



ESCOLA DE
CIÊNCIAS

Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

PUCRS

ESCOLA DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

RODRIGO CASTELO BRANCO HERZOG

A PERCEPÇÃO DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA SOBRE A ALEATORIEDADE

Porto Alegre

2019

PÓS-GRADUAÇÃO - *STRICTO SENSU*



Pontifícia Universidade Católica
do Rio Grande do Sul

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS
E MATEMÁTICA

RODRIGO CASTELO BRANCO HERZOG

**A PERCEPÇÃO DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA SOBRE A
ALEATORIEDADE**

Porto Alegre

2019

RODRIGO CASTELO BANCO HERZOG

**A PERCEÇÃO DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA SOBRE A
ALEATORIEDADE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Lori Viali

Porto Alegre

2019

Ficha Catalográfica

H582p Herzog, Rodrigo Castelo Branco

A percepção de licenciandos em Matemática sobre a aleatoriedade / Rodrigo Castelo Branco Herzog . – 2019.
61p.

Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, PUCRS.

Orientador: Prof. Dr. Lori Viali.

1. Probabilidade no ensino. 2. Educação Estatística. 3. Aleatoriedade. 4. Acaso. 5. Determinismo. I. Viali, Lori. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da PUCRS
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Bibliotecária responsável: Salete Maria Sartori CRB-10/1363

RODRIGO CASTELO BRANCO HERZOG

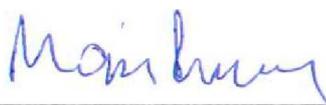
A PERCEPÇÃO DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA SOBRE A
ALEATORIEDADE"

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

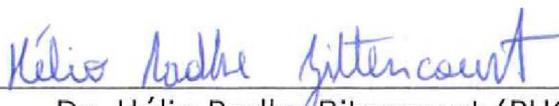
Aprovada em 28 de março de 2019, pela Banca Examinadora



Dr. Lori Viali (Orientador - PUCRS)



Dr. Regis Alexandre Lahm (PUCRS)



Dr. Hélio Radke Bitencourt (PUCRS)

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO N^o 343

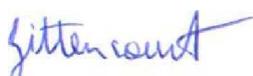
Aos vinte e oito (28) dias do mês de março de dois mil e dezenove (2019), no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, foi lavrada esta ata para registrar que o aluno Rodrigo Castelo Branco Herzog, ingressante neste Programa no ano de dois mil e dezessete (2017), satisfaz os requisitos exigidos para defesa de dissertação. A dissertação intitulada "A PERCEPÇÃO DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA SOBRE A ALEATORIEDADE" foi apresentada em sessão pública de defesa, que se realizou na Escola de Ciências. A Comissão Examinadora foi constituída pelos seguintes docentes; Dr. Lori Viali, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Presidente da Comissão, Dr. Regis Alexandre Lahm, da Escola de Humanidades da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul e o Dr. Hélio Radke Bitencourt, da Escola de Ciências da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Após a análise pela Comissão Examinadora, a dissertação foi considerada APROVADA e encerrou-se a sessão, A candidata terá sessenta (60) dias para as devidas revisões com vistas à confecção do diploma. E, para constar, lavrou-se a presente ata.



Dr. Lori Viali



Regis Alexandre Lahm



Dr. Hélio Radke Bitencourt



Rodrigo Castelo Branco Herzog

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo investigar a percepção de doze estudantes formandos em licenciatura em Matemática de universidades da região metropolitana de Porto Alegre sobre aleatoriedade, dentro do contexto de educação probabilística e Educação Estatística. Além disso, foram verificadas as concepções destes estudantes sobre termos relacionados, como Determinismo e Acaso. Ainda, foram verificadas a definição que estes estudantes possuem sobre Probabilidade, e a relação que eles estabelecem com aleatoriedade e com a Estatística. Este trabalho foi um estudo de caso, e como método de análise foi utilizada a Análise Textual Discursiva. Os dados foram coletados por meio de entrevistas pessoais com os estudantes, e a partir da análise do Corpus, foram geradas categorias para cada um dos objetivos acima. Dentre os principais resultados obtidos, pode-se perceber que os estudantes possuem uma concepção sobre aleatoriedade própria, no entanto, não a relacionam com a Probabilidade, da mesma forma como ocorre com o conceito de acaso. Em relação ao Determinismo, os estudantes mostraram um desconhecimento do termo. Já sobre a relação entre Probabilidade e Estatística, os participantes da pesquisa mostraram ter dificuldade em diferenciar os dois conceitos e ao definir Estatística. Ainda, os estudantes reconheceram o Aleatório e a Probabilidade em diversas situações da realidade, embora muitas vezes se referindo ao lançamento de dados ou moedas. Estes resultados sugerem que a formação dos professores em Matemática é insuficiente para lecionar Probabilidade e Estatística, visto que normalmente há apenas uma disciplina no curso e ensinada junto as engenharias. Como os próprios estudantes dessa pesquisa demonstraram, com uma formação tão superficial é difícil entender de forma satisfatória esses conceitos de forma conectada a realidade, um pré-requisito necessário para um ensino eficaz.

Palavras-Chaves: Probabilidade no Ensino; Educação Estatística; Aleatoriedade; Acaso; Determinismo.

ABSTRACT

The objective of this study was to investigate the perception of a sample of students graduated in mathematics from universities in the metropolitan region of Porto Alegre on randomness, within the context of probabilistic education and statistical education. Moreover, the conceptions of these subjects on related terms, such as Determinism and Chance, were verified as the definition that these students have about Probability, and the relation they establish with randomness and with Statistics. This work was a case study, and as a method of analysis, we used the Discursive Textual Analysis. Data were collected through personal interviews with the students, and from the Corpus analysis, categories were generated for each of the above objectives. Among the main results obtained, is that the students have a conception about their own randomness, however, they do not relate it strongly to the probability, just as happens with the concept of chance. In relation to determinism, the students showed an ignorance of the term. Regarding the relationship between probability and statistic, the students showed difficulty in differentiating the two concepts and in defining statistics. Still, the students recognized randomness and probability in various situations of reality, although often referring to the casting of dice or coins. These results suggest that learning of probability and statistic by mathematics teacher's is insufficient to teach these subjects, since there is usually only one discipline in the math course and it is taught together with engineering courses. As the students of this research have shown, a superficial formation, it is difficult to satisfactorily understand these concepts in a way connected to reality, a prerequisite for effective teaching.

Keywords: Probability in Teaching; Statistical Education; Randomness; Random; Determinism.

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

BNCC – Bases Nacionais Comuns Curriculares

DCN – Diretrizes Curriculares Nacionais

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Categorias geradas para a concepção de aleatoriedade dos participantes	43
Figura 2 - Categorias geradas para exemplos do aleatório.....	45
Figura 3 - Categorias geradas para a concepção de Determinismo	47
Figura 4 - Categorias geradas para concepção do acaso.....	49
Figura 5 - Categorias geradas para a relação de Probabilidade com aleatoriedade.	50
Figura 6 - Categorias geradas para a definição de Probabilidade.....	52
Figura 7 - Categorias geradas para a importância de Probabilidade	54
Figura 8 - Categorias geradas para a relação de Probabilidade com Estatística.....	57

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Perguntas da entrevista	41
Quadro 2 - Objetivos e perguntas relacionadas	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Perfil dos participantes de pesquisa.....	40
Tabela 2 - Formação dos participantes de pesquisa.....	40

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
1.1 Objetivo geral e o problema de pesquisa	18
1.2 Objetivos específicos	20
2. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS	21
2.1 Determinismo	21
2.2 Indeterminismo	23
2.3 Acaso	24
2.4 Aleatoriedade	25
2.4.1 A evolução do conceito	26
2.4.2 Aleatoriedade de uma sequência	27
2.5 A aleatoriedade e o ensino de Probabilidade e Estatística	27
2.6 Probabilidade	29
2.6.1 Probabilidade Clássica	29
2.6.2 Probabilidade Frequentista	30
2.6.3 Probabilidade Axiomática	30
2.6.4 Probabilidade Subjetiva	30
2.7 Estatística	31
2.8 Considerações	31
3. O ENSINO DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NO BRASIL	33
3.1 Os PCN	33
3.2 As BNCC	34
3.3 A Probabilidade e a Estatística nos currículos da Matemática	35
3.4 A formação de professores	36
4. METODOLOGIA	38
4.1 Paradigma e tipo de pesquisa	38

4.2 Método de análise	38
4.3 Participantes de pesquisa	39
4.4 Formação dos participantes	40
4.5 Instrumentos de coleta	41
5. ANÁLISE E RESULTADOS.....	42
5.1 A concepção de aleatoriedade	42
5.2 Reconhecer fenômenos aleatórios na realidade	44
5.3 A concepção de Determinismo.....	46
5.4 A concepção de acaso	48
5.5 Como relacionam aleatoriedade com Probabilidade	50
5.6 Definição de Probabilidade.....	51
5.7 Importância da Probabilidade.....	53
5.8 Relação da Probabilidade com Estatística	56
6. CONSIDERAÇÕES E RESPOSTA AOS OBJETIVOS	58
6.1 Formação dos licenciandos para lecionar	58
6.2 Concepção dos licenciandos em Probabilidade	58
6.3 Concepção dos licenciandos em aleatoriedade	59
7 CONSIDERAÇÕES	62
REFERÊNCIAS.....	64

1 INTRODUÇÃO

A incerteza e a aleatoriedade estão presentes nos mais diversos aspectos da realidade, sejam eles físicos, sociais ou econômicos. Não se tem certeza de qual será o sexo de um bebê, o comportamento de um ativo financeiro ao longo do tempo, ou a quantidade de chuvas em um mês. No máximo, pode-se determinar a probabilidade de ocorrência de alguns destes eventos e com base nela tomar decisões.

Para ajudar recorre-se a Estatística, a ciência da análise de dados, que auxilia na tomada de decisão nas mais diversas áreas do conhecimento. Ela se utiliza da Probabilidade, campo da Matemática que modela a incerteza atribuindo valores a ocorrência de um evento. Já a Estatística, diferentemente da Probabilidade, não é considerada um campo da Matemática, mas uma ciência que se utiliza dela, realizando experimentos e fazendo generalizações a partir dos resultados. Geralmente, por falta de recursos financeiros ou de tempo, não é viável estudar uma população inteira. Nesse caso, utiliza-se parte da população, denominada de amostra, buscando-se, então, generalizar o resultado obtido para toda a população. Esse processo é conhecido como Inferência Estatística, área da Estatística que procura estimar algum parâmetro de uma população a partir de uma amostra com um determinado grau de confiança. Essa estimativa apresentará um erro, devido à variação amostral, mas esse erro poderá ser mensurado por meio da Probabilidade, se a amostra utilizada for aleatória. Portanto, a Estatística e a Probabilidade são as duas áreas do conhecimento mais utilizadas para modelagem da incerteza e na tomada de decisões.

Embora a Estatística não seja considerada um campo da Matemática como a Probabilidade, o ensino das duas ciências costuma ser trabalhado de forma conjunta. De acordo com Lopes (1998) o termo Estocástica é utilizado em muitos países da Europa para se referir ao ensino da Estatística interligado com o da Probabilidade. Esse termo passou a ser utilizado também no Brasil, com a Estocástica ganhando lugar a partir da introdução dos PCN (Planos Curriculares Nacionais), em 1997. No entanto, mesmo com a introdução dos PCN, a Educação Estatística tem mostrado poucos avanços. Lopes (2008) sugere que há lacunas de conhecimento em Estocástica na formação de professores.

A formação dos professores, atualmente, não incorpora um trabalho sistemático sobre estocástica, dificultando a possibilidade desses profissionais desenvolverem um trabalho significativo com essa temática nas salas de aula da educação básica (p.70).

Ainda de acordo com Lopes (1998), o ensino de Matemática possui um enfoque no determinístico, baseado em certezas.

O ensino da Matemática tem como tradição a exatidão, o determinismo e o cálculo, opondo-se à exploração de situações que envolvam aproximação, aleatoriedade e estimação, as quais podem limitar a visão matemática que o aluno poderá desenvolver, dificultando suas possibilidades de estabelecimento de estratégias para a resolução de problemas diversificados que lhe surgirão ao longo de sua vida (p.26).

Essa visão determinística provavelmente foi herdada do final do século XVII, já que a Mecânica Newtoniana explicava com sucesso o comportamento de corpos a nível macroscópico. De acordo com Ara (2006), essa situação predominou na ciência até o surgimento da Mecânica Quântica no início do século XX, onde o comportamento de corpos em escala atômica é expresso utilizando distribuições de probabilidade. A aleatoriedade passa então a ter lugar na explicação de fenômenos físicos.

No entanto, mesmo que a aleatoriedade esteja presente em muitos fenômenos físicos, econômicos e sociais, a cultura determinística ainda se mostra muito presente no ensino e na sociedade como um todo. É necessário romper com esse paradigma, já que isso se mostra um problema não só para a Educação Estatística, mas também para o exercício da cidadania. A partir desta situação surge a motivação deste trabalho, que é realizar um levantamento com futuros professores de Matemática para verificar a compreensão destes sobre a aleatoriedade.

Na seção 1, além desta introdução, é exposto o problema de pesquisa, o objetivo principal e os objetivos específicos que ajudam a resolver o problema de pesquisa.

A seção 2, discute os conceitos de aleatoriedade, Indeterminismo, Determinismo e acaso, servindo como referencial teórico para a construção do instrumento de coleta de dados, bem como para a análise dos resultados.

A seção 3 trata sobre a Educação Estatística no Brasil: os antigos PCN, as BNCC e a formação de professores em Probabilidade e Estatística.

A seção 4 apresenta metodologia de pesquisa utilizada: o tipo de pesquisa, o método de análise, o instrumento e os participantes de pesquisa.

A seção 5 traz a análise do corpus obtido por meio do questionário, a partir das categorias obtidas.

Por fim, a última seção trata das considerações e conclusões a partir do estudo, bem como a resposta ao problema de pesquisa e aos objetivos.

