

Rafael da Silveira Castro

**Controladores Ressonante e Repetitivo
Modificados para o Tratamento de Sinais com
Período Variante no Tempo**

Porto Alegre - RS, Brasil

2015

Rafael da Silveira Castro

Controladores Ressonante e Repetitivo Modificados para o Tratamento de Sinais com Período Variante no Tempo

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Pontifícia Universidade do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sinais, Sistemas e Tecnologia da Informação

Linha de Pesquisa: Automação e Sistemas.

Pontifícia Universidade do Rio Grande do Sul – PUCRS

Faculdade de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Orientador: Aurélio Tergolina Salton

Coorientador: Jeferson Vieira Flores

Porto Alegre - RS, Brasil

2015



**CONTROLADORES RESSONANTE E REPETITIVO
MODIFICADOS PARA O TRATAMENTO DE SINAIS COM
PERÍODO VARIANTE NO TEMPO**

CANDIDATO: RAFAEL DA SILVEIRA CASTRO

Esta Dissertação de Mestrado foi julgada para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

DR. AURELIO TERGOLINA SALTON - ORIENTADOR

DR. JEFERSON VIEIRA FLORES - CO-ORIENTADOR

BANCA EXAMINADORA

**DR. ALEXANDRE SANFELICE BAZANELLA - DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
ELÉTRICA - ESCOLA DE ENGENHARIA - UFRGS**

**DR. DANIEL FERREIRA COUTINHO - UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA - UFSC**

DRA. LETÍCIA MARIA BOLZANI POEHLIS - DO PPGE - FENG - PUCRS

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente aos meus orientadores, Prof. Aurélio Ter-
golina Salton e Prof. Jeferson Vieira Flores, pelo conhecimento, empenho e cooperação
que foram essenciais para elaboração deste trabalho. Agradeço aos colegas pela amizade
construída e pelo companheirismo durante o mestrado. Agradeço especialmente aos meus
pais pelo incessante apoio e incentivo nesta jornada.

Resumo

Esta dissertação propõe novas topologias de controle para o seguimento de sinais de referência periódicos e/ou rejeição de sinais de distúrbio periódicos quando a frequência destes sinais é variante no tempo. A metodologia proposta baseia-se na construção de controladores em um novo domínio- θ , onde os sinais de interesse podem ser representados com período constante. Neste domínio, é possível empregar o Princípio do Modelo Interno para o projeto de controladores lineares que garantem desempenho de seguimento e/ou rejeição para estes sinais. O objetivo central deste trabalho é, portanto, uma metodologia para transformação da representação dinâmica de controladores definidos no domínio- θ para o usual domínio do tempo. Esta ideia foi explorada para modificação dos Controladores Ressonante e Repetitivo, abordagens do Princípio do Modelo Interno tradicionais na literatura para tratamento de sinais periódicos, originando os Controladores Ressonante e Repetitivo Transformados, as topologias de controle propostas que consideram ampla variação no período dos sinais. Para realizar o projeto dos parâmetros destas arquiteturas de controle e garantir estabilidade e desempenho robusto em malha-fechada, são consideradas metodologias de síntese robusta baseadas em Desigualdades Matriciais Lineares. As vantagens das estratégias de controle propostas, em relação às abordagens tradicionais, são demonstradas por meio de simulações de aplicações práticas que apresentam período variante no tempo, como motores de corrente contínua com cargas excêntricas, inversores de frequência trabalhando com tensões alternadas de frequência fundamental variável e turbinas eólicas. Além da formulação em tempo contínuo, este trabalho apresenta ao final uma metodologia de projeto e implementação em tempo discreto dos Controladores Ressonante e Repetitivo Transformados. Resultados experimentais com um motor de corrente contínua excêntrico, por fim, comprovam os benefícios das estratégias de controle propostas em relação aos controladores tradicionais.

Palavras-chaves: Princípio do Modelo Interno, Controle Ressonante, Controle Repetitivo, sinais de período variante no tempo, mudança do domínio de sinais e sistemas, turbina eólica, motor de corrente contínua excêntrico, inversor de frequência.

Abstract

This dissertation proposes novel control schemes in order to track periodic references and/or reject periodic disturbances with time-varying frequency. The proposed methodology is based on a θ -domain concept, where the interest signals possess a constant period. By employing the Internal Model Principle, this domain allows the design of linear controllers that ensure tracking and/or rejection performance to the targeted class of signals. The main objective is, then, to transform these controllers dynamical description from θ -domain to the usual time domain. This idea was explored to modify the Resonant and Repetitive Controllers, traditional approaches based on the Internal Model Principle, yielding Transformed Resonant and Repetitive Controllers, the proposed control schemes that deal with large period variations. Robust control methodologies based on Linear Matrix Inequalities are presented in order to synthesize the controllers parameters and assure robust closed-loop stability and performance. The advantages of the proposed control architectures, in comparison to traditional strategies, are evaluated by simulated applications with time-varying period signals, such as eccentric direct current motors, frequency inverters and wind turbines. Besides the continuous time formulation, this work presents discrete time synthesis methodologies and implementation of the Transformed Resonant and Repetitive Controllers. In the end, experimental results with an eccentric direct current motor show the benefits of the proposed controllers in contrast to the traditional ones.

Key-words: Internal Model Principle, Resonant Control, Repetitive Control, signals with time-varying period, signals and systems domain change, wind turbine, eccentric direct current motor, frequency inverter.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de um politopo no espaço \mathbb{R}^2	34
Figura 2 – Diagrama de blocos genérico de um sistema de controle.	40
Figura 3 – Resposta em frequência $G_r(j\omega)$ do Controlador Ressonante.	45
Figura 4 – Resposta em frequência $G_R(j\omega)$ do Controlador Múltiplo Ressonante com três modos harmônicos ($n_h = 3$).	46
Figura 5 – Diagrama de blocos do Controlador Repetitivo.	47
Figura 6 – Resposta em frequência $G_{rp}(j\omega)$ do Controlador Repetitivo para um atraso genérico τ . Segue que $\omega_0 = 2\pi/\tau$	47
Figura 7 – Diagrama de blocos do Controlador Repetitivo com filtro de primeira ordem.	48
Figura 8 – Resposta em frequência $G_{rp}(j\omega)$ do Controlador Repetitivo filtrado para diferentes frequências de corte ω_c . Segue que $\omega_0 = 2\pi/\tau$	49
Figura 9 – Representação gráfica da propriedade (3.6). Nesta figura, t_1 e θ_1 denotam simplesmente instantes de t e θ particulares para a análise gráfica.	52
Figura 10 – Diagrama de blocos da malha-fechada do sistema com o Controlador Ressonante Transformado.	70
Figura 11 – Acima, a frequência fundamental instantânea $f_o(t)$ do sinal de referência $r(t)$. Abaixo, a comparação entre o erro $e(t)$ e do sinal de controle $u(t)$ entre o Controlador Ressonante Transformado e o tradicional.	78
Figura 12 – Comparação ampliada do sinal de controle do instante 0,4 s até 0,48 s	79
Figura 13 – Definição da função $\text{tri}(\xi)$. Segue que $\text{tri}(\xi) = \text{tri}(\xi - 2\pi) \forall \xi \in \mathbb{R}$	80
Figura 14 – Comparação entre a saída $y(t)$, o sinal de erro $r(t)$ e a entrada de controle $u(t)$ no cenário com $p_d(\xi)$ senoidal.	82
Figura 15 – Ampliação da resposta de $u(t)$ mostrada na Figura 14. Mesmo através desta ampliação é difícil diferenciar visualmente as curvas.	83
Figura 16 – Comparação do sinal de erro $e(t)$ no cenário com $p_d(\xi)$ triangular para diferentes n_h modos harmônicos dos controladores. A mesma legenda da Figura 14 aplica-se aqui.	84
Figura 17 – Comparação ampliada do sinal de controle $u(t)$ no cenário com $p_d(\xi)$ triangular para diferentes n_h modos harmônicos. A mesma legenda da Figura 14 aplica-se aqui.	85
Figura 18 – Comparação no domínio da frequência- θ entre o Controlador Repetitivo original e filtrado.	91
Figura 19 – Valores numéricos dos parâmetros compensados em função de $\omega_c\theta$. Aqui foi considerado $T_\theta = 2\pi$	92

Figura 20 – Comparação no domínio da frequência- θ entre o Controlador Repetitivo original, filtrado (sem correção) e filtrado (com a correção proposta).	93
Figura 21 – Diagrama de blocos do Controlador Repetitivo Transformado em malha fechada.	94
Figura 22 – Acima, a varredura realizada para encontrar o melhor valor de β para síntese utilizando o Teorema 5.1. Abaixo, a derivada máxima μ permitida para $\tau(t)$ e o respectivo valor objetivo da síntese utilizando o Teorema 5.2.	103
Figura 23 – Acima, a frequência fundamental instantânea $f_o(t)$ do sinal de referência $r(t)$. Abaixo, a comparação do erro $e(t)$, do atraso $\tau(t)$ e do sinal de controle $u(t)$ entre o Controlador Repetitivo Transformado e o tradicional.	105
Figura 24 – Comparação ampliada dos sinais de controle $u(t)$ na Figura 23.	106
Figura 25 – Acima, a varredura realizada para encontrar o melhor valor de β para síntese utilizando o Teorema 5.1. Abaixo, a derivada máxima μ permitida para $\tau(t)$ e o respectivo valor objetivo da síntese utilizando o Teorema 5.2.	107
Figura 26 – Comparação da saída $y(t)$, do sinal de erro $e(t)$, do atraso $\tau(t)$ e do sinal de controle $u(t)$ entre o Controlador Repetitivo Transformado e o tradicional. Neste cenário, a função da excentricidade $p_d(\xi)$ é triangular.	109
Figura 27 – Comparação ampliada do sinal de controle $u(t)$ apresentado na Figura 26.	110
Figura 28 – Comparação do sinal de erro $e(t)$ entre os Controladores Repetitivo Transformado e Repetitivo sem compensação do filtro passa-baixas.	110
Figura 29 – Comparação ampliada do sinal de erro $e(t)$ entre Controladores Repetitivos Transformados com e sem compensação do filtro passa-baixas.	110
Figura 30 – Comparação do erro transitório entre os Controladores Ressonante (de oito modos) e Repetitivo Transformados.	111
Figura 31 – Comparação do erro e do sinal de controle em regime permanente entre os Controladores Ressonante (de oito modos) e Repetitivo Transformados.	112
Figura 32 – Dinâmica do erro de observação $e_\tau(t)$ do atraso do Controlador Repetitivo Transformado. A convergência assintótica para zero segue até o final da simulação realizada.	112
Figura 33 – Diagrama esquemático dos principais sinais do modelo da turbina eólica.	115
Figura 34 – Coeficiente $C_F(\vartheta_i, u_i)$ de empuxo aerodinâmico (BIANCHI; BATTISTA; MANTZ, 2006).	116
Figura 35 – Coeficiente $C_M(\vartheta_i, u_i)$ de momento aerodinâmico útil (BIANCHI; BATTISTA; MANTZ, 2006).	117
Figura 36 – Coeficiente $C_P(\vartheta_i, u_i)$ de potência aerodinâmica extraída na i -ésima pá.	119

Figura 37 – Pontos de equilíbrio do sistema em função da velocidade média do vento δ .	120
Figura 38 – Parâmetros variantes em função de δ no modelo linearizado do sistema.	123
Figura 39 – Diagrama de blocos do sistema de controle da turbina eólica.	124
Figura 40 – Novos parâmetros variantes em função de δ resultantes da combinação do modelo da controlador com o modelo da planta.	130
Figura 41 – Interpretação gráfica da aproximação linear por partes de $S(\delta)$. Aqui considera-se $S(\delta) \in \mathbb{R}$ e $n_p = 4$	133
Figura 42 – Aproximação linear por partes das funções de δ contidas no modelo da turbina eólica.	135
Figura 43 – Relação entre o valor objetivo $\text{tr}(X)$ e a máxima taxa de variação μ permitida para o atraso $\tau(t)$ de CRPT conforme o Teorema 6.3.	142
Figura 44 – Sinal de velocidade do vento $d_1(t)$ na primeira pá da turbina eólica. . .	143
Figura 45 – Respostas temporais de: rotação da turbina $x_1(t)$, deflexão da torre $x_2(t)$, torque do gerador $u_4(t)$ e potência elétrica gerada $P_e(t)$	143
Figura 46 – Comparação da saída $y_1(t)$ e desvio entorno do equilíbrio $\Delta y_1(t)$ entre os controladores CB.1, CRS.1 e CRST.1.	144
Figura 47 – Comparação da saída $y_1(t)$ e desvio entorno do equilíbrio $\Delta y_1(t)$ entre os controladores CB.1, CRS.2 e CRST.2.	145
Figura 48 – Comparação da saída $y_1(t)$ e desvio entorno do equilíbrio $\Delta y_1(t)$ entre os controladores CB.5, CRS.5 e CRST.5.	145
Figura 49 – Comparação da saída $y_1(t)$ e desvio entorno do equilíbrio $\Delta y_1(t)$ entre os controladores CB.1, CRP e CRPT.	146
Figura 50 – Comparação ampliada entre CB.1, CRS.5 e CRST.5 para os sinais $y_1(t)$, u_1 e \dot{u}_1 nas faixas de tempo 200 s até 210 s e 550 s até 560 s.	146
Figura 51 – Comparação ampliada entre CB.1, CRP e CRPT para os sinais $y_1(t)$, u_1 e \dot{u}_1 nas faixas de tempo 200 s até 210 s e 550 s até 560 s.	147
Figura 52 – Comparação entre o atraso variante $\tau(t)$ de CRPT e o atraso nominal constante de CRP. Abaixo, os sinais de variação do atraso $\dot{\tau}(t)$ e erro da observação do atraso $e_\tau(t)$	148
Figura 53 – Comparação entre CB.2, CRST.5 e CRP da variação da saída $\Delta y_1(t)$ entorno do ponto de equilíbrio.	149
Figura 54 – Comparação ampliada entre CB.2, CRST.5 e CRP seguindo a mesma disposição das Figuras 51 e 50.	149
Figura 55 – Foto da bancada experimental utilizada.	166
Figura 56 – Comparação entre os dados do ensaio do sistema e o modelo identificado. O valor final do degrau de entrada é $u[k] = 140$ para $k > 50$. . .	168
Figura 57 – Sinal de saída $y[k]$ e o sinal de controle $u[k]$ gerado pelo controlador CB.1.	172

Figura 58 – Comparação da saída $y[k]$ e do sinal de controle $u[k]$ entre os controladores CRS.1 e CRST.1.	172
Figura 59 – Comparação da saída $y[k]$ e do sinal de controle $u[k]$ entre os controladores CRS.2 e CRST.2.	173
Figura 60 – Comparação da saída $y[k]$, do sinal de controle $u[k]$ e do atraso $\tau_d[k]$ entre os controladores CRP e CRPT.	174
Figura 61 – Comparação da saída $y[k]$ e do sinal de controle $u[k]$ entre os controladores CB.2, CRST.2, CRPT.	175
Figura 62 – Ampliação do sinal de controle $u[k]$ na Figura 61.	175

Lista de tabelas

Tabela 1	– Pares de relações importantes entre os domínios t e θ	61
Tabela 2	– Relações importantes entre os domínios s , t e θ e s_θ . O símbolo “–” denota a inexistência de uma representação.	61
Tabela 3	– Parâmetros numéricos do modelo médio de um inversor de frequência <i>PWM</i> (SALTON et al., 2013b).	75
Tabela 4	– Parâmetros numéricos do motor de corrente contínua.	80
Tabela 5	– Comparação do valor <i>RMS</i> do sinal de erro $e(t)$ entre os controladores simulados no cenário com $p_d(\xi)$ triangular. A faixa de tempo considerada é a partir do instante 15s até 100s. A unidade dos valores é rad/s.	86
Tabela 6	– Comparação do valor <i>RMS</i> do sinal de erro $e(t)$ entre diferentes controladores. A faixa de tempo para o cálculo do valor efetivo foi de 15s até 60s.	111
Tabela 7	– Lista de sinais importantes do modelo no espaço de estados. Segue que $i \in \{1, 2, 3\}$	114
Tabela 8	– Lista de variáveis auxiliares. Segue que $i \in \{1, 2, 3\}$	114
Tabela 9	– Parâmetros de um turbina eólica típica de três pás e potência nominal de 2,5 MW (SELVAM et al., 2009).	114
Tabela 10	– Regimes de operação de uma turbina eólica em função da velocidade média do vento.	118
Tabela 11	– Mapa dos estados do Controlador Ressonante Transformado proposto para turbinas eólicas.	128
Tabela 12	– Mapa dos estados do Controlador Repetitivo Transformado para turbinas eólicas.	131
Tabela 13	– Valor efetivo (RMS) do sinal $\Delta y_1(t)$ do instante 15s até o final da simulação: 600s para todos os controladores testados. A estratégias propostas estão demarcadas em negrito.	150
Tabela 14	– Algoritmo discreto completo do Controle Ressonante Transformado para implementação em um microcontrolador.	159
Tabela 15	– Algoritmo discreto completo do Controle Repetitivo Transformado para implementação em um microcontrolador.	165
Tabela 16	– Lista de sinais no modelo do sistemas junto com as unidades de trabalho e o respectivo valor de conversão para o SI.	167
Tabela 17	– Lista dos parâmetros do modelo do sistema os respectivos valores numéricos.	167

Tabela 18 – Valor efetivo (*RMS*) do sinal $e[k]$ e da variação do sinal de controle $\Delta u[k]$ da amostra 1500 até 6000, para todos os controladores testados no experimento. As estratégias propostas estão demarcadas em negrito. 176

Lista de abreviaturas e siglas

<i>BIBO</i>	<i>Bounded Input-Bounded Output</i>
LGR	Lugar Geométrico das Raízes
<i>LMI</i>	<i>Linear Matrix Inequality</i>
PMI	Princípio do Modelo Interno
<i>PWM</i>	<i>Pulse Width Modulation</i>
<i>RMS</i>	<i>Root-Mean-Square</i>
SI	Sistema Internacional (de unidades)
SPD	Semi-Plano Complexo Direito
SPE	Semi-Plano Complexo Esquerdo

Lista de símbolos

I_n	matriz identidade de n linhas e colunas
$0_{n \times m}$	matriz de zeros de n linhas e m colunas
A^\top	transposta da matriz A
$\text{diag}\{A, B\}$	matriz bloco-diagonal formada pelas matrizes A e B , isto é, $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$
$\text{Co}\{a, b\}$	envelope convexo formado pelos vértices a e b
$\text{rank}(A)$	posto da matriz A
$\text{tr}(A)$	traço da matriz A
$\text{He}\{A\}$	bloco simétrico $A + A^\top$
\star	utilizado em matrizes simétricas para representar o respectivo elemento transposto da matriz, isto é, $\begin{bmatrix} A & B \\ \star & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{bmatrix}$
$\dot{x}(t)$	derivada de $x(t)$ em relação ao tempo, isto é, $dx(t)/dt$
$\dot{\mathbf{x}}(\theta)$	derivada de $\mathbf{x}(\theta)$ em relação ao domínio- θ , isto é, $d\mathbf{x}(\theta)/d\theta$
$\Delta \mathbf{x}[k]$	diferença do sinal discreto $\mathbf{x}[k]$, isto é, $\mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}[k]$
j	número complexo $\sqrt{-1}$
$ s $	módulo de $s = \sigma + j\omega$, isto é, $\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$
$\angle s$	fase de $s = \sigma + j\omega$, isto é, $\arctan(\omega/\sigma)$
$\ x\ $	norma euclidiana do vetor x , isto é, $\sqrt{x^\top x}$.
$\ x(t)\ _2$	norma \mathcal{L}_2 do sinal contínuo $x(t)$, isto é, $\int_0^\infty \ x(t)\ dt$
$\ \mathbf{x}[k]\ _2$	norma \mathcal{L}_2 do sinal discreto $\mathbf{x}[k]$, isto é, $\sum_{k=0}^\infty \ \mathbf{x}[k]\ $
\mathbb{Z}	conjunto de números inteiros
\mathbb{Z}_+	conjunto de números inteiros positivos
\mathbb{Z}_+^*	conjunto de números inteiros positivos, incluindo o valor 0

\mathbb{R}	conjunto dos números reais
\mathbb{R}_+	conjunto dos números reais positivos
\mathbb{R}_+^*	conjunto de números reais positivos, incluindo o valor 0
\mathbb{C}	conjunto dos números complexos
\mathbb{R}^n	espaço euclidiano real de ordem n
\mathbb{C}^n	espaço euclidiano complexo de ordem n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$
$\mathbb{C}^{n \times m}$	espaço das matrizes complexas de dimensão $n \times m$
□	fim da prova

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Objetivos	22
1.2	Organização do Texto	23
2	PRELIMINARES	24
2.1	Estabilidade de Sistemas no Sentido de Lyapunov	24
2.2	Estabilidade de Sistemas com Atraso de Transporte	27
2.2.1	Abordagem de Lyapunov-Krasovskii	27
2.2.2	Abordagem de Lyapunov-Razumikhin	28
2.2.3	Estabilidade de Sistemas Lineares com Atraso de Transporte Variante	28
2.3	Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)	31
2.3.1	Definição	31
2.3.2	Propriedade da Convexidade	31
2.3.3	Ferramentas Algébricas	32
2.4	Projeto de Sistemas de Controle Robusto	33
2.4.1	Modelagem Politópica	33
2.4.2	Realimentação de Estados	34
2.4.3	Custo garantido \mathcal{H}_2	35
2.4.4	Sistemas Discretos	37
2.5	Princípio do Modelo Interno	40
2.5.1	Descrição de Sinais Periódicos	43
2.5.2	Controlador Ressonante	44
2.5.3	Controlador Repetitivo	47
2.6	Comentários Finais	49
3	METODOLOGIA PROPOSTA	50
3.1	Descrição do Problema	50
3.2	Transformação de Domínio para Sinais de Período Variante no Tempo	51
3.2.1	Definição da Transformação Direta	51
3.2.2	Definição da Transformação Inversa	53
3.2.3	Escolha Sistemática da Função de Transformação	55
3.2.4	Exemplo Numérico	57
3.2.5	Transformação de Derivadas	57
3.2.6	Transformação de Sistemas Dinâmicos	58
3.2.7	Transformação de Sistemas com Atraso de Transporte	59
3.2.8	Transformada de Laplace no domínio- θ	60

3.3	Proposta do Trabalho	62
3.4	Aplicabilidade do Método	63
3.4.1	Exemplo de Aplicação 1: Máquinas Rotativas	64
3.4.2	Exemplo de Aplicação 2: Inversor de Frequência Variável	65
3.5	Comentários Finais	66
4	CONTROLADOR RESSONANTE TRANSFORMADO	67
4.1	Definição do Controlador no Domínio da Frequência-θ	67
4.2	Transformação do Controlador para o Domínio do Tempo	68
4.3	Adição do Integrador	68
4.4	Metodologia de Síntese Robusta	69
4.4.1	Representação Politópica do Controlador	70
4.4.2	Modelo Aumentado do Sistema	71
4.4.3	Critérios de Estabilidade e Desempenho Robusto	72
4.4.4	Passo-a-passo sistemático do projeto	73
4.5	Exemplo Numérico 1: Inversor de Frequência	74
4.5.1	Análise e Discussão dos Resultados	77
4.6	Exemplo Numérico 2: Motor de Corrente Contínua	79
4.6.1	Análise e Discussão dos Resultados	82
4.7	Comentários Finais	86
5	CONTROLADOR REPETITIVO TRANSFORMADO	87
5.1	Definição do Controlador no domínio-θ	87
5.2	Transformação do Controlador para o Domínio do Tempo	88
5.3	Observador do Atraso de Transporte Variante no Tempo	88
5.3.1	Dinâmica Proposta do Observador	89
5.3.2	Escolha do tempo de início t_0 e do valor inicial $\tau(t_0)$	89
5.4	Compensação da Distorção do Filtro Passa-Baixas	90
5.5	Metodologia para Síntese Robusta	93
5.5.1	Representação Politópica do Controlador	93
5.5.2	Modelo Aumentado do Sistema	95
5.5.3	Critérios de Estabilidade e Desempenho Robusto	96
5.5.4	Passo-a-passo sistemático de projeto	101
5.6	Exemplo Numérico 1: Inversor de Frequência	102
5.6.1	Análise e Discussão dos Resultados	104
5.7	Exemplo Numérico 2: Motor de Corrente Contínua	106
5.7.1	Análise e Discussão dos Resultados	108
5.7.1.1	Análise da Compensação do Filtro Passa-Baixas	108
5.7.1.2	Comparação com o Controlador Ressonante Transformado	110
5.7.1.3	Análise do Observador do Atraso	111

5.8	Comentários Finais	112
6	APLICAÇÃO PARA TURBINAS EÓLICAS	113
6.1	Introdução à Aplicação	113
6.2	Modelagem do Sistema	113
6.2.1	Modelo Não-Linear do Sistema	115
6.2.2	Pontos de Equilíbrio Ótimos	117
6.2.3	Modelo no Entorno dos Pontos de Equilíbrio	120
6.3	Projeto dos Controladores Transformados	123
6.3.1	Análise do Sinal de Distúrbio e Definição dos Sinais de Transformação	124
6.3.2	Definição dos sinais de erro do sistema	125
6.3.3	Abordagem 1: Controlador Ressonante Transformado	126
6.3.3.1	Modelo Aumentado da Planta com Controlador Ressonante Transformado	127
6.3.4	Abordagem 2: Controlador Repetitivo Transformado	130
6.3.4.1	Modelo Aumentado da Planta com o Controlador Repetitivo Transformado	131
6.4	Metodologia de Síntese Robusta	132
6.4.1	Aproximação Linear por Partes dos Parâmetros Variantes	133
6.4.2	Síntese para o Controlador Ressonante Transformado	134
6.4.3	Síntese para o Controlador Repetitivo Transformado	137
6.5	Resultados	138
6.5.1	Simulação do Campo de Vento	139
6.5.2	Configuração das Simulações	140
6.5.3	Análise e Discussão dos Resultados	142
6.6	Comentários Finais	150
7	PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO NO DOMÍNIO DISCRETO	152
7.1	Operações de Discretização	152
7.1.1	Discretização das Operações de Derivada e Atraso	152
7.1.2	Modelo Discreto da Planta Controlada	153
7.1.3	Discretização dos Sinais de Transformação	154
7.2	Controlador Ressonante Transformado Discretizado	155
7.2.1	Equação de Diferença do Controlador	155
7.2.2	Síntese Robusta no Domínio Discreto	156
7.2.2.1	Representação Politópica Discreta do Controlador	156
7.2.2.2	Modelo Aumentado Discreto do Sistema	157
7.2.2.3	Crítérios de Estabilidade e Desempenho no Domínio Discreto	157
7.3	Controlador Repetitivo Transformado Discretizado	159
7.3.1	Equação de Diferença do Controlador	159
7.3.2	Equação de Diferença do Observador do Atraso	160
7.3.3	Síntese Robusta no Domínio Discreto	161

7.3.3.1	Representação Politópica Discreta do Controlador	161
7.3.3.2	Modelo Aumentado Discreto do Sistema	161
7.3.3.3	Crítérios de Estabilidade e Desempenho no Domínio Discreto	162
7.4	Resultados Experimentais	165
7.4.1	Descrição da Bancada Experimental	166
7.4.2	Identificação do Modelo do Sistema	167
7.4.3	Configurações dos Controladores	169
7.4.4	Análise e Discussão dos Resultados	171
7.5	Comentários Finais	175
8	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	177
8.1	Perspectivas para Trabalhos Futuros	177
	Referências	179

1 Introdução

Sinais de característica periódica estão presentes em diversas aplicações na engenharia, como conversores de potência (ESCOBAR et al., 2007; SALTON et al., 2013b), unidades de disco óptico (CHANG; SHIM; PARK, 2006), filtros ativos (CHEOWAIT; PANOMRUTTANARUG; LENWARI, 2008) e manipuladores robóticos realizando tarefas repetitivas (LIUZZO; TOMEI, 2008). Nestes casos verifica-se claramente os problemas de seguimento de referências periódicas e/ou rejeição de distúrbios periódicos. Em uma Fonte Ininterrupta de Energia (SALTON et al., 2013b), por exemplo, objetiva-se produzir uma tensão de referência senoidal com a frequência da rede elétrica de 60 Hz, além de rejeitar as perturbações harmônicas provenientes de cargas conectadas à fonte. Com o crescente aumento das demandas de qualidade, produtividade e segurança, tornou-se necessário o projeto de sistemas de controle com robustez e alto desempenho. Portanto é fundamental a realização de pesquisas para desenvolver, otimizar e avaliar técnicas de controle capazes de tratar sistemas sujeitos a sinais periódicos.

