a tabela (Modelo 46) representa uma função do tipo seno ou cosseno ($y = D + Asen[B(x - C)]$ ou $y = D + Acos[B(x - C)]$), onde y indica a altura da maré (em metros) e x, o tempo (em horas), qual o domínio dessa função? E a imagem? Fazendo algumas simplificações, que função poderia modelar esse fenômeno? Há somente uma maneira de fazer essa modelação? Que simplificações podem ser feitas para facilitar a modelação do fenômeno? Em quanto tempo (período) ocorre um ciclo completo desse fenômeno? etc.

≫ ***Situação 2.7.3*: *Produtos sazonais***

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(ENEM – 2015.1, Q. 180). Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. A figura abaixo (Figura 28) mostra alguns produtos sazonais em determinada região.

Figura 29: Produtos sazonais – frutas e hortaliças

Fonte: http://nutrijr.com/sazonalidade/.

Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P (em reais) do quilograma de um certo produto sazonal pode ser modelado pela função:

Modelo 47

$$P(x) = 8 + 5cos\left[\frac{\pi}{6}(x-1)\right]$$

onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 2.7.3** (Sugestões)

O preço (em reais) do quilograma de certo produto sazonal é representado pela variável $\boldsymbol{P}$, o qual depende (está em função) do mês do ano, indicado por $\boldsymbol{x}$, em que esse produto está disponível.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.7.3** (Sugestões)

Baseado nessa expressão (Modelo 47), em qual mês houve a produção máxima? Qual o preço do produto sazonal nesse mês? E a mínima? Qual o preço do produto sazonal nesse mês? Percebe-se que a função acima (Modelo 47) é do tipo $y = D + Acos[B(x - C)]$. Quais os valores de A, B, C e D? O que representam essas constantes? Como seria um esboço do gráfico dessa função? etc.

CONTEÚDO CURRICULAR - 3º ANO

CC3.1 – MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Média • Moda e Mediana	• Conhecimentos de estatística	C6 C7	H24, H25 H26, H27

≫ *Situação 3.1.1*: *Você está preparado(a) para o ENEM?*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(SOUZA; GARCIA, 2016c, ampliado). O ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) foi criado em 1998, pelo Ministério da Educação (MEC), com o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica e da qualidade do ensino no nosso país. Atualmente, o ENEM é a principal forma de ingresso no ensino superior, e é por meio desse exame que estudantes (concluintes do Ensino Médio) podem participar de programas criados pelo governo federal para acesso ao ensino superior, como: Programa Universidade para Todos (**ProUni**), que oferta bolsas de estudo parciais ou integrais em instituições particulares; Fundo de Financiamento Estudantil (**Fies**), que concede financiamento sem juros ou com juros baixo em faculdades particulares; Sistema de Seleção Unificada (**SiSU**), que oferta vagas em instituições públicas de ensino superior.

O ENEM é realizado em dois dias (atualmente em dois domingos consecutivos) e é composto por 180 questões de múltipla escolha, divididas em quatro áreas de conhecimento: *Ciências Humanas e suas Tecnologias* (História, Geografia, Filosofia e Sociologia); *Linguagens, Códigos e suas Tecnologias* (Língua Portuguesa, Literatura, Língua Estrangeira, Artes, Educação Física e Tecnologias da Informação e Comunicação); *Ciências da Natureza e suas Tecnologias* (Química, Física e Biologia) e *Matemática e suas Tecnologias*. No primeiro dia de exame, os participantes respondem 45 questões de cada uma das áreas: Ciências Humanas e suas Tecnologias; Linguagens, Códigos e suas Tecnologias. A parte de língua estrangeira possui cinco questões de inglês ou espanhol e o participante faz a opção no momento da inscrição no ENEM. A prova de Linguagens também cobra uma redação dissertativo-argumentativa sobre um tema de ordem social, científico, cultural ou político, que deve ser escrita em até 30 linhas. Já no segundo dia de exame, são aplicadas outras 45 questões para cada uma das áreas: Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias.[6]

Para a contagem da nota final, em geral as universidades públicas adotam duas maneiras para esse cálculo (medidas de tendência central), conforme as fórmulas abaixo:

Modelo 48

Média Aritmética (simples)

$$\bar{x} = \frac{LC + CH + CN + M + R}{5}$$

Modelo 49

Média Aritmética ponderada

$$\bar{x}_p = \frac{LC \cdot p_1 + CH \cdot p_2 + CN \cdot p_3 + M \cdot p_4 + R \cdot p_5}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5}$$

onde LC indica a nota de Linguagens e Códigos, CH, de Ciências Humanas, CN, de Ciências da Natureza, M, de Matemática, e R, a nota da Redação. Na média aritmética ponderada, os valores p_1, p_2, p_3, p_4 e p_5, são os pesos atribuídos a cada área de conhecimento, respectivamente. Considere as notas abaixo:

Figura 30: Notas do ENEM 2018 obtidas por um estudante

EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO - ENEM 2018
Resultado ENEM 2018

inep enem

Área de Conhecimento	Nota	Situação
Linguagens, Códigos e suas Tecnologias	617,6	Presente
Ciências Humanas e suas Tecnologias	565,1	Presente
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	494,7	Presente
Matemática e suas Tecnologias	586,2	Presente
Redação	640	Presente

Fonte: O próprio estudante.

Sabe-se, por exemplo, que as universidades federais do Oeste do Pará (UFOPA) e de Minas Gerais (UFMG) adotam a média aritmética simples para todos os seus cursos, enquanto que as federais do Amazonas (UFAM), de Goiás (UFG) e o Instituto Federal do Pará (IFPA) adotam a média aritmética ponderada conforme o curso escolhido. O estudante citado acima, tinha interesse em cursar *Letras* em uma dessas instituições de ensino.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 3.1.1** (Sugestões)

[6] Disponível em: https://vestibular.mundoeducacao.bol.uol.com.br/enem/o-enem.htm. **Acesso em**: 23 jul. 2018.

Nos Modelos 48 e 49, as siglas LC, CH, CN, M e R indicam, respectivamente, as notas de Linguagens e Códigos, Ciências Humanas, Ciências da Natureza, Matemática e Redação. Além disso, no Modelo 49 (média aritmética ponderada), os valores p_1, p_2, p_3, p_4 e p_5, representam os pesos atribuídos a cada uma dessas áreas de conhecimento, respectivamente.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 3.1.1** (Sugestões)

Qual a nota dessa estudante se concorresse a uma vaga na **UFOPA** ou na **UFMG**? Sabe-se que para o curso de *Letras*, os pesos nas áreas de conhecimento são: Na **UFAM** - LC (2,0), CH (2,0), CN (1,0), M (1,0) e R (2,0); Na **UFG** - LC (3,0), CH (2,5), CN (1,0), M (1,0) e R (2,5); No **IFPA** - LC (3,0), CH (1,0), CN (1,0), M (1,0) e R (4,0). Qual a nota da estudante em cada uma dessas instituições? Sabe-se que a estudante foi aprovada na **UFG**. Você acha que ela poderia ter sido aprovada no **IFPA** ou na **UFOPA**? Por quê? Você acha que os pesos de cada área estão coerentes para o curso escolhido pela estudante? E se o curso escolhido fosse *Engenharia Civil*, como você acha que deveriam ser os pesos das áreas de conhecimento? E se fosse *Medicina*? E se fosse *Direito*? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 3.1.1)

1) Calcular a nota dessa estudante para que concorra a uma vaga na **UFOPA**; **2)** Sabe-se que para o curso de *Letras* na **UFAM**, os pesos nas áreas de conhecimento são: LC (2,0), CH (2,0), CN (1,0), M (1,0) e R (2,0). Calcular a nota da estudante nessa instituição; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 3.1.1** (Sugestão)

Discutir se ela poderia ter sido aprovada no **IFPA** ou na **UFOPA**. Na média ponderada, discutir a coerência dos pesos de cada área para o curso escolhido pela estudante. Discutir ainda os pesos das áreas caso o curso escolhido fosse outro, como por exemplo, *Engenharia Civil*, *Medicina*, *Direito* etc. Destacar a necessidade do estudo sobre *Médias*.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *medidas de tendência central (Média simples e ponderada)* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 3.1.1** (Sugestões)

1) Sabe-se que a estudante indicada na Figura 28 foi aprovada no curso de *Letras* na **UFG**, sendo que para esse curso, os pesos nas áreas de conhecimento eram: LC (3,0), CH (2,5), CN (1,0), M (1,0) e R (2,5). Calcular a nota da estudante nessa instituição; **2)** No **IFPA**, os pesos nas áreas de conhecimento, para o curso de *Letras*, eram: LC (3,0), CH (1,0), CN (1,0), M (1,0) e R (4,0). Calcular a nota da estudante nessa instituição, caso tivesse concorrido a uma das vagas no curso de *Letras*; etc.

≫ *Situação 3.1.2: Cuidado com o desperdício de água!*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(IEZZI et al., 2016c, p. 135; SOUZA; GARCIA, 2016c, p. 118). A falta de água potável em diversas regiões do mundo já é uma realidade. Desde o tratamento adequado de esgotos residenciais e industriais, passando pelo uso correto da água na agricultura, até o combate ao desperdício de água em situações corriqueiras, como banho, são exemplos de atitudes que devemos tomar para garantir a nossos descendentes o direito a esse bem vital. A fim de economizar e tentar fazer uma previsão da média de consumo de água numa determinada residência, o proprietário resolveu acompanhar a evolução desse consumo durante os nove primeiros meses do ano.

De acordo com as informações obtidas nas contas de água, foi registrado (em m^3) os seguintes consumos: 34, 31, 34, 32, 30, 33, 34, 108 e 32. Calculando a média mensal de consumo, obteve-se o seguinte resultado, indicado abaixo:

$$\bar{x} = \frac{34+31+34+32+30+33+34+108+32}{9} = \frac{368}{9} \approx \mathbf{40,9}$$

Mesmo de posse desse resultado, o proprietário não adotou essa média como padrão de consumo, pois não achou coerente como uma medida de tendência central. Adotou o valor de 33 m^3 como referência. O procedimento utilizado por ele para adotar esse valor foi o seguinte:

Modelo 50 Ordenou de forma crescente os consumos registrados nos nove meses de acompanhamento e selecionou o valor central conforme abaixo:

$$30 - 31 - 32 - 32 - \mathbf{33} - 34 - 34 - 34 - 108$$

O proprietário observou ainda que:

Modelo 51 O valor de referência do consumo mensal de água nessa residência poderia ser também 34 m^3, uma vez que esse foi o consumo registrado com maior frequência (três vezes) nesses nove meses.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 3.1.2** (Sugestões)

O consumo mensal de água (34, 31, 34, 32, 30, 33, 34, 108 e 32, medido em m^3) registrado durante os nove primeiros meses do ano podem ser representados por $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$, $\boldsymbol{c_3}$, ..., $\boldsymbol{c_9}$, os quais indicam, respectivamente, o consumo nos meses de janeiro, fevereiro, março, e assim por diante, até setembro. Os dois modelos apresentados (Modelo 50 e 51) indicam tendência central do consumo de água naquela residência de modo diferente da média. O primeiro (Modelo 50), organiza os dados em ordem crescente e destaca como referência o *valor central*, que nesse caso é o consumo $\boldsymbol{c_5}$, isto é, 33 m^3. Já o segundo modelo (Modelo 51), destaca o *valor de maior frequência*, 34 m^3, que aparece três vezes nos registros ($\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_3}$, $\boldsymbol{c_7}$).

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 3.1.2** (Sugestões)

Em que mês houve incoerência na sequência do consumo de água registrada pelo proprietário da residência (34, 31, 34, 32, 30, 33, 34, 108 e 32)? Qual o consumo nesse mês? O que você acha que pode ter causado esse consumo exagerado no mês de agosto (108 m^3)? Por que a média mensal (40,9 m^3) do consumo de água encontrada acima não é coerente para representar uma medida de tendência central? Caso seja retirado o valor diferenciado (108 m^3) da sequência de consumos registrados, qual seria a média mensal? Esse valor está mais próximo da Mediana e da Moda encontradas? Qual seria a Mediana da sequência de consumos se considerarmos apenas o registro de oito meses (sem o valor 108)? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 3.1.2)

1) Identificar o mês que houve incoerência na sequência do consumo de água registrada pelo proprietário da residência (34, 31, 34, 32, 30, 33, 34, 108 e 32); **2)** Apontar o consumo nesse mês; **3)** Caso seja retirado o valor diferenciado (108 m^3) da sequência de consumos registrados, calcular a nova média mensal; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 3.1.2** (Sugestão)

Discutir possíveis causas para o consumo exagerado nesse mês. Discutir a incoerência da média mensal (40,9 m^3), nesse caso. A partir da nova média mensal encontrada no item 3) da Tarefa 1, o professor pode propor aos estudantes que comparem esse resultado com os valores encontrados pelos dois modelos (Modelos 50 e 51). A intenção é fazer com que os estudantes percebam que cada modelo de tendência central (Média, Moda ou Mediana) pode ser utilizado de modo apropriado para representar o padrão de determinada sequência de dados, dependendo da própria coerência dos dados. Aqui pode ser destacada a necessidade do estudo sobre essas medidas.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *medidas de tendência central (Média, Moda e Mediana)* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 3.1.2** (Sugestões)

1) Calcular a Mediana e a Moda da sequência de consumos dessa situação, considerando apenas o registro de oito meses (sem o valor 108 m^3); **2)** Comparar os três resultados obtidos e discutir a proximidade dos valores ao excluir o valor 108 m^3 e o distanciamento ao incluí-lo no cálculo da média; **3)** Expressar qual modelo (Média, Moda ou Mediana) melhor representa o padrão do consumo de água registrada pelo proprietário da residência (34, 31, 34, 32, 30, 33, 34, 108 e 32). Justificar; etc.