1.1 OBJETIVO GERAL E O PROBLEMA DE PESQUISA

O problema de pesquisa a ser respondido é ***“Como os licenciandos em Matemática compreendem a aleatoriedade?”***

Portanto, o objetivo geral deste trabalho é **verificar a compreensão de 12 estudantes de licenciatura em Matemática da região metropolitana de Porto Alegre sobre a aleatoriedade.**

A aleatoriedade é normalmente citada na literatura em conjunto com outros termos, como Determinismo e acaso. Portanto, para verificar a compreensão da aleatoriedade destes estudantes, faz-se necessário verificar também a concepção destes sobre esses dois conceitos.

Da mesma forma, dentro deste objetivo está verificar a capacidade destas pessoas em reconhecer fenômenos aleatórios na realidade, bem como ver de que forma estes relacionam a aleatoriedade com Probabilidade.

Como a Probabilidade e a Estatística estão inseridas dentro da Matemática nas orientações curriculares, é papel do professor de Matemática lecionar este conteúdo no Ensino Médio e nos anos finais do Ensino Fundamental. No entanto, há poucas disciplinas de Probabilidade e Estatística nos currículos de Matemática, sendo que normalmente são compartilhadas com outros cursos como engenharia, carecendo de uma abordagem metodológica adequada para uma licenciatura (VIALI, 2008). Um estudo realizado por Bayer (2005) com professores de Matemática verificou que mais da metade não se consideravam preparados para lecionar estes conteúdos. Um outro estudo realizado por Colodel e Brandalise (2010) sugere uma situação semelhante. Neste caso os entrevistados foram professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Eles declararam ter pouca facilidade com estes temas para poder ensinar, ao comparar com outros conteúdos de Matemática previstos nos parâmetros curriculares vigentes na época do estudo, os PCN. Diversos educadores da área como Lopes (2003) e Batanero (2008) defendem que a compreensão da aleatoriedade é fator determinante para uma aprendizagem efetiva da Probabilidade e Estatística. Portanto, é essencial que os professores possuam um pensamento não somente determinístico, mas também probabilístico compreendendo a aleatoriedade e reconhecendo sua presença na realidade. Do contrário, o ensino destes conteúdos estará destinado a mera

transmissão de conhecimento, enfatizando cálculos e algoritmos sem significado para o aluno e sendo incapaz de modificar a sua realidade. Mais importante do que aprender a aplicar a Estatística e a Probabilidade é o desenvolvimento de uma cultura probabilística, onde a compreensão da aleatoriedade presente nos aspectos cotidianos nos ajuda a tomar melhores decisões e a sermos cidadãos críticos.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os objetivos específicos deste trabalho são:

a) **Verificar a concepção dos participantes sobre Probabilidade.**

A Probabilidade é a área da Matemática que modela fenômenos aleatórios. Portanto, faz-se necessário verificar como esses estudantes concebem Probabilidade, e qual a importância que estes reconhecem nesta área da Matemática na realidade. Além disso, verifica-se também de que forma os estudantes relacionam Probabilidade com Estatística, visto que as duas são lecionadas de forma conjunta no ensino básico.

b) **Verificar a formação dos licenciados em Matemática em Probabilidade e Estatística.**

Um estudo realizado por Bayer (2005) com professores de Matemática verificou que mais da metade não se consideravam preparados para lecionar Probabilidade e Estatística. A fim de relacionar as respostas desses estudantes sobre a concepção de aleatoriedade com sua formação, faz-se necessário verificar também a formação destes estudantes a fim de ajudar a responder o problema de pesquisa. Para isso, foi verificado se os estudantes consideraram sua formação suficiente, bem como se já tiveram contato com Probabilidade no ensino básico.

2. PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Nesta seção serão definidos a aleatoriedade e outros conceitos relacionados, como o Determinismo o Indeterminismo e o acaso. Não há, no entanto, um consenso sobre estes conceitos, que são abordados pela Filosofia, pela Física e pela Matemática de formas diferentes.

2.1 DETERMINISMO

Poder compreender as causas dos eventos ajuda o homem a conhecer o meio em que vive. Nesse sentido, a Filosofia e a Ciência tiveram um papel fundamental na história recente da civilização. A Filosofia busca responder questões relacionadas a existência do homem, enquanto a Ciência busca explicar fenômenos naturais, sociais ou econômicos. No campo da Filosofia, o Racionalismo de Descartes (1596 – 1650) trouxe uma doutrina baseada na razão, que acabou por dominar o pensamento da época. Ao contrário do Empirismo, corrente que defende que o conhecimento por meio de experiências é válido, o Racionalismo defende a existência de verdades *a priori*, podendo ser alcançadas somente por meio da razão e da lógica. No Racionalismo há sempre uma causa inteligível, mesmo que essa causa não possa ser mostrada por meio de experiência. Essa doutrina teve papel central no desenvolvimento da Matemática, já que influenciou diversos pensadores como Leibniz (1646 – 1716) e Isaac Newton (1643 – 1727) considerados os pais do cálculo.

Em 1687 Newton lança o primeiro de três volumes da obra “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural”, que é considerada a publicação mais influente da história da Ciência. Além das Leis da Mecânica e da Lei da Gravitação Universal, essa obra trouxe a fundamentação da Mecânica Clássica. A Mecânica Clássica passou a explicar o funcionamento de corpos ao nível macroscópico por meio de modelos matemáticos.

O Racionalismo de Descartes e a Mecânica Newtoniana contribuíram para a visão Determinista que perdurou na ciência até o início do século XX (ARA, 2006). De acordo com o autor, isso só começou a mudar com o surgimento da Mecânica Quântica, que expressava o comportamento de corpos a nível

atômico usando a Probabilidade. No entanto, mesmo com essa mudança, o paradigma Determinista se mostra muito presente na realidade da Ciência.

O Determinismo coloca que o estado futuro de algo é unicamente determinado pelo estado presente do mesmo. Em outras palavras, o Determinismo diz que um mesmo experimento, realizado sob condições idênticas, produzirá sempre os mesmos resultados.

De acordo com o Dicionário Michaelis:

O Determinismo é a Teoria “segundo a qual todos os fatos e, em particular, as ações humanas, são ligados e determinados pela totalidade dos fatos que os precedem, podendo-se, portanto, considerá-los consequências necessárias de condições antecedentes.

Ao arremessar um objeto com a mesma força, na mesma direção e a partir da mesma posição, mantendo todas as outras variáveis constantes, este objeto cairá sempre no mesmo lugar.

Se o determinismo é verdadeiro, então o mundo inteiro é um relógio que funciona com impecável perfeição, incluindo todas as nuvens, todos os organismos, todos os animais e todos os homens [...] (POPPER 1975 apud ARA, 2006).

Então, em um Universo determinista tudo possui uma causa que predetermina a realidade. Essa situação levanta questões como a do livre-arbítrio. Se tudo já está predeterminado, seria o ser humano um agente livre?

Os termos “Determinismo Científico” e “Determinismo Físico” também são utilizados por Popper para se referir ao Determinismo da natureza e seus fenômenos.

Laplace (1749 - 1827) defendia o Determinismo dizendo que se existisse uma entidade que conhecesse todas as forças da natureza, assim como todas as posições, esta entidade então poderia prever o exato comportamento do Universo a longo prazo. Essa criatura, posteriormente chamada de *Demônio de Laplace*, teria todo o passado e o futuro aos seus olhos (PESSOA JR, 2013).

No entanto, a expressão Determinismo é uma designação Ontológica, pois se refere a natureza do mundo, enquanto a previsibilidade de algo é de natureza Epistemológica, que depende da capacidade do homem de prever o futuro. Portanto, é possível algo ser determinista e imprevisível aos nossos olhos, situação chamada por vezes de *Criptodeterminismo* (PESSOA JR, 2013).

2.2 INDETERMINISMO

A ideia do Universo como um sistema fechado e totalmente previsível perdurou na Ciência até o início o século XX, onde o Princípio da incerteza de Werner Heisenberg (1901 - 1976) traz que o conhecimento possível de se obter sobre o estado de um sistema atômico está sempre sujeito a uma indeterminação (ARA, 2006). Para descrição dos fenômenos a nível atômico, portanto, se faz necessário a utilização e da Probabilidade. Isso não implica em ausência de regularidade, mas sim uma regularidade diferente das leis da Mecânica Clássica. Essa regularidade não permite conhecer com certeza o comportamento individual de cada partícula, mas sim a distribuição conjunta de probabilidade.

De acordo com Ara (2006) o Indeterminismo começa então a ter lugar na Ciência e na Física como um todo, sendo defendido também por filósofos como Karl Popper (1902 – 1994) e Arthur Compton (1892 – 1962).

“O Indeterminismo é simplesmente a doutrina de que nem todos os eventos do mundo físico são predeterminados com precisão absoluta, em todos os seus infinitesimais detalhes. Fora isto, ela é compatível praticamente com qualquer grau de regularidade que se quiser e, portanto, não acarreta a concepção de que há “eventos sem causa” (ARA, 2006 p.25).

O conceito de Indeterminismo, portanto se trata de uma negação do Determinismo, bastando um evento não ser predeterminado com precisão para validá-lo. No entanto, há uma diferença entre o Indeterminismo total, isto é o Universo como algo sem regularidade e aleatório, do Indeterminismo defendido por Popper. Ele acredita que tudo na natureza está entre a total indeterminação e a total determinação, usando uma analogia com uma nuvem e um relógio em cada extremo. A nuvem seria um exemplo de ausência de ordem e imprevisibilidade, e o relógio seria o exemplo determinista, que funciona com precisão. Mas mesmo o mais preciso relógio está sujeito a falhas e a nuvem mais desordenada possui uma regularidade. Para Popper todos os eventos estariam em um meio termo entre uma nuvem e um relógio.

Isso vai de encontro ao pensamento dominante dos séculos anteriores de que “Todas as nuvens são relógios”, ou seja, a imprevisibilidade de algo é fruto da nossa falta de conhecimento sobre. Mesmo com conhecimento das condições

de um sistema, filósofos modernos como Popper e Compton, acreditam que a natureza tenha um componente indeterminado ou aleatório. Essa visão reforça a relevância da Probabilidade e da Estatística visto que estas são as ciências da incerteza e da análise de dados para auxiliar na tomada de decisões.

2.3 ACASO

A discussão entre o Determinismo e o Indeterminismo no mundo físico é naturalmente atrelada a discussão sobre causalidade. A causalidade de dois diferentes eventos é dada pela associação dos mesmos, onde um evento seria a causa e o outro o efeito. O acaso, portanto, seria a ausência ou o desconhecimento de uma causa para um determinado evento. De acordo com o Dicionário Michaelis Online, acaso significa:

acontecimento que apresenta certo grau de imprevisibilidade para o conhecimento humano, em face da natureza do mundo objetivo, regido por leis marcadas por uma escala de oscilações e probabilidades, bem como uma frequência mensurável de incerteza e indeterminação.

O conceito de acaso é discutido por diversos filósofos ao longo da história, tais como David Hume, Demócrito, Epicuro e Aristóteles. Aristóteles relaciona o conceito de acaso ao de acidente. Para Hobuss (2013), se alguma coisa é produzida por acidente, ela é obra do acaso. O autor diz que o acaso e a espontaneidade são, dentre vários tipos de causas, causas por acidente, sendo sempre posteriores as causas em si (HOBUSS, 2013).

Dudley em sua obra *“Aristotle’s concept of Chance”* discute a relação entre Determinismo, Livre – Arbítrio, acaso é acidente por Aristóteles (HOBUSS, 2013). Para o autor, Aristóteles defende que os seres humanos possuem liberdade, rejeitando então o Determinismo causal, pois este iria de encontro ao livre – arbítrio do ser humano.

Assim segue que as duas razões para rejeitar o determinismo tratadas nas seções (i) e (ii), a saber, livre escolha e acidentes [inusuais], são, cada um a seu modo, pressupostos pelo termo ‘acaso’. Não poderia haver acaso se não houvesse escolha livre, e não poderia haver acaso se não houvesse acidentes [inusuais]. (HOBUSS, 2013, p. 109).

Na Filosofia moderna, o conceito de acaso é abordado por Charles Sanders Peirce (1839 – 1914), que é considerado o primeiro filósofo pós Newtoniano a questionar o Determinismo estrito (SALATIEL, 2005). Peirce utiliza

o termo *Tiquismo* para se referir ao acaso ontológico, ou seja, propriedade da natureza e não do nosso desconhecimento sobre ela. O *dicionário web* de português define o *Tiquismo* como “Teoria segundo a qual o acaso tem uma existência objetiva no Universo, não sendo, pois, devido à nossa ausência de conhecimento”. Para Salatiel (2009), Peirce define dois tipos de acasos: O absoluto, e o matemático. O primeiro é definido pelo acaso ontológico, como propriedade da natureza, enquanto o acaso matemático é o acaso domado pela Probabilidade, proveniente da nossa incerteza.

Mas acaso absoluto, cuja realidade é sustentada pelo tiquismo, é um traço de irregularidade que permanece no objeto e, mais “selvagem”, não pode ser contido nas malhas da razão, pois age no sentido de violar as leis da natureza (SALATIEL, 2009, p. 115).

Portanto, o acaso absoluto violaria de alguma forma as leis da natureza, enquanto o acaso matemático apenas “aparenta” violar as leis. Para Salatiel (2009), o acaso matemático:

É, porém, um sentido mais “brando”, por comportar um elemento epistemológico, atribuído ao desconhecimento de cadeias causais, e por manter intacto o princípio de causalidade: há apenas uma “aparente” violação das leis, pois uma causa dá origem a efeitos diversos (p. 109).

Para o autor, portanto, o acaso matemático mantém o princípio da causalidade, sendo prescrito pela Teoria da Probabilidade.

2.4 ALEATORIEDADE

De acordo com o dicionário Michaelis Online, a palavra aleatório tem as seguintes definições:

1. Que depende do acaso ou de acontecimentos incertos, favoráveis ou não a um determinado evento; casual; contingente, fortuito.
2. Fis. Diz-se de fenômenos físicos cujas variáveis oscilam em razão de determinadas leis de probabilidade.

Mesmo pelo dicionário, percebe-se que a aleatoriedade não tem uma única definição. Esse conceito é abordado de diferentes formas pela Física, Matemática e pela Filosofia. Na sequência serão abordadas algumas dessas definições.