O principal desenvolvimento teórico neste contexto é o Princípio de Modelo Interno (PMI) (FRANCIS; WONHAM, 1975). Este resultado relata que a malha do sistema de controle, além de ser estável, deve conter a dinâmica instável e marginalmente estável dos sinais de referência e distúrbio para garantir o seguimento e/ou rejeição em regime permanente destes sinais. Considere por exemplo um simples sinal de referência do tipo degrau. Neste caso particular deve-se inserir um integrador na malha de controle (ou seja, um polo na origem) para garantir a convergência assintótica do erro para zero. Esta noção pode ser generalizada para sinais de característica periódica. Pela expansão em Série de Fourier sabe-se que todo sinal periódico contínuo é composto por uma infinita soma de sinais senoidais em frequências harmônicas, isto é, múltiplas de uma frequência fundamental. O Controlador Ressonante (CHEN, 1999) apresenta um modelo interno com um par de polos complexos, e portanto, capaz de gerar dinâmica senoidal em determinada frequência. Este controlador pode ser associado em série para contemplar a frequência fundamental e as principais harmônicas dos sinais de referência e distúrbio, arranjo denominado Controlador Múltiplo Ressonante (PEREIRA et al., 2014). No entanto, para garantir o perfeito seguimento ou rejeição de um sinal periódico genérico em tempo contínuo seria necessária uma infinita combinação de modos ressonantes, levando a uma impossibilidade de implementação. O Controlador Repetitivo (YAMAMOTO; HARA, 1988) é uma proposta para solucionar este problema. Este controlador utiliza apenas um atraso de transporte para gerar infinitos polos complexos sobre o eixo imaginário, assim satisfazendo o PMI para qualquer sinal periódico. Contudo, uma simples análise do Lugar Geométrico das Raízes (LGR) mostra que seria necessária a inserção de infinitos zeros na malha de controle para

estabilizar o sistema em malha-fechada com este controlador. Por este motivo utiliza-se um filtro passa-baixas em série com o atraso de transporte (FLORES et al., 2010b), permitindo estabilizar o Controlador Repetitivo em malha-fechada em troca de uma perda de desempenho de seguimento e/ou rejeição em regime permanente.

Existem ainda diversas aplicações onde o período dos sinais de referência e distúrbio são incertos ou variantes no tempo, como máquinas rotativas (turbinas eólicas (LACKNER; ROTEA, 2011) e motores com eixo excêntrico (WIT; PRALY, 2000)), plataformas estabilizadas (ZHANG; MA; HAN, 2013), além de sistemas elétricos trabalhando com tensões alternadas de frequência variável (BEN-BRAHIM, 2008). É interessante analisar detalhadamente, neste caso, o exemplo das turbinas eólicas. Estes sistemas são compostos por pás aerodinâmicas que convertem a energia cinética do vento incidente para energia mecânica rotacional. Sabe-se que a intensidade do vento varia de acordo com a posição azimutal das pás, devido aos efeitos de cisalhamento pelo solo, sombra da torre, além de distorções causadas por turbinas vizinhas (BIANCHI; BATTISTA; MANTZ, 2006). Estas variações da velocidade do vento no plano da turbina originam perturbações dependentes da posição angular do rotor da turbina. Como estes sistemas são máquinas rotativas, estes distúrbios previamente descritos são periódicos e, além disso, este período é variante pois está relacionado com a velocidade angular da turbina. A aplicação dos Controladores Ressonante e Repetitivo é proposta na literatura para atenuação do esforço mecânico periódico em turbinas eólicas (NAVALKAR et al., 2014; HOUTZAGER; WINGERDEN; VERHAEGEN, 2013; ZHANG; CHEN; CHENG, 2013). Contudo, estes trabalhos consideram apenas a região de operação na qual a rotação da turbina é mantida constante. O projeto destes controladores para toda a faixa de operação da turbina eólica, considerando mudanças na velocidade angular de operação, é um problema a ser explorado (HOUTZAGER; WINGERDEN; VERHAEGEN, 2013).

A pesquisa e aplicações de técnicas de controle para tratar sinais com período variante vem despertando um crescente interesse tanto da comunidade acadêmica quanto da indústria. É verificado que o Controlador Repetitivo apresenta significativa perda de desempenho para pequenas discrepâncias (menores que 0,1%) entre o período dos sinais de referência/distúrbio e o período em que o controlador foi sintonizado (PIPELEERS et al., 2008). Visando atenuar estes efeitos a literatura propõe os Controladores Repetitivos de Alta Ordem (CHEN et al., 1992; STEINBUCH; WEILAND; SINGH, 2007; STEINBUCH, 2002). A sua aplicação principal se dá em problemas onde o período do sinal de interesse é incerto ou desconhecido, uma vez que a faixa onde o controlador apresenta ganho infinito é aumentada no entorno da frequência de interesse. Aplicação desta mesma ideia para Controladores Ressonantes ainda é algo pouco tratado na literatura. Outra maneira de tratar sinais de referência/distúrbio de período variante é o emprego de controladores adaptativos. Esta abordagem é preferencialmente utilizada quando a frequência fundamental dos sinais de interesse pode ser medida ou observada em tempo real. Nesta

categoria encontra-se o Controlador Repetitivo de Atraso Variante (YAO; TSAI; YAMAMOTO, 2013; MERRY et al., 2011; CHEN et al., 2013), que consiste em alterar o valor do atraso de transporte do controlador de acordo com os sinais de referencia/distúrbio. As metodologias de Controlador Repetitivo de Atraso Variável encontradas na literatura se diferenciam pela forma pelo qual o valor deste atraso é computado. O algoritmo proposto em (YAO; TSAI; YAMAMOTO, 2013) é baseado em uma busca em memória, já (MERRY et al., 2011) propõe um método baseado na solução de um problema de minimização. Vale ressaltar que uma abordagem semelhante ao Controlador Repetitivo de Atraso Variante poderia ser transportada para o Controlador Ressonante (resultando em um Controlador Ressonante de Frequência Variante), outra ideia ainda pouco explorada pela literatura.

Uma metodologia diferente existente para tratar sinais de período variante é o projeto e implementação de controladores amostrados no domínio espacial (NAKANO et al., 1996), onde o período dos sinais é constante. Esta metodologia é usualmente aplicada para máquinas rotativas sujeitas a perturbações dependentes da posição angular. A grande vantagem desta abordagem é que as técnicas de controle usuais (para sinais de período constante) podem ser empregadas. Tal ideia já foi utilizada com o controlador Repetitivo (chamado Controlador Repetitivo Amostrado no Espaço) (CHEN; CHIU, 2008). Esta abordagem no entanto apresenta uma maior complexidade para implementação e prova de estabilidade, comparada aos Controladores Repetitivos de Atraso Variante. Vale ressaltar também que amostragem espacial está, na maior parte dos casos encontrados na literatura, relacionada apenas para máquinas rotativas. Esta metodologia poderia ser generalizada para tratar de forma genérica qualquer sinal de referência e distúrbio de período variante.

Além do desenvolvimento de arquiteturas de controladores para tratar sinais de período variante no tempo, é fundamental o emprego de métodos sistemáticos para síntese destes controladores de forma a garantir estabilidade e desempenho robusto. Neste âmbito podem ser utilizados modelos no espaço de estados com incertezas modeladas na forma politópica ou limitadas em norma (ZHOU; DOYLE, 1998). Condições de estabilidade podem ser derivadas na forma de Desigualdades Matriciais Lineares (*Linear Matrix Inequalities - LMIs*) a partir do teorema de estabilidade de Lyapunov e também pelos Teoremas de Lyapunov-Krosovskii e Lyapunov-Razuminkin para sistemas com o atraso de transporte (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003). O critério de desempenho pode ser adicionado na forma \mathcal{H}_2 , baseado em minimização de energia, ou na forma \mathcal{H}_∞ que consiste na minimização do efeito do distúrbio na saída do sistema (ZHOU; DOYLE, 1998). Uma grande vantagem de trabalhar com problemas na forma de *LMIs* é a propriedade da convexidade que permite encontrar de maneira eficiente soluções ótimas globais (BOYD et al., 1994). Tais metodologias de síntese robusta foram aplicadas para o Controlador Repetitivo tradicional considerando a presença de atuadores saturantes (FLORES et al., 2010a) e também para o Controlador Repetitivo de Atraso Variante (CHEN et al., 2013). Desenvolvimentos neste sentido poderiam ser realizados para as demais formas de contro-

ladores adaptativos para período variante bem como para os controladores de alta-ordem.

1.1 Objetivos

O foco deste trabalho é o desenvolvimento de controladores para o seguimento e/ou rejeição de sinais de referência/distúrbio com período variante no tempo. Para atingir este objetivo principal é proposta uma metodologia de transformação de sinais e sistemas dinâmicos que relaciona o domínio do tempo com um novo domínio virtual, o qual será chamado de domínio- θ . A transformação proposta visa a representação de forma genérica de sinais de período variante no tempo como sinais de período constante. Ao explorar a característica desta ferramenta matemática, é possível empregar o Princípio do Modelo Interno para definir os Controladores Ressonante e Repetitivo tradicionais diretamente neste domínio- θ , visando a garantia de seguimento e/ou rejeição dos sinais de interesse. O objetivo final entretanto é a obtenção de controladores dinâmicos descritos diretamente no domínio do tempo, possibilitando o uso de metodologias usuais de síntese, bem como meios usuais de implementação. A ideia proposta para atingir esta meta é realizar a transformação de domínio dos Controladores Ressonante e Repetitivo (definidos virtualmente no domínio- θ) para o domínio original do tempo, porém mantendo a característica dinâmica e, conseqüentemente, a característica necessária para garantir o seguimento/rejeição dos sinais. Tal manipulação de domínio resultou nos denominados Controladores Ressonante e Repetitivo Transformados, os quais apresentam a mesma dinâmica no domínio- θ e no domínio do tempo.

Além da definição dos controladores capazes de garantir o seguimento e/ou rejeição dos sinais de período variante no tempo, este trabalho apresenta procedimentos sistemáticos para síntese dos parâmetros dos controladores, de modo a assegurar a estabilidade e o desempenho robusto do sistema em malha-fechada. Neste âmbito são empregados modelos no espaço de estados e condições na forma de *LMIs* baseadas nos critérios de estabilidade de Lyapunov, Lyapunov-Krosovskii e Lyapunov-Razuminkin, estes dois últimos para tratar o atraso de transporte inerente à estratégia de Controle Repetitivo.

As metodologias de controle elaboradas são avaliadas em aplicações onde verificam-se a presença de sinais com período variante, como máquinas rotativas sujeitas a perturbações dependentes da posição e inversores de frequência. Neste contexto de aplicações práticas, um foco especial será voltado para os sistemas de turbinas eólicas, visto o grande apelo por utilizarem uma fonte renovável para geração de energia, além da contribuição teórica pela aplicação de controladores Ressonantes e Repetitivos modificados que consideram a ampla variação do período da perturbação.

Além de apresentar a formulação em tempo contínuo dos controladores propostos, este trabalho também demonstra uma metodologia sistemática de projeto no domínio

discreto, possibilitando a implementação em microcontroladores digitais. Tal formulação levou à realização prática dos controladores propostos em um motor de corrente contínua visando validação experimental das estratégias de controle desenvolvidas.

1.2 Organização do Texto

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. O Capítulo 2 descreve os conceitos preliminares essenciais para compreensão da estratégia proposta. Este capítulo apresenta, por exemplo, os conceitos de estabilidade no sentido de Lyapunov, Lyapunov-Krasovskii e Lyapunov-Razuminkin, técnicas de controle robusto baseadas em Desigualdades Matriciais Lineares, bem como o Princípio de Modelo Interno junto com a definição clássica dos Controladores Ressonante e Repetitivo. Na sequência, o Capítulo 3 inicia a descrição da metodologia proposta focando principalmente na teoria de transformação de domínio, formulação que serve de base para o restante do trabalho. O Capítulo 4 então é dedicado exclusivamente para o desenvolvimento do Controlador Ressonante Transformado, mostrando a definição de suas equações dinâmicas, a metodologia de síntese robusta dos parâmetros, além dos resultados numéricos que comprovam a sua eficácia. O Capítulo 5 apresenta uma estrutura muito similar ao anterior, porém voltado para a segunda estratégia de controle proposta neste trabalho: o Controlador Repetitivo Transformado. Na sequência, o Capítulo 6 apresenta o emprego dos Controladores Transformados desenvolvidos para aplicação em turbinas eólicas. Próximo ao final da dissertação, o Capítulo 7 trata do projeto e implementação dos controladores propostos no domínio discreto. Aqui serão apresentados também os resultados práticos experimentais realizados. Por fim, o Capítulo 8 traz as considerações finais do trabalho e propostas para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

2 Preliminares

Neste capítulo serão introduzidos os conceitos fundamentais necessários para apresentação da metodologia proposta. Primeiramente, será tratado da estabilidade de sistemas no sentido de Lyapunov, onde será focado principalmente na classe de sistemas lineares de parâmetros variantes no tempo. Após, são introduzidos também os conceitos de estabilidade para sistemas com retardo temporal, com base nos Teoremas da Estabilidade de Lyapunov-Krasovskii e Lyapunov-Razumikhin. Uma atenção especial será dada para sistemas lineares com atraso de transporte variante no tempo, visto que esta característica será recorrente na formulação posterior do trabalho. Na sequência deste capítulo é abordada a síntese robusta de controladores com base em Desigualdades Matriciais Lineares. Esta mesma seção contempla a modelagem polipótica de sistemas incertos e/ou variantes no tempo, controle por realimentação de estados e síntese de custo garantido \mathcal{H}_2 . Por fim será realizada a descrição do Princípio do Modelo Interno, um dos conceitos preliminares mais importantes para este trabalho. Nesta mesma seção final, são apresentadas as formas tradicionais dos Controladores Ressonante e Repetitivo para o tratamento de sinais de período constante, estes que são estendidos subsequentemente para o caso de sinais de período variante no tempo.

2.1 Estabilidade de Sistemas no Sentido de Lyapunov

O conceito de estabilidade segundo Lyapunov permite tirar conclusões a respeito da estabilidade de um sistema não-linear sem necessitar da resolução das equações diferenciais que o descrevem. Esta metodologia baseia-se em funções escalares representativas do sistema, conceito que estende a definição clássica de função de energia. Formalmente, o conceito de estabilidade no sentido Lyapunov é formulado da seguinte maneira.

Considere o seguinte sistema dinâmico:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (2.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistema, a função $f(x, t) : \mathcal{B}_x \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua por partes no tempo t e localmente Lipschitz em x contido em \mathcal{B}_x , sendo este último um conjunto que contém a origem do sistema $x = 0$. Sem perda de generalidade, considere esta origem $x = 0$ como o ponto de equilíbrio do sistema (2.1) assumindo que $f(0, t) = 0 \forall t \geq 0$.¹

¹ Quando o ponto de equilíbrio do sistema é diferente de zero, pode-se realizar uma troca de variáveis para deslocar este ponto para a origem do espaço de estados. (KHALIL, 1992).

A Definição 2.1 na sequência formaliza os principais conceitos de estabilidade de um ponto de equilíbrio. O critério de estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema (2.1) pode então ser analisado pelo Teorema 2.1² posteriormente.

Definição 2.1. O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (2.1) é dito:

- *Estável* se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\zeta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \zeta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (2.2)$$

- *Uniformemente estável* se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\zeta(\varepsilon) > 0$, independente de t_0 , tal que (2.2) seja satisfeito.
- *Instável* se não for *estável*.
- *Assintoticamente estável* se for *estável* e existir um $c(t_0) > 0$ tal que $x(t) \rightarrow 0$ ao longo que $t \rightarrow \infty$, para todo $\|x(t_0)\| < c(t_0)$.

- *Uniformemente assintoticamente estável* se for *uniformemente estável* e existir um $c > 0$, independente de t_0 , tal que para todo $\|x(t_0)\| < c$, $x(t) \rightarrow 0$ ao longo que $t \rightarrow \infty$ uniformemente em t_0 . Isto é, para todo $\eta > 0$ existe um $\gamma(\eta) > 0$ tal que

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \forall t > t_0 + \gamma(\eta), \quad \forall \|x(t_0)\| < c. \quad (2.3)$$

- *Globalmente uniformemente assintoticamente estável* se for *uniformemente estável*, se $\zeta(\varepsilon)$ puder ser escolhido para satisfazer $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \zeta(\varepsilon) = \infty$, e para cada par de números positivos η e c , existe um $\gamma(\eta, c) > 0$ tal que

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t > t_0 + \zeta(\eta, c), \quad \forall \|x(t_0)\| < c. \quad (2.4)$$

Teorema 2.1. Teorema da Estabilidade de Lyapunov (KHALIL, 1992). Considere $x = 0$ o ponto de equilíbrio do sistema (2.1) e $\mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^n$ um domínio contendo este ponto. Seja $V : \mathcal{B}_x \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável tal que

$$W_1(x(t)) \leq V(x(t), t) \leq W_2(x(t)) \quad (2.5)$$

$$\dot{V}(x(t), t) \leq -W_3(x(t)) \quad (2.6)$$

$\forall t \geq 0$ e $\forall x \in \mathcal{B}_x$, onde $W_i : \mathcal{B}_x \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $i \in \{1, 2, 3\}$, são funções contínuas positivas definidas³ em \mathcal{B}_x . Então, o ponto de equilíbrio do sistema (2.1) é uniformemente assintoticamente estável. Adicionalmente, se $\mathcal{B}_x = \mathbb{R}^n$ e $W_1(x(t))$ é radialmente ilimitada, então o ponto de equilíbrio do sistema é globalmente uniformemente assintoticamente estável.

² Em teoremas com citação no início de sua descrição, a prova não será aqui demonstrada, podendo ser consultada na respectiva referência.

³ Uma função $W : \mathcal{B}_x \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é dita positiva definida em \mathcal{B}_x se $W(x) = 0$ quando $x = 0$ e $W(x) > 0$ para todo $x \in \mathcal{B}_x$ diferente de zero.

Considere agora um sistema linear de parâmetros variantes no tempo

$$\dot{x}(t) = A(\delta(t))x(t) \quad (2.7)$$

onde a matriz $A(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ depende do vetor de parâmetros incertos $\delta \in \mathcal{B}_\delta \subset \mathbb{R}^p$ tal que \mathcal{B}_δ é um conjunto que contém os valores admissíveis para δ . A representação (2.7) também implica que o ponto de equilíbrio do sistema é naturalmente a origem $x = 0$ do espaço de estados. Observe que este sistema é um caso particular da forma genérica representada em (2.1), contudo grande parte dos sistemas tratados ao longo deste trabalho estarão enquadrados nesta característica dinâmica. Além disso, é possível obter uma condição de estabilidade global para sistemas na forma (2.7) utilizando uma função de Lyapunov quadrática

$$V(x(t)) = x^\top(t)P x(t) \quad (2.8)$$

tal que $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seja uma matriz simétrica positiva definida⁴. A aplicação da função (2.8) no Teorema 2.1 resulta no seguinte critério a respeito da estabilidade do sistema (2.7).

Teorema 2.2. *Se existir uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que*

$$PA(\delta) + A^\top(\delta)P < 0, \quad \forall \delta \in \mathcal{B}_\delta, \quad (2.9)$$

então a origem do sistema (2.7) é globalmente uniformemente assintoticamente estável.

Demonstração. Considere (2.8) como a função de Lyapunov candidata e

$$W_i(x(t)) = \epsilon_i \|x(t)\|, \quad \epsilon_i \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.10)$$

Assim, (2.5) torna-se:

$$\epsilon_1 \|x(t)\| \leq x^\top(t)P x(t) \leq \epsilon_2 \|x(t)\| \quad (2.11)$$

Ao deixar ϵ_1 ser suficientemente próximo de zero e ϵ_2 ser arbitrariamente grande, verifica-se que a expressão (2.11) é equivalente a $P > 0$, relação ao qual é válida se P é positiva definida.

Para satisfazer a condição (2.6), realiza-se a derivada de $V(x(t))$ ao longo da trajetória do sistema

$$x^\top(t)P \dot{x}(t) + \dot{x}^\top(t)P x(t) \leq -\epsilon_3 \|x(t)\|. \quad (2.12)$$

Aplicando a dinâmica do sistema (2.7) na expressão anterior resulta em

$$x^\top(t)(PA(\delta(t)) + A(\delta(t))P)x(t) \leq -\epsilon_3 \|x(t)\|. \quad (2.13)$$

Ao considerar ϵ_3 suficientemente próximo de zero, verifica-se que esta expressão é equivalente a (2.9). Portanto, o atendimento desta condição caracteriza por fim a estabilidade assintótica global uniforme da origem do sistema (2.7). \square

⁴ Uma matriz quadrada $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita positiva definida ou $P > 0$ se todos os seus autovalores são positivos. A mesma matriz P também é simétrica se $P = P^\top$.

Observe que o Teorema 2.2 origina uma condição de estabilidade numericamente difícil de ser avaliada quando \mathcal{B}_δ é conjunto contínuo de valores, visto que devem ser testadas todas as possíveis matrizes $A(\delta)$ para cada $\delta \in \mathcal{B}_\delta$. Para contornar este problema será apresentado posteriormente a metodologia representação de incertezas na forma politópica.