Observação: O desenvolvimento do conteúdo pode ser direcionado pela sugestão a seguir:

Tópicos	Desenvolvimento em resumo
Média	A **média aritmética** ($\bar{x}$) de um conjunto de n valores x_1, x_2, x_3, ..., x_n é dada por: $$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}}$$ **Exemplo:** Calcular a média da idade de um grupo de estudantes com idades 19, 17, 18, 21 e 17. A **média aritmética ponderada** ($\bar{x}_p$) de um conjunto de n valores x_1, x_2, x_3, ..., x_n, cujos pesos (ou frequências absolutas) são p_1, p_2, p_3, ..., p_n , respectivamente, é dada por: $$\boldsymbol{\bar{x}_p = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \cdots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n}}$$ **Exemplo:** As notas de Matemática do 2º bimestre obtidas por um estudante do 3º ano do Ensino Médio foram: Av.1 - 6,0; Av.2 - 7,5; Av.3 - 7,5; Av.4 - 6,0; Av.5 - 5,0. Sabendo que essas avaliações têm pesos 1, 1, 2, 3 e 3, respectivamente. Calcular a média ponderada da nota desse estudante.
Moda	A **Moda** (M_o) de um conjunto de n valores x_1, x_2, x_3, ..., x_n é aquele (ou aqueles) que tem maior frequência. **Exemplos:** Calcular a Moda em cada situação: **1)** Em um grupo de pessoas com idades $2, 3, 2, 1, 2$ e 50 anos, **a moda é** $\mathbf{2}$, pois é o número (idade) que aparece com maior frequência (três vezes); **2)** As notas de Matemática do 2º bimestre obtidas por um estudante do 3º ano do Ensino Médio foram: Av.1 - 6,0; Av.2 - 7,5; Av.3 - 7,5; Av.4 - 6,0; Av.5 - 5,0. Assim, **a moda é** $\mathbf{6,0}$ e $\mathbf{7,5}$, pois são as que aparecem com maiores frequências (duas vezes cada uma). Diz-se que esses dados (notas) têm uma distribuição **bimodal**;
Mediana	A **Mediana** (M_e) de um conjunto de n valores x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ordenados de modo crescente ou decrescente, é:

	# O número (valor) que ocupa a posição central, se n for ímpar; # A média aritmética dos dois números (valores) que estiverem no centro, se n for par.
	Exemplos: Calcular a Mediana em cada situação: **1)** Em uma classe, foram anotadas as faltas durante um período de 15 dias, que colocadas em ordem crescente ficam assim: $0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, \mathbf{3}, 3, 4, 4, 5, 5, 7, 7$ Portanto, a mediana é $\mathbf{3}$, pois é o valor (nº de faltas) central. **2)** As idades dos estudantes de uma equipe formada para representar sua escola numa feira de Matemática, colocadas em ordem crescente, ficaram assim: $12, 12, 13, \mathbf{14}, \mathbf{16}, 16, 16, 17$ Portanto, a mediana é $\mathbf{15}$, pois $M_e = \frac{14+16}{2} = \frac{30}{2} = \mathbf{15}$.

4ª Etapa: Aplicação

CC3.1 - Questões de Aplicação (sugestão)

Q1. (C2/V3/q.32/p.138) Na tabela ao lado constam os valores dos dez maiores PIBs das Américas em 2014.

a) Calcule a média dos dados apresentados;

b) Calcule a mediana dos dados apresentados;

c) Compare os dois resultados, identificando qual das duas medidas é maior. Por quê?

d) Em que condições a média ficaria mais próxima da mediana?

e) Pesquisar e discutir sobre PIB.

País	PIB (em bilhões de dólares)
Estados Unidos	17 420
Brasil	2 346
Canadá	1 785
México	1 295
Argentina	537,7
Venezuela	381,3
Colômbia	377,7
Chile	258,1
Peru	202,6
Equador	100,9

Q2. (C4/V3/q.22/p.127) Certo concurso público era composto por três etapas: prova de conhecimentos gerais, prova de conhecimentos específicos e prova prática. Para ser aprovado nesse concurso, o candidato não poderia obter em nenhuma das etapas nota inferior a 5 pontos, e a média aritmética final das três notas tinha de ser igual ou superior a 7 pontos.

Veja as notas obtidas por três candidatos nas duas primeiras etapas desse concurso:

Candidato	Conhecimentos gerais	Conhecimentos específicos
Amanda	5,2	6,3
Carlos	6,5	7,2
Fátima	7,8	8,3

a) Caso Amanda obtenha nota 9 na prova prática, ela será aprovada? Por quê?

b) Qual a nota mínima que Carlos deve obter na prova prática para que seja aprovado?

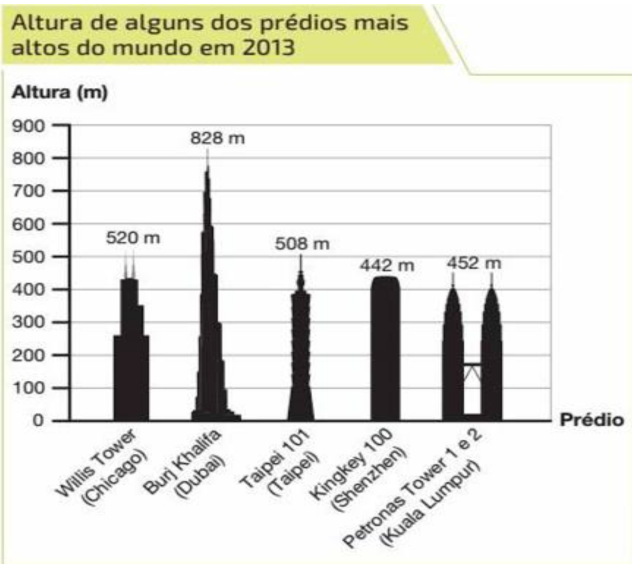
c) É possível afirmar que se Fátima não for eliminada na prova prática ela será aprovada? Justifique.

Q3. (ENEM – 2014) Ao final de uma competição de ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas química e física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre número inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de química. No dia em que sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas. O quadro abaixo apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais.

Candidato	Química	Física
I	20	23
II	X	25
III	21	18

Qual a menor nota que o candidato deverá obter na prova final de química para vencer a competição?

Q4. (C4/V3/q.19/p.127) Os avanços tecnológicos na construção civil permitem a edificação de prédios cada vez mais altos. Observe ao lado a altura de alguns dos prédios mais altos do mundo e responda:



a) Qual a média aritmética das alturas desses prédios?

b) Qual a moda e a mediana das alturas desses prédios?

c) Qual prédio deve ser desconsiderado para que a média das alturas diminua? Nesse caso, qual seria essa média?

Q5. (ENEM – 2018) A Comissão Interna de Prevenção de Acidentes (CIPA) de uma empresa, observando os altos custos com os frequentes acidentes de trabalho ocorridos, fez, a pedido da diretoria, uma pesquisa do número de acidentes sofridos por funcionários.

Essa pesquisa, realizada com uma amostra de 100 funcionários, norteará as ações da empresa na política de segurança no trabalho. Os resultados obtidos estão ao lado. Com base nessas informações, calcule a média do número de acidentes por funcionários nessa amostra que a CIPA apresentará à diretoria da empresa.

Número de acidentes sofridos	Número de trabalhadores
0	50
1	17
2	15
3	10
4	6
5	2

CC3.2 – MEDIDAS DE DISPERSÃO

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Desvios • Variância	• Conhecimentos de estatística	C6 C7	H24, H25 H26, H27

1ª Etapa: Apresentação das situações-problema

» Situação 3.2.1: Cestinhas mágicos!

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

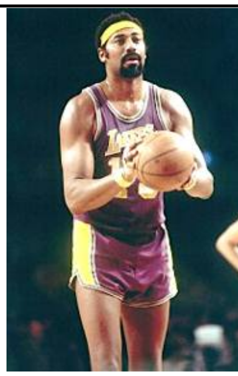
(SOUZA; GARCIA, 2016c, p. 131, adaptado). Na noite dessa terça-feira (23.01.2018), *LeBron James* se tornou aos 33 anos, o mais jovem jogador a entrar para o seleto grupo de lendas que romperam a marca dos 30.000 pontos na NBA.[7]

Figura 31: Maiores cestinhas de todos os tempos

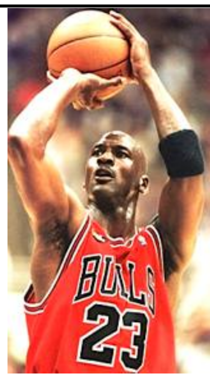
Com 28 pontos no jogo contra o San Antonio Spurs, *LeBron James* (figura abaixo) soma 30.021 na carreira.

O "Rei James", como se acostumou a ser chamado, se junta a mitos da NBA (figura ao lado).

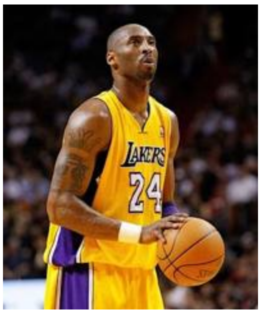
Dirk Nowitzki
(30.808 pontos)



Wilt Chamberlain
(31.419 pontos)



Michael Jordan
(32.292 pontos)



Kobe Bryant
(33.643 pontos)

Karl Malone
(36.928 pontos)

Kareem Abdul-Jabbar
(38.387 pontos)

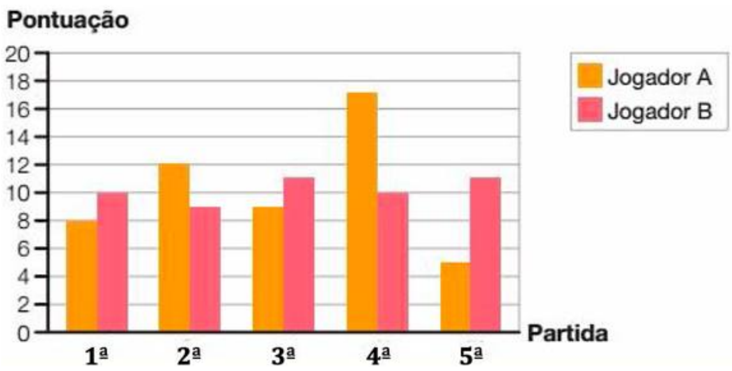
Fonte: Elaborado a partir de https://bantmag.com/lebron-jamesli-space-jam-2-dedikodulari-yine-gundemde/, https://br.pinterest.com/pin/440226932323145148/, https://br.pinterest.com/pin/453385887456455442/?nic=1, https://br.pinterest.com/pin/344243965244462883/, https://br.pinterest.com/pin/831195674949689750/?lp=true,

[7] Disponível em: https://sportv.globo.com/site/nba/noticia/ao-atingir-30-mil-pontos-lebron-sobe-mais-um-degrau-em-sua-jornada-na-nba.ghtml. **Acesso em**: 26 jul. 2018.

https://www.gettyimages.pt/detail/fotografia-de-not%C3%ADcias/karl-malone-of-the-utah-jazz-shoots-against-the-fotografia-de-not%C3%ADcias/846577196?adppopup=true, https://www.gettyimages.com.br/fotos/kareem-abdul-jabbar?family=editorial&sort=mostpopular&phrase=kareem%20abdul%20jabbar.

Em um campeonato de basquete, após as 5 primeiras rodadas, os dois principais "cestinhas" (jogadores que mais pontuaram) obtiveram médias iguais de pontos por partida. Veja o gráfico:

Modelo 52



Fonte: Souza e Garcia (2016c, p. 131).

De acordo com os dados, a média de pontos/jogo de cada "cestinha" pode ser expressa por:

Jogador A

$$\bar{x}_A = \frac{8 + 12 + 9 + 17 + 5}{5} = \mathbf{10,2}$$

Jogador B

$$\bar{x}_B = \frac{10 + 9 + 11 + 10 + 11}{5} = \mathbf{10,2}$$

Apesar das médias serem iguais, não significa que o *desempenho* ou *regularidade* nas partidas seja igual para os dois jogadores, e esse é um aspecto considerado de vital importância por muitos treinadores, não só do basquetebol, mas também de outras modalidades de esporte.