2.4.1 A EVOLUÇÃO DO CONCEITO

De acordo com Bennet (1993, apud BATANERO e SERRANO, 1995), a primeira definição de aleatoriedade teve início na antiguidade, se estendendo até a idade média e remete a ideia de que o aleatório é aquilo que é incerto, dependendo da sorte ou azar. Essa definição remete a uma falta de controle do ser humano sobre a aleatoriedade.

Se considerarmos que todo fenômeno tem uma causa, o azar nada mais seria que a nossa ignorância sobre a causa (POINCARÉ apud BATANERO e SERRANO, 1995). Essa definição se mostrou não satisfatória para Poincaré, pois atribui-se a aleatoriedade uma definição subjetiva nesse caso, diferente de pessoa para pessoa. Além disso, existem alguns fenômenos que não conhecemos as causas, mas são deterministas e outros, como a teoria cinética dos gases, que conhecemos as causas, mas são regidos por probabilidades. (BATANERO; SERRANO, 1995).

Uma outra definição de um fenômeno aleatório seria um fenômeno que se comporta conforme as probabilidades (AYER, 1974 Apud BATANERO; SERRANO, 1995). Uma primeira definição a partir desta é encontrada em *Liber de Ludo Alae* de Cardano, e relaciona a aleatoriedade com equiprobabilidade (BATANERO; SERRANO, 1995). O arremessar de um dado não viciado, por exemplo, entraria nessa definição, que se baseia no conceito de Probabilidade Clássica. Uma outra definição da aleatoriedade é baseada na Probabilidade Frequentista, que determina a probabilidade de um evento com base na frequência anterior observada deste evento. Por exemplo, podemos determinar a probabilidade de uma pessoa nascer no sexo feminino baseada na quantidade observada de mulheres em relação ao total da população.

Kyburg (1994, apud BATANERO; SERRANO, 1995) propõe, ainda, uma outra definição, baseada na Probabilidade Subjetiva.

Para Kyburg há uma certa classe de situações que todo mundo considera aleatórias e onde seu o uso da ideia e equiprobabilidade parece claro e não controverso. Por exemplo, no caso de um dado equilibrado, qualquer lançamento é simplesmente um exemplo de qualquer outro possível lançamento. Não há nada de novo que possamos conhecer acerca do dado que nos permita prever outra probabilidade diferente de 1/6 para qualquer resultado particular do dado. Em outros casos a situação não é tão clara. Consideremos por exemplo a probabilidade de que um indivíduo em particular viva mais

que 35 anos. É verdade que possuímos informação estatística suficiente sobre suas possibilidades de sobrevivência a esta idade, mas há muitas considerações que poderiam influenciar uma mudança nesta probabilidade, se tivéssemos que estimá-la. (p. 5)

Nessa definição, a aleatoriedade depende do conhecimento do observador sobre o objeto, e a nossa informação sobre o objeto nesse caso muda nosso juízo sobre a probabilidade de ocorrência do evento.

2.4.2 ALEATORIEDADE DE UMA SEQUÊNCIA

Na década de 1960, alguns matemáticos passaram a buscar uma forma de categorizar uma sequência aleatória, independentemente de como ela foi gerada (PESSOA JR, 2013). De acordo com o autor, essa caracterização utilizava a noção de complexidade algorítmica, onde uma sequência aleatória seria aquela em que o comprimento da sequência não é maior que sua complexidade. Essa definição também é chamada de Incompressibilidade de Solomonoff, Kolmogorov e Chaitin (VOLCHAN, 2001). Uma sequência de “111111111111” seria considerada, portanto uma sequência não aleatória, pois é possível programá-la com uma regra “repita o número 1 até o fim da sequência”, independentemente do tamanho desta (PESSOA JR, 2013).

Uma alternativa a essa definição foi a de Tipicidade de Martin Lof. De acordo com Volchan (2001), a ideia dessa definição é de que uma sequência aleatória não apresenta padrões reconhecíveis. O autor considera essa a definição matemática mais rigorosa de uma sequência aleatória. No entanto, as duas definições buscam caracterizar o aleatório pelo resultado gerado em uma sequência e não pelo processo que levou a sua geração. Isso vai de encontro a definições da Física e da Filosofia sobre aleatoriedade, com o próprio Volchan questionando a relevância desta definição para o mundo natural.

2.5 A ALEATORIEDADE E O ENSINO DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

O primeiro passo para começar a ensinar Probabilidade é assegurar-se que as crianças são capazes de diferenciar fenômenos aleatórios de determinísticos (BATANERO; GODINO, 2002).

No entanto, pesquisas em educação e psicologia sobre o significado de aleatoriedade atribuído por crianças e adultos mostram que estes estudantes tendem a encontrar padrões determinísticos em situações aleatórias, bem como inferir aleatoriedade onde ela não está presente (BATANERO, 2001).

A necessidade de saber utilizar as ideias de aleatoriedade para o desenvolvimento da Literacia Estatística é defendida por Lopes (2004).

A literacia estatística requer que a pessoa seja capaz de reconhecer e classificar dados como quantitativos ou qualitativos, discretos ou contínuos, e saiba como o tipo de dado conduz a um tipo específico de tabela, gráfico, ou medida estatística. Precisa saber ler e interpretar tabelas e gráficos, entender as medidas de posição e dispersão, **usar as ideias de aleatoriedade, chance e probabilidade** para fazer julgamentos sobre eventos incertos e relacionar a amostra com a população. Espera-se, ainda, que o indivíduo saiba como julgar e interpretar uma relação entre duas variáveis. Pode-se notar que isso é muito mais do que possuir competências de cálculo, é preciso adquirir habilidades para compreender a leitura e a interpretação numérica necessária para o exercício pleno da cidadania com responsabilidade social na tomada de decisões (sem página, grifo nosso).

A mesma autora argumenta a favor da realização de experimentos aleatórios como recurso didático no ensino de Probabilidade e Estatística.

O desenvolvimento do pensamento probabilístico requer o reconhecimento de situações de acaso na vida cotidiana e no conhecimento científico, bem como, a formulação e comprovação de conjecturas sobre o comportamento de fenômenos aleatórios simples e a planificação e realização de experiências nas quais se estude o comportamento de fatos que abarquem o azar. A partir dessas considerações, pode-se organizar situações didáticas que envolvam a observação de experimentos, com seus respectivos registros e análises, possibilitando a integração entre a Probabilidade e a Estatística. Nessa conjunção é que se terá o desenvolvimento do raciocínio estocástico. (LOPES, 2003, p. 65).

Além disto, a realização de experimentos aleatórios acentua o potencial criativo dos estudantes.

A realização de experimentos que envolvem aleatoriedade e estimativas, assim como a vivência de coletar, representar e analisar dados que sejam significativos e inseridos em seu contexto podem ampliar o universo de competências e acentuar o potencial criativo de nossos estudantes (LOPES, 2003, p. 16).

Konold (1991) defende que o conceito de aleatoriedade, embora ambíguo e complexo, é o coração do pensamento estatístico e probabilístico, e que, portanto, sua compreensão é elemento imprescindível para o estudo da Probabilidade e Estatística.

2.6 PROBABILIDADE

Viali (2008), define a Probabilidade como “o ramo da Matemática que pretende modelar fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o “acaso” representa um papel preponderante” (p. 1, grifo do autor). Portanto, é o ramo da Matemática utilizado para modelar fenômenos aleatórios, nos quais um mesmo experimento repetido sob as mesmas condições pode gerar diferentes resultados.

A Probabilidade tem sua história ligada aos jogos de azar, como nos jogos de astrágalos, usados pelos soldados romanos da época como um jogo com apostas sobre as posições possíveis de imobilização após um lançamento (COUTINHO, 2007). Além disso, especula-se que os mesopotâmicos e fenícios provavelmente utilizavam estimativas empíricas das probabilidades de acidentes para a perda da carga de navios por naufrágio ou roubo. No entanto, o cálculo de probabilidades teve início com Cardano em seu livro “*Liber de Ludo Aleae*”, um manual de jogos de azar. Já a Teoria da Probabilidade, teve início na correspondência entre Pascal e Fermat, motivada pelo Problema dos pontos (divisão da aposta) e o Problema dos dados (VIALI, 2008).

Atualmente, a Estatística se utiliza muito da Probabilidade em vastamente diversas áreas do conhecimento humano. No entanto, há mais de uma definição de Probabilidade

2.6.1 PROBABILIDADE CLÁSSICA

É a definição de Probabilidade utilizada em eventos com desfechos equiprováveis, como o lançamento de um dado ou uma moeda. Nesse caso, a probabilidade da ocorrência de cada evento é determinada como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de eventos possíveis. Portanto, no exemplo do dado, a probabilidade de ao jogarmos o dado termos uma determinada face é $1/6$.

Essa é uma definição, no entanto, pouco aplicada na realidade, visto que considera apenas eventos ideais, onde a probabilidade de ocorrência de cada desfecho é a mesma.

2.6.2 PROBABILIDADE FREQUENTISTA

Esse conceito de Probabilidade utiliza a frequência relativa de cada evento para determinar a possibilidade de ocorrência de cada evento. No entanto, só pode ser utilizada quando podemos repetir o experimento sob as mesmas condições. Nesse caso, utiliza-se o limite da frequência relativa quando o número de repetições n tende ao infinito para determinar a probabilidade de ocorrência de um evento.

No exemplo do dado, por exemplo, ao jogar um dado infinitas vezes sob as mesmas condições, a frequência relativa de cada face será igual a $1/6$ – a mesma na probabilidade clássica. Pode ser usada, por exemplo, para determinar a probabilidade do nascimento de uma criança do sexo masculino, utilizando o número de crianças nascidas do mesmo sexo sobre o total de nascimentos. No entanto, nesse caso as condições de igualdade de condições são subjetivas.

2.6.3 PROBABILIDADE AXIOMÁTICA

A teoria axiomática de Probabilidade foi definida por Kolmogorov, e consiste em 3 axiomas. O primeiro axioma diz que a probabilidade de sucesso é um número real não negativo. O segundo axioma diz que a probabilidade da soma dos eventos disjuntos de um espaço amostral é igual a 1. Isto é, a probabilidade total ou probabilidade certa é igual a 1. O terceiro axioma diz que, se dois eventos A e B são mutuamente excludentes, isto é, sem intersecção, a probabilidade da união ($A \cup B$) é dada por $P(A) + P(B)$. Esse conceito de probabilidade engloba as outras definições, visto que considera a probabilidade como um número real entre 0 e 1.

2.6.4 PROBABILIDADE SUBJETIVA

Há situações na realidade onde não é possível repetir um experimento sob as mesmas condições, como na Probabilidade Frequentista, tampouco são situações com desfechos equiprováveis, como na Probabilidade Clássica. Nesse caso, se utiliza a Probabilidade Subjetiva, onde a Probabilidade de ocorrência de um sujeito é determinada pelo grau de crença do mesmo. No clima, a

probabilidade de ocorrência de chuva em uma determinada região, embora utilize dados históricos, é determinada por um especialista. Essa definição de Probabilidade é muito utilizada na inferência Bayesiana, com o Teorema de Bayes, que utiliza a Probabilidade condicional para incorporar os fatos sobre um evento como informação a priori.

2.7 ESTATÍSTICA

A Estatística embora seja intimamente relacionada a Matemática, não é considerada uma área da mesma. Isso ocorre pois, diferentemente da Probabilidade que considera um modelo a priori para um evento aleatório, a Estatística faz estimativas de parâmetros considerando um modelo a partir dos resultados observados. Portanto, uma das funções da Estatística é fazer generalizações de resultados a partir de uma amostra para uma população, estimando um determinado parâmetro com uma margem de erro, em uma área denominada como Inferência Estatística.

Na atualidade, com o avanço da computação e da capacidade de processamento de uma grande quantidade de dados, a Estatística aumentou significativamente sua contribuição ao mundo. Hoje, ela é utilizada em diversas áreas do conhecimento humano, como medicina, engenharia, ciências sociais. Ela ajuda na tomada de decisões em qualquer processo que envolva incerteza e variabilidade. Portanto, profissionais que dominam essa área de conhecimento são requisitados no mercado.

Pela proximidade com a Probabilidade, esses dois conceitos costumam ser ensinados de forma conjunta na graduação. Dentro do contexto da educação Matemática, há uma área denominada Educação Estatística, que foi criada com intuito de dar respostas aos problemas enfrentados no ensino de conceitos e procedimentos estatísticos.

2.8 CONSIDERAÇÕES

Pode-se notar relações entre o Indeterminismo de Popper, o acaso matemático de Peirce e a concepção de aleatoriedade defendida por Kyburg. Nestes três conceitos, a Probabilidade tem um papel importante para descrever

os fenômenos. O Indeterminismo para Popper sugere uma realidade que não seja predeterminada, onde a repetição de um mesmo experimento pode produzir diferentes resultados. Existe uma discussão em aberto se os fenômenos naturais são aleatórios em sua essência – *Tiquismo* de Peirce - ou se essa aparente aleatoriedade se deve à falta de conhecimento sobre os fenômenos, como nos conceitos de Acaso matemático por Peirce ou *Criptodeterminismo* (PESSOA JR, 2013). Sejam os fenômenos naturais aleatórios, determinísticos, ou parcialmente determinísticos, a sensibilidade nas condições iniciais de muitos fenômenos torna relevante o domínio deste conceito para uma melhor compreensão da realidade. Conforme educadores estatísticos sugerem, compreender o significado de um fenômeno aleatório e saber diferenciá-lo de um determinístico é essencial para o aprendizado da Probabilidade e Estatística.

Embora existam regras matemáticas para determinar a aleatoriedade de uma sequência de números, o autor deste trabalho defende que a concepção do aleatório se refere ao processo, e não ao resultado. No entanto, a aleatoriedade de uma sequência se mostra importante para a realização de experimentos aleatórios, estes muito relevantes na ciência. Adota-se a definição de aleatório como todo fenômeno onde possui incerteza envolvida, podendo se modelar esta por meio da Probabilidade.