2.2 Estabilidade de Sistemas com Atraso de Transporte

Um sistema dinâmico com atraso de transporte pode ser representado de forma genérica conforme

$$\dot{x}(t) = f(x_\xi(t), t), \quad x_\xi(t) := x(t + \xi), \quad \xi \in [-r, 0], \quad (2.14)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistema e $f : \mathcal{C} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um funcional com retardo temporal. O conjunto \mathcal{C} denota o espaço de funções contínuas mapeando o intervalo $[-r, 0]$ para \mathbb{R}^n , sendo r o retardo temporal máximo do sistema. Portanto, note que $x_\xi \in \mathcal{C}$ representa todo estado anterior do sistema contido no intervalo de tempo $[t - r, t]$ (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003). Novamente, considere sem perda de generalidade a origem $x = 0$ como o ponto de equilíbrio deste sistema.

A seguir serão apresentadas as abordagens de Lyapunov-Krasovskii e Lyapunov-Razumikhin para analisar a estabilidade de sistemas com atraso de transporte na forma genérica (2.14) apresentada. Posteriormente a análise será restringida para sistemas lineares com atraso de transporte único e variante no tempo, pois esta característica dinâmica será recorrente ao longo deste trabalho.

2.2.1 Abordagem de Lyapunov-Krasovskii

A abordagem de Lyapunov-Krasovskii é uma extensão do método original de Lyapunov para tratar adicionalmente de sistemas com retardo temporal conforme (2.14). Ao invés de trabalhar com uma função $V(x(t), t)$ relacionada com o estado do sistema somente no instante t , neste caso utiliza-se um funcional $V(x_\xi(t), t)$ considerando todo o estado anterior do sistema de $t - r$ até t , representado aqui por $x_\xi(t)$. O Teorema da Estabilidade de Lyapunov-Krasovskii é formulado da seguinte maneira.

Teorema 2.3. Teorema da Estabilidade de Lyapunov-Krasovskii (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003). *Considere funções positivas definidas $W_i : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Suponha que exista um funcional contínuo e diferenciável $V : \mathcal{C} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$W_1(\|x(t)\|) \leq V(x_\xi(t), t) \leq W_2(\|x(t)\|_c), \quad (2.15)$$

$$\dot{V}(x_\xi(t), t) \leq -W_3(\|x(t)\|), \quad (2.16)$$

$$\|x(t)\|_{\mathcal{C}} := \sup_{\xi \in [-r, 0]} \|x(t - \xi)\|, \quad (2.17)$$

$\forall t \geq 0$ e $\forall x_{\xi} \in \mathcal{C}$. Então o ponto de equilíbrio do sistema (2.14) é uniformemente assintoticamente estável. Adicionalmente, se a função W_1 for ilimitada, então o ponto de equilíbrio do sistema é globalmente uniformemente assintoticamente estável.

2.2.2 Abordagem de Lyapunov-Razumikhin

O método de Lyapunov-Razumikhin é uma alternativa ao método de Lyapunov-Krasovskii para analisar a estabilidade de sistemas sujeitos a atraso de transporte. A grande vantagem desta abordagem é não necessitar da manipulação de funcionais, e sim apenas de funções tal como no método original de Lyapunov. A ideia chave por trás desta metodologia é encontrar uma função $\hat{V}(x(t - \xi))$ que represente o máximo de $V(x(t - \xi))$ para todo $\xi \in [-r, 0]$. Se $V(x(t)) < \hat{V}(x(t - \xi))$, então $\dot{V}(x(t)) > 0$ não faz $\hat{V}(x(t - \xi))$ crescer. De fato, para $\hat{V}(x(t - \xi))$ não crescer é necessário apenas que $\dot{V}(x(t))$ não seja positivo sempre que $V(x(t)) = \hat{V}(x(t - \xi))$. De forma mais precisa, esta condição é expressa conforme o Teorema 2.4.

Teorema 2.4. Teorema da Estabilidade de Lyapunov-Razumikhin (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003). Considere funções positivas definidas $W_i : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Suponha que exista uma função contínua e diferenciável $V : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$W_1(\|x(t)\|) \leq V(x(t), t) \leq W_2(\|x(t)\|) \quad (2.18)$$

e que a derivada de V ao longo da trajetória do sistema (2.14) satisfaça

$$\dot{V}(x(t), t) \leq -W_3(\|x(t)\|) \quad \text{sempre que} \quad V(x(t + \xi), t + \xi) \leq \rho V(x(t), t) \quad (2.19)$$

$\forall t \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall \xi \in [-r, 0]$, para um escalar real $\rho > 1$. Então o ponto de equilíbrio do sistema (2.14) é uniformemente assintoticamente estável. Adicionalmente, se a função W_1 for ilimitada, então o ponto de equilíbrio do sistema é globalmente uniformemente assintoticamente estável.

2.2.3 Estabilidade de Sistemas Lineares com Atraso de Transporte Variante

Considere agora um sistema linear com atraso temporal único e variante no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_{\tau}x(t - \tau(t)) \quad (2.20)$$

tal que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_{\tau} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\tau \in \mathbb{R}_+^*$. Conforme já mencionado, esta característica dinâmica é de particular interesse para o presente trabalho. Na sequência portanto, condições de estabilidade para este sistema serão formuladas tanto pela abordagem de Lyapunov-Krasovskii quanto pelo método de Lyapunov-Razumikhin.

Para provar a estabilidade do sistema (2.20) utilizando o Teorema 2.3 pode-se empregar o seguinte funcional quadrático de Lyapunov-Krasovskii (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003)

$$V(x_\xi(t)) = x^\top(t) P x(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x^\top(\varphi) S x(\varphi) d\varphi \quad (2.21)$$

onde $x_\xi(t)$, $\xi \in [-\tau(t), 0]$, denota o estado do sistema de $t - \tau(t)$ até o tempo presente t . As matrizes $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são simétricas positivas definidas. Com base neste funcional e no Teorema 2.3 é possível formular o seguinte teorema de estabilidade para sistemas na forma (2.20).

Teorema 2.5. *Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e um escalar real positivo μ tal que*

$$\begin{bmatrix} PA + A^\top P + S & PA_\tau \\ \star & (1 - \mu)S \end{bmatrix} < 0. \quad (2.22)$$

Então a origem do sistema (2.20) é globalmente uniformemente assintoticamente estável para qualquer sinal de atraso $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ que satisfaça $\dot{\tau}(t) \leq \mu \forall t \geq 0$.

Demonstração. Considere (2.21) como o funcional de Lyapunov-Krasovskii candidato. Efetuando a derivada deste funcional ao longo da trajetória do sistema resulta

$$\dot{V}(x_\xi(t)) = \dot{x}^\top(t) P x(t) + x^\top(t) P \dot{x}(t) + x^\top(t) S x(t) - (1 - \dot{\tau}(t)) x^\top(t - \tau(t)) S x(t - \tau(t)). \quad (2.23)$$

Aplicando a dinâmica do sistema (2.20) na expressão anterior produz

$$\dot{V}(x_\xi(t)) = \begin{bmatrix} x^\top(t) & x^\top(t - \tau(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PA + A^\top P + S & PA_\tau \\ \star & (1 - \dot{\tau}(t))S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau(t)) \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Considere $W_1 = \epsilon_1 \|x(t)\|$, $W_2 = \epsilon_2 \|x(t)\|_C$, então para ϵ_1 suficientemente próximo de zero e ϵ_2 arbitrariamente grande, o funcional (2.21) atende a condição (2.15) do Teorema 2.3.

Considere também $W_3 = \epsilon_3 \|x(t)\|$ e deixe ϵ_3 ser suficientemente próximo de zero, além disso faça $\dot{\tau}(t) \leq \mu \forall t \geq 0$. Então o atendimento da expressão (2.22) implica que a derivada do funcional candidato em (2.24) é negativa definida que, por sua vez, remete ao atendimento da condição (2.16) do Teorema 2.3. Assim, caracteriza-se a estabilidade assintótica uniforme global da origem do sistema (2.20) para qualquer $\tau \in \mathbb{R}_+^*$, desde que $\dot{\tau}(t) \leq \mu \forall t \geq 0$. \square

Já para provar a estabilidade do sistema (2.20) utilizando a abordagem de Lyapunov-Razumikhin, basta utilizar a mesma função quadrática (2.8). Então, com base nesta função candidata e no Teorema 2.4, pode-se realizar a seguinte afirmação a respeito da estabilidade da origem do sistema (2.20).

Teorema 2.6. *Suponha que exista uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um escalar real positivo β tal que*

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \beta P & PA_\tau \\ \star & -\beta P \end{bmatrix} < 0. \quad (2.25)$$

Então a origem do sistema (2.20) é globalmente uniformemente assintoticamente estável para qualquer sinal de atraso $\tau \in \mathbb{R}_+^$.*

Demonstração. Considere (2.8) como a função de Lyapunov candidata com $P = P^T > 0$ e $W_i(\|x(t)\|) = \epsilon_i \|x(t)\|$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Note que a condição (2.18) do Teorema 2.4 é atendida seguindo os mesmos critérios demonstrados na prova do Teorema 2.2.

Considere agora a seguinte relação

$$\dot{V}(x(t)) < -\beta \left(V(x(t)) - V(x(t - \tau(t))) \right) \quad (2.26)$$

onde β é um escalar real positivo. Então para um ϵ_3 positivo suficientemente próximo de zero e um ρ infinitesimalmente maior que 1, o atendimento desta expressão também garante o atendimento da condição (2.19) do Teorema 2.4, implicando na garantia de estabilidade assintótica uniforme global da origem do sistema (2.20) para qualquer sinal de atraso $\tau \in \mathbb{R}_+^*$.

Aplicando a função de Lyapunov candidata na expressão (2.26) e realizando a derivada \dot{V} ao longo das trajetórias do sistema (2.20) resulta na relação (2.25).

□

É interessante ressaltar as diferenças entre as condições apresentadas. Considerando $\dot{\tau}(t) \leq \mu = 0$ (atraso constante ou decrescente), ambos os Teoremas 2.5 (Krasovskii) e 2.6 (Razumikhin) são equivalentes ao considerar $S = \beta P$. A abordagem de Razumikhin mostra-se claramente mais conservadora nesta situação. A vantagem porém do Teorema 2.6 é não apresentar um limite superior para taxa de variação $\dot{\tau}(t)$ do atraso de transporte para a prova de estabilidade. Na verdade, quando a taxa de variação do atraso excede o valor unitário torna-se impossível provar a estabilidade do sistema (2.20) pelo Teorema 2.5, visto que a condição (2.22) nunca é factível para $\mu \geq 1$ (FRIDMAN, 2014).

Para reduzir o conservadorismo dos critérios de estabilidade também é possível formular condições dependentes de um valor supremo do sinal de atraso de transporte. No caso de sistemas lineares com atraso de transporte invariante, pode-se também empregar o Funcional de Lyapunov-Krasovskii Completo para obter uma condição de estabilidade suficiente e necessária. Este último método contudo requer um procedimento de discretização para viabilizar o tratamento numérico, o que leva na prática a condições aproximadas (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003).

Já a redução do conservadorismo dos critérios de estabilidade para sistemas sujeitos a atraso de transporte variante no tempo ainda é um problema em aberto. Um avanço importante neste ramo são os métodos baseados em transformação de modelo (FRIDMAN; NICULESCU, 2008). Contudo, para sistemas em que a variação do atraso é rápida ($\dot{\tau}(t) \gg 1$), o método de Razumikhin remanesce como umas das poucas formas de verificação da estabilidade (FRIDMAN, 2014).

2.3 Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Apesar de seu desenvolvimento recente na história, o estudo de Desigualdades Matriciais Lineares (*Linear Matrix Inequalities - LMI*) voltado para análise de sistemas dinâmicos começa por volta de 1890 com o desenvolvimento da teoria de estabilidade de Lyapunov. Neste época surge o primeiro problema na forma *LMI* tal como demonstrado no Teorema 2.2. Na década de 1940, os métodos de Lyapunov começam a ser utilizados para aplicações de controle reais, onde alguns problemas com restrições na forma de *LMIs* são resolvidos “manualmente”. Já na década de 1960 verifica-se que uma família de problemas descritos por *LMIs* podem ser resolvidos através da solução de uma Equação Algébrica de Riccati. O avanço neste ramo começa realmente na década de 1980, quando é reconhecido que muitos problemas de otimização ou existência (factibilidade) com restrições *LMIs* podem ser resolvidos computacionalmente através de programação convexa. Já no final desta mesma década surgem os primeiros algoritmos de ponto interior para solução numérica destes problemas (BOYD et al., 1994).

2.3.1 Definição

Uma Desigualdade Matricial Linear apresenta a seguinte estrutura:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (2.27)$$

onde $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m] \in \mathbb{R}^m$ contém as m variáveis de decisão e $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para $i = 1, 2, \dots, m$, são matrizes simétricas dadas. Observe que os problemas geralmente são expressos na forma matricial (por exemplo: $PA + A^T P < 0$, $P = P^T > 0$), tornando necessária a transposição do problema para a forma padrão (2.27). Existem pacotes de *software* capazes de traduzir diretamente o problema da forma matricial para a forma padrão e posteriormente já aplicar o algoritmo de solução, como exemplo o LMILAB (GAHINET et al., 1994).

2.3.2 Propriedade da Convexidade

Além das notáveis propriedades de linearidade e simetria, as *LMIs* também apresentam a importante propriedade da convexidade. Um conjunto \mathcal{X} é dito convexo se

$\forall x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}, \forall y \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ e $\forall \kappa \in [0, 1]$ a relação $\kappa x + (1 - \kappa)y$ é válida. Em outras palavras, o conjunto \mathcal{X} é convexo se para quaisquer dois pontos x e y , o segmento de reta unindo estes dois pontos também pertence ao conjunto. Tal propriedade pode ser notada para o conjunto de soluções de um problema com restrições na forma de *LMIs* (BOYD et al., 1994). Esta característica convexa permite resolver o problema da estabilidade de sistemas com parâmetros variantes no tempo que, conforme visto pelo Teorema 2.2, apresenta dimensão infinita. Considere, por exemplo o sistema $\dot{x}(t) = A(\delta(t))x(t)$, onde $\delta \in \mathcal{B}_\delta = \{\delta : \delta^- < \delta < \delta^+\} \subset \mathbb{R}$ e suponha que $A(\delta)$ é linearmente dependente de δ (ou dita afim em δ). Para provar a estabilidade deste sistema deve-se resolver $PA(\delta) + A^T(\delta)P < 0$, $P = P^T > 0$ para todo $\delta \in \mathcal{B}_\delta$. Contudo, pela propriedade da convexidade, basta resolver o problema anterior apenas nos vértices do conjunto \mathcal{B}_δ . Ou seja o problema simplifica-se a encontrar uma $P = P^T > 0$ tal que

$$PA_1 + A_1^T P < 0 \quad , \quad PA_2 + A_2^T P < 0 \quad , \quad (2.28)$$

onde $A_1 = A(\delta^-)$ e $A_2 = A(\delta^+)$. Tal formulação pode ainda ser generalizada para caso de sistemas com múltiplos parâmetros incertos, metodologia que é conhecida como representação politópica e será abordada posteriormente.

2.3.3 Ferramentas Algébricas

As inequações matemáticas para análise de sistemas dinâmicos ou projeto de sistemas de controle usualmente são não-lineares, em sua maioria devido a presença de multiplicações entre variáveis e/ou inversão de variáveis. Para utilizar a metodologia *LMI*, o projetista deve utilizar certas ferramentas algébricas para linearizar as expressões, de tal forma que seja possível a tradução para a forma padrão.

A seguir segue a lista de propriedades algébricas utilizadas neste trabalho. A prova de tais relações pode ser verificada detalhadamente em (BOYD et al., 1994).

- **Transformação de Congruência.** Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ser uma matriz simétrica satisfazendo $P > 0$. Então a expressão $QPQ^T > 0$ é válida para qualquer matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com $\text{rank}(Q) = n$.
- **Troca de Variáveis.** Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ser uma matriz simétrica satisfazendo

$$P^{-1} > 0 \quad . \quad (2.29)$$

Se existir uma matriz simétrica $\hat{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\hat{P} > 0$, então $P = \hat{P}^{-1}$ satisfaz (2.29).

- **Complemento de Schur.** Considere matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tal que $A = A^\top$, $C = C^\top$ e $C > 0$. Então as seguintes expressões são equivalentes:

$$A - BC^{-1}B^\top > 0, \quad \begin{bmatrix} A & B \\ \star & C \end{bmatrix} > 0. \quad (2.30)$$

2.4 Projeto de Sistemas de Controle Robusto

Esta seção apresenta metodologias tradicionais da literatura para o controle robusto de sistemas. Primeiramente, será abordada a modelagem polipédica de sistemas com parâmetros variantes no tempo. Então, será tratado do projeto de leis de controle de realimentação de estados, bem como a técnica de custo garantido \mathcal{H}_2 para desempenho transitório robusto do sistema.

2.4.1 Modelagem Politópica

Considere um sistema na forma

$$\dot{x}(t) = A(\delta(t))x(t) + B(\delta(t))u(t) \quad (2.31)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas e $\delta \in \mathcal{B}_\delta \subset \mathbb{R}^p$ é o vetor de parâmetros variantes e/ou incertos. Considere \mathcal{B}_δ o conjunto de valores admissíveis para δ . Suponha que as matrizes $A(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são linearmente dependentes de δ .

A modelagem politópica consiste em enquadrar o conjunto \mathcal{B}_δ em um conjunto convexo \mathcal{P}_δ (dito politopo⁵) definido conforme

$$\delta \in \mathcal{P}_\delta = \text{Co}\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2^p}\} = \{ \delta_i : \delta_i^- \leq \delta_i \leq \delta_i^+, i = 1, 2, \dots, p \}, \quad (2.32)$$

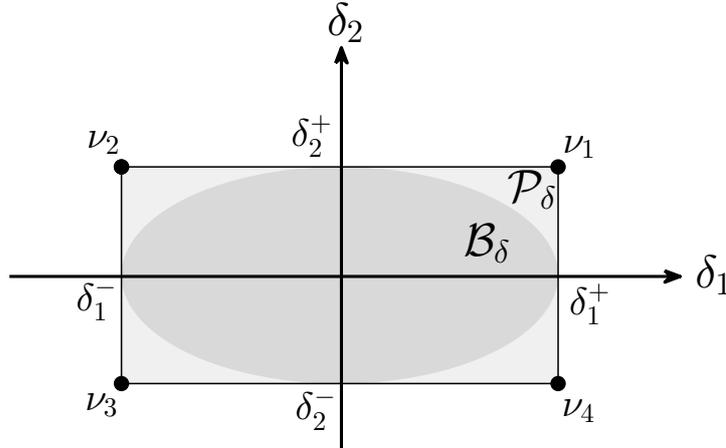
tal que δ_i^- e δ_i^+ ($i = 1, 2, \dots, p$) denotem respectivamente o valor mínimo e máximo de δ_i . Além disso, $\nu_i \in \mathbb{R}^p$ ($i = 1, 2, \dots, 2^p$) denota o i -ésimo vértice deste politopo. Observe desta forma que $\delta \in \mathcal{B}_\delta \subset \mathcal{P}_\delta \subset \mathbb{R}^p$.

A Figura 1 mostra um exemplo gráfico de um politopo no espaço \mathbb{R}^2 . Note que os $2^p = 4$ vértices deste politopo exemplificado são $\nu_1 = [\delta_1^+ \ \delta_2^+]$, $\nu_2 = [\delta_1^- \ \delta_2^+]$, $\nu_3 = [\delta_1^- \ \delta_2^-]$ e $\nu_4 = [\delta_1^+ \ \delta_2^-]$.

Dado que $\delta \in \mathcal{P}_\delta$, então o sistema (2.31) pode ser representado na forma politópica

$$\dot{x}(t) = A(\lambda)x(t) + B(\lambda)u(t) \quad (2.33)$$

⁵ Politopo é um conjunto convexo e fechado, que pode ser representado pela combinação convexa de vértices.

Figura 1 – Exemplo de um polítopo no espaço \mathbb{R}^2 .


onde $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ são

$$\begin{bmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2^p} \lambda_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

tal que o vetor λ pertence ao seguinte conjunto de valores

$$\lambda \in \mathcal{B}_\lambda = \left\{ \lambda_i : \sum_{i=1}^{2^p} \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, 2^p \right\} \subset \mathbb{R}^{2^p}. \quad (2.35)$$

As matrizes A_i e B_i ($i = 1, 2, \dots, 2^p$) em (2.34) representam as respectivas matrizes incertas $A(\delta)$ e $B(\delta)$ avaliadas no i -ésimo vértice do polítopo \mathcal{P}_δ .

A representação politópica permite utilizar a propriedade da convexidade das *LMIs* para analisar a estabilidade de sistemas incertos, conforme descrito pelo Teorema 2.7 na sequência.

Teorema 2.7. Estabilidade de Sistemas Politópicos (BOYD et al., 1994). *Suponha que exista uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que satisfaça*

$$PA_i + A_i^T P < 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}. \quad (2.36)$$

Então o sistema (2.33) com $u(t) = 0$ é assintoticamente estável⁶ $\forall \lambda \in \mathcal{B}_\lambda$.

2.4.2 Realimentação de Estados

Até o momento foram apresentados conceitos para análise dinâmica de sistemas. No entanto, é necessário muitas vezes alterar a dinâmica natural do sistema (dita em malha-aberta) de forma a estabilizá-lo ou melhorar seu desempenho. Uma forma usual para controlar sistemas consiste no uso de uma lei de realimentação de estados

$$u(t) = Kx(t), \quad (2.37)$$

⁶ A frase “o sistema é assintoticamente estável” denota simplificada que “a origem deste sistema é globalmente uniformemente assintoticamente estável”. Esta conotação será adotada na sequência do trabalho para simplificar apresentação dos teoremas, visto que não haverá distinção entre as formas de estabilidade mostradas na Definição 2.1.

onde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de ganhos de realimentação.

Aplicando (2.37) em (2.33) resulta na representação em malha-fechada do sistema:

$$\dot{x}(t) = \left(A(\lambda) + B(\lambda)K \right) x(t) . \quad (2.38)$$

O problema de controle robusto é descrito conforme o Problema 2.1. Para resolvê-lo, é proposta a utilização do teorema subsequente.

Problema 2.1. *Encontrar um ganho robusto K tal que o sistema (2.38) seja assintoticamente estável para todo $\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$.*

Teorema 2.8. *Suponha que exista uma matriz simétrica positiva definida $\hat{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz \hat{K} que satisfaçam*

$$\text{He} \left\{ A_i \hat{P} + B_i \hat{K} \right\} < 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, 2^p\} . \quad (2.39)$$

Então o sistema (2.38) com $K = \hat{K} \hat{P}^{-1}$ é assintoticamente estável.

Demonstração. Considere inicialmente o seguinte problema: encontrar uma matriz $P = P^\top > 0$ e uma matriz K tal que

$$P \left(A(\lambda) + B(\lambda)K \right) + \left(A(\lambda) + B(\lambda)K \right)^\top P < 0 \quad (2.40)$$

para todo $\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$. Note que esta formulação é equivalente à realizada previamente no Teorema 2.2. Pré- e pós-multiplicando (2.40) por P^{-1} resulta em

$$\text{He} \left\{ A(\lambda)P^{-1} + B(\lambda)KP^{-1} \right\} < 0 . \quad (2.41)$$

Introduzindo as trocas de variáveis

$$\hat{P} = P^{-1} , \quad \hat{K} = KP^{-1} , \quad (2.42)$$

tal que $\hat{P} = \hat{P}^\top > 0$, produz a expressão

$$\text{He} \left\{ A(\lambda)\hat{P} + B(\lambda)\hat{K} \right\} < 0 . \quad (2.43)$$

Pela propriedade da convexidade conforme o Teorema 2.7, a expressão (2.43) é equivalente à (2.39). \square

2.4.3 Custo garantido \mathcal{H}_2

Observe que o Teorema 2.8 garante apenas a estabilidade do sistema. Entretanto, na maioria das aplicações de controle, o projetista deseja garantir certo nível de desempenho transitório. Para estes casos, pode-se empregar a metodologia de custo garantido \mathcal{H}_2 .

Considere o sistema (2.33) com a lei de controle (2.37) e um vetor de saída de desempenho adicional $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, $z(t) = C_z x(t) + D_z u(t)$, onde $C_z \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ e $D_z \in \mathbb{R}^{n_z \times m}$ são matrizes definidas a critério do projetista. A representação em malha-fechada deste sistema é expressa conforme:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A(\lambda) + B(\lambda)K) x(t) \\ z(t) &= (C_z + D_z K) x(t) \end{cases} \quad (2.44)$$

O objetivo do controle \mathcal{H}_2 é minimizar a energia da saída de desempenho do sistema. Desta forma, os termos C_z e D_z podem ser definidos de tal forma que penalize a energia transitória dos estados do sistema e/ou a energia transitória das entradas de controle. O critério de desempenho \mathcal{H}_2 é então formulado pela função de custo escalar

$$\mathcal{J}_2 = \|z(t)\|_2^2 = \int_0^\infty z^\top(t)z(t)dt . \quad (2.45)$$

De forma precisa, o controle robusto \mathcal{H}_2 é descrito conforme o Problema 2.2. O teorema demonstrado na sequência oferece a base para resolver este problema.