Para medir essa regularidade, segundo a Estatística, se considerarmos uma amostra $\mathcal{A}$ com n elementos, é possível utilizar modelos matemáticos que nos ajudam a fazer essa medição. Um desses modelos é a **Variância**, que é uma medida de dispersão, representada por $\boldsymbol{\sigma^2}$ ("sigma ao quadrado", onde σ é uma letra do alfabeto grego), e é expressa pela fórmula:

Modelo 53

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

onde: $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \cdots, \boldsymbol{x_n}$ são os n elementos da amostra $\mathcal{A}$; $\boldsymbol{\bar{x}}$ é a média aritmética desses valores; $\boldsymbol{x_i - \bar{x}}$ (i variando de 1 até n) é o **desvio** de cada valor x_i em relação a média $\bar{x}$.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 3.2.1** (Sugestões)

É apresentada no gráfico acima (Modelo 52) a pontuação, em cinco partidas, de dois "cestinhas" num campeonato de basquete. Os jogadores são identificados $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, enquanto seus pontos, nas cinco partidas, podem ser representados, respectivamente, pelos pontos $\boldsymbol{p_1(A)}, \cdots, \boldsymbol{p_5(A)}$ e $\boldsymbol{p_1(B)}, \cdots, \boldsymbol{p_5(B)}$. A fim de medir o *desempenho* ou *regularidade* desses jogadores nas partidas, é utilizado o Modelo 53, que para essa situação, podemos identificar as variáveis $\boldsymbol{x_1}, \cdots, \boldsymbol{x_5}$ com sendo os pontos $\boldsymbol{p_1(A)}, \cdots, \boldsymbol{p_5(A)}$ e $\boldsymbol{p_1(B)}, \cdots, \boldsymbol{p_5(B)}$. O **desvio** de cada pontuação dos jogadores $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ pode ser identificado, respectivamente, por $\boldsymbol{p_i(A) - \overline{x}(A)}$ e $\boldsymbol{p_i(B) - \overline{x}(B)}$ (i variando de 1 até 5), sendo $\boldsymbol{\overline{x}(A)}$ e $\boldsymbol{\overline{x}(B)}$ suas médias de pontuação nos cinco jogos.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 3.2.1** (Sugestões)

Com base no Modelo 53, qual a Variância da pontuação dos dois "cestinhas" acima mencionados? Os resultados são iguais? O que significam esses resultados? Qual dos dois jogadores apresenta maior regularidade? Que *unidade* de medida pode ser identificada na Variância da pontuação desses "cestinhas"? Por quê? Qual a unidade de medida de cada **desvio** no exemplo acima (Modelo 52)? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 3.2.1)

1) A partir do Modelo 53, calcular a Variância da pontuação dos dois "cestinhas" acima mencionados; **2)** A partir do Modelo 53, tentar expressar $\boldsymbol{\sigma}$ (sigma); etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 3.2.1** (Sugestão)

Após realizar a Tarefa 1, os estudantes devem verificar que os resultados do item 1 não são iguais para os dois jogadores. O professor, então, em conjunto com eles, pode discutir o significado desses resultados nesse contexto. A intenção é fazer com que os estudantes percebam e discutam a regularidade dos dois jogadores nesse campeonato de basquete. Outra discussão que pode ser levantada pelo professor é a respeito da *unidade* de medida da Variância e da *unidade* de medida dos desvios $\boldsymbol{p_i(A) - \overline{x}(A)}$ e $\boldsymbol{p_i(B) - \overline{x}(B)}$ da pontuação desses "cestinhas". A ideia é fazer com que eles percebam que $\boldsymbol{\sigma}$ (Desvio Padrão) tem a mesma unidade de medida das variáveis de uma amostra $\mathcal{A}$ e, portanto, melhor traduz a *regularidade* dos elementos dessa amostra. Em termos dessa medida, discutir e tentar caracterizar essa *regularidade*, dando significado, por exemplo, a $\boldsymbol{\sigma = 0}$. Destaca-se, portanto, a necessidade de um estudo mais aprofundado sobre *Variância* e *Desvio Padrão*.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *medidas de dispersão (Variância e Desvio Padrão)* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 3.2.1** (Sugestões)

1) Calcular o Desvio Padrão ($\boldsymbol{\sigma}$) da pontuação dos dois "cestinhas"; **2)** Interpretar, a partir de $\boldsymbol{\sigma}$, qual dos dois jogadores apresenta maior regularidade.

Observação: O desenvolvimento do conteúdo pode ser direcionado pela sugestão a seguir:

<table>
<tr><th>Tópicos</th><th>Desenvolvimento em resumo</th></tr>
<tr><td>Variância</td><td>

O **desvio** dos valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é a diferença entre cada um deles e sua média $\overline{\boldsymbol{x}}$.

Define-se, portanto, a **Variância** (σ^2) como a média aritmética dos quadrados dos desvios desses valores, isto é:

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$

Exemplo: Considere os percentuais mensais (x_i) de pontualidade de duas companhias aéreas A e B, e calculemos a **Variância** deles.

Companhia A

Mês	x_i	$(x_i - \overline{x})^2$
1	86	$(86 - 91)^2$
2	92	$(92 - 91)^2$
3	91	$(91 - 91)^2$
4	95	$(95 - 91)^2$
5	90	$(90 - 91)^2$
6	89	$(89 - 91)^2$
7	94	$(94 - 91)^2$

$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_A^2 = 8}$

Companhia B

Mês	x_i	$(x_i - \overline{x})^2$
1	93	$(93 - 91)^2$
2	92	$(92 - 91)^2$
3	90	$(90 - 91)^2$
4	91	$(91 - 91)^2$
5	90	$(90 - 91)^2$
6	93	$(93 - 91)^2$
7	88	$(88 - 91)^2$

$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_B^2 = 2,86}$

Conclusão: Como a Variância em B é menor que a Variância em A, conclui-se que a companhia **B é mais regular**, isto é, os percentuais mensais de pontualidade de B estão menos dispersos em relação à média do que os percentuais mensais de A.

</td></tr>
</table>

Desvio Padrão

O **Desvio Padrão** dos valores x_1, x_2, x_3, ..., x_n é definido como a raiz quadrada da Variância, isto é,

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$

Exemplo: Considere os percentuais mensais (x_i) de pontualidade de duas companhias aéreas A e B, e calculemos o **Desvio Padrão** deles.

Companhia A

Mês	x_i	$(x_i - \overline{x})^2$
1	86	$(86 - 91)^2$
2	92	$(92 - 91)^2$
3	91	$(91 - 91)^2$
4	95	$(95 - 91)^2$
5	90	$(90 - 91)^2$
6	89	$(89 - 91)^2$
7	94	$(94 - 91)^2$

$\Rightarrow \sigma_A \approx 2,8$

Companhia B

Mês	x_i	$(x_i - \overline{x})^2$
1	93	$(93 - 91)^2$
2	92	$(92 - 91)^2$
3	90	$(90 - 91)^2$
4	91	$(91 - 91)^2$
5	90	$(90 - 91)^2$
6	93	$(93 - 91)^2$
7	88	$(88 - 91)^2$

$\Rightarrow \sigma_B \approx 1,7$

Conclusão: Como o Desvio Padrão em B é menor que o Desvio Padrão em A, conclui-se que a companhia **B é mais regular**, isto é, os percentuais mensais de pontualidade de B estão menos dispersos em relação à média do que os percentuais mensais de A.

4ª Etapa: Aplicação

CC3.2 - Questões de Aplicação (sugestão)

Q1. (C2/V3/q.41/p.143) Nos quadros a seguir estão representadas as taxas de analfabetismo, expressas em porcentagem, dos estados das regiões Centro-Oeste e Sudeste em 2013:

Região Centro-Oeste	
Distrito Federal	3,2%
Goiás	7,1%
Mato Grosso	7,8%
Mato Grosso do Sul	7,2%

Região Sudeste	
São Paulo	3,7%
Rio de Janeiro	3,7%
Minas Gerais	7,6%
Espírito Santo	6,6%

a) Qual região apresenta o conjunto de valores mais homogêneo? **b)** Calcule o desvio padrão das taxas de analfabetismo nas duas regiões para comprovar sua resposta; **c)** Pesquise e discuta as taxas de analfabetismo da região norte em 2013; **d)** Pesquise e discuta as taxas de analfabetismo mais recentes nas regiões apresentadas (nos quadros) e também na região norte.

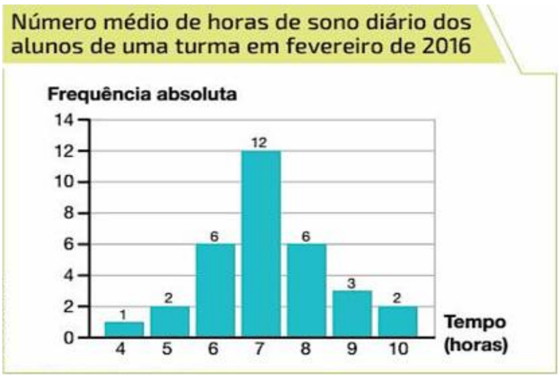
Q2. (C4/V3/q.31/p.133) Os salários dos funcionários de uma fábrica estão indicados a seguir:

a) Qual o salário médio dos funcionários dessa fábrica?

b) Calcule o desvio padrão dos salários desses funcionários. O que significa esse valor?

c) Se cada funcionário receber um aumento de R$ 100,00, o que ocorrerá com a média dos salários? E com o desvio padrão?

Q3. (C4/V3/q.34/p.135) De acordo com estudo realizado pela Fundação Nacional do Sono, nos Estados Unidos (matéria da revista *Veja* - 16/02/2015), o uso de aparelhos eletrônicos durante a noite prejudica o sono, pois a luz emitida por eles afeta diretamente a produção de melatonina, hormônio responsável pela indução ao sono. Por meio de um questionário foram obtidas as informações indicadas no gráfico a seguir:



Com base no gráfico, determine:

a) O número de alunos da sala de aula;

b) A porcentagem de alunos que dorme a quantidade de horas recomendadas para sua idade;

c) A média e desvio padrão do número de horas de sono diário desse grupo de alunos.

Q4. (ENEM – 2010) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

Qual o candidato com pontuação mais regular, isto é, mais bem classificado? Justifique.

Q5. (ENEM – 2016) O procedimento de perda rápida de “peso” é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três “pesagens” antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos "pesos". As informações com base nas "pesagens" dos atletas estão no quadro abaixo.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Assim, após as três "pesagens", os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta. Quem são eles? Por quê?

CC3.3 – GEOMETRIA ANALÍTICA: ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Definição de circunferência • Equações da circunferência • Posições relativas entre reta e circunferência	• Conhecimentos algébricos/geométricos	C2 C5	H6, H7, H8 H20 H21, H22

≫ *Situação 3.3.1: Que tal construirmos pontes!*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016c, p. 130, ampliada). “As pessoas são solitárias porque constroem muros ao invés de pontes”, afirmou o escritor francês Antonie de Saint-Exupéry em seu livro *O Pequeno Príncipe* (1943). Num sentido mais literal dessa perspectiva, pode-se destacar a *Ponte Fremont* (Figura 31), que além de aproximar mais as pessoas, tem uma estrutura arquitetônica moderna e é matematicamente de grande beleza! Trata-se de uma *ponte de arco* (de circunferência) de aço amarrado sobre o rio Willamette localizado em Portland, Oregon, Estados Unidos.

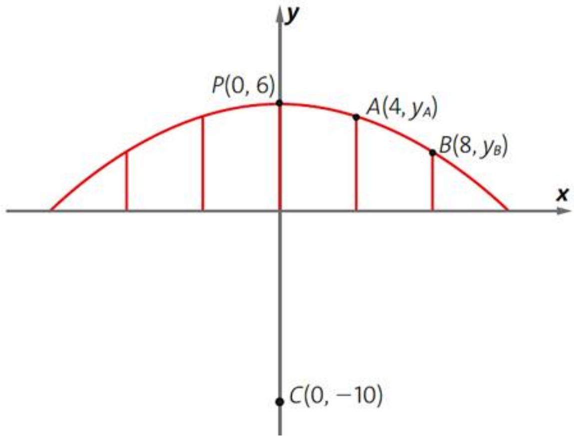
Figura 32: *Ponte Fremont* em Portland, Oregon, Estados Unidos

Fonte: http://www.bridgeofweek.com/2009/09/portland-bridges-fremont-bridge-2.html.