3. O ENSINO DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NO BRASIL

3.1 Os PCN

No Brasil a Probabilidade e a Estatística foram inseridas nos currículos da educação básica a partir de 1997 com os PCN. Essa inserção ocorreu tardiamente se comparada a países como Itália, França, Portugal, Espanha, Estados Unidos e Japão. (WALICHINSKI; SANTOS; ISHIKAWA, 2014).

A Probabilidade e a Estatística juntamente com a combinatória faz parte de um bloco dentro da Matemática chamado de “*Tratamento de Informação*”. Dentre os objetivos do bloco, destaca-se o referente ao da Probabilidade para os anos iniciais do Ensino Fundamental:

Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis) (BRASIL, 1997, p. 40).

Os PCN eram divididos em 4 ciclos para o Ensino Fundamental e um para o Ensino Médio: O primeiro ciclo correspondia aos três anos iniciais do Ensino Fundamental, o segundo ciclo ao quarto e quinto ano, o terceiro ao sexto e sétimo e o quarto ciclo ao oitavo e nono ano. Em relação as primeiras noções de Probabilidade, era previsto essa abordagem a partir do quarto ano do fundamental, no segundo ciclo (BRASIL, 1997). A construção do espaço amostral e a utilização de razão para a determinação de probabilidades eram previstas no terceiro ciclo, enquanto o quarto ciclo previa a realização de experimentos (BRASIL, 1998).

No Ensino Médio, visando a interdisciplinaridade, os PCN foram divididos em três grandes áreas: “Linguagens, Códigos e suas Tecnologias”, “Ciências Humanas e suas Tecnologias”, e “Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias” (BRASIL, 2000). A Probabilidade e a Estatística estão inseridas na área “Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias” e aqui faz parte de um contexto maior, visando a resolução de situações – problemas do mundo

real. O estudante deve ser estimulado a análise de dados de contextos sócio - culturais e econômicos, visando o desenvolvimento da cidadania de forma crítica. Entre as competências e habilidades a serem desenvolvidas está o reconhecimento de fenômenos aleatórios e sua diferenciação de efeitos determinísticos.

Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades. (BRASIL, 2000, p. 95).

A Probabilidade e a Estatística se mostraram bastante presentes nos PCN desde os primeiros ciclos no Ensino Fundamental com as primeiras noções de Probabilidade, até a resolução de problemas e análise de dados em um contexto real presentes no currículo do Ensino Médio. A compreensão da aleatoriedade estava como objetivo para uma melhor aprendizagem e desenvolvimento da cidadania.

3.2 As BNCC

Foram aprovadas em 2013 as novas “*Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica*”. O documento preliminar das Bases Nacionais Comuns Curriculares – BNCC, foi tornado público, em 2015, pelo Ministério da Educação, e tinha como objetivo “ser a base para a renovação e o aprimoramento da educação básica como um todo” (BRASIL, 2015).

O documento base para a área da Matemática do Ensino Fundamental traz em seu segundo parágrafo:

A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório (BRASIL, 2015, p.221).

Os BNCC propõem a divisão da Matemática em cinco unidades temáticas ao longo do Ensino Fundamental: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística.

A incerteza e o tratamento de dados estão agora na unidade temática da Probabilidade e Estatística e tem como um dos objetivos que o estudante saiba analisar dados de diferentes contextos e tomar decisões adequadas:

Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e prever fenômenos (BRASIL, 2015, p: 230).

Em relação a Probabilidade, o documento ressalta novamente o objetivo da compreensão do aleatório pelos estudantes:

No que concerne ao estudo de noções de probabilidade, a finalidade, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, **é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis.** É muito comum que pessoas julguem impossíveis eventos que nunca viram acontecer. Nessa fase, é importante que os alunos verbalizem, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do espaço amostral. No Ensino Fundamental – Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista (BRASIL, 2015, p. 230, grifo nosso).

Em relação a Estatística, é defendido que os alunos se envolvam no planejamento e realização de uma pesquisa de interesse deles, a fim de ajudá-los a compreender o papel da Estatística no cotidiano.

3.3 A PROBABILIDADE E A ESTATÍSTICA NOS CURRÍCULOS DA MATEMÁTICA

Um estudo realizado por Viali (2008) mostra uma realidade desproporcional: enquanto os antigos PCN (e atuais BNCC) preveem o ensino da Probabilidade e Estatística desde as séries iniciais até o Ensino Médio, as Diretrizes Curriculares Nacionais – DCN para os cursos de licenciatura em Matemática sequer fazem menção a necessidade de disciplinas de Probabilidade e Estatística nos currículos destes cursos. No mesmo artigo o autor fez um levantamento das grades curriculares de 125 cursos de licenciatura em Matemática do país e verificou que estes cursos possuíam em média 4,7 créditos de Estatística ou Probabilidade. Isso equivale a 70,9 horas aula, ao passo que 53,6% dos cursos apresentaram uma carga horária total entre 2700 e 3000 horas (VIALI, 2008). Dos 125 cursos, 8 não possuíam qualquer crédito

referente ao ensino de Probabilidade e Estatística. Por outro lado, apenas dois cursos tiveram mais que 8 créditos, sendo um com 10 créditos e outro com 12 créditos, o maior número da amostra. Se considerarmos também a combinatória, os números pouco mudam: o número médio de créditos sobe para 5,2, equivalente a 78,7 horas aula.

Evidentemente que não é possível determinar sem uma investigação adequada qual a carga mínima que os currículos devem apresentar, mas certamente certa proporcionalidade com o que esses conteúdos representam nos currículos do ensino fundamental e médio seria desejável (VIALI,2008, p. 4).

Outro problema apontado por Viali (2008) é que a maioria destas disciplinas são compartilhadas com outros cursos como engenharias, carecendo de uma abordagem metodológica e didática apropriada para uma licenciatura:

Menos mal se essa disciplina fosse exclusiva do currículo, isto é, se fosse uma disciplina com uma abordagem metodológica e didática apropriada ao curso, em resumo, Educação Estatística. O que acontece, de fato, é que essa disciplina é compartilhada com outros cursos da área, tipicamente as Engenharias Os licenciandos de Matemática, geralmente em número reduzido, disputam espaço com um grande número de alunos dos outros cursos. Assim o futuro professor é exposto a um ensino com uma abordagem essencialmente algorítmica totalmente desvinculada do seu contexto e com exemplos bem distantes de sua área de interesse e com pouca ou nenhuma relação com o que futuramente terá que ensinar. A regra para a apresentação dessas disciplinas é um ensino de gaveta onde prevalece uma abordagem antiga baseada na estatística como uma disciplina matemática e não uma abordagem metodológica atualizada que apresenta a Estocástica como um recurso para a análise empírica e a testagem de modelos que serve de suporte a praticamente todas as ciências (p. 4).

Portanto, essa realidade apresentada pelo autor sugere problemas na formação de professores de Matemática nestes conteúdos.

3.4 A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

A realidade sugerida por Viali (2008) no tópico anterior é reforçada por Bayer (2005), que entrevistou 80 formandos dos cursos de Licenciatura plena em Matemática. Os resultados mostraram que embora 96% dos entrevistados considerem que a Estatística tem um papel relevante para a formação dos alunos, 52% declararam que o curso não deu preparo suficiente para lecioná-la. Além disso, 49% sequer tinham conhecimento sobre a inclusão da Estatística no ensino de Matemática. Ainda que 52% terem declarado, não possuir preparo

suficiente para lecionar estatística, 96% caracterizaram o desempenho na(s) disciplina(s) de Estatística como bom (56%), ótimo (34%) ou excelente (6%).

Um outro estudo realizado por Colodel e Brandalise (2010) sugere que o bloco “Tratamento de informação” dos PCN é pouco abordado pelos professores do ensino básico. Os 67 professores do primeiro ao quinto ano do Ensino Fundamental que participaram da pesquisa responderam à pergunta: “*Quais conteúdos matemáticos propostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática você tem mais facilidade de trabalhar com seus alunos? Numere de 1 a 5 por ordem de facilidade*”. Apenas 8% responderam o bloco *Tratamento de Informação* como primeira opção, enquanto 28% colocaram como última opção. As autoras concluem que embora proposto nos PCN de Matemática, essa é uma das áreas da Matemática que os professores mais têm dificuldades e que é preciso difundir mais o conhecimento estatístico nos encontros de formação de professores e no contexto escolar (COLODEL; BRANDALISE, 2010).

Os resultados destes estudos vão ao encontro do que diz Lopes (2008) em seu artigo sobre o ensino da Estatística e Probabilidade na educação básica e a formação de professores:

Acreditamos que um dos principais impedimentos ao ensino efetivo de probabilidade e estatística na educação básica refira-se à formação dos professores que ensinam matemática nesses níveis de ensino: educação infantil, ensino fundamental e ensino médio (p.69).

A autora conclui que não há um trabalho sistemático sobre estes conteúdos na formação destes professores, dificultando estes profissionais a desenvolverem esta temática em sala de aula.

4. METODOLOGIA

4.1 PARADIGMA E TIPO DE PESQUISA

A pesquisa realizada foi de caráter qualitativo. Flick (2009) diz que um dos aspectos principais da pesquisa qualitativa é a perspectiva dos participantes e de sua diversidade. Outro aspecto defendido pela autora é a reflexividade do pesquisador, onde a subjetividade do pesquisador e dos pesquisados estão sendo estudadas e fazem parte do processo.

Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador. O processo de condução de investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 51).

O tipo de pesquisa utilizado foi o Estudo de Caso. De acordo com Yin (2015), o estudo de caso investiga um fenômeno em profundidade e em seu contexto real.

“O Estudo de Caso é uma investigação empírica que: investiga um fenômeno contemporâneo (o “caso”) em profundidade e em seu contexto do mundo real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto puderem não ser claramente evidentes”. (p.17).

Portanto, para o propósito deste estudo, esse tipo de pesquisa se mostra o mais adequado.

4.2 MÉTODO DE ANÁLISE

Foi utilizado como método de análise das respostas dos licenciandos em Matemática a Análise Textual Discursiva (MORAES; GALLIAZZI, 2014) com a utilização de categorias emergentes em algumas perguntas, e utilização de categorias a priori em outras.

Esse método consiste em algumas etapas: A primeira etapa, a *Unitarização*, onde são dadas unidades de sentido para cada fragmento do depoimento. Essa etapa consiste em “examinar os textos em seus detalhes, fragmentando-os no sentido de atingir unidades constituintes, enunciados referentes aos fenômenos estudados” (ibidem, p.11). Na segunda etapa,

chamada de *Categorização*, agrupa-se estas unidades de sentido em categorias por semelhança, consistindo em “relações entre as unidades de base, combinando-as e classificando-as, reunindo esses elementos unitários na formação de conjuntos que congregam elementos próximos, resultando daí sistemas de categorias” (ibidem, p. 12). Depois, estas categorias, chamadas de categorias iniciais, se agrupam em categorias maiores chamadas categorias intermediárias. Nesse estudo, foram utilizadas apenas categorias iniciais e categorias finais. Após isso, estas categorias emergem nas categorias finais, que serão base do corpus do texto, onde será feito um paralelo entre o que os participantes de pesquisa dizem com o que é dito na literatura sobre estas categorias. Essa é a última etapa, a de análise dos resultados.

Além da utilização da Análise Textual Discursiva para a análise das perguntas dissertativas, foi realizada uma Estatística descritiva sobre a formação destes estudantes em Probabilidade e Estatística. Essa análise teve como objetivo relacionar a formação dos estudantes com suas respostas, facilitando um maior entendimento do fenômeno observado.

4.3 PARTICIPANTES DE PESQUISA

Os participantes da pesquisa foram doze acadêmicos de licenciatura em Matemática de três diferentes Universidades da região metropolitana de Porto Alegre. Foram considerados estudantes que estivessem na segunda metade do curso ou que estivessem formados há menos de um ano. Quatro estudantes são do sexo feminino e oito do sexo masculino. A média de idade dos entrevistados foi de aproximadamente 25 anos (24,75). Apenas três dos doze participantes não lecionam ou não lecionaram ainda. Dos que lecionam, alguns estão no período do estágio. A maioria destes leciona há aproximadamente um ano, sendo que apenas um já leciona há dois anos e outro havia começado a lecionar há três semanas.

Tabela 1 - Perfil dos participantes de pesquisa

Sujeito	Sexo	Idade	Universidade	Leciona/Já lecionou?	Tempo (anos)
A	Masculino	20	1	Sim	2
B	Feminino	26	2	Sim	0,05
C	Masculino	22	2	Não	0
D	Feminino	24	1	Não	0
E	Masculino	20	1	Sim	1,5
F	Masculino	23	2	Sim	1
G	Masculino	32	1	Não	0
H	Masculino	26	2	Sim	1
I	Feminino	25	3	Sim	1,5
J	Feminino	26	3	Sim	1,5
K	Masculino	24	3	Sim	1
L	Masculino	29	3	Sim	1,5

Fonte: Elaborado pelo Autor (2019)

4.4 FORMAÇÃO DOS PARTICIPANTES

Em relação a formação dos participantes, oito dos doze estudantes disseram já ter tido contato com Probabilidade, embora todos no ensino médio, e todos já haviam cursado pelo menos uma disciplina na graduação. Em relação ao questionamento sobre se a(s) disciplina(s) na graduação prepara para lecionar, oito responderam que não. Dos quatro que responderam que sim, dois colocaram ressalvas: Um que ela é pouco aplicada, e outro que poderia ter mais disciplinas sobre.

Tabela 2 - Formação dos participantes de pesquisa

Sujeito	Contato com probabilidade antes da graduação	Cursou disciplina na graduação?	Acha que ela foi suficiente pra lecionar?
A	Sim, no médio	Sim	Sim, mas poderia ter mais
B	Sim, no médio	Sim	Não
C	Sim, no médio	Sim	Não
D	Não	Sim	Não
E	Sim, no médio	Sim	Sim, mas é pouco aplicada
F	Sim, no médio	Sim	Não
G	Sim, no médio	Sim	Não
H	Não	Sim	Não
I	Sim, no médio	Sim	Não
J	Sim, no médio	Sim	Não
K	Não	Sim	Sim
L	Não	Sim	Sim

Fonte: Elaborado pelo Autor (2019)

4.5 INSTRUMENTOS DE COLETA

Foi realizada uma entrevista semiestruturada com cada estudante, que incluiu perguntas objetivas e abertas. As perguntas objetivas visavam caracterizar o sujeito de pesquisa em variáveis como sexo, idade, se já leciona e há quanto tempo. Além disso, houve perguntas relacionadas a experiência dos alunos com Probabilidade ou Estatística. Estas perguntas foram relacionadas aos objetivos deste trabalho, sendo relacionadas, portanto, a concepção destes estudantes sobre acaso, Determinismo, e aleatoriedade na realidade. Seguem abaixo as perguntas relacionadas aos objetivos do trabalho.