Problema 2.2. *Encontrar um ganho robusto K tal que o sistema (2.44) seja assintoticamente estável para todo $\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$ e a função de custo \mathcal{J}_2 seja minimizada.*

Teorema 2.9. *Suponha que exista uma matriz simétrica positiva definida $\hat{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaçam*

$$\begin{bmatrix} \text{He} \{ A_i \hat{P} + B_i \hat{K} \} & \hat{P} C_z^\top + \hat{K}^\top D_z^\top \\ \star & -I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, 2^p\} . \quad (2.46)$$

Então o sistema (2.44) com $K = \hat{K} \hat{P}^{-1}$ é assintoticamente estável e função de custo \mathcal{J}_2 satisfaz

$$\mathcal{J}_2 < x(0)^\top \hat{P}^{-1} x(0) . \quad (2.47)$$

Demonstração. Utilize $V(x(t)) = x^\top(t)Px(t)$, com $P = P^\top > 0$, e faça

$$\dot{V}(x(t)) + z^\top(t)z(t) < 0 . \quad (2.48)$$

Integrando (2.48) ao longo do tempo, de 0 até ∞ , gera

$$V(x(\infty)) - V(x(0)) + \|z(t)\|_2^2 < 0 . \quad (2.49)$$

Assumindo a estabilidade assintótica do sistema considera-se $V(\infty) = 0$. Considera-se também que $x(0) \neq 0$. Então (2.49) é equivalente a

$$\mathcal{J}_2 = \|z(t)\|_2^2 < V(0) = x(0)^\top P x(0) . \quad (2.50)$$

Observe que esta última relação equivale a (2.47) para $P = \hat{P}^{-1}$.

Realizando a derivada $\dot{V}(x(t))$ em (2.48) e aplicando a dinâmica (2.44) do sistema resulta em

$$\text{He} \{PA(\lambda) + PB(\lambda)K\} + (C_z + D_zK)^\top(C_z + D_zK) < 0 . \quad (2.51)$$

Pelo complemento de Schür, (2.51) é equivalente à expressão

$$\begin{bmatrix} \text{He} \{PA(\lambda) + PB(\lambda)K\} & C_z^\top + K^\top D_z^\top \\ \star & -I \end{bmatrix} < 0 . \quad (2.52)$$

Pré- e pós-multiplicando a relação resultante por $\text{diag}\{P^{-1}, I\}$ e após realizando as mesmas substituições de variáveis apresentadas em (2.42) resulta em

$$\begin{bmatrix} \text{He} \{A(\lambda)\hat{P} + B(\lambda)\hat{K}\} & \hat{P}C_z^\top + \hat{K}^\top D_z^\top \\ \star & -I \end{bmatrix} < 0 . \quad (2.53)$$

Pela propriedade da convexidade, (2.53) satisfaz para todo $\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$ se a condição (2.46) for verdadeira. \square

Pelo Teorema 2.9, o limite superior (dito custo garantido) da função \mathcal{J}_2 é diretamente proporcional a $\text{tr}(\hat{P}^{-1})$ (isto é, a soma dos autovalores de \hat{P}^{-1}) para uma condição inicial genérica $x(0)$. Entretanto, os pacotes computacionais que resolvem problemas de otimização com restrições *LMIs* são capazes de minimizar apenas uma combinação linear das variáveis de decisão (GAHINET et al., 1994). Para contornar este problema é usualmente definida uma variável simétrica auxiliar $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que $X > \hat{P}^{-1}$, ou pelo complemento de Schür:

$$\begin{bmatrix} X & I \\ \star & \hat{P} \end{bmatrix} > 0 . \quad (2.54)$$

Desta forma o novo custo garantido de \mathcal{J}_2 é

$$\mathcal{J}_2 < x^\top(0)Xx(0) , \quad (2.55)$$

ou seja, é diretamente proporcional a $\text{tr}(X)$ para uma condição inicial genérica $x(0)$. Desta forma, o Problema 2.2 pode ser resolvido pelo seguinte problema de otimização linear:

$$\underset{X, \hat{P}, \hat{K}}{\text{minimizar}} \text{tr}(X) \text{ sujeito a } \{(2.46), (2.54)\} . \quad (2.56)$$

2.4.4 Sistemas Discretos

As mesmas metodologias de controle robusto apresentadas para o domínio contínuo podem ser facilmente transportadas para o domínio discreto. Seja $k \in \mathbb{Z}_+^*$ o domínio das

amostras, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados da planta na forma discreta e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle. Considere a dinâmica da planta discreta na forma:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}(\lambda) \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}(\lambda) \mathbf{u}[k], \quad (2.57)$$

onde as matrizes incertas $\mathbf{A}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{B}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ denotam a representação politópica do sistema, tal como na forma continua:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\lambda) & \mathbf{B}(\lambda) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2^p} \lambda_i \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Aqui igualmente, a variável λ pertence ao conjunto \mathcal{B}_λ em (2.35) e as matrizes \mathbf{A}_i e \mathbf{B}_i ($i = 1, 2, \dots, 2^p$) representam as respectivas matrizes incertas avaliadas no i -ésimo vértice do politopo de incerteza.

Suponha a utilização da lei de controle discreta

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{K} \mathbf{x}[k] \quad (2.59)$$

para $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ representando a matriz de ganhos de realimentação desta lei. Desta forma, a dinâmica em malha-fechada do sistema discreto é escrita conforme

$$\mathbf{x}[k+1] = \left(\mathbf{A}(\lambda) + \mathbf{B}(\lambda) \mathbf{K} \right) \mathbf{x}[k]. \quad (2.60)$$

O critério de desempenho \mathcal{H}_2 também pode ser definido no domínio discreto. Deixe agora $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$ ser a saída virtual de desempenho \mathcal{H}_2 do sistema, definida por $\mathbf{z}[k] = \mathbf{C}_z \mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_z \mathbf{u}[k]$. A representação em malha-fechada completa do sistema então é expressa segundo

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] &= \left(\mathbf{A}(\lambda) + \mathbf{B}(\lambda) \mathbf{K} \right) \mathbf{x}[k] \\ \mathbf{z}[k] &= \left(\mathbf{C}_z + \mathbf{D}_z \mathbf{K} \right) \mathbf{x}[k] \end{cases}. \quad (2.61)$$

Neste caso discreto, a função de custo para síntese \mathcal{H}_2 apresenta a forma de somatório ao invés de integral, isto é:

$$\mathcal{J}_2 = \|\mathbf{z}[k]\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{z}^T[k] \mathbf{z}[k]. \quad (2.62)$$

O Problema 2.3 representa a formulação do problema de controle robusto \mathcal{H}_2 para sistemas discretos. Para sua resolução, segue o Teorema 2.10 na sequência.

Problema 2.3. *Encontrar um ganho robusto \mathbf{K} tal que o sistema discreto (2.61) seja assintoticamente estável para todo $\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$ e a função de custo \mathcal{J}_2 seja minimizada.*

Teorema 2.10. *Suponha que exista uma matriz simétrica positiva definida $\hat{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $\hat{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaçam*

$$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}} \mathbf{A}_i^T + \hat{\mathbf{K}}^T \mathbf{B}_i^T & \hat{\mathbf{P}} \mathbf{C}_z^T + \hat{\mathbf{K}}^T \mathbf{D}_z^T \\ \star & -\hat{\mathbf{P}} & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}. \quad (2.63)$$

Então o sistema (2.61) com $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{P}}^{-1}$ é assintoticamente estável e função de custo \mathcal{J}_2 satisfaz

$$\mathcal{J}_2 < \mathbf{x}^\top[0] \hat{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{x}[0] . \quad (2.64)$$

Demonstração. Utilize uma função de Lyapunov quadrática na forma discreta:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}[k]) = \mathbf{x}^\top[k] \mathbf{P} \mathbf{x}[k] \quad (2.65)$$

para $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\top > 0$. Considere a notação $\Delta\mathbf{V}(\mathbf{x}[k]) = \mathbf{V}(\mathbf{x}[k+1]) - \mathbf{V}(\mathbf{x}[k])$. Assim resumidamente, a estabilidade assintótica do sistema discreto é verificada se $\Delta\mathbf{V}(\mathbf{x}[k]) < 0$ (RUGH, 1996). Porém forçando ainda

$$\Delta\mathbf{V}(\mathbf{x}[k]) + \mathbf{z}^\top[k] \mathbf{z}[k] < 0 , \quad (2.66)$$

implica (ao somar esta inequação de $k = 0$ até $k \rightarrow \infty$) que

$$\mathcal{J}_2 = \mathbf{z}^\top[k] \mathbf{z}[k] < \mathbf{V}[0] = \mathbf{x}^\top[0] \mathbf{P} \mathbf{x}[0] . \quad (2.67)$$

Esta última inequação é equivalente a (2.64) para $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}^{-1}$.

Aplicando as equações (2.61) do sistema na expressão (2.66) resulta

$$-\mathbf{P} + (\mathbf{A}(\lambda) + \mathbf{B}(\lambda)\mathbf{K})^\top \mathbf{P} (\mathbf{A}(\lambda) + \mathbf{B}(\lambda)\mathbf{K}) + (\mathbf{C}_z + \mathbf{D}_z\mathbf{K})^\top (\mathbf{C}_z + \mathbf{D}_z\mathbf{K}) < 0 . \quad (2.68)$$

Pelo complemento de Schür, a inequação (2.68) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P} & \mathbf{A}^\top(\lambda) + \mathbf{K}^\top \mathbf{B}^\top(\lambda) & \mathbf{C}_z^\top + \mathbf{K}^\top \mathbf{D}_z^\top \\ \star & -\mathbf{P}^{-1} & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 . \quad (2.69)$$

Pré- e pós-multiplicando a relação resultante por $\text{diag}\{\mathbf{P}^{-1}, I, I\}$ e após realizando as substituições de variáveis

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1} , \quad \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}\mathbf{P}^{-1} , \quad (2.70)$$

resulta

$$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}^\top(\lambda) + \hat{\mathbf{K}}^\top \mathbf{B}^\top(\lambda) & \hat{\mathbf{P}}\mathbf{C}_z^\top + \hat{\mathbf{K}}^\top \mathbf{D}_z^\top \\ \star & -\hat{\mathbf{P}} & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 . \quad (2.71)$$

Pela propriedade da convexidade, (2.71) satisfaz para todo $\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$ se a condição (2.63) for verdadeira. \square

Para solução do Problema 2.3, com base no Teorema 2.10, deve-se encontrar soluções $\hat{\mathbf{P}}$ e $\hat{\mathbf{K}}$ dadas as restrições descritas e de tal forma que $\text{tr}(\mathbf{P}^{-1})$ seja minimizado. Assim garante-se o menor custo \mathcal{J}_2 para uma condição inicial genérica $\mathbf{x}[0]$. Para tratar

de forma convexa a minimização do traço da matriz inversa de \hat{P} pode-se utilizar o mesmo procedimento apresentado para o caso contínuo. Deixe a variável auxiliar $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazer $X > \hat{P}$, ou pelo complemento de Schür:

$$\begin{bmatrix} X & I \\ \star & \hat{P} \end{bmatrix} > 0. \quad (2.72)$$

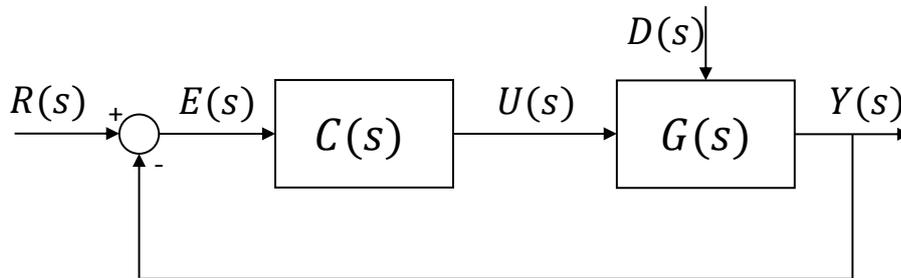
Então solução do Problema 2.3 é equivalente a resolução do seguinte problema de otimização convexa:

$$\underset{X, \hat{P}, \hat{K}}{\text{minimizar}} \text{tr}(X) \text{ sujeito a } \{(2.63), (2.72)\}. \quad (2.73)$$

2.5 Princípio do Modelo Interno

O Princípio do Modelo Interno (PMI) (FRANCIS; WONHAM, 1975) é resultado teórico essencial para o projeto de sistema de controle visando o seguimento de sinais de referência e rejeição de sinais de distúrbio. Para compreender este princípio é adequada uma análise no domínio da frequência, conforme o diagrama de blocos apresentado pela Figura 2. Neste esquemático, $Y(s) \in \mathbb{C}$ representa o sinal de saída da planta, $U(s) \in \mathbb{C}$ o sinal de controle, $E(s) \in \mathbb{C}$ o sinal de erro, $R(s) \in \mathbb{C}$ o sinal de referência e $D(s) \in \mathbb{C}$ o sinal de distúrbio. Ainda, $C(s) = U(s)/E(s)$ é a função de transferência do controlador e $G(s) = [G_1(s) \ G_2(s)] \in \mathbb{C}^{1 \times 2}$ representa as funções de transferência da planta tal que $G_1(s) = Y(s)/U(s)$ (entrada de controle para a saída) e $G_2(s) = Y(s)/D(s)$ (entrada de distúrbio para a saída). Suponha para esta análise que $G_1(s)$ contém todos os polos de $G_2(s)$.⁷

Figura 2 – Diagrama de blocos genérico de um sistema de controle.



Considere a decomposição polinomial dos sinais de referência $R(s)$ e distúrbio $D(s)$ no formato:

$$R(s) = \frac{H_R(s)}{L_R^{\text{spe}}(s) L_R^{\text{spd}}(s)}, \quad D(s) = \frac{H_D(s)}{L_D^{\text{spe}}(s) L_D^{\text{spd}}(s)}, \quad (2.74)$$

⁷ Está suposição é válida ao assumir que a planta é totalmente controlável em relação à entrada $U(s)$.

tal que para $i \in \{R, D\}$ os seguintes critérios sejam válidos:

- Os polinômios $H_i(s)$, $L_i^{\text{spe}}(s)$ e $L_i^{\text{spd}}(s)$ não possuem raízes em comum.
- $L_i^{\text{spe}}(s)$ contém raízes somente no semi-plano complexo esquerdo (SPE).
- $L_i^{\text{spd}}(s)$ contém raízes somente no semi-plano complexo direito (SPD) incluindo eixo imaginário.

Note que através desta decomposição, $L_i^{\text{spe}}(s)$ irá conter os modos estáveis do sinal i , enquanto a porção $L_i^{\text{spd}}(s)$ irá possuir os modos instáveis e marginalmente estáveis deste sinal (também chamados de modos permanentes). Esta separação é essencial para formulação do PMI, conforme será demonstrado adiante.

Considere também a decomposição polinomial do controlador $C(s)$ e da planta $G(s)$ conforme

$$C(s) = \frac{H_C(s)}{L_C(s)}, \quad G(s) = \left[\frac{H_{G_1}(s)}{L_{G_1}(s)} \quad \frac{H_{G_2}(s)}{L_{G_2}(s)} \right], \quad (2.75)$$

de forma que, para $i \in \{C, G_1, G_2\}$, os polinômios $H_i(s)$ e $L_i(s)$ não apresentem raízes em comum.

Teorema 2.11. Princípio do Modelo Interno. *Para a configuração de controle descrita no diagrama de blocos da Figura 2, o erro do sistema tende assintoticamente a zero, isto é*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad (2.76)$$

caso as seguintes afirmações sejam verdadeiras:

- (a) O polinômio característico do sistema

$$\Phi(s) = H_C(s) H_{G_1}(s) + L_C(s) L_{G_1}(s) \quad (2.77)$$

possui raízes somente no SPE.

- (b) O polinômio $L_C(s)$ possui todas as raízes dos polinômios $L_R^{\text{spd}}(s)$ e $L_D^{\text{spd}}(s)$.
- (c) O polinômio $H_{G_1}(s)$ não possui raízes em comum com $L_R^{\text{spd}}(s)$ e $L_D^{\text{spd}}(s)$.

Demonstração. Analisando a malha de controle da Figura 2 e aplicando o princípio da superposição pode-se escrever o erro $E(s)$ em função dos sinais $R(s)$ e $D(s)$:

$$E(s) = \left(\frac{1}{1 + C(s)G_1(s)} \right) R(s) - \left(\frac{G_2(s)}{1 + C(s)G_1(s)} \right) D(s). \quad (2.78)$$

Aplicando as decomposições polinomiais em (2.78) resulta em

$$E(s) = \left(\frac{L_C(s) L_{G_1}(s)}{\Phi(s)} \right) \left(\frac{H_R(s)}{L_R^{\text{spd}}(s) L_D^{\text{spe}}(s)} \right) - \Upsilon(s) \left(\frac{L_C(s) H_{G_2}(s)}{\Phi(s)} \right) \left(\frac{H_D(s)}{L_D^{\text{spd}}(s) L_D^{\text{spe}}(s)} \right) \quad (2.79)$$

onde $\Phi(s)$ representa o polinômio característico conforme (2.77) e polinômio $\Upsilon(s)$ denota

$$\Upsilon(s) = \frac{L_{G_1}(s)}{L_{G_2}(s)}, \quad (2.80)$$

isto é, um polinômio com as raízes exclusivas de $L_{G_1}(s)$ em relação a $L_{G_2}(s)$, dado que $L_{G_1}(s)$ contém todas as raízes de $L_{G_2}(s)$.

Suponha por enquanto que os zeros de $G_1(s)$ não cancelam os polos de $C(s)$, ou seja, os polinômios $L_C(s)$ e $H_{G_1}(s)$ não apresentam raízes em comum.

O valor final do sinal de erro do sistema pode ser verificado pelo teorema do valor final (HAYKIN; VEEN, 2002)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s), \quad (2.81)$$

lembrando que o resultado desta equação é válido somente se $E(s)$ não possui polos instáveis.

Considere agora a escolha de $H_C(s)$ e $L_C(s)$ de tal forma que $\Phi(s)$ tenha raízes somente no SPE, atendendo a condição (a). Suponha também que o polinômio $L_C(s)$ escolhido contenha todas as raízes de $L_R^{\text{spd}}(s)$ e $L_D^{\text{spd}}(s)$, conforme a condição (b). Lembre também que estes polos adicionados pelo controlador não são cancelados pelos zeros da planta, o que remete ao critério (c). Assim, pode-se observar em (2.79) que $E(s)$ terá somente polos estáveis, permitindo o uso do teorema do valor final.

Por fim, para verificar o resultado de (2.81) deixe $\Upsilon_R(s)$ e $\Upsilon_D(s)$ denotar os polinômios

$$\Upsilon_R(s) = \frac{L_C(s)}{L_R^{\text{spd}}(s) L_D^{\text{spd}}(s)}, \quad \Upsilon_D(s) = \frac{L_C(s)}{L_R^{\text{spd}}(s) L_D^{\text{spd}}(s)}. \quad (2.82)$$

Então é fácil notar que

$$\lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} s \left(\Upsilon_R(s) L_{G_1}(s) H_R(s) - \Upsilon_D(s) \Upsilon(s) H_{G_2}(s) H_D(s) \right)}{\lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s)} = 0 \quad (2.83)$$

pois $\lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s)$ irá resultar sempre em um valor constante. \square

Ao analisar a condição (b) do Teorema 2.11 nota-se que o controlador $C(s)$ deve conter todos os polos instáveis e marginalmente estáveis dos sinais de referência e distúrbio para que o erro do sistema tenda assintoticamente para zero. Em outras palavras, o

controlador $C(s)$ deve conter a mesma dinâmica permanente do sinal $R(s)$ a ser seguido bem como do sinal $D(s)$ a ser rejeitado. Esta condição é válida, porém, somente se a malha-fechada do sistema é estável e os zeros da planta não cancelam os polos de interesse adicionados pelo controlador, conforme as respectivas condições (a) e (c) do Teorema 2.11.

Para compreender melhor o PMI considere sinais de referência/distúrbio do tipo degrau na forma: $r(t) = a_r, t \geq 0$ e $d(t) = a_d, t \geq 0$, tal que a_r e a_d são constantes reais diferentes de zero. Pela Transformada de Laplace segue que $R(s) = a_r/s$ e $D(s) = a_d/s$, então nota-se que estes sinais contêm um polo marginalmente estável na origem do plano complexo, ou seja: $L_R^{\text{spd}}(s) = s$ e $L_D^{\text{spd}}(s) = s$. Neste caso, portanto, o controlador também deve conter este mesmo polo na origem (dito integrador) para atender a condição (b) do Teorema 2.11.

Tratando-se de sinais de referência/distúrbio com modos marginalmente estáveis (contidos no eixo imaginário $s = j\omega$ do plano complexo), uma consequência do PMI é que a resposta em frequência $C(j\omega)$ do controlador deve apresentar singularidades (ganho tendendo ao infinito) nas mesmas frequências que compõem o espectro destes sinais. Conforme exemplo anterior, sabe-se que o espectro de sinais do tipo degrau está concentrado na componente DC. Portanto pode-se dizer também que a resposta em frequência $C(j\omega)$ do controlador deve apresentar um ganho tendendo ao infinito ao longo que $\omega \rightarrow 0$ para o atendimento do PMI em relação a sinais do tipo degrau. Na sequência, esta ideia será estendida para sinais periódicos contínuos, que por sua vez apresentam um espectro concentrado em frequências harmônicas.

2.5.1 Descrição de Sinais Periódicos

Considere a classe sinais de referência e distúrbio que apresentem a seguinte propriedade:

$$r(t) = r(t - T), \quad d(t) = d(t - T), \quad \forall t \geq T, \quad (2.84)$$

sendo T um período constante e conhecido. Para aplicar o PMI para esta classe de sinais, conforme o Teorema 2.11, é necessário encontrar primeiramente seus modos dinâmicos.

De acordo com a propriedade da expansão em Série de Fourier, qualquer sinal periódico contínuo pode ser descrito pela soma de infinitos sinais senoidais em frequências harmônicas com diferentes amplitudes e fases. Na forma complexa, a Série de Fourier de $r(t)$ e $d(t)$ pode ser expressa como

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_r(n) e^{jn\omega_0}, \quad d(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_d(n) e^{jn\omega_0}, \quad (2.85)$$

onde $\omega_0 = 2\pi/T$ denota a frequência fundamental dos sinais e $c_r(n) \in \mathbb{C}$, $c_d(n) \in \mathbb{C}$ as componentes espectrais de $r(t)$ e $d(t)$ computadas por

$$c_r(n) = \int_0^T r(t) e^{-jn\omega_0} dt, \quad c_d(n) = \int_0^T d(t) e^{-jn\omega_0} dt. \quad (2.86)$$

Para encontrar os polos de $r(t)$ e $d(t)$ deve-se aplicar a Transformada de Laplace nas expressões (2.85) conforme:

$$R(s) = \int_0^{\infty} r(t)e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_r(n)}{s - jn\omega_0}, \quad D(s) = \int_0^{\infty} d(t)e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_d(n)}{s - jn\omega_0}. \quad (2.87)$$

Então nota-se claramente que $R(s)$ e $D(s)$ possuem infinitos polos marginalmente estáveis no eixo imaginário do plano complexo, localizados em

$$s = jn\omega_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.88)$$

Realizando uma análise em regime permanente, ou seja, para $s = j\omega$, segue que $R(j\omega)$ e $D(j\omega)$ apresentam uma singularidade nas frequências harmônicas $\omega = n\omega_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Conforme o PMI, portanto, o controlador $C(s)$ deve conter os mesmos polos imaginários em (2.88) para garantir o perfeito seguimento e rejeição dos sinais de distúrbio e referência desta classe. Outra maneira de expressar esta condição é dizer que a resposta em frequência $C(j\omega)$ do controlador deve apresentar ganho tendendo ao infinito para ω tendendo às frequências harmônicas $n\omega_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. Neste sentido destacam-se duas abordagens distintas: o Controlador Ressonante e o Controlador Repetitivo. Estas topologias de controle serão descritas na sequência.