Inspirado nesse projeto, um grupo de engenheiros brasileiros pretende construir uma ponte em forma de arco de circunferência, semelhante à que aparece na fotografia acima. O vão livre sobre o rio a ser vencido pela ponte é de $24\ m$ (comprimento da ponte na largura do rio), e a pilastra central, segundo o arquiteto, deverá ter $6\ m$ de altura. O engenheiro, usando seus conhecimentos de Geometria plana, já calculou que o raio do arco de circunferência projetado pelo arquiteto é de $16\ m$. Agora ele precisa calcular o tamanho das outras quatro pilastras menores (duas à esquerda e duas à direita da pilastra central). Segundo o projeto, todas as pilastras devem ser equidistantes, isto é, cada pilastra deve estar a 4 m uma da outra.

Com base nessas informações, escolhe-se um sistema de eixos coordenados conveniente para obter a altura dessas quatro pilastras menores. Escolhendo um sistema de eixos cartesianos que coloque a pilastra central no eixo y e o vão da ponte no eixo x, o centro da circunferência será $C(0, -10)$, pois o raio tem $16\ m$ e a pilastra maior tem $6\ m$ (figura abaixo). Para obter o tamanho das pilastras pedidas, precisamos apenas das ordenadas dos pontos A e B, cujas abscissas são respectivamente 4 e 8. Nesse exemplo, a escolha do sistema de eixos cartesianos adequado é muito importante para facilitar a resolução.

Modelo 54



Fonte: Dante (2016c, p. 130).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 3.3.1** (Sugestões)
As variáveis $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ (medidas em metros) representam, respectivamente, a posição na horizontal e a altura da pilastra da ponte (arco de circunferência) no sistema de eixos cartesianos estabelecidos xOy. A pilastra central está fixada no eixo Oy e o vão da ponte, no eixo Ox. Já o centro da circunferência é $C(0, -10)$, uma vez que o raio tem $16\ m$ e a pilastra maior tem $6\ m$ (Modelo 54).

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 3.3.1** (Sugestões)
Com base nesse sistema de coordenadas representado no esquema acima, como você acha que pode ser calculada a altura de cada pilastra? Sabe-se que a estrutura apresentada acima representa um arco de circunferência. Como pode ser expressa uma equação dela (circunferência)? Você acha que, com essa equação, o cálculo da altura das pilastras indicadas acima pode ser facilitado? Por quê? Como fazer isso? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 3.3.1)

1) Com base nesse sistema de coordenadas representado no esquema acima (Modelo 54), determinar a distância entre os pontos A e C; **2)** Determinar a distância entre os pontos B e C no Modelo 54; **3)** Expressar uma maneira que permita calcular a altura de cada pilastra da ponto (Modelo 54); **4)** A partir da proposta expressa no item anterior, tentar calcular a altura de cada pilastra, isto é, os valores de y_A e y_B; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 3.3.1** (Sugestão)

Após realizar a Tarefa 1, os estudantes devem ter compreendido que a distância entre $C(0,-10)$ e qualquer ponto no arco da circunferência é sempre 16 (ideia intuitiva sobre circunferência). O professor pode propor, então, que os estudantes considerem um ponto genérico (x,y) dessa circunferência e tentem expressar uma equação dela. Discutir a importância dessa equação no cálculo da altura das pilastras. Destacar a necessidade do estuda da circunferência para a resolução de problemas desse tipo.

Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *circunferência* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 3.3.1** (Sugestões)

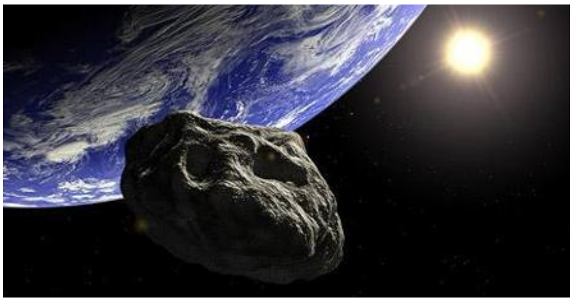
1) Expressar a equação da circunferência que contém o arco que representa a ponte (Modelo 54; **2)** A partir da equação encontrada no item anterior, calcular a altura de cada pilastra dessa ponte (Modelo 54); etc.

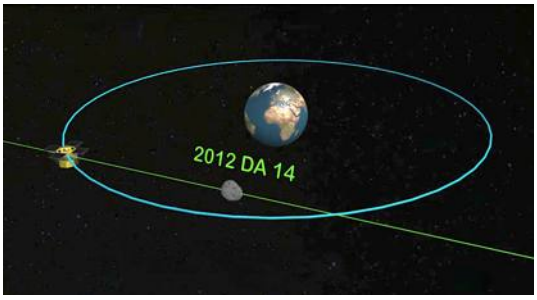
≫ Situação 3.3.2: Um asteroide à vista!

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(PAIVA, 2016c, p. 193). Na noite de 15/02/2013, o asteroide 2012 DA14 (Figura 32), com 130.000 toneladas, passou a 34.000 km do centro da Terra, cruzando em linha reta a órbita de alguns dos nossos satélites de comunicação.

Figura 33: Asteroide 2012 DA14

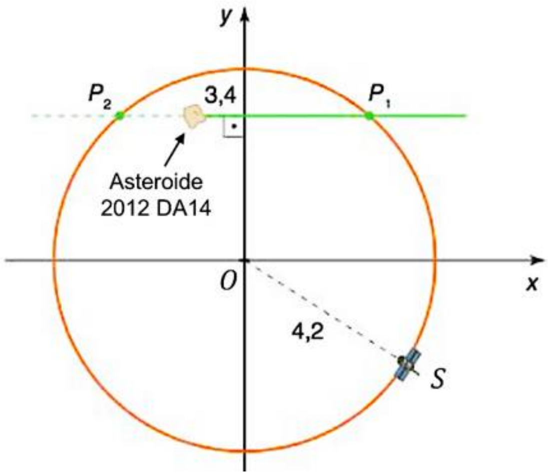




Fonte: https://blogs.ne10.uol.com.br/mundobit/2013/02/15/risco-de-asteroide-2012-da14-afetar-telecomunicacoes-e-muito-baixo/, https://news.yahoo.com/asteroid-2012-da14s-friday-flyby-stargazers-guide-144435613.html.

Se um desses satélites tinha órbita circular com $42.000\ km$ de raio, **concêntrica** com a Terra, e a trajetória do asteroide foi **secante** a essa órbita, é possível conhecer as posições desses objetos (satélites), em cada instante, associando ao plano de suas trajetórias um sistema cartesiano. Por exemplo, consideremos um sistema cartesiano cuja origem O seja o centro da Terra, a unidade u adotada nos eixos seja tal que $1u = 10.000\ km$, o eixo das ordenadas seja perpendicular à trajetória do asteroide e o primeiro ponto P_1 de intersecção da trajetória do asteroide com a órbita do satélite S esteja no primeiro quadrante (figura abaixo).

Modelo 55



Fonte: Paiva (2016c, p. 193).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 3.3.2** (Sugestões)

Há dois corpos se movendo no espaço. Um satélite artificial S, cuja trajetória é *circular*, tendo como centro a Terra, e um asteroide (2012 DA14) que tem como trajetória, uma *reta secante* à trajetória circular do satélite. A figura ilustrativa (Modelo 55) indica as trajetórias de um asteroide e um satélite nas "proximidades" da Terra, representadas, respectivamente, por uma reta e uma circunferência que se interceptam virtualmente em dois pontos (P_1 e P_2). Dentro do sistema de coordenadas cartesianas xOy estabelecido, as variáveis $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ (medidas em quilômetros) representam a posição horizontal e vertical, respectivamente, dos corpos (satélite e asteroide). Além disso, adota-se uma unidade de medida ($1u = 10.000\ km$) que tem como propósito, simplificar a escrita de grandes números, como a distância do asteroide ao centro da Terra ($3{,}4\ u$) ou a distância do satélite ao centro da Terra ($4{,}2\ u$).

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 3.3.2** (Sugestões)

O que significa que a órbita do satélite S é circular, *concêntrica* com a Terra? O que significa que a trajetória do asteroide 2012 DA14 é *secante* com a órbita circular do satélite S? Qual a altura do satélite S em relação à superfície da Terra? E o asteroide 2012 DA14, qual sua altura em relação à superfície da Terra na posição mais próxima dela? Em relação ao sistema cartesiano adotado (figura acima), qual seria uma equação da trajetória do asteroide 2012 DA14? Qual seria uma equação da trajetória do satélite S? Quais as coordenadas dos pontos P_1 e P_2? Qual a distância percorrida pelo asteroide entre esses pontos? Sabendo que a velocidade do asteroide, em sua trajetória, era de aproximadamente $7{,}8\ km/s$, em quanto tempo ele percorreu essa distância? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 3.3.2)

1) Tentar expressar (com suas palavras) o significado da órbita do satélite S ser circular e *concêntrica* com a Terra; **2)** Tentar expressar (com suas palavras) o significado de a trajetória do asteroide 2012 DA14 ser *secante* com a órbita circular do satélite S; **3)** Pesquisar qual a medida do raio da Terra (considerando que ela tem formato de uma esfera); **4)** Calcular a altura do satélite S em relação à superfície da Terra; **5)** Fazer o mesmo do item anterior para o asteroide 2012 DA14 na posição mais próxima da Terra; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 3.3.2** (Sugestão)

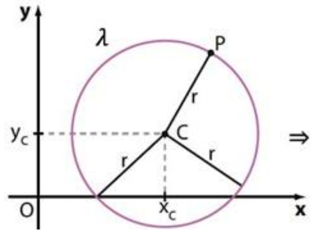
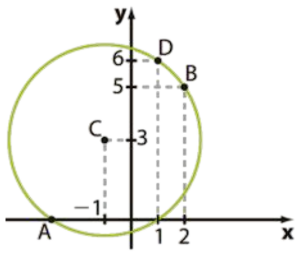
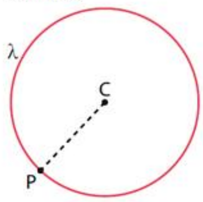
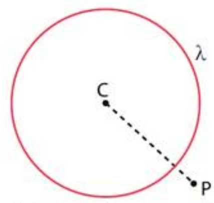
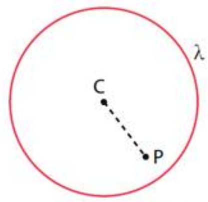
O professor pode retomar a Tarefa 1, pedindo que os estudantes expressem o que responderam nos itens 1 e 2 acerca do significado da órbita do satélite S ser circular e *concêntrica* com a Terra e da trajetória do asteroide 2012 DA14 ser *secante* com a órbita circular do satélite S. Destacar a necessidade do estudo sobre *circunferência* e sua relação com uma *reta* (que já deve ter sido estudada).

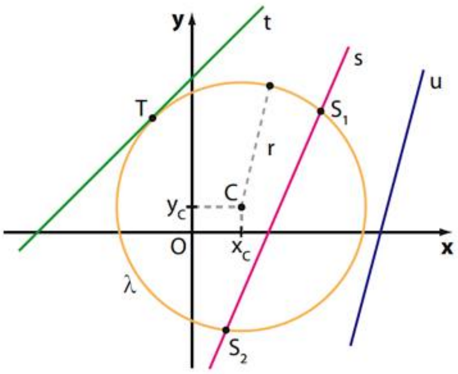
Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *circunferência* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 3.3.2** (Sugestões)

1) Expressar, a partir do sistema cartesiano adotado (Modelo 55), uma equação da trajetória do asteroide 2012 DA14; **2)** Expressar, a partir do sistema cartesiano adotado (Modelo 55), uma equação da trajetória do satélite S; **3)** Calcular as coordenadas dos pontos P_1 e P_2; **4)** Calcular a distância percorrida pelo asteroide entre esses pontos (P_1 e P_2); **5)** Calcular em quanto tempo o asteroide percorreu essa distância, sabendo que a velocidade do asteroide, em sua trajetória, era de aproximadamente $7{,}8\ km/s$ etc.

Observação: O desenvolvimento do conteúdo pode ser direcionado pela sugestão a seguir:

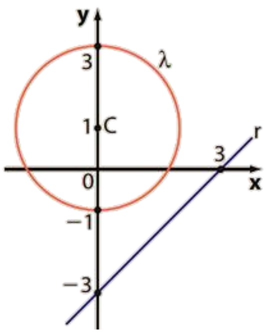
Tópicos	Desenvolvimento em resumo
Definição de circunferência	Uma **circunferência** λ de *centro* $C(x_c\,, y_c)$ e *raio* r é o lugar geométrico do plano, num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, formado pelos pontos $P(x, y)$ que distam r de C.  $\Rightarrow\ d(PC) = r$
Equações da circunferência	**Equação reduzida da circunferência** $(\boldsymbol{x - x_c})^2 + (\boldsymbol{y - y_c})^2 = \boldsymbol{r^2}$ **Equação geral da circunferência** $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + (x_c^2 + y_c^2 - r^2) = 0}$ ou $\boldsymbol{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$ onde: $a = -2x_c$; $b = -2y_c$ e $c = x_c^2 + y_c^2 - r^2$. **Exemplo:** Encontrar as equações, reduzida e geral, da seguinte circunferência: 
Posições relativas entre reta e circunferência	**Um ponto *P* em relação a uma circunferência λ** • Se $d_{PC} = r$, então **P** pertence à circunferência.  $d_{PC} = r \Rightarrow P \in \lambda$ • Se $d_{PC} > r$, então **P** é externo à circunferência.  $d_{PC} > r \Rightarrow$ **P** é externo a λ • Se $d_{PC} < r$, então **P** é interno à circunferência.  $d_{PC} < r \Rightarrow$ **P** é interno a λ **Uma reta (s, t, u) em relação a uma circunferência λ**



- $s \cap \lambda = \{S_1, S_2\}$, e **s** é secante à circunferência.
- $t \cap \lambda = \{T\}$, e **t** é tangente à circunferência.
- $u \cap \lambda = \varnothing$, e **u** é externa à circunferência.