Quadro 1 - Perguntas da entrevista

Nº	Tipo	Pergunta
I	Objetiva	Você já teve contato com probabilidade no ensino básico?
II	Objetiva	Você já cursou alguma disciplina de probabilidade ou estatística na graduação?
III	Objetiva	Você considera que essa disciplina foi suficiente para lecionar
1	Aberta	Como você define Probabilidade?
2	Aberta	Porque a probabilidade deve ser ensinada no ensino básico?
3	Aberta	Dê exemplos de aplicação de probabilidade no dia a dia, e sua relação com a Matemática
4	Aberta	Como você define Aleatoriedade?
5	Aberta	Dê exemplos de fenômenos aleatórios e diga porquê eles são considerados aleatórios
6	Aberta	Como você define Determinismo?
7	Aberta	Como você define acaso?
8	Aberta	Qual a relação da aleatoriedade com a probabilidade?
9	Aberta	Qual a relação da probabilidade com a estatística?

Fonte: ELABORADO pelo Autor (2019)

5. ANÁLISE E RESULTADOS

De acordo com os objetivos listados na seção 1 deste trabalho, cada pergunta da entrevista foi associada aos objetivos geral e específicos, gerando categorias para cada objetivo citado. É válido ressaltar que a frequência absoluta de categorias geradas, como visto nos gráficos abaixo, é maior que o total de participantes da pesquisa. Isso ocorre devido ao método de análise utilizado, a Análise Textual Discursiva, onde é possível que o mesmo participante gere mais de um excerto de uma mesma categoria. Abaixo, na Figura 4, segue a forma como cada objetivo foi relacionado as perguntas realizadas.

Quadro 2 - Objetivos e perguntas relacionadas

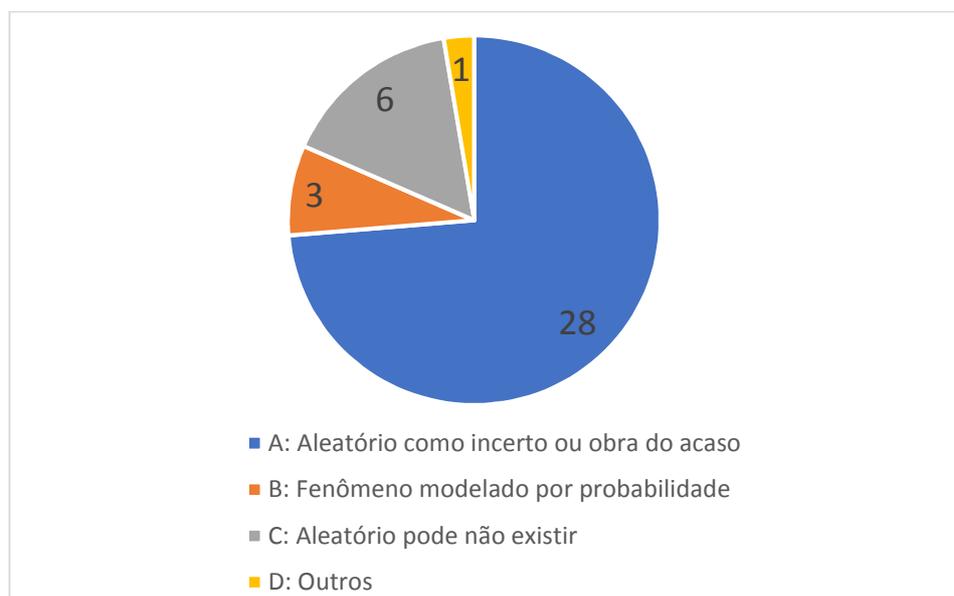
Objetivo	Tipo	Pergunta
1 Verificar a compreensão de licenciandos em matemática sobre aleatoriedade		
1.a A concepção de aleatoriedade	Geral	Qual a sua concepção sobre aleatoriedade?
1.b Capacidade de reconhecer fenômenos aleatórios no dia a dia		Dê exemplos de fenômenos aleatórios e diga porquê eles são considerados aleatórios
1.c A concepção de determinismo		Qual a sua concepção sobre Determinismo?
1.d A concepção de acaso		Qual a sua concepção sobre Acaso?
1.e Como os licenciandos relacionam aleatoriedade com probabilidade		Qual a relação da aleatoriedade com a probabilidade?
2 Verificar a concepção de licenciandos em probabilidade		
2.a A definição de probabilidade	Específico	Como você define Probabilidade?
2.b Reconhecer a importância da probabilidade no dia a dia		Dê exemplos de aplicação de probabilidade no dia a dia, e sua relação com a Matemática
2.c Como relacionam probabilidade com estatística		Porque a probabilidade deve ser ensinada no ensino básico?
		Qual a relação da probabilidade com a estatística?
3 Verificar a formação dos licenciandos em probabilidade para lecionar		
3.a Se já teve contato com probabilidade no ensino fundamental ou médio	Específico	Você já teve contato com probabilidade no ensino básico?
3.b Se já cursou durante a graduação ou está cursando.		Você já cursou alguma disciplina de probabilidade ou estatística na graduação?
3.c Se considera sua formação suficiente para lecionar		Você considera que essa disciplina foi suficiente para lecionar?

Fonte: Elaborado pelo Autor (2019)

5.1 A CONCEPÇÃO DE ALEATORIEDADE

A pergunta “Qual a sua concepção sobre aleatoriedade”? foi utilizada para verificar esse objetivo. A partir das respostas, as categorias finais utilizadas e suas frequências encontradas foram as seguintes:

Figura 1- Categorias geradas para a concepção de aleatoriedade dos participantes



Fonte: Elaborado pelo Autor (2019)

Percebe-se que há uma grande frequência de excertos que classificam aleatoriedade como algo fruto da incerteza, ou obra do acaso. Essa definição vai ao encontro da definição de aleatório usada na antiguidade, onde o aleatório é sinônimo de incerto, podendo ser atribuído a sorte ou azar (Bennet 1993, apud BATANERO e SERRANO, 1995). Destaca-se na categoria A, o excerto, do sujeito E: *“Pra mim o aleatório seria principalmente aquilo que a gente não tem controle, e controle no sentido não de determinar o valor o resultado, mas controle de saber o que é, digamos assim efeito surpresa”* Essa definição ainda não relaciona a aleatoriedade com Probabilidade, assim como não considera o aleatório como algo da natureza, mas sim como algo incerto aos nossos olhos.

Em um número pequeno, apenas três trechos destacaram a aleatoriedade em uma definição mais moderna, como algo que pode ser modelado por probabilidade. O sujeito A disse *“O que pode ocorrer assim...eu não sei dizer se teriam probabilidades iguais mas assim...se acontecer alguma coisa, se eu jogar um dado por exemplo, é aleatório cair qualquer face, a probabilidade é a mesma, isso pra mim seria uma aleatoriedade, um exemplo.”*. Essa definição, no entanto, limita-se a Probabilidade clássica, onde os desfechos possuem probabilidade igual, e vai ao encontro do que é encontrado em *Liber de Ludo Alae* de Cardano (BATANERO; SERRANO, 1995). O sujeito K, embora tenha falado em chance,

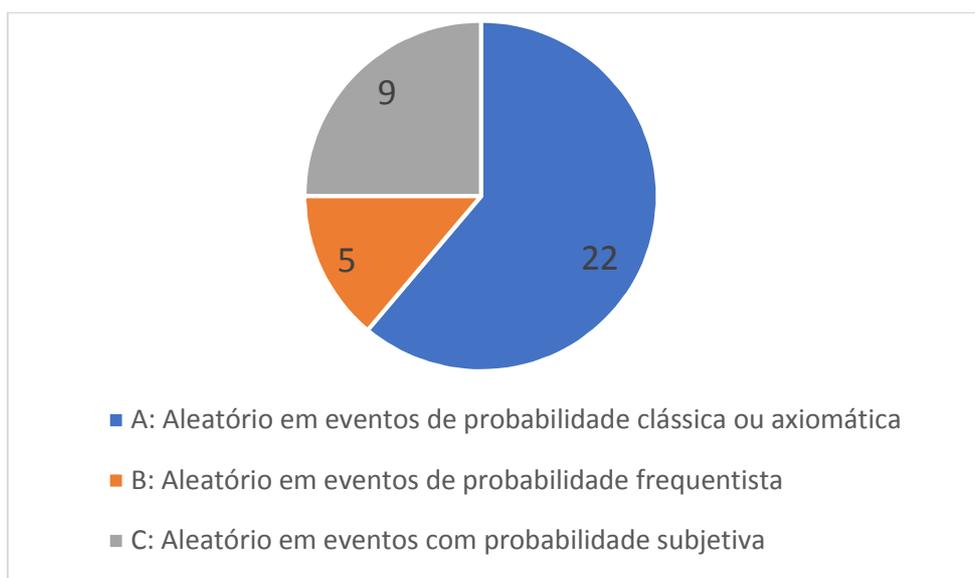
definiu de forma parecida ao dizer: *“É difícil definir, vai ser bem leigo...bem leiga a resposta. Mas eu acho que.... como existe a chance de ocorrer, tirar tanto cara quanto coroa né...então tu querer que ocorra determinado evento, não significa que aquele evento vá ocorrer né, né, então.... é difícil definir. Aleatoriedade e evento aleatório.... não conseguiria definir em palavras melhores que isso. Então é uma resposta bem fraca. Desculpe”*. Como o próprio estudante, assim como muitos outros, define Probabilidade como sinônimo de chance, pode-se aferir que esse excerto define o aleatório como um evento modelado por Probabilidade.

Além dessas duas categorias, uma outra categoria foi a de que a aleatoriedade pode não existir na realidade. O sujeito E disse: *“mas.... efeitos aleatórios. Bah, não consigo pensar em nada que eu veja como realmente aleatório. Na minha concepção a maior parte das coisas acabam tendo alguma determinação, que talvez eu desconheça por eu mesmo.”*. Nota-se que essa definição vai ao encontro ao que alguns autores chamam de *Criptodeterminismo* (PESSOA JR, 2013)., onde o aleatório existe apenas pela falta de conhecimento do observador sobre o fenômeno. O sujeito J, com sua definição de aleatoriedade como algo sem interferência, disse: *“isso não é verdade, a gente nunca consegue não ter interferência de elementos externos...então talvez aleatoriedade não exista.”*

5.2 RECONHECER FENÔMENOS ALEATÓRIOS NA REALIDADE

A Pergunta utilizada para verificar esse objetivo foi *“Dê exemplos de fenômenos aleatórios na realidade”*. As categorias geradas bem como suas frequências foram as seguintes:

Figura 2 - Categorias geradas para exemplos do aleatório



Fonte: Elaborado pelo Autor (2019)

Nota-se que, há uma predominância de respostas se referindo a exemplos de fenômenos aleatórios em situações como dados, moedas em Probabilidade clássica ou axiomática. Dos 22 trechos desta categoria, seis são exemplos de dados, seis são exemplos de moedas, e quatro de bolas retiradas em urnas. O sujeito E enfatiza um problema de Probabilidade clássica, relacionando o aleatório a equiprobabilidade de desfechos: *“Eu não sei o que pode acontecer, mas eu tenho tantas opções, e a chance de acontecer uma de seis, que nem um dado, o exemplo mais bobo, se eu tenho uma opção de seis, porque eu não consigo determinar ele, pode acontecer qualquer uma, e eu não tenho nenhum conhecimento que me faça supor que alguma vai acontecer mais. É aleatório, então eu vou pegar a ideia de dividir igualmente digamos assim”*. Além disso, quatro citaram loterias, um citou ouvir músicas em modo aleatório, e um citou selecionar aleatoriamente uma pessoa dentre um grupo de pessoas.

Na categoria B, apenas cinco excertos falaram de exemplos de fenômenos aleatórios modelados pela Probabilidade frequentista. O sexo de um bebê ao nascer é citado duas vezes, como na fala do sujeito D *“Ah, uma mãe quando vai ter um filho, é aleatório se vai nascer um menino ou uma menina né. Tu pode fazer um cálculo, ah nessa família existe tantos meninos tantas meninas, mas não quer dizer nada do próximo que vai nascer assim, acho que esse seria mais um exemplo assim, bem da vida real. E outros exemplos.... acho*

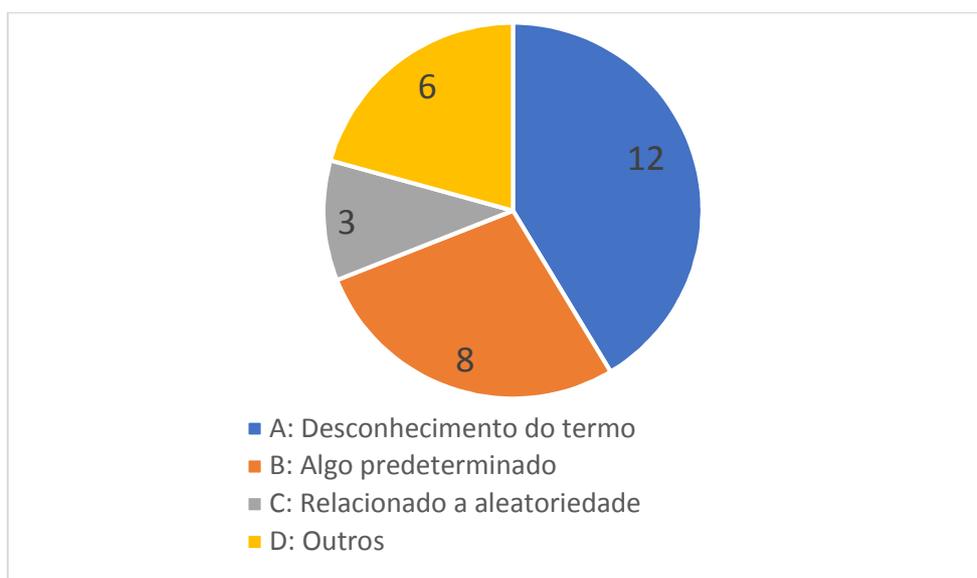
que é isso.”. Embora esse seja um exemplo claro onde se pode calcular a probabilidade pela forma frequentista, a fala do sujeito não deixa esse entendimento claro.