2.5.2 Controlador Ressonante

O Controlador Ressonante (CHEN, 1999) apresenta um modelo com um par de polos puramente imaginários e portanto, capaz de inserir na malha de controle uma dinâmica senoidal de determinada frequência. A função de transferência do Controlador Ressonante é definida da seguinte forma:

$$G_r(s) = \frac{Y_r(s)}{E(s)} = k_r \frac{\omega_r^2}{s^2 + \omega_r^2}, \quad (2.89)$$

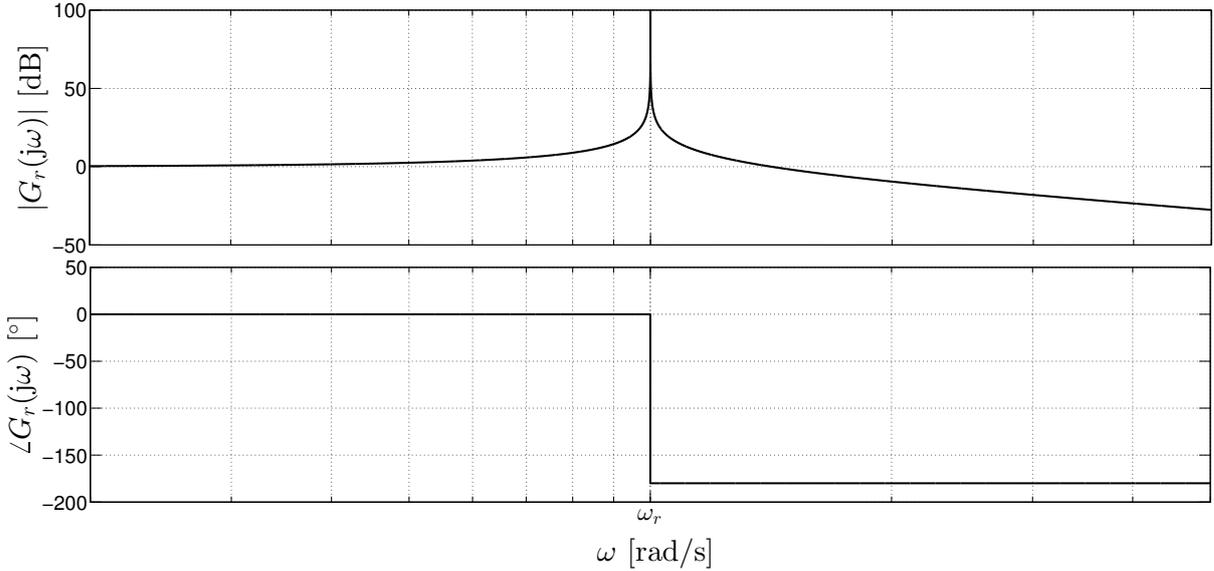
onde ω_r é a frequência de ressonância e $k_r > 0$ é um ganho de entrada. Note que $G_r(s)$ apresenta um par de polos complexos localizados em $s = \pm j\omega_r$. A Figura 3 apresenta a resposta em frequência $G_r(j\omega)$ do Controlador Ressonante, onde é possível observar o ganho infinito do modelo na frequência de ressonância ω_r .

O Controlador Ressonante também pode ser descrito no espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r e(t), \\ y_r(t) &= C_r x_r(t), \end{cases} \quad (2.90)$$

sendo $x_r(t) \in \mathbb{R}^2$ o vetor de estados do controlador e $A_r \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B_r \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $C_r \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ são matrizes construídas conforme:

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_r \\ \omega_r & 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} k_r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_r = \begin{bmatrix} 0 & \omega_r \end{bmatrix}. \quad (2.91)$$

Figura 3 – Resposta em frequência $G_r(j\omega)$ do Controlador Ressonante.

Observe que o Controlador Ressonante pode ser utilizado para seguimento/rejeição completa de sinais periódicos senoidais. Neste caso basta sintonizar a frequência de ressonância ω_r , igual à frequência fundamental ω_0 dos sinais de interesse, ou seja:

$$\omega_r = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} . \quad (2.92)$$

Contudo, o Controlador Ressonante simples não garante seguimento e/ou rejeição para sinais periódicos genéricos que apresentam conteúdo harmônico, isto é, possuem energia em frequências múltiplas da frequência fundamental ω_0 . Para tratar este quesito pode-se empregar o Controlador Múltiplo Ressonante. Esta topologia consiste na combinação de modos de ressonância conforme a função de transferência

$$G_R(s) = \frac{Y_R(s)}{E(s)} = k_r \sum_{n=1}^{n_h} \frac{(n\omega_r)^2}{s^2 + (n\omega_r)^2} , \quad (2.93)$$

onde ω_r agora denota a frequência de ressonância fundamental e n_h é o número de modos harmônicos. Observe que este modelo apresenta polos em $s = \pm jn\omega_r$ para $n \in \{1, 2, \dots, n_h\}$. Conseqüentemente, esta abordagem garante seguimento/rejeição para as n_h primeiras harmônicas dos sinais. A Figura 4 mostra a resposta em frequência do Controlador Múltiplo Ressonante onde pode-se notar os múltiplos picos de ganho infinito.

O Controlador Ressonante Múltiplo também pode ser implementado no espaço de estados conforme:

$$\begin{cases} \dot{x}_R(t) = A_R x_R(t) + B_R e(t) , \\ y_R(t) = C_R x_R(t) , \end{cases} \quad (2.94)$$

onde $x_R(t) \in \mathbb{R}^{2n_h}$ é o vetor de estados do controlador e $A_R \in \mathbb{R}^{2n_h \times 2n_h}$, $B_R \in \mathbb{R}^{2n_h \times 1}$,

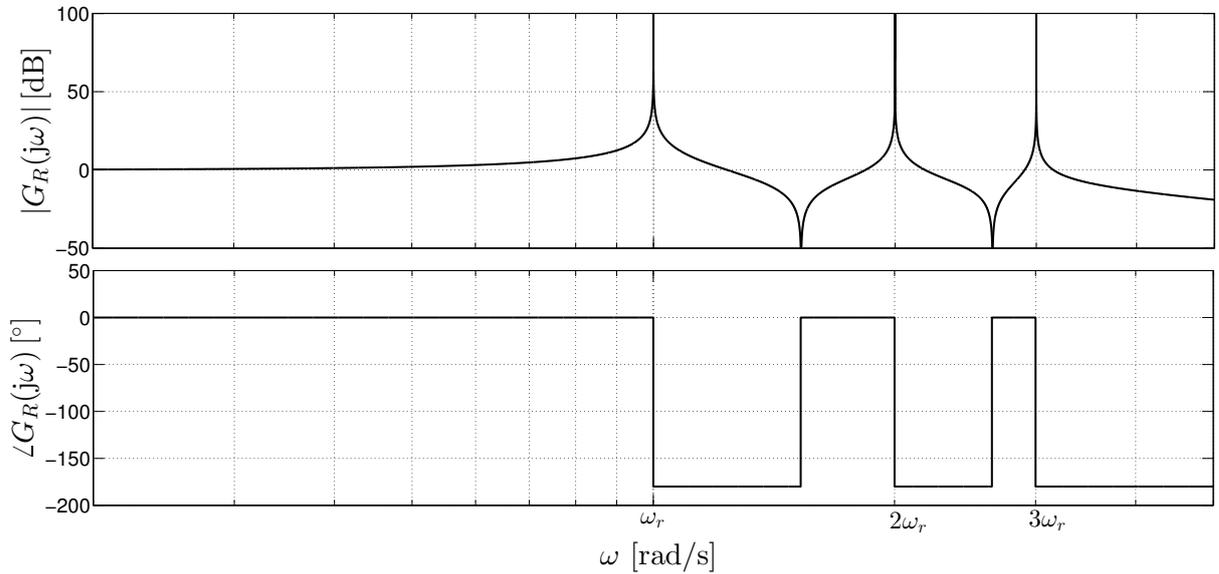
$C_R \in \mathbb{R}^{1 \times 2n_h}$ são matrizes construídas pela seguinte associação:

$$A_R = \text{diag} \{A_r, 2A_r, \dots, n_h A_r\},$$

$$B_R = \begin{bmatrix} B_r \\ B_r \\ \vdots \\ B_r \end{bmatrix}, \quad C_R = [C_r \quad 2C_r \quad \dots \quad n_h C_r]. \quad (2.95)$$

onde A_r e B_r C_r seguem a mesma definição em (2.91).

Figura 4 – Resposta em frequência $G_R(j\omega)$ do Controlador Múltiplo Ressonante com três modos harmônicos ($n_h = 3$).



É importante ressaltar que o Controlador Ressonante Múltiplo não garante, de forma genérica, o seguimento e/ou rejeição de sinais periódicos, visto que seriam necessários infinitos modos harmônicos ($n_h \rightarrow \infty$) para compor todo o espectro dos sinais de interesse, o que leva a uma impossibilidade de implementação. Ao utilizar o Controlador Ressonante Múltiplo, com n_h modos harmônicos, observa-se um erro residual em regime permanente associado às componentes espectrais dos sinais em frequências superiores a $\omega = n_h \omega_0$. Para tratar deste problema será apresentada na sequência uma diferente arquitetura de controle.

Vale destacar que Controlador Ressonante não contém polo na origem do plano complexo. Portanto este controlador deve ser implementado em conjunto com um integrador, para assim garantir também o seguimento/rejeição de componentes DC dos sinais, caso necessário.

2.5.3 Controlador Repetitivo

O Controlador Repetitivo (HARA et al., 1988) implementa infinitos polos no eixo imaginário do plano complexo, o que garante, do ponto de vista teórico, o perfeito seguimento e rejeição de qualquer sinal periódico.

O Controlador Repetitivo apresenta uma estrutura conforme o diagrama de blocos da Figura 5, onde $e^{-\tau s}$ representa um atraso de transporte de τ segundos. A função de transferência equivalente deste controlador é

$$G_{rp}(s) = \frac{Y_{rp}(s)}{E(s)} = \frac{e^{-\tau s}}{1 - e^{-\tau s}} . \quad (2.96)$$

No domínio do tempo, o Controlador Repetitivo é implementado simplesmente por

$$y_{rp}(t) = e(t - \tau) + y_{rp}(t - \tau) . \quad (2.97)$$

Figura 5 – Diagrama de blocos do Controlador Repetitivo.

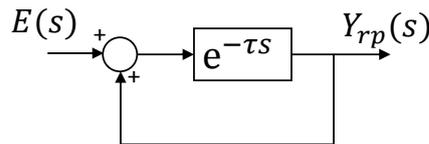
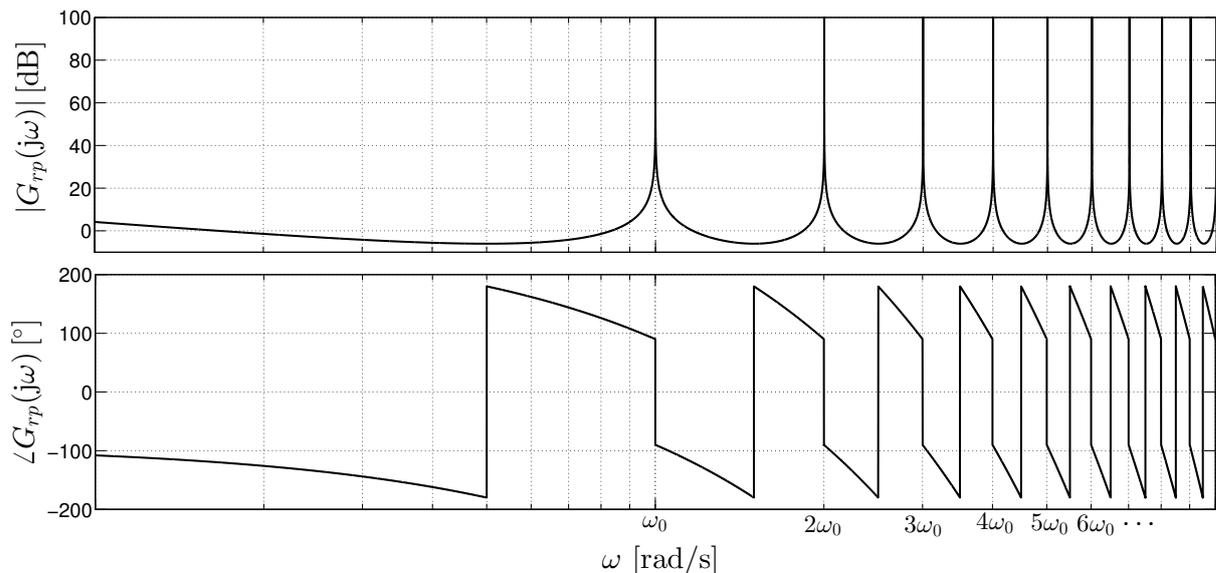


Figura 6 – Resposta em frequência $G_{rp}(j\omega)$ do Controlador Repetitivo para um atraso genérico τ . Segue que $\omega_0 = 2\pi/\tau$.



É possível verificar os polos de $G_{rp}(s)$ solucionando a igualdade $1 - e^{-\tau s} = 0$, que pela identidade de Euler pode ser reescrita como

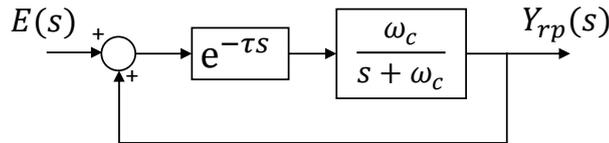
$$1 - e^{-\sigma\tau} (\cos(\omega\tau) - j \text{sen}(\omega\tau)) = 0 , \quad (2.98)$$

para $s = \sigma + j\omega$. Assim é fácil observar que $\sigma = 0$ e $\omega = n2\pi/\tau \forall n \in \mathbb{Z}$ resolve a equação (2.98). Portanto o Controlador Repetitivo apresenta infinitos polos complexos imaginários em $s = jn2\pi/\tau \forall n \in \mathbb{Z}$. Conseqüentemente, a resposta em frequência $G_{rp}(j\omega)$ deste controlador apresenta infinitos picos de ganho infinito em frequências múltiplas de $2\pi/\tau$, conforme demonstrado na Figura 6.

Lembre que os polos de um sinal periódico contínuo genérico estão localizados nas frequências harmônicas $\omega = n2\pi/T \forall n \in \mathbb{Z}$. Então, basta sintonizar o atraso τ do controlador igual ao período T dos sinais para garantir perfeito seguimento e/ou rejeição em regime permanente.

É comum na literatura a inserção de um filtro passa-baixas em série com o elemento de atraso do Controlador Repetitivo, conforme mostrado no diagrama de blocos da Figura 7. Esta adaptação tem o objetivo de deslocar os polos de alta-frequência de $G_{rp}(s)$ para dentro do SPE, facilitando assim a estabilização em malha-fechada do sistema, além de reduzir a sensibilidade do controlador para o ruído dos sensores (FLORES et al., 2012). A Figura 8 compara a resposta em frequência do Controlador Repetitivo com filtro de primeira ordem para diferentes frequências de corte ω_c . Nota-se que a inserção do filtro passa-baixas torna o ganho do controlador finito nas frequências harmônicas, além disso observa-se o deslocamento destes picos de ganho alto em relação ao controlador original. Estes efeitos tornam-se mais evidentes com a redução da frequência de corte ω_c e estão diretamente associados a um erro residual em regime permanente do sistema.

Figura 7 – Diagrama de blocos do Controlador Repetitivo com filtro de primeira ordem.



A função de transferência equivalente do Controlador Repetitivo com filtro de primeira ordem é expressa como

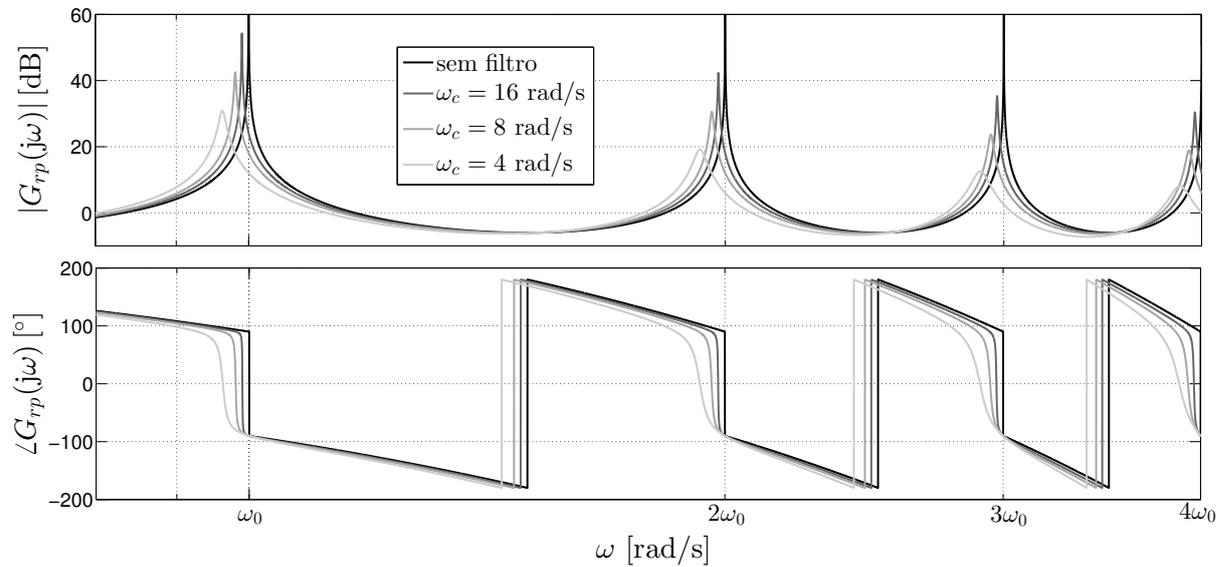
$$G_{rp}(s) = \frac{Y_{rp}(s)}{E(s)} = \frac{Q_f(s)e^{-\tau s}}{1 - Q_f(s)e^{-\tau s}}, \quad Q_f(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}. \quad (2.99)$$

onde $Q_f(s)$ é a função de transferência do filtro e ω_c é a frequência de corte. No espaço de estados, esta estrutura pode ser implementada por:

$$\begin{cases} \dot{x}_{rp}(t) &= -\omega_c x_{rp}(t) + \omega_c x_{rp}(t - \tau) + \omega_c e(t - \tau) \\ y_{rp}(t) &= x_{rp}(t) \end{cases} \quad (2.100)$$

sendo $x_{rp} \in \mathbb{R}$ o estado do controlador.

Figura 8 – Resposta em frequência $G_{rp}(j\omega)$ do Controlador Repetitivo filtrado para diferentes frequências de corte ω_c . Segue que $\omega_0 = 2\pi/\tau$.



2.6 Comentários Finais

Este capítulo abordou conceitos essenciais que serão utilizados posteriormente para a formulação da proposta do trabalho. Primeiramente foi apresentada a teoria de estabilidade de sistemas no sentido de Lyapunov incluindo, logo após, a teoria de estabilidade de sistemas com atraso de transporte. Foi apresentado então uma metodologia para o projeto robusto de sistemas de controle com base na solução de problemas com restrições na forma de *LMI*s. Por fim, foi discutido o Princípio do Modelo Interno juntamente com as principais topologias de controle para o tratamento de sinais de referência/distúrbio periódicos.

3 Metodologia Proposta

Este capítulo apresenta primeiramente o problema de controle associado ao seguimento e/ou rejeição de sinais referência/distúrbio de período variante no tempo. Logo após, será introduzida uma teoria matemática de mudança de domínio de sinais. Ao final do capítulo, esta ferramenta é associada para a solução do problema de controle indicado.

3.1 Descrição do Problema

Considere uma planta em tempo contínuo representável na forma politópica conforme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\lambda)x(t) + B(\lambda)u(t) + B_d(\lambda)d(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_d d(t) \\ e(t) = y(t) - r(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistema, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de controle, $d \in \mathbb{R}$ é a entrada de distúrbio, $y \in \mathbb{R}$ é a saída, $r \in \mathbb{R}$ é a referência. As matrizes $A(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B_d(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C(\lambda) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $D(\lambda) \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ e $D_d(\lambda) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ satisfazem

$$\begin{bmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) & B_d(\lambda) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2^p} \lambda_i \begin{bmatrix} A_i & B_i & B_{di} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde λ pertence ao conjunto

$$\lambda \in \mathcal{B}_\lambda = \left\{ \lambda_i : \sum_{i=1}^{2^p} \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, 2^p \right\} \subset \mathbb{R}^{2^p}. \quad (3.3)$$

Assume-se que a planta seja totalmente controlável e totalmente observável para todo $\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$.

Os sinais de referência $r(t)$ e distúrbio $d(t)$ são definidos para todo $t \in \mathbb{R}_+^*$ e satisfazem a propriedade

$$r(t) = r(t - T(t)), \quad d(t) = d(t - T(t)), \quad \forall t \geq T_0, \quad (3.4)$$

onde $T : [T_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ é um sinal contínuo que representa o período variante no tempo dos sinais. A constante T_0 denota o tempo para completar o primeiro ciclo periódico dos sinais, de tal forma que $T(T_0) = T_0$.

Este trabalho propõe uma solução para o seguinte problema:

Problema 3.1. *Projetar um controlador dinâmico tal que – para sinais $r(t)$ e $d(t)$ com a propriedade (3.4) – o sistema (3.1) seja assintoticamente estável e o sinal de erro $e(t)$ tenda assintoticamente a zero.*

É notável que não é possível aplicar diretamente a expansão em Série de Fourier e a Transformada de Laplace em sinais com propriedade (3.4) dado que seus períodos são variantes no tempo. Isto dificulta a utilização direta do PMI para solução do Problema 3.1, o qual é baseado no domínio da frequência e requer o conhecimento dos modos dinâmicos dos sinais serem tratados. Para contornar este problema, será introduzida na sequência uma ferramenta matemática de transformação do domínio. Esta abordagem consiste em levar os sinais $r(t)$ e $d(t)$ para um novo domínio virtual onde possuem período constante, e conseqüentemente, a característica necessária para identificação dos modos dinâmicos.

3.2 Transformação de Domínio para Sinais de Período Variante no Tempo

Esta seção propõe uma ferramenta matemática para a análise de sinais de período variante no tempo, ou seja, que possuem a propriedade (3.4). A ideia chave por trás desta metodologia é realizar a transposição da representação de um sinal contínuo $f(t)$, originalmente descrito em função do tempo t , para uma nova representação $\mathbf{f}(\theta)$, em função de um novo domínio virtual θ . Esta “mudança” de domínio permitirá tratar sinais de período variante no tempo como sinais de período constante neste domínio- θ , possibilitando assim a formulação de controladores com base no PMI.

Primeiramente serão apresentadas as definições matemáticas básicas que envolvem o método proposto, isto inclui, por exemplo, a definição da transformação direta (a qual leva $f(t)$ para $\mathbf{f}(\theta)$) e a definição da transformação inversa (a qual retorna $\mathbf{f}(\theta)$ para a forma original $f(t)$). Posteriormente estes conceitos são associados para o contexto de sistemas dinâmicos e projeto de controladores.

3.2.1 Definição da Transformação Direta

Deixe $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ representar um domínio e $\Theta\{\cdot\}$ uma operação de transformação de sinais representada conforme

$$\mathbf{f}(\theta) = \Theta\{f(t)\}, \quad (3.5)$$

onde $f(t)$ denota o sinal original no domínio do tempo e $\mathbf{f}(\theta)$ o sinal transformado para o domínio- θ .

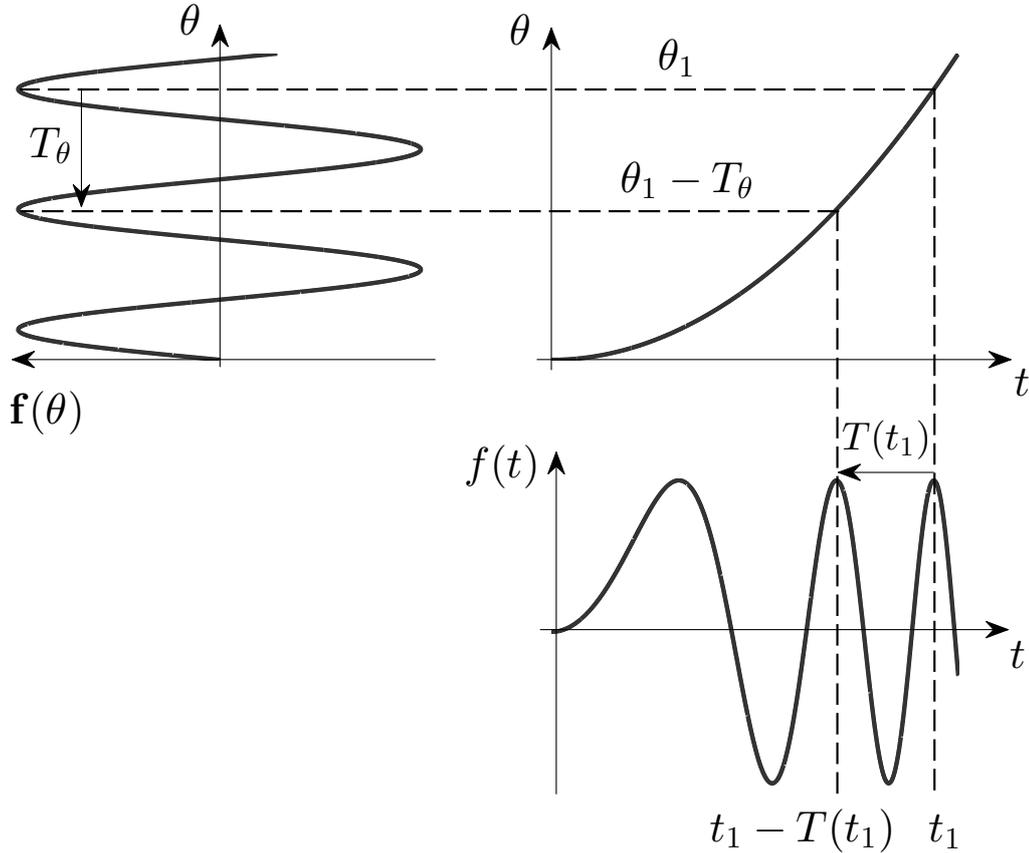
Deseja-se que a transformação $\Theta\{\cdot\}$ tenha a seguinte propriedade:

$$f(t) = f(t - T(t)) \forall t \geq T_0 \Rightarrow \mathbf{f}(\theta) = \mathbf{f}(\theta - T_\theta) \forall \theta \geq T_\theta \quad (3.6)$$

onde T_θ é uma constante. Em simples palavras deseja-se que a transformação de um sinal periódico qualquer $f(t)$ – com período variante $T(t)$ – resulte em sempre um sinal transformado $\mathbf{f}(\theta)$ com período constante T_θ no domínio- θ . A interpretação gráfica desta

propriedade pode ser visualizada na Figura 9. Veja neste esquemático que o sinal $f(t)$ apresenta período variante $T(t)$ em relação ao tempo, enquanto que sua representação transposta $\mathbf{f}(\theta)$ apresenta período constante T_θ

Figura 9 – Representação gráfica da propriedade (3.6). Nesta figura, t_1 e θ_1 denotam simplesmente instantes de t e θ particulares para a análise gráfica.