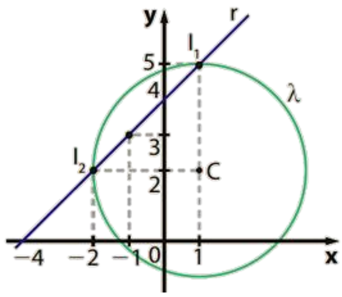
Exemplo: Verificar a posição da reta r em relação à circunferência λ em cada situação a seguir:

1) $r: x - y - 3 = 0$ e $\lambda: x^2 + (y-1)^2 = 4$



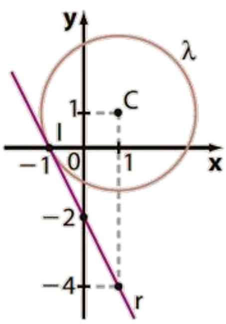
Conclusão: externa

2) $r: x - y + 4 = 0$ e $\lambda: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$



Conclusão: secante

3) $r: 2x + y + 2 = 0$ e $\lambda: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$

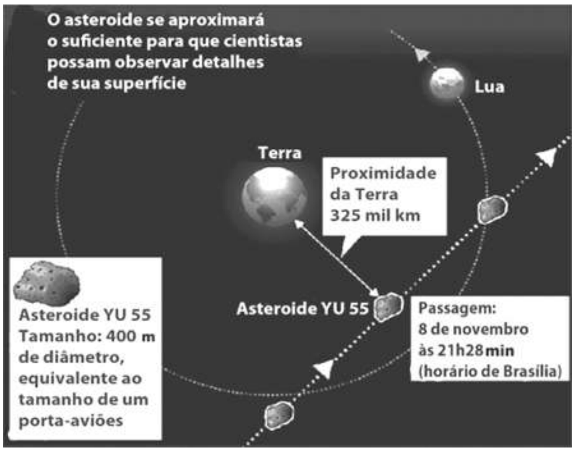


Conclusão: tangente

4ª Etapa: Aplicação

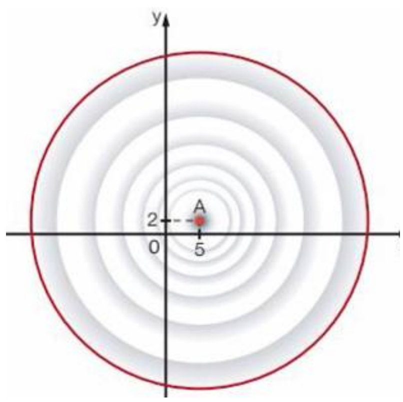
CC3.3 - Questões de Aplicação (sugestão)

Q1. (ENEM – 2012) A Agência Espacial Norte Americana (NASA) informou que o asteroide YU55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração abaixo sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre. Com base nessas informações, determine o que se pede a seguir:



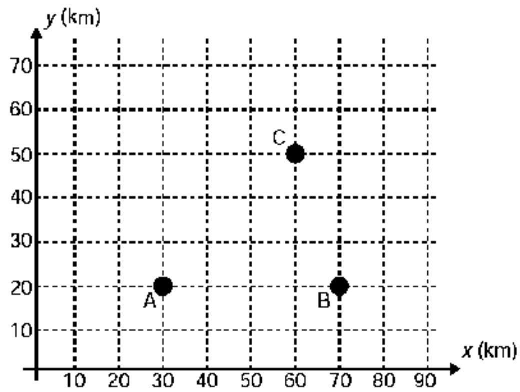
a) A equação da trajetória circular da Lua em torno da Terra, considerando que o centro da Terra é o cento dessa trajetória (Pesquise a medida do raio da Terra); **b)** A distância percorrida pelo asteroide no espaço limitado pela trajetória da Lua.

Q2. (C4/V3/q.4/p.79) No plano cartesiano ao lado, em que cada unidade representa $1\ m$, o ponto $A = (5, 2)$ representa uma fonte sonora cujo som produzido se propaga em todas as direções, atingindo uma distância máxima de $25\ m$. **a)** Determine a área máxima atingida por essa fonte sonora. Para isso, admita $\pi = 3{,}14$; **b)** Escreva a equação da circunferência que limita a área máxima atingida por essa fonte sonora. **c)** Se uma pessoa estiver posicionada, nesse sistema de coordenadas, no ponto $B = (20, 22)$, ela ouvirá o som? Por quê? **d)** E se for no ponto $C = (21, 20)$ ou $D = (19, 23)$?



Q3. (ENEM – 2013) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termo de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia.

Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano ao lado. A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. Qual o local adequado para a construção dessa torre (ponto de coordenadas)?



CC3.4 – GEOMETRIA ANALÍTICA: ESTUDO DA PARÁBOLA

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Definição da parábola • Equações da parábola • Propriedade fundamental	---------------------	C2 C5	H6 H8 H20, H22

≫ *Situação 3.4.1: "Haja luz"*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(PAIVA, 2016c, p. 196). Em um único dia, a luz solar que chega à superfície da Terra equivale a 21 vezes a energia que o mundo consome em um ano. Diante desse potencial e com o objetivo de preservar o meio ambiente, diversos países vêm desenvolvendo, com a ajuda da Matemática e da Física, tecnologias que aproveitam a energia solar, uma fonte limpa e renovável de geração de energia. Um exemplo da aplicação dessa tecnologia é a construção de fornos solares, como o conhecido forno solar de Odeillo (Figura 33), na França, um dos maiores do mundo ($53{,}5m$ de altura e $40m$ de largura), com uma potência térmica de $1.000\ kW$.

Figura 34: Forno solar de Odeillo, na França

Fonte: https://tecsol.blogs.com/mon_weblog/2019/07/le-jubil%C3%A9-du-grand-four-solaire-dodeillo-dans-les-pyr%C3%A9n%C3%A9es-orientales.html.

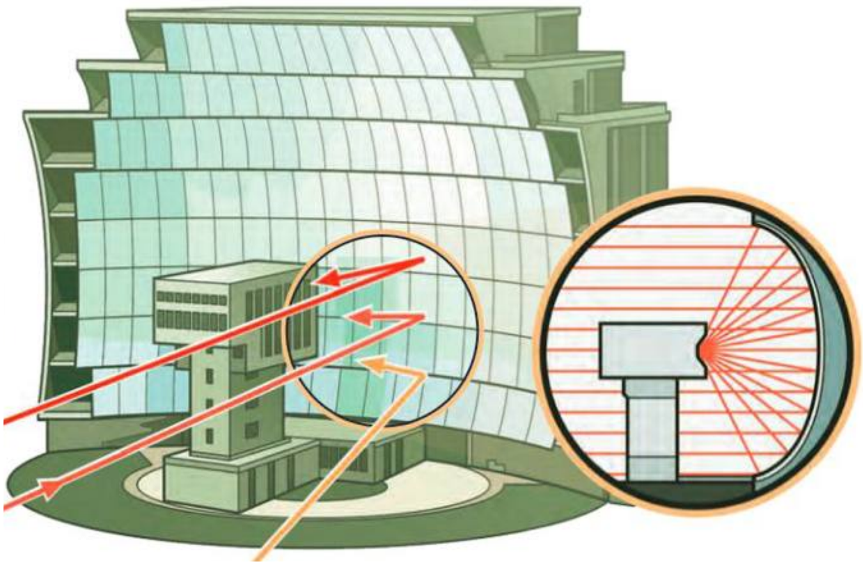
O funcionamento do forno ocorre da seguinte maneira: Dezenas de espelhos planos (63 espelhos), cuja inclinação é controlada eletronicamente, direcionam os raios do Sol para uma superfície **parabólica** (chamada *parabolóide*). Veja esquema abaixo:

Figura 35: Esquema da posição dos espelhos no forno solar de Odeillo

Fonte: Paiva (2016c, p.196).

No "superespelho" do forno os raios solares incidem na superfície parabólica formada por 9.500 espelhos ($0{,}45m \times 0{,}45m$) e são refletidos, convergindo para um ponto (chamado **foco** e cuja **distância focal** é de $18m$), onde a temperatura chega atingir $3.800\ °C$ (Figura 35). Isso permite estudar o comportamento de materiais em temperaturas extremas, como componentes de satélites, que devem suportar radiação solar intensa nas altas camadas da atmosfera. Veja a representação a seguir:

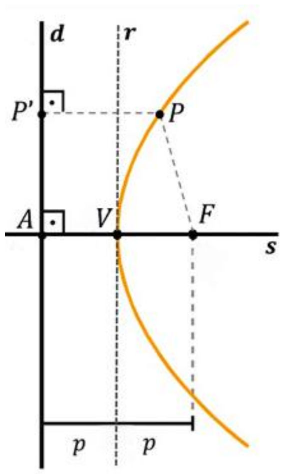
Figura 36: Ilustração do Forno solar de Odeillo



Fonte: Paiva (2016c, p.197).

A visualização de um *parabolóide* pode ocorrer a partir da rotação de uma **parábola** em torno do seu eixo de simetria $\boldsymbol{s}$. A figura a seguir representa uma parábola e sua caracterização.

Modelo 56



Considerando um sistema de coordenadas cartesianas xOy, a parábola pode ser definida como o lugar geométrico formado pelos pontos $P(x, y)$ do plano, cuja a distância de cada um até o foco F é a mesma distância deles até uma reta fixa d (chamada diretriz) que é perpendicular ao eixo de simetria s. Em síntese:

$$\boldsymbol{d(PF) = d(Pd)}$$

O ponto V é chamado vértice da parábola e $2p = AF$ é um parâmetro chamado distância focal.

Fonte: Adaptado a partir de Smole e Diniz (2016c, p. 150).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 3.4.1** (Sugestões)

O espelho que reflete os raios solares no forno (Figura 34) é uma superfície parabólica gerada pela rotação de uma parábola (Modelo 56) em torno do eixo de simetria (reta $\boldsymbol{s}$). Cada ponto dessa parábola pode ser representado por $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ num sistema de coordenadas xOy estabelecido. Além disso, o forno solar pode ser posicionado exatamente no *foco* (representado pelo ponto $\boldsymbol{F}$) da parábola.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 3.4.1** (Sugestões)

Se considerarmos que o vértice $\boldsymbol{V}$ da parábola acima está na origem do sistema de coordenadas xOy, de modo que o eixo Ox seja a reta $\boldsymbol{s}$ e Oy seja a reta $\boldsymbol{r}$, quais as coordenadas do foco $\boldsymbol{F}$? Qual a equação da reta $\boldsymbol{d}$? Desenvolvendo a igualdade $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{PF}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{Pd})$, qual a equação dessa parábola? Se a parábola que gera o espelho parabólico do forno solar de Odeillo descrito acima está nesse sistema de coordenadas xOy, qual a equação da mesma? Por que usar um espelho parabólico e não plano ou de outro formato nesse forno? Qual o diferencial da parábola nessa situação? Por que no *foco* da parábola é o lugar mais apropriado para aquecer algo nesse forno solar? etc.