Na categoria C, foram utilizados exemplos diversos que se referiram ao aleatório em situações onde há Probabilidade subjetiva envolvida, isto é, que não podemos repetir o experimento sob as mesmas condições para aproximar a probabilidade futura. Dos oito trechos, três se referiram ao clima, e dois a sentimentos. Destaca-se a fala do sujeito F: *“Ah, assim, eu acho que foge um pouco da matemática o que eu vou dizer. Mas...é uma concepção mais filosófica assim, eu estudava bastante filosofia quando estava no ensino médio e...eu acho que, é mais a ideia assim de....de que, a capacidade que a gente.... a quantidade de vezes que a gente se entristece na vida. A gente não consegue determinar nada, nem quantas vezes vai se entristecer, se vai se entristecer muito ou pouco, mas várias vezes acontece...eu acho que isso é bem aleatório. E....foge um pouco, mas acho que isso é aleatório. A capacidade que a vida tem de nos entristecer. Acho que é isso”*. Cada pessoa é única e possui sentimentos próprios, portanto, essa definição se encaixa na definição de Probabilidade subjetiva de Kyburg (1994, apud BATANERO; SERRANO, 1995).

5.3 A CONCEPÇÃO DE DETERMINISMO

A pergunta “Qual a sua concepção sobre o determinismo?” gerou as seguintes categorias e suas frequências:

Figura 3 - Categorias geradas para a concepção de Determinismo



Fonte: Elaborado pelo Autor (2019)

Mais de um terço dos trechos se refere a um desconhecimento do termo ou ao fato de não lembrar a existência. O sujeito D, por exemplo, acreditou se referir ao determinante de uma matriz, o que acabou sendo categorizado em “Outros”, embora também pudesse ser enquadrado como desconhecimento do termo. É útil salientar que, boa parte dos alunos demonstraram surpresa ao serem questionados sobre o termo, iniciando a resposta com uma pergunta “determinismo?”. Além disso, dentre os que responderam algo, grande parte tentou definir usando a etimologia da palavra, e não por terem algum conceito prévio antes.

Na categoria B, tivemos oito excertos que tratam o Determinismo como algo um fato já predeterminado por outro. Destaca-se a fala do sujeito I “ *não sei, ultimamente eu estava lendo alguns trabalhos sobre positivismo, que davam de uma forma mais fechada enfim sobre o ensino, de delimitar bastante os conteúdos, e tratar de uma forma mas....acho que eu to fugindo bastante do Determinismo que tu tá falando Mas, seria, parece uma questão de causa e efeito assim, que um determinado acontecimento estaria determinando de fato uma relação de implicação com outro determinado acontecimento que estaria relacionado a ele, né, eu não consigo pensar em outro exemplo agora. Mas seria bem essa relação de causa e efeito assim, um evento estaria diretamente*

relacionado com outro conseqüente a ele.” Essa definição remete a definição de Popper (1975 apud ARA 2006)., ou mesmo a definições do dicionário Michaelis.

Seguindo a mesma definição, na categoria C, uma outra parcela pequena relacionou Determinismo a aleatoriedade, as colocando em antagonismo, como o sujeito G que em sua fala disse: “ *Talvez alguma maneira que eu tenha de buscar modelos pra, bom, vamos puxar uma derivação da palavra aqui, tentar determinar e tentar me ajudar a reduzir essa aleatoriedade, a me deixar com uma ideia mais fixa do que que ta pra acontecer de forma que eu seja , que eu reduza meu risco de ser pego de surpresa independente da situação*”.

Um total de 6 excertos se referiram a outros exemplos que não se encaixaram em nenhuma categoria acima, sendo classificados em “outros”. O sujeito L disse não saber relacionar o conceito no contexto da educação matemática: “ *Mas não sei se é....não sei se eu conheço, envolvendo no contexto de educação matemática. Eu não sei se é isso. Eu acho que é muito mais uma coisa que eu pensei agora a partir do termo, do que algo que eu saiba de fato.*” Enquanto o sujeito I diz “ *Determinismo? O Determinismo que eu já ouvi falar, não tem nada a ver com Probabilidade ou aleatoriedade...*”.

5.4 A CONCEPÇÃO DE ACASO

A pergunta “Qual a sua concepção sobre o acaso?” gerou as seguintes categorias e suas frequências:

Figura 4 - Categorias geradas para concepção do acaso



Fonte: Elaborado pelo Autor (2019)

Na primeira categoria, 11 excertos referem o acaso como algo indeterminado, o que se aproxima da definição de Dudley em *“Aristotle’s concept of Chance”* onde o autor rejeita o Determinismo causal (HOBUSS, 2013). O sujeito F fala nesse sentido: “Ele é como se fosse o inverso do Determinismo...no sentido de que não.... não é de nenhuma forma determinado”. Da mesma forma, o sujeito K, embora não tenha mencionado Probabilidade, deixa implícito a relação com o aleatório como algo indeterminado ao dizer *“Acaso. Bom acaso acho que eu só conseguiria definir sinônimos de acaso né. Eu acho que...tem muito a ver com as chances de ocorrer né. Por exemplo, por acaso, se ocorre determinada coisa ou o acaso, meu deus. Acaso...o que é o acaso? Eu acho que é um determinado evento...bom, tu tens um repositório de eventos que podem ocorrer né. Então o acaso seria aquilo né, bom, esse é um evento que pode ocorrer dentro desse arquivo de eventos, então acaso é um desses eventos que pode ocorrer né.”*

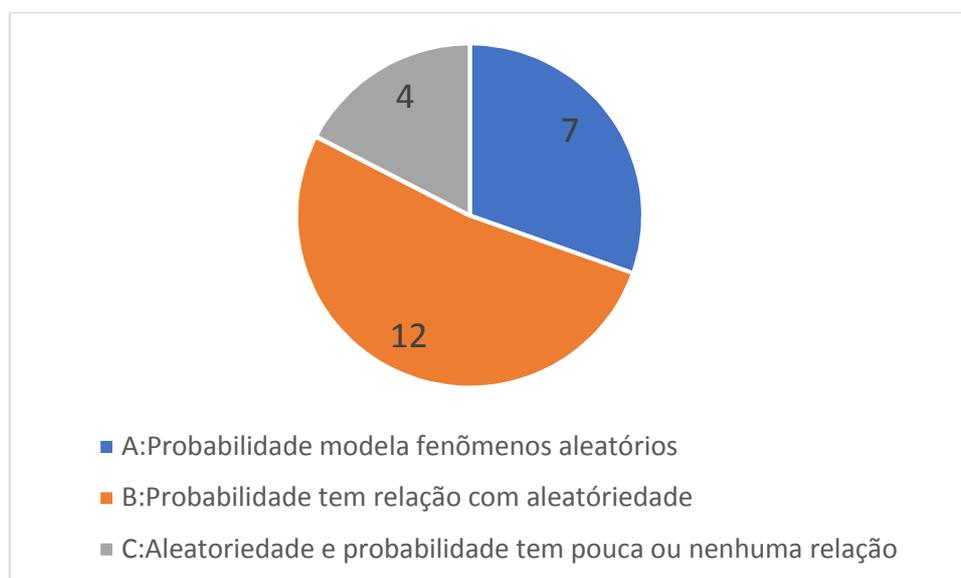
Na categoria B, se encontram sete trechos relacionando diretamente o acaso ao aleatório, como o que disse o sujeito D *“ Mas eu acho que tem muito a ver com aleatório assim, o acaso é por acaso que a gente usa muito no dia a dia assim, por acaso eu peguei o mesmo ônibus que tu, mas foi um fenômeno assim que tu não tinha como prever”* Isso se aproxima do acaso matemático de Salatiel (2009).

Outros três excertos se referiram ao acaso como algo diferente do aleatório, gerando assim a categoria C; Um número grande de nove trechos se encaixou na categoria outros, como na fala do sujeito G, que diz que a própria vida é algo ao acaso “*Acho que a própria vida, se a gente for parar pra pensar, porque tem tantos motivos pra a gente simplesmente do nada estar vivendo e vim a falecer assim, acontecer qualquer coisa sei lá um mal súbito, um atropelamento, um assalto, não situações assim não previstas, acho que independente, pode ser nessa questão de vida ou morte*” Outros participantes da pesquisa nessa categoria relacionaram acaso a sorte, coincidência, dentre outros.

5.5 COMO RELACIONAM ALEATORIEDADE COM PROBABILIDADE

A Probabilidade é a área da Matemática que modela com fenômenos aleatórios. Essa foi uma categoria a priori gerada a partir da pergunta “Para você, qual a relação da aleatoriedade com Probabilidade?”. As outras duas categorias utilizadas foram, uma delas onde o sujeito faz uma breve associação entre os dois conceitos, e a outra onde o sujeito faz pouca ou nenhuma associação. Portanto, as categorias utilizadas neste caso foram ordinais: Pouca, média ou muita proximidade com a definição de aleatoriedade. Seguem os resultados.

Figura 5 - Categorias geradas para a relação de Probabilidade com aleatoriedade



Fonte: Elaborado pelo Autor (2019)

Pode-se ver que, cerca de um terço dos excertos definiu aleatoriedade como algo que modela fenômenos aleatórios. Destaca-se o trecho do sujeito I *“Eu acho que a Probabilidade vem tentar medir esse acontecimento aleatório assim. Vem tentar modelar e tentar entender e de repente fazer alguma previsão sobre algum evento aleatório.”* O sujeito D teve uma definição mais precisa e direta: *“aleatoriedade com Probabilidade? Pra mim ta muito junto assim... pra mim probabilidade estuda fenômenos aleatórios pra mim. Acho que pra mim seria isso”*

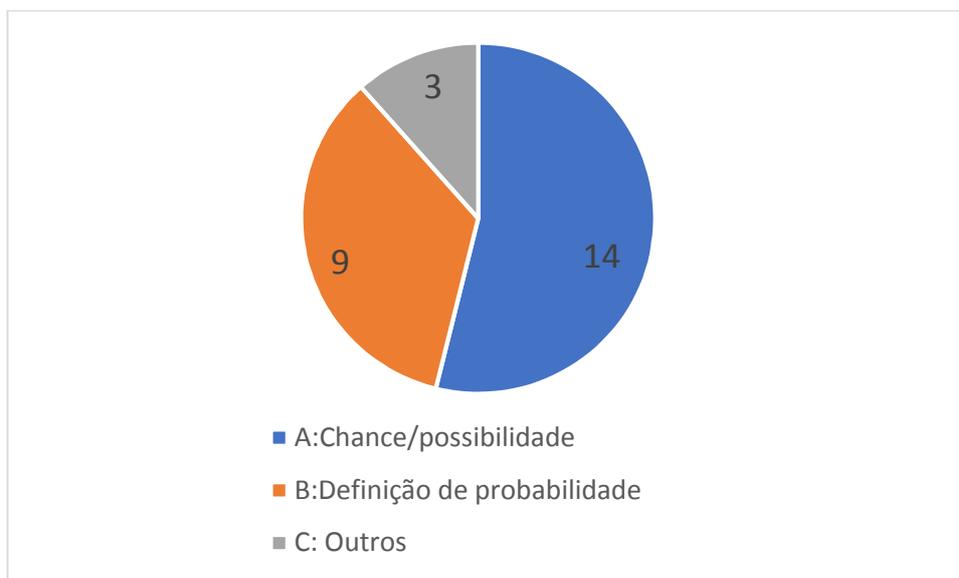
Na categoria B, alguns trechos citaram a relação entre os dois conceitos, mas de forma mais rasa, como na fala do sujeito B *“aleatoriedade com probabilidade? Acho que a Probabilidade trabalha....da maneira que eu defini não, porque eu disse que a aleatoriedade é algo que.....a gente não tem controle, de certa forma Probabilidade a gente não tem controle, mas...comparando as duas, Probabilidade e aleatoriedade, acho que dentro de uma , como vou dizer....dentro de um conjunto de dados, eu diria que tem relação, eu diria que tem relação, aleatoriedade e Probabilidade”,* ou na fala do sujeito F, que relaciona ambos conceitos ao acaso *“Se eu to analisando um fenômeno que a princípio é aleatório e eu tento fazer uma Probabilidade de algum certo acontecimento, acho que o acaso ele é quando junta, quando esse acontecimento acontece assim, porque ele junta a questão de que esse acontecimento foi possível por acaso na perspectiva da aleatoriedade mas pela questão existencial da probabilidade. Acho que é isso.”*

Por outro lado, quatro trechos deram a aleatoriedade como algo sem ou com muita pouca relação com Probabilidade, como no trecho dito pelo sujeito J *“A Probabilidade é a chance de um fenômeno acontecer. A aleatoriedade é pressupor que algo não tem interferência. Que algo que vai acontecer não tem interferência, sobre, sobre a falta de interferência, e isso não é verdade”.* Devido a definição equivocada sobre aleatoriedade utilizada pelo sujeito, ele acaba por não relacionar com Probabilidade.