A operação de transformação $\Theta\{\cdot\}$ é apresentada na seguinte definição.

Definição 3.1. Transformada- Θ Direta. A operação de transformação $\Theta\{\cdot\}$ é determinada pela seguinte composição:

$$\mathbf{f}(\theta) = \Theta\{f(t)\} = f(t) \circ \mathbf{t}(\theta) \quad (3.7)$$

onde $\mathbf{t}(\theta) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é uma função de transformação contínua estritamente crescente.

Observe que a transformação Θ significa a substituição da variável t do sinal original $f(t)$ por uma função $\mathbf{t}(\theta)$, assim originando um sinal composto transformado $\mathbf{f}(\theta)$ para o novo domínio- θ :

$$\mathbf{f}(\theta) = f(t) \circ \mathbf{t}(\theta) = f(t) \Big|_{t=\mathbf{t}(\theta)} = f(\mathbf{t}(\theta)) . \quad (3.8)$$

A função $\mathbf{t}(\theta)$ significa um mapa onde para cada valor de θ existe um valor de t associado. Note que objetivo final é utilizar uma função de transformação $\mathbf{t}(\theta)$ para que a propriedade desejada (3.6) seja válida. Para tratar desta questão segue o Teorema 3.1.

Teorema 3.1. *Suponha que a função de transformação $\mathbf{t}(\theta)$ satisfaça a relação*

$$\mathbf{t}(\theta) - \mathbf{t}(\theta - T_\theta) = T(t) \circ \mathbf{t}(\theta) , \quad (3.9)$$

para todo $\theta > T_\theta$. Então a Transformada- Θ Direta conforme a Definição 3.1 satisfaz a propriedade (3.6).

Demonstração. Observe que para $f(t) = f(t - T(t))$ implicar que $\mathbf{f}(\theta) = \mathbf{f}(\theta - T_\theta)$ (em todo $t \geq T_0$ e todo $\theta \geq T_\theta$) deve-se garantir que todo o deslocamento de $T(t)$ no sinal $f(t)$ resulte sempre em um deslocamento fixo de T_θ no sinal transformado $\mathbf{f}(\theta)$, ou seja:

$$\Theta\{f(t - T(t))\} = \mathbf{f}(\theta - T_\theta) \quad \forall t \geq T_0 \quad \forall \theta \geq T_\theta . \quad (3.10)$$

Desenvolvendo a operação $\Theta\{f(t - T(t))\}$ com uma função de transformação $\mathbf{t}(\theta)$ segue que

$$\Theta\{f(t - T(t))\} = f(\mathbf{t}(\theta) - T(\mathbf{t}(\theta))) . \quad (3.11)$$

Lembre que $\mathbf{f}(\theta) = f(\mathbf{t}(\theta))$ pela definição da Transformada- Θ . Esta mesma equação continua válida se substituirmos θ por $\theta - T_\theta$ em ambos os lados, ou seja:

$$\mathbf{f}(\theta - T_\theta) = f(\mathbf{t}(\theta - T_\theta)) . \quad (3.12)$$

Comparando as relações (3.10), (3.11) e (3.12) chega-se a conclusão que $\mathbf{t}(\theta)$ deve satisfazer:

$$f(\mathbf{t}(\theta) - T(\mathbf{t}(\theta))) = f(\mathbf{t}(\theta - T_\theta)) \quad \forall \theta \geq T_\theta . \quad (3.13)$$

para garantir a propriedade (3.6). Por fim, observe que é possível igualar os argumentos de $f(\cdot)$ na equação (3.13), resultando em

$$\mathbf{t}(\theta) - T(\mathbf{t}(\theta)) = \mathbf{t}(\theta - T_\theta) \quad \forall \theta \geq T_\theta , \quad (3.14)$$

relação equivalente à condição (3.9), visto que $T(\mathbf{t}(\theta)) = T(t) \circ \mathbf{t}(\theta)$.¹ □

3.2.2 Definição da Transformação Inversa

Considere agora a operação de transformação inversa $\Theta^{-1}\{\cdot\}$ de forma que

$$f(t) = \Theta^{-1}\{\mathbf{f}(\theta)\} . \quad (3.15)$$

Observe que a função $\mathbf{t}(\theta)$ é declarada na Definição 3.1 como uma função de θ estritamente crescente. Então, para cada valor t , deve existir um único valor θ associado e vice-versa. Assim, deve existir também uma função inversa $\theta(t)$ de forma que seja possível retornar do domínio- θ para o domínio t original.

¹ Observe que $T(\mathbf{t}(\theta))$ também pode ser denotado por $\mathbf{T}(\theta)$, ou seja, o resultado da transformação Θ de $T(t)$.

De maneira oposta à transformação direta, a transformação inversa deve apresentar a propriedade:

$$\mathbf{f}(\theta) = \mathbf{f}(\theta - T_\theta) \quad \forall \theta \geq T_\theta \quad \xrightarrow{\Theta^{-1}} \quad f(t) = f(t - T(t)) \quad \forall t \geq T_0 . \quad (3.16)$$

Na sequência está disposta a definição formal da operação de transformação $\Theta^{-1}\{\cdot\}$.

Definição 3.2. Transformada- Θ Inversa. A operação de transformação de transformação $\Theta^{-1}\{\cdot\}$ é determinada pela seguinte operação de composição

$$f(t) = \Theta^{-1}\{\mathbf{f}(\theta)\} = \mathbf{f}(\theta) \circ \theta(t) \quad (3.17)$$

onde $\theta(t) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é uma função contínua estritamente crescente.

Neste caso, a operação Θ^{-1} significa a substituição da variável θ do sinal transformado $\mathbf{f}(\theta)$ por uma função $\theta(t)$, assim originando um sinal no domínio do tempo $f(t)$:

$$f(t) = \mathbf{f}(\theta) \circ \theta(t) = \mathbf{f}(\theta) \Big|_{\theta=\theta(t)} = \mathbf{f}(\theta(t)) . \quad (3.18)$$

É fácil notar que caso as funções $\theta(t)$ e $\mathbf{t}(\theta)$ sejam inversas (uma em relação a outra) então:

$$\Theta^{-1}\{\Theta\{f(t)\}\} = f(t) , \quad (3.19)$$

isto é, a transformada direta de um sinal $f(t)$ seguido da transformada inversa retorna ao mesmo sinal original. Pode-se concluir então que para aplicar a transformação Θ^{-1} basta escolher uma função $\theta(t)$ que seja a inversa de $\mathbf{t}(\theta)$ escolhida conforme a Definição 3.1. Contudo será pressuposto aqui que a função $\mathbf{t}(\theta)$ não é conhecida previamente, neste caso portanto, a escolha de $\theta(t)$ é baseada no atendimento da propriedade (3.16). Para que este critério seja válido é apresentado o seguinte teorema.

Teorema 3.2. *Suponha que a função de transformação $\theta(t)$ satisfaça a relação*

$$\theta(t) - \theta(t - T(t)) = T_\theta \quad (3.20)$$

para todo $t \geq T_0$. Então a Transformada- Θ Inversa conforme a Definição 3.2 satisfaz a propriedade (3.16).

Demonstração. A prova segue de maneira oposta à prova do Teorema 3.1. Agora deve-se garantir que todo o deslocamento fixo de T_θ do sinal $\mathbf{f}(\theta)$ resulte sempre em um deslocamento variante $T(t)$ no sinal transformado $f(t)$ para o domínio do tempo:

$$\Theta^{-1}\{\mathbf{f}(\theta - T_\theta)\} = f(t - T(t)) \quad \forall t \geq T_0 \quad \forall \theta \geq T_\theta . \quad (3.21)$$

Desenvolvendo a operação $\Theta^{-1}\{\mathbf{f}(\theta - T_\theta)\}$ com uma função de transformação $\theta(t)$ segue que

$$\Theta^{-1}\{\mathbf{f}(\theta - T_\theta)\} = \mathbf{f}(\theta(t) - T_\theta) . \quad (3.22)$$

Lembre que $f(t) = \mathbf{f}(\theta(t))$ pela definição da operação Θ^{-1} . Esta mesma equação continua válida se substituirmos t por $t - T(t)$ em ambos os lados, ou seja:

$$f(t - T(t)) = \mathbf{f}(\theta(t - T(t))) . \quad (3.23)$$

Comparando as relações (3.21), (3.22) e (3.23) chega-se a conclusão que $\theta(t)$ deve satisfazer:

$$\mathbf{f}(\theta(t) - T_\theta) = \mathbf{f}(\theta(t - T(t))) \quad \forall t \geq T_0 . \quad (3.24)$$

para garantir a propriedade (3.16). Por fim, observe que é possível igualar os argumentos de $\mathbf{f}(\cdot)$ na equação (3.13), resultando em

$$\theta(t) - T_\theta = \theta(t - T(t)) \quad \forall t \geq T_0 , \quad (3.25)$$

relação equivalente a condição (3.20). \square

3.2.3 Escolha Sistemática da Função de Transformação

Para uma classe particular de sinais $f(t)$ de período variante no tempo é possível sistematizar a escolha da função de transformação $\mathbf{t}(\theta)$ e sua inversa $\theta(t)$, de modo que o sinal transformado $\mathbf{f}(\theta)$ sempre apresente período constante, satisfazendo as condições (3.9) e (3.20) dos respectivos Teoremas 3.1 e 3.2. Esta classe de sinais $f(t)$ deve satisfazer os critérios seguintes:

- (a) O sinal $f(t)$ pode ser descrito na forma

$$f(t) = p(\phi(t)) . \quad (3.26)$$

- (b) A função $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $p(\xi) = p(\xi - T_p) \forall \xi \in \mathbb{R}$ para uma constante T_p .
- (c) O sinal $\phi(t) \in \mathbb{R}$ é estritamente crescente e contínuo em todo seu domínio $t \in \mathbb{R}_+^*$.

Considere as seguintes funções de transformação candidatas:

$$\mathbf{t}(\theta) = \phi^{-1}(\varrho^{-1} \theta) , \quad \theta(t) = \varrho \phi(t) , \quad (3.27)$$

para qualquer escalar $\varrho \in \mathbb{R}_+$. Aqui, $\phi^{-1}(\theta)$ denota função inversa de $\phi(t)$. Por exemplo, para $\phi(t) = t^2, t \geq 0$ segue que $\phi^{-1}(\theta) = \sqrt{\theta}, \theta \geq 0$. Observe desta forma que $\mathbf{t}(\theta)$ e $\theta(t)$ são por definição inversas entre si.

Para validar a escolha da função de transformação $\mathbf{t}(\theta)$, deve-se avaliar o atendimento da relação (3.9) do Teorema 3.1. Pode-se de forma alternativa testar a função de transformação inversa $\theta(t)$ conforme a condição (3.20) do Teorema 3.2. Este último caminho de fato torna mais simples a prova matemática, conforme o Teorema 3.3 disposto na sequência.

Teorema 3.3. Para a classe de sinais $f(t)$ que satisfazem os critérios (a), (b) e (c) listados, a função de transformação inversa $\theta(t)$ em (3.27) satisfaz a condição (3.20) se e somente se $T_\theta = \varrho T_p$.

Demonstração. Inserindo a função candidata $\theta(t)$ na expressão (3.20) resulta

$$\theta(t) - \theta(t - T(t)) = T_\theta \quad \rightarrow \quad \varrho \phi(t) - \varrho \phi(t - T(t)) = T_\theta . \quad (3.28)$$

A expressão (3.28) pode ainda ser reorganizada para a forma

$$\phi(t) - \frac{T_\theta}{\varrho} = \phi(t - T(t)) . \quad (3.29)$$

Agora observe que o período variante $T(t)$ do sinal $f(t)$ – sujeito aos critérios (a), (b) e (c) – pode ser encontrado pela solução de

$$f(t) = f(t - T(t)) \quad \therefore \quad p(\phi(t)) = p(\phi(t - T(t))) . \quad (3.30)$$

Mas visto que $p(\xi)$ é uma função periódica segue que

$$\phi(t) - T_p = \phi(t - T(t)) . \quad (3.31)$$

Comparando com as relações (3.29) e (3.31) chega-se a conclusão que T_θ deve valer

$$T_\theta = \varrho T_p \quad (3.32)$$

para que a função $\theta(t)$ escolhida atenda a condição (3.20). \square

De acordo com este teorema, o mapa de transformação em (3.27) sempre é válido para sinais $f(t)$ da classe considerada, permitindo representar estes sinais no domínio- θ com um período constante de $T_\theta = \varrho T_p$ (para qualquer $\varrho > 0$).

Desenvolvendo a transformação de $f(t)$ para $\mathbf{f}(\theta)$ com a função $\mathbf{t}(\theta)$ selecionada em (3.27) resulta:

$$\mathbf{f}(\theta) = \Theta\{p(\phi(t))\} = p(\phi(\phi^{-1}(\varrho^{-1}\theta))) = p(\varrho^{-1}\theta) . \quad (3.33)$$

Observe que no domínio- θ , a representação do sinal torna-se $\mathbf{f}(\theta) = p(\varrho^{-1}\theta)$, onde agora o argumento de $p(\cdot)$ é uma função linear $\varrho^{-1}\theta$. Isto indica que o sinal $\mathbf{f}(\theta)$ apresenta um período constante de $T_\theta = \varrho T_p$, corroborando com o Teorema 3.3.

Para retornar a representação do sinal $\mathbf{f}(\theta)$ do domínio- θ para a forma original $f(t)$ no domínio do tempo deve-se aplicar função $\theta(t)$ apresentada em (3.27):

$$f(t) = \Theta^{-1}\{p(\varrho^{-1}\theta)\} = p(\varrho \varrho^{-1} \phi(t)) = p(\phi(t)) . \quad (3.34)$$

3.2.4 Exemplo Numérico

Para compreender melhor as definições descritas anteriormente será apresentado um exemplo numérico. Considere o seguinte sinal $f(t)$ de período variante no tempo

$$f(t) = \text{sen}(t^2) , t \geq 0 . \quad (3.35)$$

Este sinal $f(t)$ é o mesmo apresentado anteriormente na Figura 9 .

Conforme o método sistemático proposto, pode-se enquadrar este sinal na forma $f(t) = p(\phi(t))$, onde $p(\xi) = \text{sen}(\xi)$ e portanto $T_p = 2\pi$. Ainda, verifica-se que $\phi(t) = t^2$, $t \geq 0$ e sua inversa é $\phi^{-1}(\theta) = \sqrt{\theta}$, $\theta \geq 0$. Assim segue que as funções de transformação $\mathbf{t}(\theta)$ e $\theta(t)$ podem ser

$$\mathbf{t}(\theta) = \sqrt{\varrho^{-1}\theta} , \theta \geq 0 , \quad \theta(t) = \varrho t^2 , t \geq 0 , \quad (3.36)$$

para qualquer constante $\varrho > 0$. Ao considerar $\varrho = 1$, por exemplo, nota-se que o período constante do sinal no domínio- θ deve ser $T_\theta = \varrho T_p = 2\pi$.

Então, aplicando a transformação direta conforme a Definição 3.1 resulta no sinal equivalente no domínio do tempo:

$$\mathbf{f}(\theta) = \Theta\{\text{sen}(t^2)\} = \text{sen}(\mathbf{t}(\theta)^2) = \text{sen}((\sqrt{\theta})^2) = \text{sen}(\theta) . \quad (3.37)$$

Já a partir da Definição 3.1 é possível retornar a representação do sinal para o domínio do tempo. Neste caso basta aplicar $\theta(t)$ conforme:

$$f(t) = \Theta^{-1}\{\text{sen}(\theta)\} = \text{sen}(\theta(t)) = \text{sen}(t^2) . \quad (3.38)$$

A Figura 9 apresenta a interpretação gráfica deste exemplo apresentado, onde abaixo nota-se o sinal original $f(t) = \text{sen}(t^2)$, no canto superior esquerdo o sinal transformado $\mathbf{f}(\theta) = \text{sen}(\theta)$ e no canto superior direito o mapa de transformação $\theta(t) = t^2$ (ou do ponto de vista transposto: $\mathbf{t}(\theta) = \sqrt{\theta}$).

3.2.5 Transformação de Derivadas

É de particular interesse a análise da Transformada- Θ aplicada em equações diferenciais. Para isto é necessário encontrar o resultado destas operações para derivadas de sinais.

A seguir é demonstrado o resultado da operação $\Theta\{df(t)/dt\}$, isto é, a transformação para o domínio- θ da derivada temporal de $f(t)$. Também será analisada a operação inversa $\Theta^{-1}\{d\mathbf{f}(\theta)/d\theta\}$, ou seja, a transformação para o domínio do tempo da derivada de $\mathbf{f}(\theta)$ em relação a θ . Com base na regra da cadeia de diferenciação segue que

$$\Theta\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \frac{d\mathbf{f}(\theta)}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{f}(\theta)}{d\theta} , \quad (3.39)$$

$$\Theta^{-1} \left\{ \frac{d\mathbf{f}(\theta)}{d\theta} \right\} = \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} = \frac{dt}{d\theta} \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}. \quad (3.40)$$

Para representar a relação $d\theta/dt$ será utilizada uma função Ω que pode ser definida de duas formas diferentes:

$$\Omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad \mathbf{\Omega}(\theta) = \frac{d\theta}{d\mathbf{t}(\theta)}, \quad (3.41)$$

Observe que a primeira forma resulta em uma função dependente do tempo $\Omega(t)$, definida pela derivada temporal da função $\theta(t)$, apresentada na Definição 3.2. Já a segunda forma resulta em uma função dependente de θ denotada por $\mathbf{\Omega}(\theta)$. Esta última é definida pelo inverso da derivada da função $\mathbf{t}(\theta)$ em relação a θ , conforme apresentada na Definição 3.1. Portanto, as relações (3.39) e (3.40) podem ser expressas respectivamente conforme:

$$\Theta \left\{ \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} \right\} = \mathbf{\Omega}(\theta) \frac{d\mathbf{f}(\theta)}{d\theta}, \quad (3.42)$$

$$\Theta^{-1} \left\{ \frac{d\mathbf{f}(\theta)}{d\theta} \right\} = \frac{1}{\Omega(t)} \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}. \quad (3.43)$$

Observe que em (3.42) foi escolhido o uso de $\mathbf{\Omega}(\theta)$, para que todos os termos no lado direito da equação sejam dependentes de θ . Já em (3.43) foi utilizada a função $\Omega(t)$, para que todos os termos a direita da equação sejam dependentes do tempo t .

3.2.6 Transformação de Sistemas Dinâmicos

Com base nas importantes propriedades de diferenciação demonstradas nas equações (3.42) e (3.43) é possível desenvolver uma metodologia para transportar a representação de sistemas dinâmicos entre os domínios θ e t , sem alterar sua característica dinâmica. Para esta análise, considere dois sistemas lineares S_t e S_θ definidos no espaço de estados conforme

$$S_t : \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad S_\theta : \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(\theta)}{d\theta} = A\mathbf{x}(\theta) + B\mathbf{u}(\theta) \\ \mathbf{y}(\theta) = C\mathbf{x}(\theta) + D\mathbf{u}(\theta) \end{cases} \quad (3.44)$$

Observe que S_t é representado no domínio t enquanto que S_θ é representado no domínio- θ .

Para realizar a transformação direta do sistema S_t – de forma a levar sua representação do domínio t para o domínio- θ – basta aplicar o operador $\Theta\{\cdot\}$ nos termos do sistema:

$$\Theta\{S_t\} : \begin{cases} \Theta \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = A\Theta\{x(t)\} + B\Theta\{u(t)\} \\ \Theta\{y(t)\} = C\Theta\{x(t)\} + D\Theta\{u(t)\} \end{cases} \quad (3.45)$$

Desenvolvendo as operações e aplicando a relação (3.42) resulta em

$$\Theta\{S_t\} : \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{\Omega(\theta)} (A\mathbf{x}(\theta) + B\mathbf{u}(\theta)) \\ \mathbf{y}(\theta) = C\mathbf{x}(\theta) + D\mathbf{u}(\theta) \end{cases} \quad (3.46)$$

O procedimento inverso pode ser realizado para representar o sistema S_θ no domínio do tempo, neste caso basta aplicar o operador $\Theta^{-1}\{\cdot\}$ nos termos do sistema:

$$\Theta^{-1}\{S_\theta\} : \begin{cases} \Theta^{-1}\left\{\frac{d\mathbf{x}(\theta)}{d\theta}\right\} = A\Theta^{-1}\{\mathbf{x}(\theta)\} + B\Theta^{-1}\{\mathbf{u}(\theta)\} \\ \Theta^{-1}\{\mathbf{y}(\theta)\} = C\Theta^{-1}\{\mathbf{x}(\theta)\} + D\Theta^{-1}\{\mathbf{u}(\theta)\} \end{cases} \quad (3.47)$$

Desenvolvendo as transformações e aplicando a relação (3.43) resulta em

$$\Theta^{-1}\{S_\theta\} : \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \Omega(t)(Ax(t) + Bu(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.48)$$

É importante notar que um sistema linear em um domínio é equivalente a um sistema não-linear no outro domínio, isto por causa da multiplicação/divisão da função Ω conforme demonstrado.

3.2.7 Transformação de Sistemas com Atraso de Transporte

Considere agora o um sistema de atraso de transporte variante no tempo descrito na forma

$$y(t) = u(t - T(t)) \quad (3.49)$$

Com base na definição da transformação Θ segue que

$$\Theta\{y(t)\} = \Theta\{u(t - T(t))\} \quad \therefore \quad \mathbf{y}(\theta) = \mathbf{u}(\theta - T_\theta) . \quad (3.50)$$

Por consequência da definição da transformação Θ , note que o deslocamento variante no tempo $T(t)$ é equivalente a um deslocamento constante T_θ no domínio- θ .

Esta mesma formulação pode ser incorporada para sistemas sujeitos a atraso de transporte nos estados. Considere a redefinição dos sistemas S_t e S_θ conforme:

$$S_t : \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + A_d x(t - T(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.51)$$

$$S_\theta : \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(\theta)}{d\theta} = A\mathbf{x}(\theta) + B\mathbf{u}(\theta) + A_d\mathbf{x}(\theta - T_\theta) \\ \mathbf{y}(\theta) = C\mathbf{x}(\theta) + D\mathbf{u}(\theta) \end{cases} \quad (3.52)$$

Aplicando a transformação direta Θ em S_t e a transformação inversa Θ^{-1} em S_θ resulta nas seguintes representações:

$$\Theta\{S_t\} : \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{\Omega(\theta)}(A\mathbf{x}(\theta) + B\mathbf{u}(\theta) + A_d\mathbf{x}(\theta - T_\theta)) \\ \mathbf{y}(\theta) = C\mathbf{x}(\theta) + D\mathbf{u}(\theta) \end{cases} \quad (3.53)$$

$$\Theta^{-1}\{S_\theta\} : \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \Omega(t)(Ax(t) + Bu(t) + A_dx(t - T(t))) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.54)$$

A Tabela 1, ao final da seção, organiza os principais pares de relações entre os domínios t e θ .

3.2.8 Transformada de Laplace no domínio- θ

Com base na definição tradicional da Transformada de Laplace, é proposta na sequência a definição de uma Transformada de Laplace para o domínio- θ . Conforme foi visto anteriormente, certos sistemas não-lineares no domínio do tempo podem ser representados de forma linear no domínio- θ . A Transformada de Laplace definida para o domínio- θ torna-se relevante para estes sistemas, dado que a Transformada de Laplace original não pode ser aplicada nestes casos.

Considere primeiramente a seguinte definição original da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \quad (3.55)$$

onde $s \in \mathbb{C}$ é um número complexo na forma $s = \sigma + j\omega$. De maneira análoga é proposta a seguinte definição

$$\mathcal{L}_\theta\{\mathbf{f}(\theta)\} = \mathbf{F}(s_\theta) = \int_0^\infty \mathbf{f}(\theta)e^{-s_\theta\theta} d\theta \quad (3.56)$$

onde $s_\theta \in \mathbb{C}$ é um número complexo na forma $s_\theta = \sigma_\theta + j\omega_\theta$. Define-se aqui também ω_θ como a frequência- θ .