Tarefa sugerida **...**

Tarefa 1: Ações exploratórias (Situação 3.4.1)

1) Considerando que o vértice $\boldsymbol{V}$ da parábola acima (Modelo 56) está na origem do sistema de coordenadas xOy, de modo que o eixo Ox seja a reta $\boldsymbol{s}$ e Oy seja a reta $\boldsymbol{r}$, expressar as coordenadas do foco $\boldsymbol{F}$; **2)** Expressar a equação da reta $\boldsymbol{d}$; **3)** Tentar expressar as distâncias $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{Pd})$ e $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{PF})$, desenvolvendo-as a partir das informações do Modelo 56; etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Discussão em torno da **Situação 3.4.1** (Sugestão)

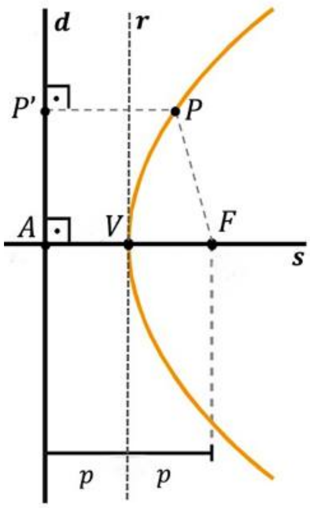
De posse das expressões relativas à $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{Pd})$ e $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{PF})$, desenvolvidas pelos estudantes no item 3 da Tarefa 1, o professor chama a atenção deles para o fato de que, para se obter a equação daquela curva (parábola), "bastava" desenvolver a igualdade $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{PF}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{Pd})$. Com isso, o professor pode orientar os estudantes a desenvolverem essa igualdade para tentar chegar à equação da parábola naquele contexto. Caso o professor perceba que os estudantes estão tendo muita dificuldade para realizar a tarefa, ele mesmo pode desenvolver, mas sempre em diálogo com os estudantes. A intenção é fazer com que os estudantes retomem conhecimentos prévios (algébricos) e percebam o processo de desenvolvimento daquela tarefa. É destacada, portanto, a necessidade do estudo mais detalhado sobre *parábola*.

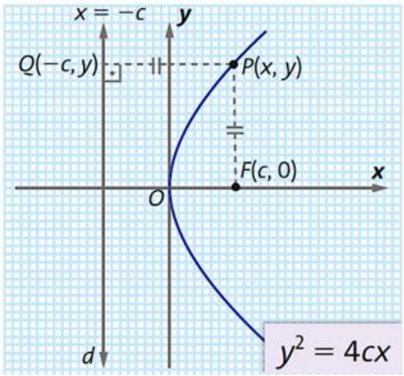
Observação: Nesse momento deverá ser desenvolvido (autonomia do professor) o conteúdo essencial sobre *parábola* que atenda às necessidades dos problemas propostos **...**

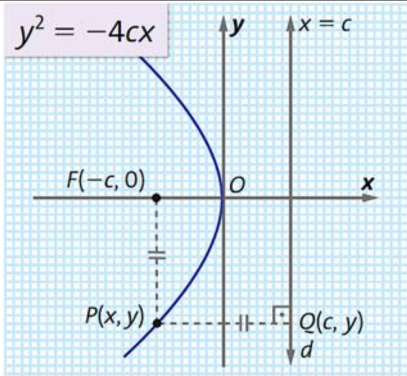
Tarefa 2: Resolver os problemas da **Situação 3.4.1** (Sugestões)

1) Considerando que o vértice $\boldsymbol{V}$ da parábola está na origem do sistema de coordenadas xOy, mas o eixo Ox seja a reta $\boldsymbol{r}$ e Oy seja a reta $\boldsymbol{s}$, expressar a equação da parábola nesse caso;
2) Expressar a vantagem desse espelho refletor ser parabólico e não de outro formato; etc.

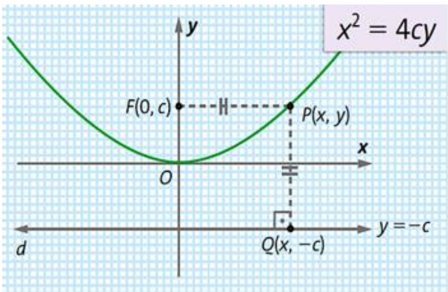
Observação: O desenvolvimento do conteúdo pode ser direcionado pela sugestão a seguir:

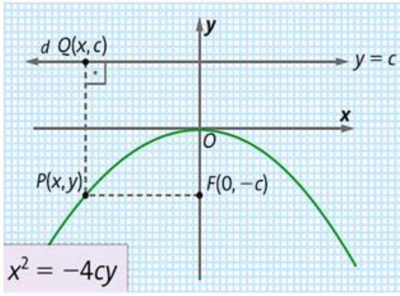
<table>
<tr><th>Tópicos</th><th>Desenvolvimento em resumo</th></tr>
<tr><td>Definição da parábola</td><td>Considerando um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, a parábola pode ser definida como o lugar geométrico formado pelos pontos $P(x, y)$ do plano, cuja distância de cada um até o foco F é a mesma distância deles até uma reta fixa d (chamada diretriz) que é perpendicular ao eixo de simetria s. Em síntese:
$$\boldsymbol{d(PF) = d(Pd)}$$
O ponto V (figura abaixo) é chamado vértice da parábola e $2c = AF$ é um parâmetro chamado distância focal.

</td></tr>
<tr><td>Equações da parábola</td><td>Equação Reduzida da parábola
(1) Centro da parábola está na origem do sistema xOy:
Eixo de simetria s está contido no eixo Ox</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


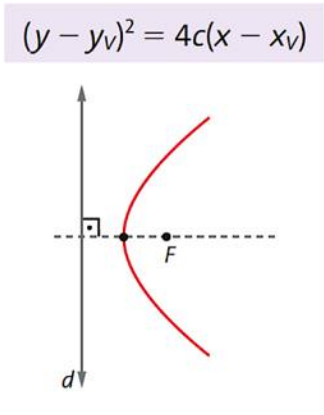


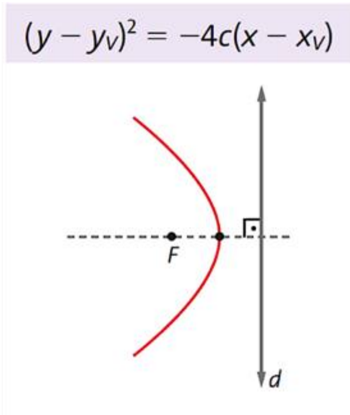
Eixo de simetria s está contido no eixo Oy

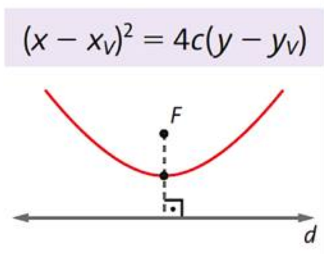


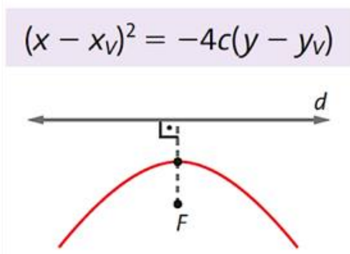


(2) Centro da parábola está fora da origem do sistema xOy:

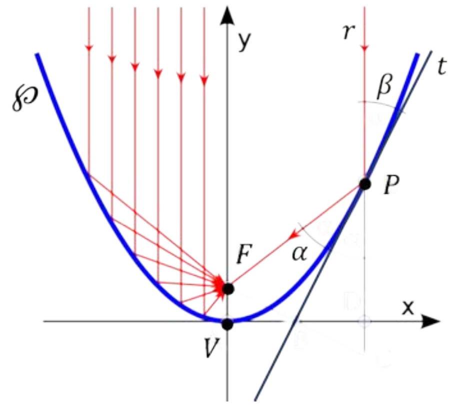








</td>
</tr>
<tr>
<td>Propriedade fundamental da parábola</td>
<td>Propriedade refletora da parábola: Considere uma parábola $\wp$ com vértice V na origem de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, o eixo de simetria s sobre o eixo Oy e foco $F(0, c)$. Se P é um ponto qualquer de $\wp$ e r é a reta que passa por P e é paralela a s, então a reta t tangente à $\wp$ no ponto P, forma ângulos congruentes ($\alpha \equiv \beta$) com as retas r e $\overleftrightarrow{PF}$.</td>
</tr>
</table>

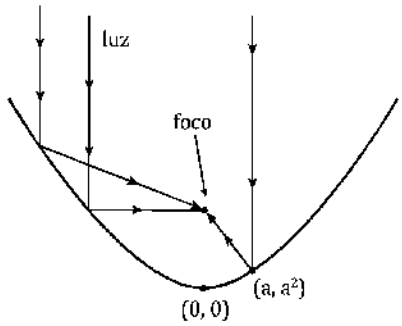
	 **Consequência:** Qualquer raio luminoso ou onda sonora, que chegue a uma superfície parabólica, paralelo a seu eixo de simetria, será refletido pela parábola na direção do foco, concentrando maior luminosidade, som ou calor. Um exemplo disso é o *forno solar de Odeillo*, cujo formato é uma parábola, descrito na Situação 3.5.**1** e ilustrado pelo Modelo 44.

4ª Etapa: Aplicação

CC3.4 - Questões de Aplicação (sugestão)

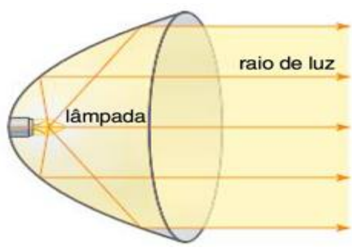
Q1. (C3/V3/q.21/p.153) Alguns telescópios usam espelhos parabólicos, pois essa forma geométrica reflete a luz que entra para um único ponto, chamado foco. O gráfico de $y = x^2$ (figura ao lado), por exemplo, tem a forma de uma parábola. A luz que vem verticalmente, de cima para baixo (paralelo ao eixo $\boldsymbol{y}$), encontra a parábola no ponto (a, a^2), e é refletida no foco, na direção da reta

$$4ay + (1 - 4a^2)x = a$$



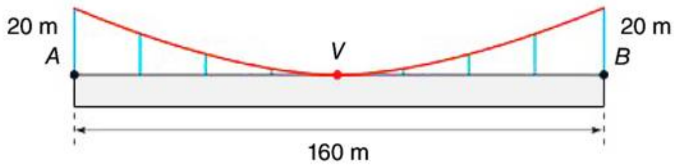
Sendo assim, determine: **a**) a equação das retas que passam pelos pontos $(1, 1)$ e (2, 4) e refletem luz no foco da parábola; **b)** o foco.

Q2. (C5/V3/q.19/p.223) Um exemplo de aplicação das parábolas é observado nos faróis de automóveis com espelhos refletores parabólicos côncavos, em que os raios de luz provenientes da lâmpada localizada no foco são refletidos pelo espelho paralelamente ao eixo de simetria do parabolóide gerado pela parábola, conforme a figura ao lado:



Considerando que, no farol de um automóvel, a lâmpada F, localizada no foco do espelho refletor parabólico côncavo de vértice V, emite um raio de luz que se reflete em um ponto P do espelho tal que o ângulo $P\hat{F}V$ mede 45° e $FV = 4\ cm$. a) Considere que o vértice da parábola esteja posicionado na origem de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy. Expresse a equação da parábola que gera o farol desse automóvel (parabolóide); **b)** Qual a distância entre o raio refletido e o eixo de simetria do parabolóide? **c)** Qual a distância PF?

Q3. (C5/V3/q.13/p.226) Um dos cabos de sustentação de uma ponte de 160 m de comprimento é um arco de parábola preso a pilares verticais de 20 m de altura. O vértice V da parábola é o ponto médio do segmento de reta que liga as bases A e B dos pilares, como mostra a figura:



Entre os pilares há seis cabos que sustentam o piso da ponte, de modo que a extremidade inferior de cada um dos cabos e o vértice V da parábola dividem o segmento AB em oito segmentos congruentes entre si. **a)** Considere que o vértice da parábola esteja posicionado na origem de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy. Expresse a equação dessa parábola; **b)** Calcule o comprimento de cada um dos cabos de sustentação do piso dessa ponte.

CC3.5 – GEOMETRIA ANALÍTICA: RETA (ETAPAS REDUZIDAS)

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Condição de alinhamento de três pontos • Inclinação de uma reta • Equação fundamental da reta • Formas da equação da reta • Posições relativas de duas retas	Conhecimento algébrico Conhecimento geométrico	C2 C5	H7 H8 H19 H20 H21

≫ *Situação 3.5.1: Impacto profundo!*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(PAIVA, 2016c, p. 162, modificado). Você assistiu esse filme? (*Impacto Profundo*) É um filme catastrófico de ficção científica lançado em 1998. O enredo do filme descreve as tentativas de um grupo que se prepara para destruir um grande cometa que está prestes a se chocar com a Terra e ameaça destruir toda a humanidade. Provavelmente esse filme (e outros do mesmo gênero, como *Armageddon*, lançado também em 1998) foi inspirado nas notícias reais divulgadas nesse mesmo ano (1998).

Figura 37: Filmes de 1998 – *Impacto Profundo* e *Armageddon*

Fonte: https://www.spacetrek66.com.br/DVD_IMPACTO_PROFUNDO_MORGAN_FREEMAN/prod-1889593/, http://dvdslist.com.br/armageddon/.

O mundo viveu momentos de angústia quando foi noticiado, em março de 1998, que em outubro de 2028 ocorreria a colisão da Terra com um imenso asteroide de diâmetro estimado entre 1,2 e 2,4 km, batizado de 1997XF11. Felizmente, houve apenas um erro de cálculo dos cientistas da Nasa. Novos dados sobre as posições do asteroide mostraram que a menor distância entre ele e a Terra será de 960.000 km (aprox.), portanto uma distância segura para nosso planeta.