5.6 DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

A partir da pergunta “Como você define Probabilidade?” foram obtidos os seguintes resultados:

Figura 6 - Categorias geradas para a definição de Probabilidade



Fonte: Elaborado pelo Autor (2019)

Mais da metade dos excertos relaciona probabilidade com a ideia de chance. Embora os conceitos sejam muito próximos, a definição de chance é diferente da definição de Probabilidade. Dentre os 14 trechos citados nessa categoria, destaca-se o trecho do sujeito C *“Difícil de responder. Probabilidade pra mim?...É, com o posso te dizer.... como se fosse uma. Qual a probabilidade de tu ganhar na mega sena? A Probabilidade seria a porcentagem de chances....que seria uma porcentagem de chances que tu....como eu posso te dizer....Probabilidade...uma porcentagem de chances que tu tem....ah é difícil de responder....Probabilidade...barbaridade”*. Outros participantes demonstraram a mesma dificuldade em definir com clareza, mostrando uma confusão entre os conceitos de Probabilidade e chance. O sujeito K se refere ao espaço amostral na frase. *“Probabilidade é a chance de ocorrer um determinado evento. Como faz como pouco tempo que eu passei esse conteúdo pros segundos anos né, eu dou aula pro ensino médio, então eu defini assim né, que é a chance de ocorrer um determinado evento, que daí cada pergunta e cada coisa define o que é o evento né, dentro de um espaço amostral que é o total das coisas.”*. O sujeito faz confusão ao citar que uma pergunta define um evento, e não define precisamente o espaço amostral como sendo o universo possível de eventos em um experimento aleatório.

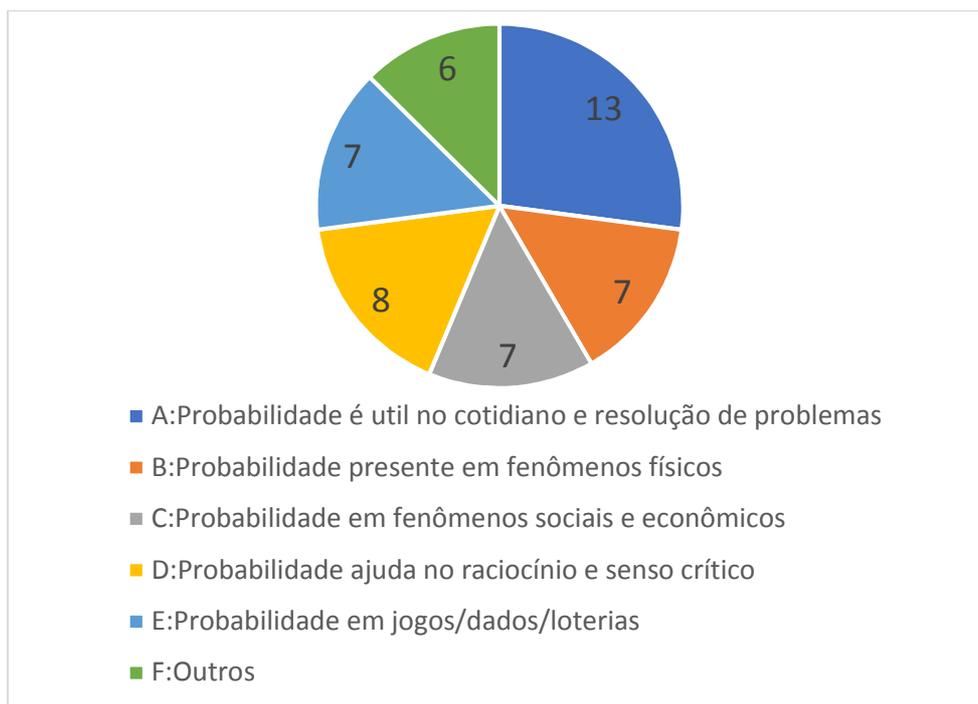
Na categoria B, foram considerados excertos onde o sujeito se referia a Probabilidade de forma precisa ou muito próxima a alguma definição ou axioma. Como por exemplo, o sujeito J que disse *“Definição de Probabilidade. A Probabilidade, ah, não sei definir Probabilidade, ah, eu sei que Probabilidade não pode ser mais do que 1. 1 é o todo, é o universo”*. Outro sujeito definiu Probabilidade exemplificando com o lançamento de um dado, um exemplo de Probabilidade clássica. *“Probabilidade é, dentro do que eu aprendi, a Probabilidade pode ter a porcentagem de acerto e erro, jogar um dado, qual a Probabilidade de cair a face número 1, por exemplo. A gente sabe que o dado tem 6 faces, então o mínimo é 1 pra 6 no caso, e eu acredito que é uma noção meio cada um pode ter uma própria noção de Probabilidade”*

Um outro pequeno grupo de excertos foi classificado como outros. Dentre as respostas dessa categoria, destaca-se a resposta do sujeito B, que confunde Probabilidade com Estatística ao dizer que essa é uma ciência que analisa dados. *“Definir Probabilidade é difícil. Acho que é um assunto bem importante, né? Talvez eu responda misturado, tá. Mas, Probabilidade é tu saber lidar com dados né? O que é Probabilidade? Acho que envolve saber lidar com dados, ler dados, analisar esses dados.”*

5.7 IMPORTÂNCIA DA PROBABILIDADE

Devido à proximidade de sentido entre as respostas, as categorias para esse tópico foram geradas a partir de duas perguntas: “Dê exemplos de probabilidade no dia a dia” e “Porque a probabilidade deve ser ensinada no ensino básico?” A seguir, o gráfico com as categorias geradas:

Figura 7 - Categorias geradas para a importância de Probabilidade



Fonte: Elaborado pelo Autor (2019)

A primeira categoria A, falou da utilidade da Probabilidade no cotidiano e na resolução de problemas. Destaca-se os seguintes exemplos: Sujeito F com a fala “ *Eu acho que ela tem o potencial de fazer as pessoas pensarem na qual a possibilidade de um certo acontecimento realmente acontecer, e eu acho que as pessoas assim, uma grande diferença que acontece, é que quando principalmente as pessoas que não se ligam muito em Probabilidade, é que elas tem alguma coisa que foi induzida na vida assim, que elas pensam em algumas questões e que elas acham, ah isso nunca vai acontecer, ou isso aqui vai acontecer muito facilmente, e se tu vai ver na análise probabilística não acontece como elas pensam*”, e sujeito D “ *Eu acho que ela deve porque ela traz muito da realidade do aluno. Tem como ensinar Probabilidade pegando a vivencia que o aluno já teve ou ta tendo naquele momento, tu consegue adaptar muito fácil pra realidade dele, e eu acho que quando um aluno vê um conteúdo sendo aplicado na vida real ele consegue apreender com mais facilidade, e vai com certeza gravar aquilo e vai usar futuramente.*” Ambos os casos reconhecem a utilidade da probabilidade na realidade do aluno.

Na categoria B temos exemplos de probabilidade em fenômenos físicos, dos mais diversos. Além de dois exemplos do clima, destaca-se o seguinte

exemplo do sujeito G “ *é que nem tu pegar um, tu calcula e monta um circuito eletrônico, tu vai pegar um resistor por exemplo, tu vai ver que aquele resistor que tu calculou, quando tu pega um resistor na pratica, tu vai ver que ele não, sei la, se ele era de 10 ohms, tu vai pegar um resistor de 10 ohms, e ele não é exatamente 10 ohms, pra medir ele tem uma toleranciazinha, quer dizer, tem essa diferença, então tudo isso ai pode afetar o funcionamento de teu circuito eletrônico por exemplo, então é...certas coisas quanto menos a gente suprimir esses efeitos assim, essas chances de não dar certo, ou seja, não acontecer aquilo que a gente não quer, melhor, e é importante tu ter uma probabilidade..”*

Foram dados também exemplos da probabilidade em fenômenos sociais e econômicos na categoria C. Um exemplo a ser destacado é do sujeito J “ *Quando a gente vê...o exemplo que sempre mais penso hoje em dia, é os anúncios do Google quando tu ta no facebook, ou quando tu ta em qualquer rede social, ou quando tu ta no google só...aquilo ali é uma matriz muito grande de dados, possibilitada pela matemática discreta, mas que também vai te captando diante da probabilidade, matematicamente falando, eu não tenho conhecimento pra falar sobre isso. Mas eu sei que é isso que tá por trás. Então a probabilidade junto com um conjunto de informações consegue direcionar muitas coisas, inclusive, que óculos tu vai comprar, que geladeira tu vai comprar, ou que marca é melhor ou pior, ou que site é mais confiável ou menos confiável”.*

Outros excertos falaram sobre a importância da probabilidade para o desenvolvimento de um senso crítico e do raciocínio, categoria D, como na fala do sujeito J: “ *Não tem que sair um estatístico formado, não é isso que a gente pensa, quando a gente pensa de probabilidade na escola, mas subsidiar argumentos coerentes pra tornar aquele cara de ser um cidadão, tomar decisões na vida dele, de não ser enganado por algumas coisas, de verificar, fazer verificações entre verdadeiro e falso e o que é mais vantajoso pra ele enquanto pessoa”.*

Na categoria E, foram dados exemplos de probabilidade clássica ou axiomática como dados e moedas. Também mais de um sujeito se referiram a loteria como no caso da fala do sujeito G “*É, aplicações assim eu acho que por exemplo, uma básica que interessa pra todo mundo, são os jogos da loteria né, mega sena principalmente, todo mundo quer ganhar, a gente sabe disso, apesar*

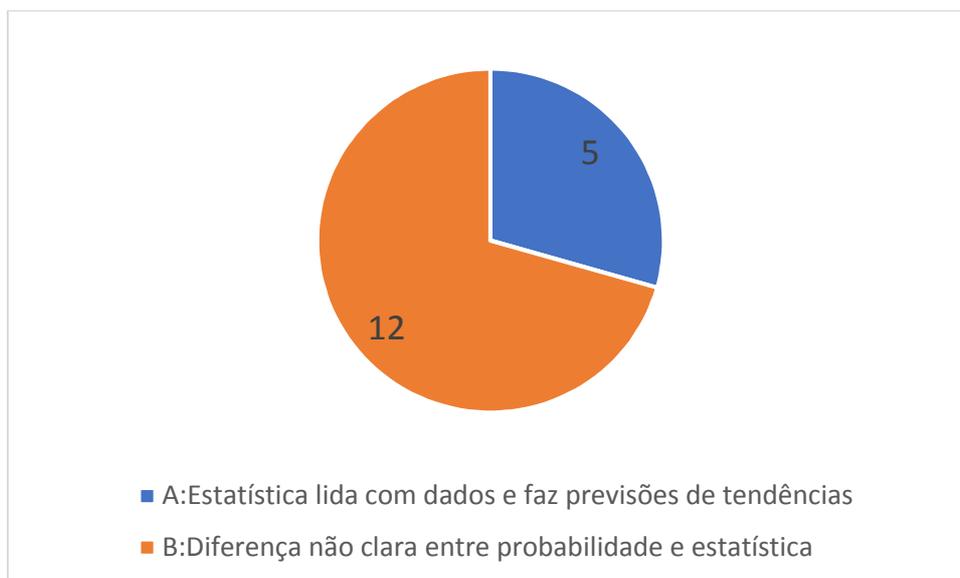
da chance ser uma em 50 milhões de ganhar se não me engano, mas tem esse fator, essa questão importante”.

Outros trechos que não se encaixaram em nenhuma categoria foram classificados em “outros” na categoria F. Nessa categoria, algumas respostas relacionaram a probabilidade com a matemática, como o sujeito K que relaciona a probabilidade com a matemática por meio da análise combinatória “ *acho que é interessante pensar nisso né, e a relação da matemática é totalmente né, faz todo sentido né, tu precisa analisar e encontrar qual o espaço amostral né, o espaço amostral normalmente, normalmente não, é a soma de todas as coisas ne, normalmente é por análise combinatória né, e análise combinatória é um conteúdo dentro da matemática....*”. No entanto, o mesmo exemplo não parece considerar a probabilidade como área dentro da matemática, com seus próprios axiomas e definições, deixando de forma rasa sua relação relacionada ao cálculo do número de possibilidades por meio de análise combinatória.

5.8 RELAÇÃO DA PROBABILIDADE COM ESTATÍSTICA

A pergunta “Qual a relação da Probabilidade com a Estatística para você?” gerou apenas duas categorias, sendo uma delas voltada a definição da Estatística e outra a qual os alunos não conseguiam diferenciar Probabilidade de Estatística.

Figura 8 - Categorias geradas para a relação de Probabilidade com Estatística.



Fonte: Elaborado pelo Autor (2019)

Nota-se que grande parte dos excertos não consegue diferenciar Probabilidade de Estatística, na categoria A. Dentre as justificativas, estava o fato que as duas eram ensinadas de forma conjunta, sendo difícil, portanto uma diferenciação, como disse o sujeito B *“Eu não sei te dizer assim...eu acho que eu não consigo definir bem os dois conceitos pra saber diferenciar. Porque geralmente a gente trabalha um atrás do outro, e ai se não é enfatizando eu não consigo separar as coisas.”*

Foram obtidos também cinco trechos que definiram estatística separadamente, dizendo que é uma ciência que lida com dados e faz previsões. Destaque a fala do sujeito D *“Então, Estatística pra mim é mais isso, pega aqueles dados de pesquisas e trazer informações daquilo, e também ela pode ser usada pra prever o futuro. E a Probabilidade ela estuda mais eventos aleatórios assim, mais as chances de alguma coisa acontecer ou não.”* No entanto, faltou citar exemplos onde não é possível realizar o Censo – quase todos – e utiliza-se, portanto, a amostragem e a inferência, para fazer generalizações de uma amostra para uma população.

6. CONSIDERAÇÕES E RESPOSTA AOS OBJETIVOS

A partir de todas as categorias geradas, bem como as perguntas objetivas em relação a formação dos doze participantes de pesquisa, foi possível verificar os objetivos secundários e o objetivo principal deste trabalho.

Cabe salientar que essa é uma pesquisa qualitativa, o que diferentemente de uma pesquisa quantitativa, não permite generalizar resultados, pois se trata de uma amostra pequena. Portanto, os comentários a seguir se referem apenas aos participantes de pesquisa, podendo ser considerados no máximo indícios de uma tendência se confrontado com outros estudos.

6.1 Formação dos licenciandos para lecionar

Um dos objetivos específicos era verificar a formação destes estudantes a fim de relacionar com as concepções destes mesmos de aleatoriedade e Probabilidade. A partir das próprias respostas dos participantes da pesquisa, pode-se ver que dois terços dos 12 estudantes consideram sua própria formação insuficiente para lecionarem Probabilidade e Estatística no ensino básico. Dentre os quatro estudantes que responderam que a(s) disciplina(s) vista(s) na graduação são suficientes, dois a fizeram com ressalvas. No entanto, mesmo entre esses estudantes, foi demonstrada uma dificuldade na própria definição de Probabilidade e Estatística, especialmente na relação entre as duas. Algo não totalmente claro para nenhum dos participantes desta pesquisa.