Desta forma, as mesmas propriedades da Transformada de Laplace original (3.55) devem ser válidas para a proposta em (3.56). Aqui destaca-se as propriedades de diferenciação e de deslocamento no tempo:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s), \quad \mathcal{L}_\theta\left\{\frac{d\mathbf{f}(\theta)}{d\theta}\right\} = s_\theta\mathbf{F}(s_\theta). \quad (3.57)$$

$$\mathcal{L}\{f(t - a)\} = e^{-sa}F(s), \quad \mathcal{L}_\theta\{\mathbf{f}(\theta - a)\} = e^{-s_\theta a}\mathbf{F}(s_\theta), \quad a \text{ constante.} \quad (3.58)$$

Para visualizar a utilidade da Transformada de Laplace no domínio- θ observe a Tabela 2 que apresenta um mapa das principais relações entre os domínios s , t , θ e s_θ . Note que o termo não-linear $\dot{f}(t)/\Omega(t)$ não poderia ser tratado pela Transformada de Laplace

Tabela 1 – Pares de relações importantes entre os domínios t e θ .

Domínio t	Domínio θ
$f(t)$	$\mathbf{f}(\theta)$
$f(t) = f(t - T(t)) \forall t \geq T_0$	$\mathbf{f}(\theta) = \mathbf{f}(\theta - T_\theta) \forall \theta \geq T_\theta$
$\theta(t)$	$\mathbf{t}(\theta)$
$\theta(t) - \theta(t - T(t)) = T_\theta$	$\mathbf{t}(\theta) - \mathbf{t}(\theta - T_\theta) = \mathbf{T}(\theta)$
$a f(t) + b g(t)$	$a \mathbf{f}(\theta) + b \mathbf{g}(\theta)$
$\Omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$	$\Omega(\theta) = \frac{d\theta}{d\mathbf{t}(\theta)}$
$\frac{df(t)}{dt}$	$\Omega(\theta) \frac{d\mathbf{f}(\theta)}{d\theta}$
$\frac{1}{\Omega(t)} \frac{df(t)}{dt}$	$\frac{d\mathbf{f}(\theta)}{d\theta}$
$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$	$\frac{d\mathbf{x}(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{\Omega(\theta)} (A \mathbf{x}(\theta) + B \mathbf{u}(\theta))$
$\frac{dx(t)}{dt} = \Omega(t) (Ax(t) + Bu(t))$	$\frac{d\mathbf{x}(\theta)}{d\theta} = A \mathbf{x}(\theta) + B \mathbf{u}(\theta)$
$y(t) = Cx(t) + Du(t)$	$\mathbf{y}(\theta) = C \mathbf{x}(\theta) + D \mathbf{u}(\theta)$
$y(t) = u(t - T(t))$	$\mathbf{y}(\theta) = \mathbf{u}(\theta - T_\theta)$

Tabela 2 – Relações importantes entre os domínios s , t e θ e s_θ . O símbolo “–” denota a inexistência de uma representação.

Domínio s	Domínio t	Domínio θ	Domínio s_θ
$F(s)$	$f(t)$	$\mathbf{f}(\theta)$	$\mathbf{F}(s_\theta)$
$s f(s)$	$\frac{df(t)}{dt}$	$\Omega(\theta) \frac{d\mathbf{f}(\theta)}{d\theta}$	–
–	$\frac{1}{\Omega(t)} \frac{df(t)}{dt}$	$\frac{d\mathbf{f}(\theta)}{d\theta}$	$s_\theta \mathbf{F}(s_\theta)$
–	$f(t - T(t))$	$\mathbf{f}(\theta - T_\theta)$	$e^{-s_\theta T_\theta} \mathbf{F}(s_\theta)$

original. Contudo, pela Transformada de Laplace em relação ao domínio- θ é possível obter a representação em frequência. Observe também que o sinal com deslocamento variante no tempo $T(t)$ também não admite uma representação em frequência na forma tradicional. Já no domínio- θ , o deslocamento passa a ser constante, permitindo assim aplicação da

Transformada de Laplace neste domínio.

3.3 Proposta do Trabalho

De forma a utilizar o Princípio do Modelo Interno para comprovar o seguimento assintótico de sinais de referência $r(t)$ e/ou a rejeição assintótica de sinais de distúrbio $d(t)$ de período variante no tempo é proposto o emprego da metodologia de transformação de domínios descrita anteriormente.

Observe a definição original do problema, onde os sinais $r(t)$ e $d(t)$ atendem a propriedade (3.4). Transformando estes sinais para o domínio- θ segue que

$$\mathbf{r}(\theta) = \mathbf{r}(\theta - T_\theta), \quad \mathbf{d}(\theta) = \mathbf{d}(\theta - T_\theta), \quad \forall \theta \geq T_\theta. \quad (3.59)$$

Supõe-se aqui que o período dos sinais T_θ no domínio- θ é conhecido e que a função $\theta(t)$ que mapeia os sinais de volta para o domínio do tempo está disponível em tempo-real para a implementação do controle. Na seção seguinte será apresentada uma forma sistemática de encontrar esta função $\theta(t)$ no contexto de aplicações práticas.

O próximo passo é verificar a localidade do polos destes sinais no plano s_θ . Para isso, pode-se realizar expansão em Série de Fourier conforme

$$\mathbf{r}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{r\theta}(n) e^{jn\omega_{0\theta}}, \quad \mathbf{d}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{d\theta}(n) e^{jn\omega_{0\theta}}, \quad (3.60)$$

onde $\omega_{0\theta} = 2\pi/T_\theta$ denota a frequência- θ fundamental dos sinais e $c_{r\theta}(n)$, $c_{d\theta}(n)$ representam as componentes do espectro em frequência- θ dos sinais, calculadas a partir de:

$$c_{r\theta}(n) = \int_0^{T_\theta} \mathbf{r}(\theta) e^{-jn\omega_{0\theta}} d\theta, \quad c_{d\theta}(n) = \int_0^{T_\theta} \mathbf{d}(\theta) e^{-jn\omega_{0\theta}} d\theta. \quad (3.61)$$

Aplicando a Transformada de Laplace em relação a θ para os sinais (3.60) resulta:

$$\mathbf{R}(s_\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_{r\theta}(n)}{s_\theta - jn\omega_{0\theta}}, \quad \mathbf{D}(s_\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_{d\theta}(n)}{s_\theta - jn\omega_{0\theta}}. \quad (3.62)$$

Então fica claro que $\mathbf{R}(s_\theta)$ e $\mathbf{D}(s_\theta)$ possuem infinitos polos complexos localizados em

$$s_\theta = jn\omega_{0\theta} = jn \frac{2\pi}{T_\theta} \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.63)$$

Deixe agora $\mathbf{Y}_c(\theta) \in \mathbb{R}$ representar a saída de um controlador com função de transferência $\mathbf{G}_c(s_\theta) \in \mathbb{C}$, ou seja:

$$\mathbf{Y}_c(s_\theta) = \mathbf{G}_c(s_\theta) \mathbf{E}(s_\theta). \quad (3.64)$$

Conforme o PMI, $\mathbf{G}_c(s_\theta)$ deve conter os modos (3.63) para garantir seguimento e/ou rejeição dos sinais (assumindo a estabilidade em malha-fechada do sistema). Neste contexto

podem ser enquadradas as metodologias tradicionais de Controle Ressonante e Repetitivo, porém definidos no domínio- θ .

A proposta final entretanto é a definição da dinâmica dos controladores no domínio do tempo. Para atingir esta meta, é proposta a transformação da dinâmica dos controladores definidos no domínio- θ para o domínio do tempo, utilizando as relações desenvolvidas anteriormente. Para compreender melhor esta proposta, considere que este controlador $\mathbf{G}_c(s_\theta)$ possa ser realizado no espaço de estados do domínio- θ na forma²

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c(\theta) &= A_\theta \mathbf{x}_c(\theta) + B_\theta \mathbf{e}(\theta) + A_{\theta\tau} \mathbf{x}_c(\theta - T_\theta) + B_{\theta\tau} \mathbf{e}(\theta - T_\theta) \\ \mathbf{y}_c(\theta) &= C_\theta \mathbf{x}_c(\theta) \end{cases} \quad (3.65)$$

onde $\mathbf{x}_c(\theta) \in \mathbb{R}^{n_c}$ é o vetor de estados do controlador e n_c é a ordem do controlador. As matrizes $A_\theta \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $A_{\theta\tau} \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_\theta \in \mathbb{R}^{n_c \times 1}$, $B_{\theta\tau} \in \mathbb{R}^{n_c \times 1}$ e $C_\theta \in \mathbb{R}^{1 \times n_c}$ são constantes. Analisando a Tabela 1, o mesmo controlador (3.65) pode ser representado para domínio do tempo conforme

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) &= \Omega(t) \left(A_\theta x_c(t) + B_\theta e(t) + A_{\theta\tau} x_c(t - T(t)) + B_{\theta\tau} e(t - T(t)) \right) \\ y_c(t) &= C_\theta x_c(t) \end{cases} \quad (3.66)$$

onde atraso de transporte variante $T(t)$ no modelo (3.66) deve respeitar a relação

$$\theta(t) - \theta(t - T(t)) = T_\theta . \quad (3.67)$$

para atender o Teorema 3.2.

Lembre que o sinal $\theta(t)$ é responsável pelo mapeamento entre os domínios e $\Omega(t) = \dot{\theta}(t)$ é a sua derivada. Daqui para frente, $\theta(t)$ e $\Omega(t)$ serão denominados de “sinais de transformação” visto que a menção a respeito destes será recorrente na sequência do texto. Além disso, os controladores resultantes desta operação de mudança serão denominados de Controladores Transformados. Na sequência do trabalho estão dispostos os Capítulos 4 e 5 que tratam respectivamente do Controlador Ressonante Transformado e do Controlador Repetitivo Transformado.

3.4 Aplicabilidade do Método

Até o momento foi apresentada uma metodologia para definição de controladores no domínio- θ e as relações que mapeiam este controlador para o domínio tempo. Resta porém relatar como identificar o importante sinal de transformação $\theta(t)$ no contexto das aplicações, bem como os requisitos necessários para validade do método. Esta seção é dedicada para tratar desta questão.

² Para simplificar a notação, segue que $\dot{\mathbf{x}}(\theta)$ denota a derivada em relação ao domínio- θ , isto é, $d\mathbf{x}(\theta)/d\theta$. Observe que a derivada tradicional em relação ao domínio do tempo será mantida como $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$, ou seja, sem a demarcação em negrito no sinal.

O método proposto pode ser empregado de forma sistemática para a classe de aplicações que satisfazem as seguintes condições listadas na sequência.

- Os sinais de referência e distúrbio podem ser expressos na forma

$$r(t) = p_r(\phi(t)) , \quad d(t) = p_d(\phi(t)) . \quad (3.68)$$

- As funções $p_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $p_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são periódicas de mesmo período T_p , cujo valor é contante e conhecido.
- Os sinais $\phi(t)$ e sua derivada $\dot{\phi}(t)$ estão disponíveis em tempo-real para todo $t \geq 0$.
- O sinal $\phi(t)$ é estritamente crescente, ou seja, $\dot{\phi}(t) > 0$ para todo $t \geq 0$.

Caso estes critérios forem satisfeitos, é possível aplicar o método sistemático apresentado para escolher a funções de transformação. Neste caso, é suficiente o conhecimento apenas da função $\theta(t)$ (e sua derivada), não havendo a necessidade de explicitar $\mathbf{t}(\theta)$ pois este não faz parte da formulação proposta.

Conforme o Teorema 3.3, segue que $\theta(t)$ pode ser escolhido como

$$\theta(t) = \varrho \phi(t) \quad \therefore \quad \Omega(t) = \varrho \dot{\phi}(t) , \quad (3.69)$$

para qualquer constante positiva ϱ . Assim os sinais $\mathbf{r}(\theta)$ e $\mathbf{d}(\theta)$ deverão possuir um período constante de $T_\theta = \varrho T_p$.

Conforme já demonstrado na Subseção 3.2.3, a Transformada- Θ para sinais $r(t)$ e $d(t)$ pertencentes a esta classe resulta na seguinte forma:

$$\mathbf{r}(\theta) = p_r(\varrho^{-1} \theta) , \quad \mathbf{d}(\theta) = p_d(\varrho^{-1} \theta) , \quad (3.70)$$

Aplicando a função de transformação inversa $\theta(t) = \varrho \phi(t)$ é fácil verificar que a representação retorna para forma original:

$$\Theta^{-1}\{p_r(\varrho^{-1} \theta)\} = p_r(\phi(t)) = r(t) , \quad \Theta^{-1}\{p_d(\varrho^{-1} \theta)\} = p_d(\phi(t)) = d(t) . \quad (3.71)$$

A escolha do escalar ϱ fica a critério do projetista. Sugere-se escolha de ϱ para que T_θ seja sempre 2π , isto é: $\varrho = 2\pi/T_p$. Em grande parte das aplicações as funções p_r e p_d são trigonométricas de período 2π , nestes casos é conveniente deixar $\varrho = 1$.

3.4.1 Exemplo de Aplicação 1: Máquinas Rotativas

Considere uma máquina rotativa (WIT; PRALY, 2000) onde o estado $x_0(t)$ denota sua posição angular e o estado $x_1(t)$ a sua velocidade angular, isto é $\dot{x}_0(t) = x_1(t)$. Suponha

que este sistema está sujeito a uma perturbação dependente da sua posição angular na forma

$$d(t) = p_d(x_0(t)) , \quad (3.72)$$

onde p_d é uma função periódica com período fixo de 2π (isto é, uma revolução em radianos). Observe que $d(t)$ irá apresentar período variante no tempo dependendo da trajetória no tempo de $x_0(t)$.

Com base no procedimento sistemático proposto anteriormente, segue que $\phi(t) = x_0(t)$ e $\dot{\phi}(t) = x_1(t)$. Então considerando $\varrho = 1$ temos que a função de transformação $\theta(t)$ representa simplesmente a posição angular do motor:

$$\theta(t) = x_0(t) . \quad (3.73)$$

Por sua vez, a função $\Omega(t)$ irá representar a velocidade angular do motor

$$\Omega(t) = \dot{\theta}(t) = x_1(t) . \quad (3.74)$$

Desta forma o sinal distúrbio pode ser representado no domínio- θ conforme

$$\mathbf{f}(\theta) = p_d(\theta) \quad (3.75)$$

com período $T_\theta = 2\pi$ e a função selecionada $\theta(t) = x_0(t)$ retorna a representação do sinal para a forma original.

Note contudo neste exemplo que $x_0(t)$ deve ser assumido estritamente crescente. Esta suposição é válida se a velocidade angular $x_1(t)$ do motor for sempre positiva, isto é, a máquina não inverte o sentido de rotação.

3.4.2 Exemplo de Aplicação 2: Inversor de Frequência Variável

Considere um sistema inversor de frequência *PWM* de fase única (SALTON et al., 2013b) onde deseja-se obter na saída uma forma de onda senoidal com frequência fundamental variável $f_o(t)$ (em Hz) a ser imposta em tempo-real pelo operador do sistema. O sinal de referência no domínio do tempo assume a forma

$$r(t) = \text{sen}(\phi(t)) , \quad (3.76)$$

onde $\phi(t)$ é computado pela integração de

$$\dot{\phi}(t) = 2\pi f_o(t) . \quad (3.77)$$

Neste caso pode-se escolher $\theta(t) = \varrho \phi(t)$ e $\Omega(t) = \varrho 2\pi f_o(t)$ para qualquer $\varrho > 0$. Deixando novamente $\varrho = 1$ segue que o sinal de referência pode ser representado no domínio- θ como

$$\mathbf{f}(\theta) = \text{sen}(\theta) , \quad (3.78)$$

onde o período no domínio- θ é $T_\theta = 2\pi$.

3.5 Comentários Finais

Este capítulo apresentou a contribuição central deste trabalho que consiste em uma metodologia para construção de Controladores Transformados para o tratamento de sinais de período variante no tempo. Na sequência do texto, esta ideia é explorada para a definição dos Controladores Ressonante e Repetitivo Transformados, nos respectivos Capítulos 4 e 5.

É possível comparar a metodologia proposta com algumas técnicas de tratamento de sinais de período variante encontradas na literatura. Destaca-se aqui o método de amostragem de controladores em relação à posição angular para máquinas rotativas (CHEN; CHIU, 2008). Esta técnica pode ser considerada como um caso particular da metodologia proposta quando utilizada para esta classe de aplicações, conforme mostrado na Subseção 3.4.1. Entretanto, a metodologia proposta diferencia-se por oferecer um meio de transportar a representação da dinâmica do controlador para o domínio do tempo, evitando assim a necessidade de realizar implementação e projeto do sistema no domínio da posição angular. Na literatura também são encontrados os Controladores Repetitivos de Atraso Variante (YAO; TSAI; YAMAMOTO, 2013; MERRY et al., 2011; CHEN et al., 2013) que consistem na alteração do retardo temporal do Controle Repetitivo de acordo com o período dos sinais. Estes controladores, contudo, não apresentam uma representação no domínio da frequência por causa do atraso de transporte variante no tempo (conforme demonstrado na Tabela 2). Em contrapartida, a metodologia proposta mostra que é possível encontrar uma resposta em frequência- θ para sistemas com atraso de transporte variante no tempo, permitindo assim a clara associação com o PMI.

4 Controlador Ressonante Transformado

Este capítulo apresenta o desenvolvimento da primeira estratégia de controle proposta neste trabalho: o Controlador Ressonante Transformado. Primeiramente será realizada a definição do controlador no domínio da frequência- θ , para após formular a dinâmica equivalente no domínio do tempo. Posteriormente está organizada um metodologia sistemática para síntese robusta do controlador. Ao fim do capítulo são mostrados exemplos numéricos para demonstração e avaliação da proposta.

4.1 Definição do Controlador no Domínio da Frequência- θ

A função de transferência do Controlador Ressonante no domínio da frequência- θ pode ser definida da seguinte maneira

$$\mathbf{G}_r(s_\theta) = \frac{\mathbf{Y}_r(s_\theta)}{\mathbf{E}(s_\theta)} = k_{r\theta} \frac{\omega_{r\theta}^2}{s_\theta^2 + \omega_{r\theta}^2}, \quad (4.1)$$

onde $\omega_{r\theta}$ é frequência- θ de ressonância e $k_{r\theta}$ é um ganho positivo qualquer (será considerado $k_{r\theta} = 1$ como o valor padrão). Dado que este controlador apresenta polos em $\pm j\omega_{r\theta}$, basta sintonizar $\omega_{r\theta}$ igual à frequência- θ fundamental dos sinais $\omega_{0\theta}$, isto é:

$$\omega_{r\theta} = \omega_{0\theta} = \frac{2\pi}{T_\theta}, \quad (4.2)$$

No caso particular em que $T_\theta = 2\pi$, verifica-se que $\omega_{r\theta} = \omega_{0\theta} = 1$.

No espaço de estados, este controlador pode ser realizado conforme:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_r(\theta) &= A_{r\theta} \mathbf{x}_r(\theta) + B_{r\theta} \mathbf{e}(\theta) \\ \mathbf{y}_r(\theta) &= C_{r\theta} \mathbf{x}_r(\theta) \end{cases}, \quad (4.3)$$

sendo $x_r \in \mathbb{R}^2$ o vetor de estados do controlador e $y_r \in \mathbb{R}$ a saída do controlador. As matrizes $A_{r\theta} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B_{r\theta} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $C_{r\theta} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ são constante e construídas de acordo com:

$$A_{r\theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{r\theta} \\ \omega_{r\theta} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{r\theta} = \begin{bmatrix} k_{r\theta} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{r\theta} = [0 \quad \omega_{r\theta}]. \quad (4.4)$$

Por sua vez, a função de transferência do Controlador Ressonante Múltiplo apresenta a seguinte estrutura no domínio da frequência- θ :

$$\mathbf{G}_R(s_\theta) = \frac{\mathbf{Y}_R(s_\theta)}{\mathbf{E}(s_\theta)} = k_{r\theta} \sum_{n=1}^{n_h} \frac{(n\omega_{r\theta})^2}{s_\theta^2 + (n\omega_{r\theta})^2}, \quad (4.5)$$

onde n_h representa o número de modos harmônicos. Este controlador pode ser realizado no espaço de estados pela estrutura

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_R(\theta) = A_{R\theta} \mathbf{x}_R(\theta) + B_{R\theta} \mathbf{e}(\theta) \\ \mathbf{y}_R(\theta) = C_{R\theta} \mathbf{x}_R(\theta) \end{cases}, \quad (4.6)$$

onde $x_R \in \mathbb{R}^{2n_h}$ e $y_R \in \mathbb{R}$. Agora, as matrizes $A_{R\theta} \in \mathbb{R}^{2n_h \times 2n_h}$, $B_{R\theta} \in \mathbb{R}^{2n_h \times 1}$, $C_{R\theta} \in \mathbb{R}^{1 \times 2n_h}$ são organizadas pela seguinte associação:

$$A_{R\theta} = \text{diag} \{ A_{r\theta}, 2A_{r\theta}, \dots, n_h A_{r\theta} \},$$

$$B_{R\theta} = \begin{bmatrix} B_{r\theta} \\ B_{r\theta} \\ \vdots \\ B_{r\theta} \end{bmatrix}, \quad C_{R\theta} = [C_{r\theta} \quad 2C_{r\theta} \quad \dots \quad n_h C_{r\theta}]. \quad (4.7)$$

onde $A_{r\theta}$ e $B_{r\theta}$ $C_{r\theta}$ seguem a mesma definição em (4.4).

4.2 Transformação do Controlador para o Domínio do Tempo

Conforme a teoria de mudança de domínio, detalhada na Seção 3.2, é possível transportar a representação dos controladores definidos no domínio- θ para o domínio do tempo, sem alterar a característica dinâmica. Aplicando a Transformada- Θ inversa no controlador (4.3) resulta:

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = \Omega(t) (A_{r\theta} x_r(t) + B_{r\theta} e(t)) \\ y_r(t) = C_{r\theta} x_r(t) \end{cases}. \quad (4.8)$$

Da mesma forma, aplicando a Transformada- Θ inversa no controlador (4.6) produz:

$$\begin{cases} \dot{x}_R(t) = \Omega(t) (A_{R\theta} x_R(t) + B_{R\theta} e(t)) \\ y_R(t) = C_{R\theta} x_R(t) \end{cases} \quad (4.9)$$

Esta arquitetura de controlador será denominada Controlador Ressonante Transformado, pois representa o transporte da dinâmica do domínio- θ para o domínio do tempo.

4.3 Adição do Integrador

Para contemplar a rejeição/seguimento de componentes DC dos sinais é necessário adicionar um polo na origem do semi-plano complexo, visto que o Controlador Ressonante não apresenta esta característica. Baseado nesta observação, será adicionado um estado integrador ao modelo do controlador proposto.

Sabe-se que um integrador apresenta a função de transferência

$$G_I(s) = \frac{Y_I(s)}{E(s)} = \frac{1}{s}, \quad (4.10)$$

e que esta dinâmica é implementada no espaço de estados por $\dot{x}_I(t) = e(t)$, $y_I(t) = x_I(t)$. Para incorporar esta característica ao Controlador Ressonante Transformado é definida a forma final do controlador proposto

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c(\Omega(t)) x_c(t) + B_c(\Omega(t)) e(t) \\ y_c(t) = C_c x_c(t) \end{cases}, \quad x_c(t) = \begin{bmatrix} x_I(t) \\ x_R(t) \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

onde $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$, ($n_c = 1 + 2n_h$) e $y_c \in \mathbb{R}^2$. As matrizes estendidas $A_c(\Omega) \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$ e $B_c(\Omega) \in \mathbb{R}^{n_c \times 1}$ são organizadas por

$$A_c(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times 2n_h} \\ \star & \Omega A_{R\theta} \end{bmatrix}, \quad B_c(\Omega) = \begin{bmatrix} 1 \\ \Omega B_{R\theta} \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times 2n_h} \\ 0 & C_{R\theta} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

4.4 Metodologia de Síntese Robusta

O objetivo desta seção é apresentar uma metodologia sistemática de síntese robusta de uma lei de realimentação de estados considerando o Controlador Ressonante Transformado (com n_h modos harmônicos) aplicado para uma planta conforme descrita na Seção 3.1. Para isso, primeiramente será apresentada a representação do Controlador Ressonante Transformado na forma politópica. Após será organizado o modelo aumentado do sistema, combinando a dinâmica da planta com a dinâmica do controlador. Por fim, será apresentada uma metodologia de síntese robusta \mathcal{H}_2 baseada em *LMIs*, tal como já demonstrado no capítulo de preliminares.