Cálculos desse tipo são realizados por meio das **equações das trajetórias** dos astros envolvidos e de estudos sobre as possíveis posições relativas dessas trajetórias, entre outros parâmetros, como a velocidade de cada astro. O problema a seguir ilustra, de modo simplificado, a situação descrita acima. Os cientistas do observatório astronômico da Nasa constataram que esse imenso asteroide, em **trajetória retilínea**, poderia estar em rota de colisão com o planeta Terra e para avaliar as possibilidades de colisão, os astrônomos fixaram um sistema cartesiano xOy no plano da trajetória do asteroide. Para isso, tomaram como referência as distâncias e os ângulos determinados pela Terra e duas estrelas fixas, adotando a Terra como origem O e dividindo os eixos coordenados na unidade u, com $u = 100.000\ km$. Em relação ao sistema xOy, as **equações paramétricas** $\boldsymbol{x = f(t)}$ e $\boldsymbol{y = g(t)}$ da trajetória do asteroide, em função do tempo t (em anos), podem ser expressas por:

Modelo 57

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \dfrac{t}{3} - 2} \\ \boldsymbol{y = -\dfrac{t}{4} + \dfrac{27}{2}} \end{cases}$$

Desse modo, os astrônomos concluíram que não haverá colisão!

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 3.5.1** (Sugestões)
As variáveis $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ representam a posição do asteroide em cada instante $\boldsymbol{t}$ (em anos), dentro do sistema de coordenadas cartesianas xOy estabelecido.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 3.5.1** (Sugestões)
Na situação apresentada, o que significa que a trajetória do asteroide é *retilínea*? Considerando o instante zero ($t = 0$) como o momento em que os cientistas deduziram as equações paramétricas acima (em 1998), qual a posição do asteroide, no sistema cartesiano xOy, nesse momento? E após 6 anos? E após 12 anos? No 1º ano do Ensino Médio, você estudou que a equação da função Afim (Polinomial do 1º grau) é dada por $\boldsymbol{y = mx + n}$, a qual representa, graficamente, uma reta. Diz-se que essa expressão é a **equação reduzida** de uma reta. A partir das equações paramétricas da reta acima (Modelo 57), como é sua equação reduzida? Uma reta pode ser expressa, ainda, por outra equação. É a **equação geral** da reta, representada por $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$. Nesse caso, qual é essa equação para a trajetória do asteroide descrito acima? Foi dito que a menor distância que o asteroide passará da Terra é 960.000 km aproximadamente. Como calcular essa distância? Em que ano isso ocorrerá? etc.

CC3.6 – GEOMETRIA ANALÍTICA: ELIPSE (ETAPAS REDUZIDAS)

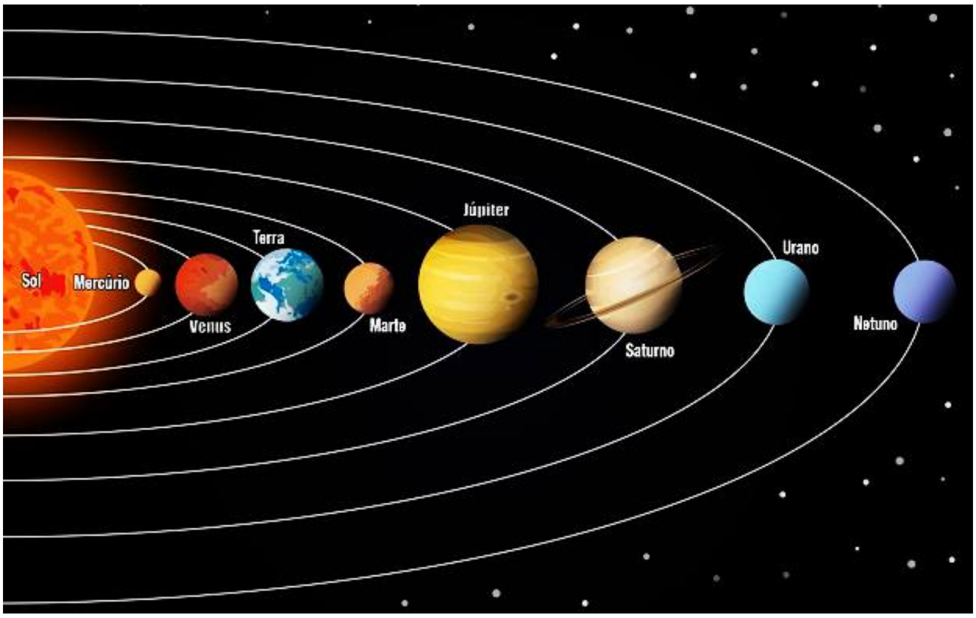
Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Definição da elipse • Equações da elipse • Propriedade fundam. da elipse	---------------------	C2 C5	H6 H8 H20, H22

≫ ***Situação 3.6.1*: *Os planetas... cada um em seu caminho!***

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(DANTE, 2016c, p. 170). "A diversidade dos fenômenos da Natureza é tão vasta e os tesouros escondidos nos céus tão ricos, precisamente para que a mente humana nunca tenha falta de alimento", afirmou Johannes Kepler (1571-1630), astrônomo alemão que passou 17 anos estudando/pesquisando dados acumulados em 20 anos de observações (pré-telescópicas) pelo matemático dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), cargo que Kepler assumiu após a morte de Brahe. Desses estudos surgiram as **leis de Kepler**, que explicam o movimento planetário.

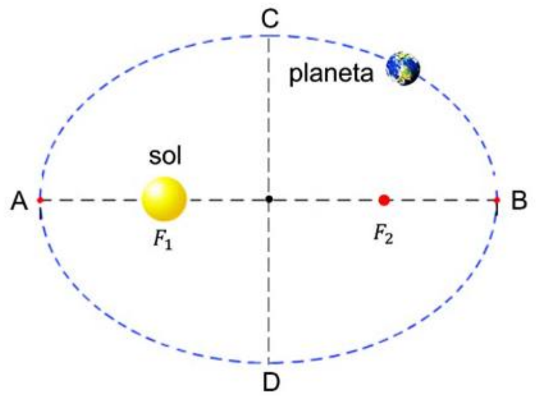
Figura 38: Sistema Solar e a trajetória dos planetas



Fonte: https://www.estudopratico.com.br/lista-planetas-sistema-solar/.

Com a morte de Brahe em 1601, Kepler deu continuidade à análise dos dados e determinou que a trajetória dos planetas em relação ao Sol não eram circunferências como se pensava e sim **elipses**. No ano de 1609, Kepler enuncia a lei das órbitas elípticas (**1ª lei de Kepler**): "A órbita de cada planeta é uma elipse com o Sol posicionado em um dos focos". Uma consequência dessa lei é que a distância do Sol a um planeta varia ao longo do seu movimento orbital, sendo mínima quando o planeta ocupa a posição A - *periélio*, e máxima quando ocupa B - *afélio*.

Modelo 58



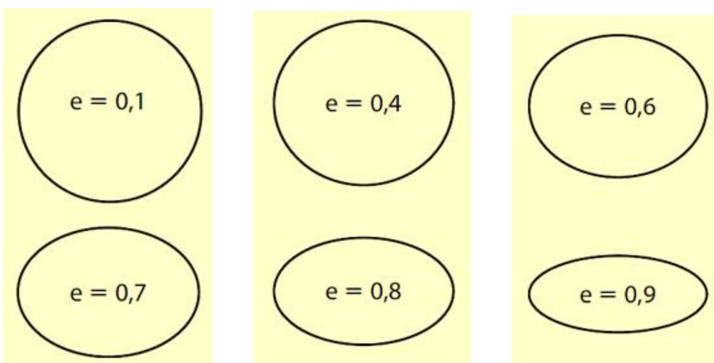
$$d(PF_1) + d(PF_2) = 2a$$

Fonte: Elaborado pelo autor baseado em Dante (2016c, p. 170).

Obs.: F_1 e F_2 são os **focos** da elipse, a distância AB é chamada **eixo maior** (indicado por $2a$), CD é o **eixo menor** (indicado por $2b$) e F_1F_2 (indicado por $2c$) é a **distância focal**.

Durante muito tempo, acreditou-se que as órbitas dos planetas fossem circulares, onde o sol ocupava o centro da circunferência. O motivo desse equívoco é justificável, uma vez que as *elipses*, nesse caso, eram quase circunferências. Assim, as *elipses* podem ser entendidas como circunferências levemente "achatadas" que passam a ter "dois centros" (os focos), cujo "achatamento" é medido por sua **excentricidade** (**e**), definida pela razão entre a *distância focal* e o *eixo maior* da elipse. Uma circunferência tem excentricidade zero, logo, quanto mais próximo de zero for a excentricidade, menos "achatada" é a elipse. A figura abaixo ilustra essa propriedade e apresenta a excentricidade das órbitas elípticas dos planetas do sistema solar.

Figura 39: Excentricidade dos planetas do Sistema Solar



Planeta	Excentricidade
Mercúrio	0,206
Vênus	0,007
Terra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,048
Saturno	0,056
Urano	0,046
Netuno	0,009

Fonte: Iezzi et al. (2016c, p. 96) e Dante (2016c, p. 170).

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 3.6.1** (Sugestões)

O modelo apresentado (Modelo 58), construído dentro de um sistema de coordenadas cartesianas xOy estabelecido, representa a trajetória dos planetas do sistema solar. Trata-se de uma curva chamada *elipse*, cujos **focos** são indicados pelos pontos $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$, o **eixo maior** (representado por $\mathbf{2a}$) é a distância $\boldsymbol{AB}$, o **eixo menor** (representado por $\mathbf{2b}$) é a distância $\boldsymbol{CD}$ e a **distância focal** (representado por $\mathbf{2c}$) é o segmento $\boldsymbol{F_1F_2}$. Além disso, o ponto genérico $\boldsymbol{P(x,y)}$ indicado no modelo (Modelo 58), representa a posição do planeta em sua trajetória dentro do sistema de coordenadas xOy fixado.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 3.6.1** (Sugestões)

De acordo com as informações sobre a trajetória elíptica dos planetas do Sistema Solar apresentadas acima, qual dos planetas tem a trajetória mais próxima de um movimento circular? Por quê? A fim de representar a trajetória elíptica dos planetas num sistema de coordenadas cartesianas xOy, considere que os eixos, *maior* e *menor*, estão sobre os eixos coordenados Ox e Oy, respectivamente. Nesse caso, como seria uma expressão, uma equação dessa elipse? Considerando que a órbita do planeta Terra esteja representada nesse sistema cartesiano, qual a equação de sua trajetória orbital? Se considerarmos que os eixos, maior e menor, estão agora sobre os eixos coordenados Oy e Ox, respectivamente, como seria a equação da elipse nesse sistema? Sabe-se que $\boldsymbol{a}$ é o semieixo maior, $\boldsymbol{b}$ é o semieixo menor e $\boldsymbol{c}$, a semi-distância focal de uma elipse. Qual a relação entre essas três medidas? Qual a menor distância que a Terra fica do sol? E a maior? etc.

≫ *Situação 3.6.2: Sorria, você está sendo filmado!*

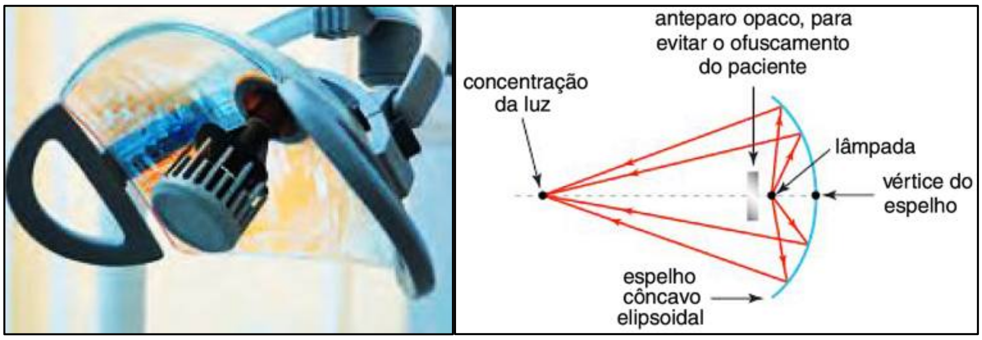
1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(PAIVA, 2016c, p. 205, ampliado). Um sorriso (sincero), além de nos fazer “aparecer bem na foto”, entre tantas coisas, pode indicar força, superação e paz em meio às várias dificuldades da vida. O trecho da música *Smile* (“Sorria” em inglês), escrita por Charles Chaplin (1889-1977)[8] , expressa de certa forma esse sentimento quando afirma: “Sorria e talvez amanhã você verá o sol brilhando pra você. Ilumine seu rosto com alegria.”. Sorrir, portanto, é uma disposição que deve estar presente em nosso cotidiano e o cuidado com nossa saúde física, como, por exemplo, o cuidado com os dentes, é uma das ações que pode nos ajudar nesse objetivo. Portanto, visitar um(a) dentista regularmente é de fundamental importância para manter esse cuidado!