Portanto, foi verificado que a formação destes estudantes, de forma unânime, é pelo menos em parte insuficiente para lecionar Estatística e Probabilidade no ensino básico. Isso vai ao encontro do que alguns autores dizem em outros estudos sobre. Isso indica de possibilidade de essa tendência não estar mudando para as próximas gerações.

6.2 Concepção dos licenciandos em Probabilidade

Dentro deste grande objetivo específico, foram verificados três pequenos objetivos. Como o objetivo geral era verificar a concepção destes estudantes sobre aleatoriedade, pois a compreensão desta é essencial para o entendimento

de Probabilidade, um destes pequenos objetivos foi verificar a concepção dos mesmos da própria Probabilidade.

Em relação ao primeiro pequeno objetivo, sobre o conceito de Probabilidade, verificou-se uma forte associação dos participantes da pesquisa do conceito de Probabilidade com chance. No entanto, pelas respostas dadas, pode-se aferir que a definição dos estudantes se aproxima mais, de forma geral, de alguma das definições de Probabilidade, do que do conceito de chance. Ainda, algumas respostas trouxeram definições corretas de Probabilidade. No entanto, nenhum dos doze participantes de pesquisa mencionou que Probabilidade possui mais de uma definição, ou tampouco falou a definição de alguma delas de maneira formal e precisa. Portanto, verificou-se que a concepção destes estudantes ainda está longe do ideal.

Sobre o segundo pequeno objetivo, da importância da Probabilidade, as respostas foram muito variadas. Alguns relataram que a Probabilidade é importante para a vida de forma geral, para a tomada de decisões em diversas áreas e no dia a dia. Outros falaram que a Probabilidade é uma área que ajuda a desenvolver o raciocínio e o senso crítico. Um outro grupo de respostas falou sobre diversos exemplos em que a Probabilidade está presente. Estes exemplos variaram entre exemplos do mundo físico, social e econômico. Portanto, a despeito da formação insuficiente e dificuldade dos mesmos em definir o conceito, verificou-se que os estudantes reconhecem a importância de ter um domínio em probabilidade para a realidade do aluno.

O terceiro pequeno objetivo, de que forma os alunos relacionam Probabilidade com Estatística, trouxe quase uma unanimidade: os estudantes tiveram muita dificuldade em diferenciar Probabilidade de Estatística. Da mesma forma, as definições de Estatística foram rasas. Portanto, verificou-se que houve uma lacuna na formação destes estudantes no que diz respeito ao conceito de Estatística, pois os mesmos a confundem com Probabilidade.

6.3 Concepção dos licenciandos em aleatoriedade

O objetivo geral deste trabalho foi verificar como doze estudantes de licenciatura em Matemática concebem a aleatoriedade, elemento essencial para entender e lecionar de forma adequada Probabilidade. Este objetivo foi dividido em cinco pequenos objetivos, cada um com suas considerações a seguir.

O primeiro pequeno objetivo se refere ao conceito destes estudantes sobre aleatoriedade. Algumas das respostas relacionam de forma mais precisa o aleatório com Probabilidade, no entanto, a maioria relaciona o aleatório com acaso ou o incerto. Não fica evidente se estas respostas sobre acaso presumem uma relação com Probabilidade, visto que o próprio conceito de acaso é colocado como sinônimo de aleatório em documentos como BNCC. Algumas das pessoas disseram não acreditar de fato na aleatoriedade na realidade, acreditando que tudo é predeterminado. Verificou-se, portanto, que os estudantes têm uma concepção de aleatório parcialmente relacionada com Probabilidade.

O segundo pequeno objetivo se refere a capacidade de reconhecer fenômenos aleatórios no dia a dia. Diferentemente da pergunta sobre exemplos de Probabilidade, onde os exemplos variaram mais, nesta pergunta cerca de dois terços dos exemplos se concentraram em exemplos do aleatório onde há Probabilidade Clássica ou Axiomática. O outro um terço se referiu a exemplos onde temos Probabilidade Frequentista ou Subjetiva. Portanto, verificou-se que grande parte dos estudantes pesquisados reconhece o aleatório em exemplos como dados, moedas, dentre outros, e não tanto em exemplos das mais diversas áreas das quais a aleatoriedade este presente.

O terceiro pequeno objetivo se refere a concepção destes estudantes sobre Determinismo. A Matemática como um todo, modela fenômenos determinísticos, enquanto um ramo dentro dela, a Probabilidade, modela fenômenos aleatórios. No entanto, a despeito de todos os participantes estarem cursando matemática, nenhum demonstrou já ter lido ou estudado esse conceito. Os que o definiram, embora por vezes de forma precisa, o fizeram pela etimologia do termo, e não por já terem estudado. Portanto, verificou-se que estes estudantes não possuem uma definição própria do que é Determinismo, não tendo estudado ou ouvido falar anteriormente.

O quarto pequeno objetivo é sobre o conceito de acaso destes estudantes. A maioria classificou o acaso como algo indeterminado. Já outros relacionaram o acaso com aleatoriedade, enquanto uma minoria acreditou não ter relação com o aleatório. O conceito de acaso é complexo, discutido amplamente na filosofia, não sendo foco deste trabalho. No entanto, o termo é muito relacionado com o aleatório nos textos de Educação Estatística. Portanto,

verificou-se que, assim como na literatura, os estudantes de forma geral relacionam o acaso com aleatoriedade, seja pela relação com Probabilidade, seja por o classificarem como que não é predeterminado, sem mencionar o aleatório.

O quinto pequeno objetivo é uma pergunta direta sobre a relação de Probabilidade com aleatoriedade. A maioria relacionou os dois conceitos forma não clara. Apesar disso, um número significativo classificou o aleatório como um evento modelado pela Probabilidade, e um número pequeno não estabeleceu uma relação. Dessa forma, verificou-se que os participantes da pesquisa relacionam de forma parcialmente satisfatória Probabilidade com aleatoriedade.

7 CONSIDERAÇÕES

Este trabalho teve como objetivo geral verificar as concepções de estudantes sobre aleatoriedade, incluindo termos relacionados como acaso e Determinismo. Da mesma forma, foi verificado como os estudantes estabeleciam relação do aleatório com a Probabilidade e da Probabilidade com a Estatística, além como o conceito delas. De forma geral, foi verificada uma grande dificuldade destes estudantes com estes conceitos. Embora grande parte tenha uma definição própria do que é aleatório, estes não estabelecem uma forte relação desse conceito com Probabilidade. Especialmente, parece não haver nenhum reconhecimento da dualidade Determinismo/aleatoriedade presente na realidade. Como o termo aleatório é frequentemente usado na mídia, pode esse ser um indício que a concepção destes estudantes sobre aleatório não venha dos livros. O mesmo parece acontecer com o acaso, um termo usado no senso comum.

Portanto, há fortes indícios que a formação destes professores em Estatística e Probabilidade esteja sendo ineficiente, o que vai ao encontro de outros estudos sobre o tema. O ensino de Estatística e Probabilidade baseado em fórmulas, descontextualizado da realidade, só reforça essa problemática. É preciso que o currículo das licenciaturas em Matemática no Brasil seja revisto, dando um maior protagonismo a estas disciplinas. Protagonismo não somente em carga horária, que já é pequena, mas em disciplinas com abordagens metodológicas adequadas para uma licenciatura. Afinal, um estudante de licenciatura não pode aprender estes conteúdos da mesma forma que um engenheiro, o que frequentemente ocorre.

Dominar a Probabilidade e a Estatística ajuda a ter senso crítico sobre as informações que são nos passadas, nos ajudando, por exemplo, a tomar decisões como votar em eleições. Compreender a aleatoriedade na realidade e na sociedade é compreender que a mesma envolve sistemas complexos, onde um efeito pode ser gerado por múltiplas causas. Ao entender isso, entendemos que não basta “fazer isso para acontecer aquilo”. Exemplificando, não basta liberar ou proibir armas para acabar com a criminalidade, pois esta é um fator social complexo e multifatorial, nem reduzir a ingestão de álcool para evitar o

câncer, pois o mesmo tem múltiplas causas. Ao controlarmos essas variáveis, no máximo reduzimos ou aumentamos a probabilidade de ocorrência dos fatos. Esses exemplos, dentre outros de diversas áreas, mostram como o senso comum reduz a complexidade da realidade em uma relação determinística de causa e efeito.

Espera-se que esse trabalho possa ajudar outros trabalhos sobre os tópicos aqui abordados. Da mesma forma, espera-se que possa ajudar a mudar esta realidade, objetivando um ensino efetivo para formação de cidadãos críticos.

REFERÊNCIAS

ARA, Amilton Braio. **O ensino de estatística e a busca do equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios da realidade**. São Paulo: USP, 2006. 86 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

BATANERO, Carmen; SERRANO, Luis. Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. **Revista UNO**, Granada (Espanha), 1995.

BATANERO, Carmen. **Didáctica de la estadística**. Granada (Espanha): Universidad de Granada, 2001.

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan Diaz. **Estocástica y su didáctica para maestros**. Granada (Espanha): Universidad de Granada (Proyecto Edumat-Maestros), 2002.

BAYER, Arno et al. **Preparação do Formando em Matemática-Licenciatura para lecionar Estatística no Ensino Fundamental e Médio**. In: V ENPEC (Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências), 2005.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais (1º e 2º ciclo): Matemática**. MEC/SEF. Brasília, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais (3º e 4º ciclo): Matemática**. MEC/SEF. Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio**. MEC/SEF. Brasília, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Base Nacional Comum Curricular: A área de Matemática**. Brasília, 2015.

CAZORLA, Irene Maurício. O ensino de estatística no Brasil. In: **INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS – ICOTS, 7.**, Salvador, 2006. Anais Salvador: Universidade Federal da Bahia, 2006.

COLODEL, Debora Laranjeira; BRANDALISE, Mary Ângela Teixeira. **Tratamento da Informação nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: Entre Concepções e Práticas**. In: EREMATSUL. 16. 2010, Porto Alegre. Anais. Porto Alegre: EDIPUCRS, p. 371–82, 2010.

COUTINHO, Cileda. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 2, p. 50-67, 2007.

DICIONÁRIOWEB, **Dicionário** Disponível em <http://www.dicionarioweb.com.br/>

FLICK, Uwe. **Uma introdução à pesquisa qualitativa**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.

HOBUSS, João. Revisão de livro de: “DUDLEY, John. Aristotle’s Concept of Chance. 1ª ed., Albany, Suny Press, 469 p. 2012”, **Filosofia Unisinos**, São Leopoldo, 2013.

HERZOG, Rodrigo Castelo Branco; ODY, Magnus Cesar; BALLEJO, Clarissa Coragem; BRAGA, Elisabete Rambo, VIALI, Lori. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero América**. 2019.

HERZOG, Rodrigo Castelo Branco; ODY, Magnus Cesar; BALLEJO, Clarissa Coragem; BRAGA, Elisabet Rambo, VIALI, Lori. **Educação Probabilística: um estudo sobre a aleatoriedade no ensino fundamental**. Editora, 2019.

HERZOG, Rodrigo Castelo Branco; ODY, Magnus Cesar. BALLEJO, Clarissa Coragem; KROETZ, Ketlin. **Um panorama sobre as pesquisas em educação estatística com o uso de tecnologias digitais de informação e comunicação**. Edipucrs, 2019.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin. **A probabilidade e a estatística no ensino fundamental: uma análise curricular**. Campinas: UNICAMP, 1998. 127f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, São Paulo, 1998.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil**. Campinas: UNICAMP, 2003. 281f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, São Paulo, 2003.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin. **Literacia estatística e o INAF 2002**. IN: FONSECA, Maria da Conceição F. R. Letramento no Brasil – Habilidades Matemáticas. São Paulo: Global, 2004

LOPES, Celi Aparecida Espasandin. O Ensino da Estatística e da Probabilidade na Educação Básica e a formação de professores. **Cadernos Cedes**, Campinas, 2008.

MICHAELIS. **Moderno Dicionário da Língua Portuguesa**. Disponível em: <<http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php>>.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. **Análise textual discursiva**. 2. Ed. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014

PESSOA JR, Osvaldo. **Filosofia da Física Clássica**. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

SALATIEL, José Renato. O que Peirce quer Dizer por Violação das Leis da Natureza pelo Acaso? **Cognitio-Estudos: Revista eletrônica de Filosofia**. São Paulo, 2009.

SALATIEL, José Renato. Filosofia do Acaso Organizador em Peirce. **Cognitio-Estudos: Revista Eletrônica de Filosofia**, São Paulo, 2005.

VIALI, Lori. **O ensino de Estatística e Probabilidade nos cursos de Licenciatura em Matemática.** In: XVIII SINAPE (Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística), Estância de São Pedro, São Paulo, 2008.

VIALI, Lori. “Algumas Considerações Sobre a Origem da Teoria da Probabilidade.” **Revista Brasileira de História da Matemática**, vol. 8, n.º 16. pp. 143-53. 2008

VOLCHAN, Sergio B. **A teoria algorítmica da aleatoriedade.** In: I Simpósio de Filosofia da Ciência, 2001, Rio de Janeiro. Temas de filosofia da natureza. Rio de Janeiro: UERJ, 2001.

WALICHINSKI, Danieli; SANTOS JUNIOR, Guataçara; ISHIKAWA, Eliana Cláudia Mayumi. Educação estatística e parâmetros curriculares nacionais: algumas considerações. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba, 2014.

YIN, Robert K. **Estudo de Caso: Planejamento e Métodos.** Traduzido por: Cristhian Matheus Herrera. Porto Alegre: Bookman editora, 2015.



Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
Pró-Reitoria de Graduação
Av. Ipiranga, 6681 - Prédio 1 - 3º. andar
Porto Alegre - RS - Brasil
Fone: (51) 3320-3500 - Fax: (51) 3339-1564
E-mail: prograd@pucrs.br
Site: www.pucrs.br