Algo curioso, no entanto, que talvez muitas pessoas não saibam, é que nos consultórios odontológicos os dentistas usam um tipo de *refletor de luz* que têm formato **elíptico** (figura abaixo), cujo objetivo é concentrar o máximo de luz onde se está trabalhando, além de evitar que os raios luminosos ofusquem a visão do paciente, causando um certo desconforto.

[8] ator, diretor, produtor, humorista, empresário, escritor, comediante, dançarino, roteirista e músico britânico. Foi um dos atores da era do cinema mudo, notabilizado pelo uso de mímica e da comédia pastelão.

Modelo 59



Fonte: Paiva (2016c, p. 205).

Conforme o esquema ilustrativo acima, esse refletor possui uma lâmpada situada no **foco** mais próximo da superfície do espelho de onde os raios luminosos são emitidos em direção ao outro **foco** situado no local onde irá atuar o dentista.

Sabe-se que um dentista possui em seu consultório uma luminária com espelho refletor **elipsoidal côncavo** como o apresentado na figura acima em que a lâmpada está a $6\ cm$ do vértice do espelho. Um paciente acomodou-se na cadeira e o dentista ajustou a posição do espelho de modo que os raios refletidos se concentram em um dente do paciente. Sabe-se também que a *excentricidade* desse espelho elipsoidal é $0{,}85$.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 3.6.2** (Sugestões)

O refletor de luz (Modelo 59) tem formato de uma *elipse*, construída a partir de um sistema de coordenadas cartesianas xOy estabelecido, cujos **focos** ($\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$) indicam os pontos do plano nos quais estão localizadas a lâmpada e a concentração da luz refletida, respectivamente. Além disso, a lâmpada está a $6\ cm$ do vértice do espelho, o qual tem **excentricidade** de $0{,}85$.

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 3.6.2** (Sugestões)

Por que é mais vantajoso o refletor de luz num consultório odontológico ser elíptico e não de outro tipo? Qual a distância entre a lâmpada e o dente do paciente? Qual a medida do eixo maior ($2a$) da elipse geratriz do espelho refletor elipsoidal? E do eixo menor ($2b$)? Se considerarmos que a elipse geratriz do espelho refletor elipsoidal côncavo está representada num sistema cartesiano ortogonal xOy, com eixo maior sobre o eixo coordenado Ox e eixo menor sobre Oy, como é a equação dessa elipse? etc.

CC3.7 – GEOMETRIA ANALÍTICA: HIPÉRBOLE (ETAPAS REDUZIDAS)

Tópicos do Conteúdo	Objetos de Conhecimento	Competência	Habilidade
• Definição da hipérbole • Equações da hipérbole • Propriedade fund. da hipérbole	----------------------	C2 C5	H6, H8 H20, H22

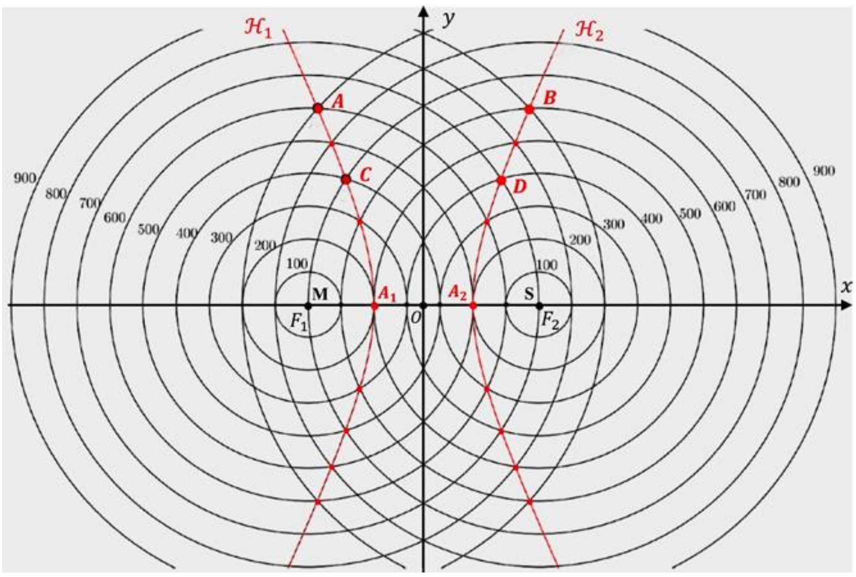
≫ *Situação 3.7.1*: *Navegação hiperbólica... encontrando um navio em alto mar!*

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(SOUZA; GARCIA, 2016c, p. 103, ampliado). A navegação hiperbólica utiliza o conceito de **hipérbole** (figura abaixo) para obter as **linhas de posição** (LDP) que definem a localização de um navio. Essas LDP podem ser determinadas por diferença de fase, como o sistema *Decca*, ou por diferença de tempo, como o LORAN (abreviatura, em inglês, de *Long Range Navigation* ou Navegação de Longa Distância). Nesse sistema, duas emissoras de ondas de rádio, uma chamada **Mestra** (**M**), e outra, Escrava ou **Secundária** (**S**), localizadas em pontos distintos na terra firme, emitem simultaneamente seus sinais, que são recepcionados por um navio no mar.

A figura abaixo (Modelo 60) mostra algumas posições de um navio em alto mar (pontos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$). Os pontos F_1 e F_2 estão em terra firme e indicam as posições de **M** e **S**, respectivamente. As circunferências concêntricas com centros em F_1 e F_2 representam os sinais das ondas de rádio emitidos pelas estações **M** e **S**. Os valores destacados em cada circunferência indicam o tempo (em *microssegundos* - μs, onde $1\mu s = 10^{-6}$s) que o sinal leva para chegar em um ponto que sobre essas circunferências. De acordo com os dados, um sinal de rádio, para se propagar de **M** (ponto F_1) ao navio que se encontra no ponto $\boldsymbol{A}$, gasta $600\ \mu s$; por outro lado, um sinal de rádio gasta $900\ \mu s$ para se propagar do transmissor **S** (ponto F_2) ao mesmo navio em $\boldsymbol{A}$.

Modelo 60



Fonte: Elaborado pelo autor baseado em Bortolotti (2015, p. 81)[9].

Note que se a posição do navio for qualquer um dos quatro pontos ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$), ele está situado exatamente sobre uma das curvas $\mathcal{H}_1$ ou $\mathcal{H}_2$, que é o *lugar geométrico* do plano formado pela interseção dos sinais de rádio emitidos por **M** e **S**, que são circunferências, e cuja diferença de seus raios, em cada ponto dessas curvas, é um valor constante.

Assim, para identificar a posição do navio no mar procede-se da seguinte forma: o receptor LORAN do navio mede a diferença de tempo em que os sinais foram recebidos de **M** e **S** (t_1 e t_2, respectivamente) e garante com isso que sua posição seja identificada sobre a curva vermelha, por exemplo, pois nela, em qualquer ponto (seja em $\mathcal{H}_1$ ou $\mathcal{H}_2$), a diferença $|t_2 - t_1|$ é constante. Para isso, utilizando-se o conceito de velocidade média $\left(v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}\right)$, e considerando que toda onda de rádio na atmosfera tem velocidade constante próxima à velocidade da luz ($c = 300\,000\ km/s$), conclui-se que a diferença $|d_2 - d_1|$, onde d_1 e d_2 representam as distâncias percorridas pela onda até o navio, é constante também.

Em resumo, a diferença (não negativa) entre a distância da posição do navegante (num ponto genérico $\boldsymbol{P}(x, y)$ sobre a curva $\mathcal{H}_1$ ou $\mathcal{H}_2$ em um sistema de coordenadas xOy) até F_1 e a distância dessa mesma posição até F_2 é constante ($\boldsymbol{K}$), expressa por $|\boldsymbol{d}(\boldsymbol{PF_2}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{PF_1})| = \boldsymbol{K}$.

Identificação de Variáveis a partir da **Situação 3.7.1** (Sugestões)
O navio está situado exatamente sobre uma das curvas $\mathcal{H}_1$ ou $\mathcal{H}_2$ (pontos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$), que é o *lugar geométrico* do plano formado pela interseção dos sinais de rádio emitidos por **M** e **S**, que são circunferências, e cuja diferença de seus raios, em cada ponto dessas curvas, é um valor constante $\boldsymbol{K}$. O ponto genérico $\boldsymbol{P}(x, y)$ sobre a curva $\mathcal{H}_1$ ou $\mathcal{H}_2$ representa a posição do navegante (num um sistema de coordenadas cartesianas xOy), cuja expressão é dada por $|\boldsymbol{d}(\boldsymbol{PF_2}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{PF_1})| = \boldsymbol{K}$. O lugar geométrico (curvas $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ da figura acima) descrito por essa expressão é chamado **hipérbole** e os pontos $\boldsymbol{A_1}$ e $\boldsymbol{A_2}$ são seus *vértices*. Além disso, pode-se considerar coeficientes $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, tais que $\boldsymbol{a} = OA_1 = OA_2$, $\boldsymbol{b} = OB_1 = OB_2$ e $\boldsymbol{c} = OF_1 = OF_2$, e ressaltar, ainda, que B_1 e B_2 são pontos sobre o eixo Oy, simétricos em relação ao eixo Ox tais que $A_1B_1 = A_1B_2 = A_2B_1 = A_2B_2 = \boldsymbol{c}$;

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 3.7.1** (Sugestões)
Considerando que uma hipérbole esteja definida num sistema de coordenadas cartesianas xOy, onde seus ramos sejam simétricos em relação ao eixo Oy e, seus **focos** (pontos F_1 e F_2)

[9] BORTOLOTTI, F. P. **O sistema Loran como contexto para o estudo de hipérbole** (Dissertação de mestrado profissional em Matemática). Londrina: UEL, 2015.

e **vértices** (pontos A_1 e A_2) estejam sobre o eixo Ox como mostrado no Modelo 60, podemos escrever uma **equação** para essa hipérbole, desenvolvendo $|d(PF_2) - d(PF_1)| = K$. Como seria essa equação? Sabe-se que no sistema cartesiano xOy do Modelo 60 os espaçamentos das circunferências indicam não só tempos, mas também distâncias (em km). Cada espaçamento de tempo indicado ($100\ \mu s$) equivale a quantos quilômetros? Como seria, então, a equação da hipérbole (curva vermelha) nesse sistema de coordenadas, utilizando essa escala de distâncias? Quais as coordenadas do navio, nesse sistema de coordenadas, se ele estiver localizado no ponto $\boldsymbol{A}$? E se estiver no ponto $\boldsymbol{D}$? Se duas estações LORAN (**M** e **S**) estão a uma distância de $400\ km$ uma da outra ao longo de um litoral e um navio, em alto mar, registra uma diferença de tempo de $860\ \mu s$ entre os dois sinais recebidos de **M** e **S**, qual a equação da hipérbole sobre a qual o navio está localizado? Sabe-se que esse navio está a $104\ km$ de **M** aproximadamente. Quais as coordenadas de sua posição? etc.

REFERÊNCIAS

[C1] DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações (Ensino Médio). 3. ed. - São Paulo: Ática, 2016. Vol. 1, 2, 3.

[C2] IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática**: ciência e aplicações (Ensino Médio). 9. ed. - São Paulo: Saraiva, 2016. Vol. 1, 2, 3.

[C3] SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo** (Ensino Médio). 1. ed. - São Paulo: Saraiva, 2016. Vol. 1, 2, 3.

[C4] SOUZA, J. R.; GARCIA, J. S. R. # **Contato Matemática** (Ensino Médio). 1. ed. - São Paulo: FTD, 2016. Vol. 1, 2, 3.

[C5] PAIVA, M. **Matemática Paiva** (Ensino Médio). 3. ed. - São Paulo: Moderna, 2016. Vol. 1, 2, 3.

[C6] LEONARDO, F. M. (Org.). **Conexões com a Matemática** (Ensino Médio). 3. ed. - São Paulo: Moderna, 2016. Vol. 1, 2, 3.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matriz de Referência para o ENEM 2009**. Brasília: INEP/MEC, 2009.

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio (2009-2018). **INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação.

SOUSA, E, S. **Análise de Modelos**: um método de ensino de Matemática na Educação Básica (Qualificação de doutorado em 27.03.2018). Porto Alegre: PUCRS, 2018.

MARISTA

PUCRS

Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
Pró-Reitoria de Graduação
Av. Ipiranga, 6681 - Prédio 1 - 3º. andar
Porto Alegre - RS - Brasil
Fone: (51) 3320-3500 - Fax: (51) 3339-1564
E-mail: prograd@pucrs.br
Site: www.pucrs.br