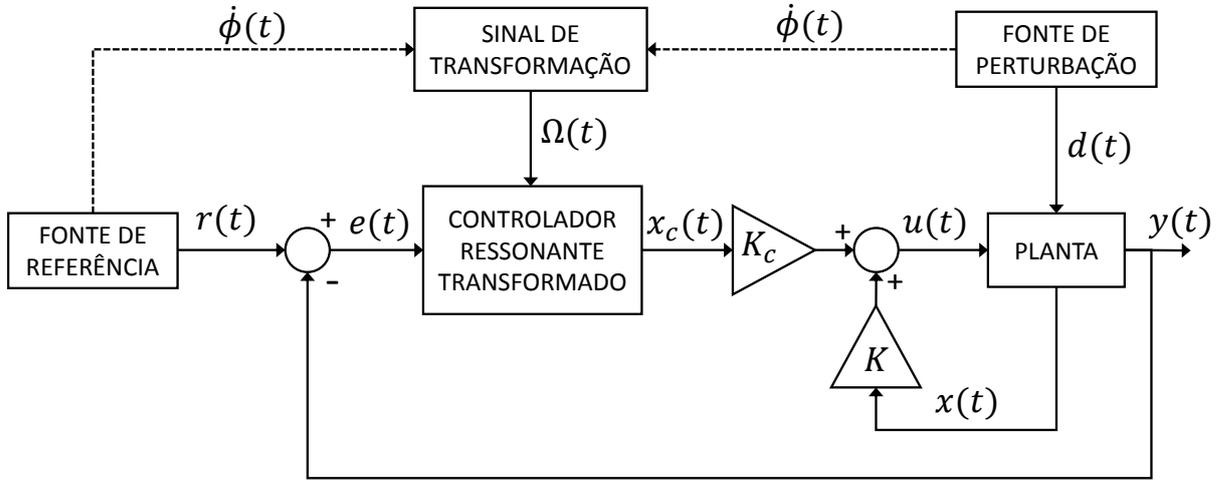
A lei de controle a ser considerada é

$$u(t) = K x(t) + K_c x_c(t), \quad (4.13)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é matriz de ganhos de realimentação da planta e $K_c \in \mathbb{R}^{m \times 2n_h}$ matriz de ganhos de realimentação do controlador. O objetivo portanto será determinar de forma robusta os valores de K e K_c tal que o sistema em malha-fechada seja assintoticamente estável e que atenda um critério de desempenho transitório na forma \mathcal{H}_2 . O leitor é convidado a visualizar o digrama de blocos na Figura 10 que apresenta a arquitetura geral do sistema de controle proposto.

É importante ressaltar que será considerada a realimentação dos estados $x_c(t)$ do controlador, ao invés da realimentação da saída $y_c(t)$ do controlador. Esta escolha tem o intuito de simplificar a metodologia de síntese. Apesar de existirem na literatura métodos para o tratamento do problema de realimentação de saída (SYRMOS et al., 1997), estes nem sempre podem ser resolvidos por otimização convexa.

Figura 10 – Digrama de blocos da malha-fechada do sistema com o Controlador Ressonante Transformado.



4.4.1 Representação Politópica do Controlador

Para tratar o parâmetro variante no tempo $\Omega(t) = \varrho \dot{\phi}(t)$ – presente na dinâmica do Controlador Ressonante Transformado – é sugerido o uso da modelagem politópica. Para isto deve-se considerar que $\Omega(t)$ pertence a um politopo de valores admissíveis, isto é

$$\Omega \in \mathcal{B}_\Omega = [\Omega_1, \Omega_2] \subset \mathbb{R}, \quad (4.14)$$

onde Ω_1 e Ω_2 denotam, respectivamente, o valor mínimo e valor máximo de $\Omega(t)$ para todo $t \geq 0$.

Dado que $\Omega(t)$ está enquadrado em um politopo \mathcal{B}_Ω , pode-se representar o Controlador Ressonante Transformado na seguinte forma politópica:

$$\dot{x}_c(t) = A_c(\lambda_c) x_c(t) + B_c(\lambda_c) e(t), \quad (4.15)$$

onde $\lambda_c \in \mathcal{B}_{\lambda_c} \subset \mathbb{R}^2$ é um parâmetro incerto e o conjunto \mathcal{B}_{λ_c} é definido por:

$$\mathcal{B}_{\lambda_c} = \left\{ \lambda_{cj} : \sum_{j=1}^2 \lambda_{cj} = 1, 0 \leq \lambda_{cj} \leq 1, j = 1, 2 \right\} \subset \mathbb{R}^2. \quad (4.16)$$

As matrizes $A_c(\lambda_c)$ e $B_c(\lambda_c)$ são expressas conforme

$$\begin{bmatrix} A_c(\lambda_c) & B_c(\lambda_c) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^2 \lambda_{cj} \begin{bmatrix} A_{cj} & B_{cj} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

de tal forma que A_{cj} e B_{cj} ($j \in \{1, 2\}$) representem as matrizes variantes $A_c(\Omega)$ e $B_c(\Omega)$ avaliadas no j -ésimo vértice do politopo \mathcal{B}_Ω , ou seja:

$$A_{cj} = A_c(\Omega_j) = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times 2n_h} \\ \star & \Omega_j A_{R\theta} \end{bmatrix}, \quad B_{cj} = B_c(\Omega_j) = \begin{bmatrix} 1 \\ \Omega_j B_{R\theta} \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

4.4.2 Modelo Aumentado do Sistema

Para representar a malha-fechada do sistema, unindo a dinâmica da planta e do controlador, deve-se organizar um modelo aumentado no espaço de estados. Para esta presente formulação é considerada uma planta descrita na forma politópica conforme exposto na Seção 3.1.

Primeiramente, define-se um vetor aumentado de estados $x_a \in \mathbb{R}^{n_a}$ ($n_a = n + n_c$) e também um vetor aumentado de entradas exógenas $d_a \in \mathbb{R}^2$:

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \quad d_a(t) = \begin{bmatrix} d(t) \\ r(t) \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

A dinâmica deste sistema aumentado é descrita conforme:

$$\dot{x}_a(t) = A_a(\lambda, \lambda_c) x_a(t) + B_a(\lambda, \lambda_c) u(t) + B_{da}(\lambda, \lambda_c) d_a(t) \quad (4.20)$$

tal que as matrizes aumentadas $A_a(\lambda, \lambda_c) \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, $B_a(\lambda, \lambda_c) \in \mathbb{R}^{n_a \times m}$ e $B_{da}(\lambda, \lambda_c) \in \mathbb{R}^{n_a \times m}$ são:

$$A_a(\lambda, \lambda_c) = \begin{bmatrix} A(\lambda) & 0_{n \times n_c} \\ -B_c(\lambda_c)C & A_c(\lambda_c) \end{bmatrix}, \quad B_a(\lambda, \lambda_c) = \begin{bmatrix} B(\lambda) \\ -B_c(\lambda_c)D \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

$$B_{da}(\lambda, \lambda_c) = \begin{bmatrix} B_d(\lambda) & 0_{n \times 1} \\ -B_c(\lambda_c)D_d & B_c(\lambda_c) \end{bmatrix},$$

Observe que há a combinação do modelo politópico da planta com o modelo politópico do controlador. Contudo não ocorre a multiplicação entre os parâmetros variantes λ e λ_c , e portanto as matrizes aumentadas do sistema continuam linearmente dependentes de λ e λ_c . Com base nesta observação é possível organizar um modelo politópico aumentado do sistema conforme:

$$\dot{x}_a(t) = A_a(\lambda_a) x_a(t) + B_a(\lambda_a) u(t) + B_{da}(\lambda_a) d_a(t) \quad (4.22)$$

tal que $\lambda_a \in \mathcal{B}_{\lambda_a} \subset \mathbb{R}^{2(p+1)}$ é um parâmetro incerto aumentado e o conjunto \mathcal{B}_{λ_a} é definido como:

$$\mathcal{B}_{\lambda_a} = \left\{ \lambda_{a(i,j)} : \sum_{i=1}^{2^p} \sum_{j=1}^2 \lambda_{a(i,j)} = 1, \quad 0 \leq \lambda_{a(i,j)} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, 2^p, \quad j = 1, 2 \right\}. \quad (4.23)$$

Desta forma, as matrizes aumentadas incertas $A_a(\lambda_a)$, $B_a(\lambda_a)$ e $B_{da}(\lambda_a)$ são descritas por

$$\begin{bmatrix} A_a(\lambda_a) & B_a(\lambda_a) & B_{da}(\lambda_a) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2^p} \sum_{j=1}^2 \lambda_{a(i,j)} \begin{bmatrix} A_{a(i,j)} & B_{a(i,j)} & B_{da(i,j)} \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Na relação (4.24), as matrizes $A_{a(i,j)}$, $B_{a(i,j)}$ e $B_{da(i,j)}$, ($i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$ e $j \in \{1, 2\}$) representam todas as possíveis combinações de A_i , B_i e B_{di} com A_{c_j} e B_{c_j} para todo i e

todo j :

$$A_{a(i,j)} = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -B_{c_j}C & A_{c_j} \end{bmatrix}, \quad B_{a(i,j)} = \begin{bmatrix} B_i \\ -B_{c_j}D \end{bmatrix}, \quad B_{da(i,j)} = \begin{bmatrix} B_{di} & 0 \\ -B_{c_j}D_d & B_{c_j} \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Para finalizar a representação da malha-fechada do sistema deve-se incluir a lei de controle proposta em (4.13). Representando esta lei de controle em função do vetor de estados aumentado obtém-se:

$$u(t) = K_a x_a(t) \quad (4.26)$$

onde $K_a \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$ é matriz aumentada de ganhos de realimentação, obtida por

$$K_a = \begin{bmatrix} K & K_c \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Então a dinâmica completa do sistema em malha-fechada é dada pelo seguinte modelo:

$$\dot{x}_a(t) = \left(A_a(\lambda_a) + B_a(\lambda_a)K_a \right) x_a(t) + B_{da}(\lambda_a) d_a(t). \quad (4.28)$$

4.4.3 Critérios de Estabilidade e Desempenho Robusto

O primeiro passo para obter uma condição de estabilidade para o sistema (4.28) é tratar o vetor de entradas exógenas $d_a(t)$. Visto que a estabilidade assintótica interna de sistemas lineares também implica na estabilidade *BIBO* (*Bounded Input-Bounded Output*) (CHEN, 1999), então o vetor de entradas $d_a(t)$ pode ser descartado (sem perda de generalidade) para a solução do problema de síntese. A mesma ideia foi empregada em (SALTON et al., 2013a). Segue então que a representação considerada do sistema será:

$$\dot{x}_a(t) = \left(A_a(\lambda_a) + B_a(\lambda_a)K_a \right) x_a(t). \quad (4.29)$$

Adicionalmente será incluída uma saída $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ ($n_z = n_a + m$) para modelagem de um critério de desempenho \mathcal{H}_2 para o sistema em malha-fechada:

$$z(t) = C_z x_a(t) + D_z u(t). \quad (4.30)$$

Assim, define-se a função de custo da síntese como o quadrado da norma \mathcal{L}_2 desta saída de desempenho:

$$\mathcal{J}_2 = \|z(t)\|_2^2 = \int_0^\infty z^\top(t)z(t)dt. \quad (4.31)$$

É conveniente construir as matrizes $C_z \in \mathbb{R}^{n_z \times n_a}$ e $D_z \in \mathbb{R}^{n_z \times m}$ segundo

$$C_z = \begin{bmatrix} Q_z \\ 0_{m \times n_a} \end{bmatrix}, \quad D_z = \begin{bmatrix} 0_{n_a \times m} \\ R_z \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

onde $Q_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $R_z \in \mathbb{R}^{m \times m}$ são matrizes diagonais, positivas definidas e construídas conforme

$$Q_z = \text{diag}\{q_{z1}, q_{z2}, \dots, q_{zn_a}\}, \quad R_z = \text{diag}\{r_{z1}, r_{z2}, \dots, r_{zm}\}. \quad (4.33)$$

Desta forma, o escalar q_{z_i} denota a penalidade na energia do i -ésimo estado do sistema e o escalar r_{z_i} denota a penalidade na energia da i -ésima entrada de controle do sistema.

A representação dinâmica final do sistema em malha-fechada é portanto expressa conforme:

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) &= (A_a(\lambda_a) + B_a(\lambda_a)K_a) x_a(t) \\ z(t) &= (C_z + D_z K_a) x_a(t) \end{cases} . \quad (4.34)$$

Desta forma chega-se no clássico problema de síntese robusta \mathcal{H}_2 , conforme detalhado na sequência. O teorema indicado para a solução do problema está apresentado na sequência.

Problema 4.1. *Encontrar um ganho robusto K_a tal que o sistema (4.34) seja assintoticamente estável para todo $\lambda_a \in \mathcal{B}_{\lambda_a}$ e que a função de custo \mathcal{J}_2 em (4.31) seja minimizada.*

Teorema 4.1. *Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas $\hat{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e uma matriz $\hat{K}_a \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$ que satisfaçam*

$$\begin{bmatrix} \text{He} \left\{ A_{a(i,j)} \hat{P} + B_{a(i,j)} \hat{K}_a \right\} & \hat{P} C_z^\top + \hat{K}_a^\top D_z^\top \\ \star & -I \end{bmatrix} < 0 , \quad (4.35)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ \star & \hat{P} \end{bmatrix} > 0 , \quad (4.36)$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$ e todo $j \in \{1, 2\}$. Então o sistema (4.34) com $K_a = \hat{K}_a \hat{P}^{-1}$ é assintoticamente estável e função de custo \mathcal{J}_2 satisfaz

$$\mathcal{J}_2 < x_a^\top(0) X x_a(0) . \quad (4.37)$$

Demonstração. A prova é equivalente ao mostrado anteriormente no Teorema 2.9. \square

4.4.4 Passo-a-passo sistemático do projeto

Com base no Teorema 4.1 são propostos os seguintes passos para a solução do Problema 4.1:

- **Passo 1:** Obter o modelo da planta na forma politópica conforme apresentado na Seção 3.1.
- **Passo 2:** Verificar se os sinais de referência/distúrbio são representáveis na forma $r(t) = p_r(\phi(t))$, $d(t) = p_d(\phi(t))$. Identificar o período T_p de $p_r(\cdot)$ e $p_d(\cdot)$. Então definir o fator ϱ para obter o período dos sinais no domínio- θ : $T_\theta = \varrho T_p$.

- **Passo 3:** Calcular a frequência- θ de ressonância do controlador: $\omega_{r\theta} = 2\pi/T_\theta$.
- **Passo 4:** Definir os limites da garantia de estabilidade e desempenho Ω_1 e Ω_2 que engloba o conjunto de valores admissíveis do parâmetro variante $\Omega(t)$.
- **Passo 5:** Escolher o número de modos n_h do Controlador Ressonante Transformado. Recomenda-se avaliar o espectro- θ dos sinais $\mathbf{r}(\theta)$ e $\mathbf{d}(\theta)$ para realizar esta escolha.
- **Passo 6:** Organizar as matrizes (4.25) do modelo politópico aumentado do sistema.
- **Passo 7:** Definir as matrizes diagonais Q_z e R_z para formular o critério de desempenho transitório do sistema.
- **Passo 8:** Resolver o seguinte problema de otimização convexa

$$\underset{X, \hat{P}, \hat{K}}{\text{minimizar}} \text{tr}(X) \text{ sujeito a } \{ (4.35), (4.36) \}, \quad (4.38)$$

para obter a matriz de ganhos de realimentação K_a .

- **Passo 9:** Analisar o desempenho em malha-fechada do sistema com os parâmetros sintetizados. Se o erro residual relativo às frequências harmônicas dos sinais de referência/distúrbio for demasiadamente elevado, retornar ao Passo 5 e elevar o número de modos n_h .

4.5 Exemplo Numérico 1: Inversor de Frequência

Considere um sistema inversor de frequência *PWM* (*Pulse Width Modulation*) de fase única. O modelo médio desta planta (desconsiderando as características de alta-frequência) é descrito pela dinâmica (SALTON et al., 2013b):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{Y_o(t)}{C_f} x_1(t) + \frac{1}{C_f} x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{L_f} x_1(t) - \frac{R_f}{L_f} x_2(t) + \frac{1}{L_f} u(t), \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde o estado $x_1(t)$ [V] é a tensão da carga – que também representa a saída do sistema: $y(t) = x_1(t)$ – e o estado $x_2(t)$ [A] é a corrente no indutor do filtro. O parâmetro incerto/variante $Y_o(t)$ [Ω^{-1}] representa a admitância da carga, assumido limitado por $Y_{o1} \leq Y_o(t) \leq Y_{o2}$. Os parâmetros C_f , L_f e R_f são respectivamente a capacitância do filtro, a indutância do filtro e a resistência do indutor. O valor numérico destes parâmetros e suas unidades estão organizados na Tabela 3.

As matrizes do modelo da planta na forma politópica são expressas conforme

$$A_i = \begin{bmatrix} -\frac{Y_{oi}}{C_f} & \frac{1}{C_f} \\ -\frac{1}{L_f} & -\frac{R_f}{L_f} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_f} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]. \quad (4.40)$$

para $i \in \{1, 2\}$.

Tabela 3 – Parâmetros numéricos do modelo médio de um inversor de frequência *PWM* (SALTON et al., 2013b).

Parâmetro	Valor	Unidade
C_f	$5 \cdot 10^{-7}$	F
L_f	$5 \cdot 10^{-2}$	H
R_f	$8 \cdot 10^{-3}$	Ω
Y_{o1}	0	Ω^{-1}
Y_{o2}	0,2	Ω^{-1}
V_{pk}	100	V
f_{o1}	20	Hz
f_{o2}	120	Hz

O objetivo considerado nesta aplicação é regular a saída para seguir um sinal de referência $r(t)$ [V] senoidal de período variante na forma

$$r(t) = V_{pk} \text{sen}(\phi(t)), \quad (4.41)$$

tal que $\dot{\phi}(t)$ [rad/s] é dado por

$$\dot{\phi}(t) = 2\pi f_o(t) \quad (4.42)$$

onde o sinal $f_o(t)$ [Hz] representa a tensão fundamental instantânea desejada no instante t . O parâmetro V_{pk} (conforme na Tabela 3) representa a amplitude da tensão na saída.

Observe que o sinal de referência $r(t)$ já está organizado na forma convencional onde $p_r(\xi) = \text{sen}(\xi)$ e $T_p = 2\pi$ rad é o período desta função. Escolhendo $\varrho = 1$ segue que os sinais de transformação são $\theta(t) = \phi(t)$ e $\Omega(t) = \dot{\phi}(t)$. Desta forma o sinal de referência é descrito no domínio- θ por $\mathbf{r}(\theta) = \text{sen}(\theta)$, onde seu período é constante e vale $T_\theta = 2\pi$ rad e sua frequência fundamental é $\omega_{0\theta} = 2\pi/T_\theta = 1$. Portanto, a sintonia da frequência de ressonância no domínio- θ deve ser $\omega_{r\theta} = \omega_{0\theta} = 1$.

Será assumido neste exemplo que a faixa de trabalho de $f_o(t)$ é $f_{o1} \leq f_o(t) \leq f_{o2}$, para os limites descritos na Tabela 3. Assim pode-se definir os limites do conjunto $\mathcal{B}_\Omega = [\Omega_1, \Omega_2]$ conforme:

$$\Omega_1 = 2\pi \cdot 20 \text{ rad/s} = 125,6637 \text{ rad/s}, \quad \Omega_2 = 2\pi \cdot 120 \text{ rad/s} = 753,9822 \text{ rad/s}. \quad (4.43)$$

Neste exemplo sabe-se que $\mathbf{r}(\theta) = \text{sen}(\theta)$, e portanto o espectro- θ de $\mathbf{r}(\theta)$ está concentrado na frequência fundamental $\omega_{0\theta}$. Assim será considerado somente um modo harmônico $n_h = 1$. A adição de mais modos para esta aplicação seria relevante ao considerar cargas não-lineares que produzem correntes de distúrbio com elevado conteúdo harmônico na saída do sistema. Este caso não será tratado no entanto, visto que o exemplo subsequente já irá demonstrar um caso que apresenta conteúdo harmônico nos sinais.

O ganho $k_{r\theta}$ do controlador será aqui considerado unitário. Portanto, com $\omega_{r\theta}$, $k_{r\theta}$, Ω_1 e Ω_2 determinados pode-se construir as matrizes A_{cj} e B_{cj} , $j \in \{1, 2\}$, do controlador conforme (4.18). Dado que o modelo da planta também já está expresso na forma politópica, pode-se facilmente então montar as matrizes do modelo aumentado do sistema $A_{a(i,j)}$ e $B_{a(i,j)}$, conforme indicado em (4.25).

As penalidades para síntese \mathcal{H}_2 foram definidas como $R_z = 1$ (representando a penalidade na entrada de controle), $Q_z = \text{diag}\{Q_x, Q_c\}$, onde $Q_x = I_2$ (representando a penalidade nos estados da planta) e $Q_c = 10 I_3$ (representando a penalidade nos estados do controlador). Assim foi resolvido o problema de otimização expresso em (4.38) utilizando o pacote LMILAB do *software* MATLAB, resultando no ganho K_a sintetizado conforme apresentado no Apêndice 1.

Para avaliar a eficácia do controlador proposto, este será comparado com um Controlador Ressonante tradicional sintonizado na frequência nominal $f_{on} = 60$ Hz. Para implementar este Controlador Ressonante (a partir da metodologia proposta) basta considerar o sinal de transformação $\Omega(t)$ igual a uma constante nominal $\Omega_n = 2\pi f_{on} = 376,9911$ rad/s, conforme demonstrado na sequência.

Deixe ω_{rn} ser a frequência usual de ressonância do Controlador Ressonante tradicional e k_{rn} seu ganho de entrada. Deixe a dinâmica deste controlador ser expressa por $\dot{x}_r(t) = A_{rn} x_r(t) + B_{rn} e(t)$, onde A_{rn} e B_{rn} são

$$A_{rn} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{rn} \\ \omega_{rn} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{rn} = \begin{bmatrix} k_{rn} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Comparando A_{rn} e B_{rn} com $\Omega(t) A_{r\theta}$ e $\Omega(t) B_{r\theta}$ para $\Omega(t) = \Omega_n$, verifica-se que

$$\omega_{rn} = \Omega_n \omega_{r\theta}, \quad k_{rn} = \Omega_n k_{r\theta}, \quad (4.45)$$

são os parâmetros equivalentes do Controlador Ressonante tradicional. Assim, o mesmo ganho de realimentação K_a projetado pode ser utilizado para este controlador, visto que $\Omega_n \in \mathcal{B}_\Omega$.¹

É notável que neste caso a síntese de K_a poderia ser realizada desconsiderando a variação de $\Omega(t)$, reduzindo o conservadorismo para solução do problema de otimização

¹ Conforme esta demonstração, o Controlador Ressonante tradicional é um caso particular do Controlador Ressonante Transformado, quando seu sinal de transformação $\Omega(t)$ é mantido constante.

LMI. Contudo deseja-se destacar nesta análise comparativa preliminar as diferenças de desempenho de seguimento devido à dinâmica dos controladores somente. É conveniente manter, portanto, o mesmo ganho K_a entre os controladores comparados, evitando que diferentes níveis de realimentação mascare a análise comparativa. Além disso, será mostrado futuramente (nos Capítulos 6 e 7) análises comparativas entre diferentes controladores, onde a síntese será realizada independentemente em cada caso.

As simulações foram executadas no *software* MATLAB/Simulink para um tempo total de 2 s. A frequência $f_o(t)$ da tensão do inversor foi programada para partir do valor mínimo f_{o1} até o valor máximo f_{o2} , conforme a curva apresentada no topo da Figura 11. O parâmetro incerto da planta simulada foi mantido no seu valor máximo, ou seja, $Y_o(t) = Y_{o2}$.

4.5.1 Análise e Discussão dos Resultados

A Figura 11 apresenta ao topo o sinal de referência $r(t)$ que representa a tensão desejada na saída do inversor e o sinal $f_o(t)$ que denota a frequência fundamental instantânea variante no tempo de $r(t)$. Abaixo nesta mesma figura encontra-se a comparação do sinal de erro $e(t)$ entre o Controlador Ressonante tradicional e o Controlador Ressonante Transformado, além da comparação entre os sinais de controle de cada estratégia.

Percebe-se visivelmente que o Controlador Ressonante tradicional só é capaz de garantir o seguimento da referência no entorno do instante 0,8 s, quando a frequência da tensão é igual ou próxima ao valor nominal de 60 Hz. Para demais instantes, onde o período de $r(t)$ é diferente do valor nominal de sintonia, este Controlador Ressonante tradicional apresenta um erro residual na saída, sendo mais significativo quando $f_o(t) < f_{on}$. Em contrapartida, a abordagem proposta de Controle Ressonante Transformado mantém o seguimento da referência após o tempo de acomodação da dinâmica do controlador, independente da variação de $f_o(t)$.

Ao final da Figura 11 está apresentado a comparação entre os sinais de controle gerado por ambos os controladores avaliados. Neste gráfico, é difícil diferenciar visualmente as respostas, portanto foi organizada uma comparação ampliada na Figura 12 subsequente, focando a faixa de tempo de 0,4 s até 0,48 s (quando o Ressonante tradicional encontra-se fora de sincronia). Nesta última figura é possível identificar apenas uma sutil diferença entre as respostas, principalmente na fase da onda. Contudo, esta pequena diferença no sinal de controle produz uma diferença significativa no erro de seguimento $e(t)$, conforme demonstrado na Figura 11 anterior.

Figura 11 – Acima, a frequência fundamental instantânea $f_o(t)$ do sinal de referência $r(t)$. Abaixo, a comparação entre o erro $e(t)$ e do sinal de controle $u(t)$ entre o Controlador Ressonante Transformado e o tradicional.

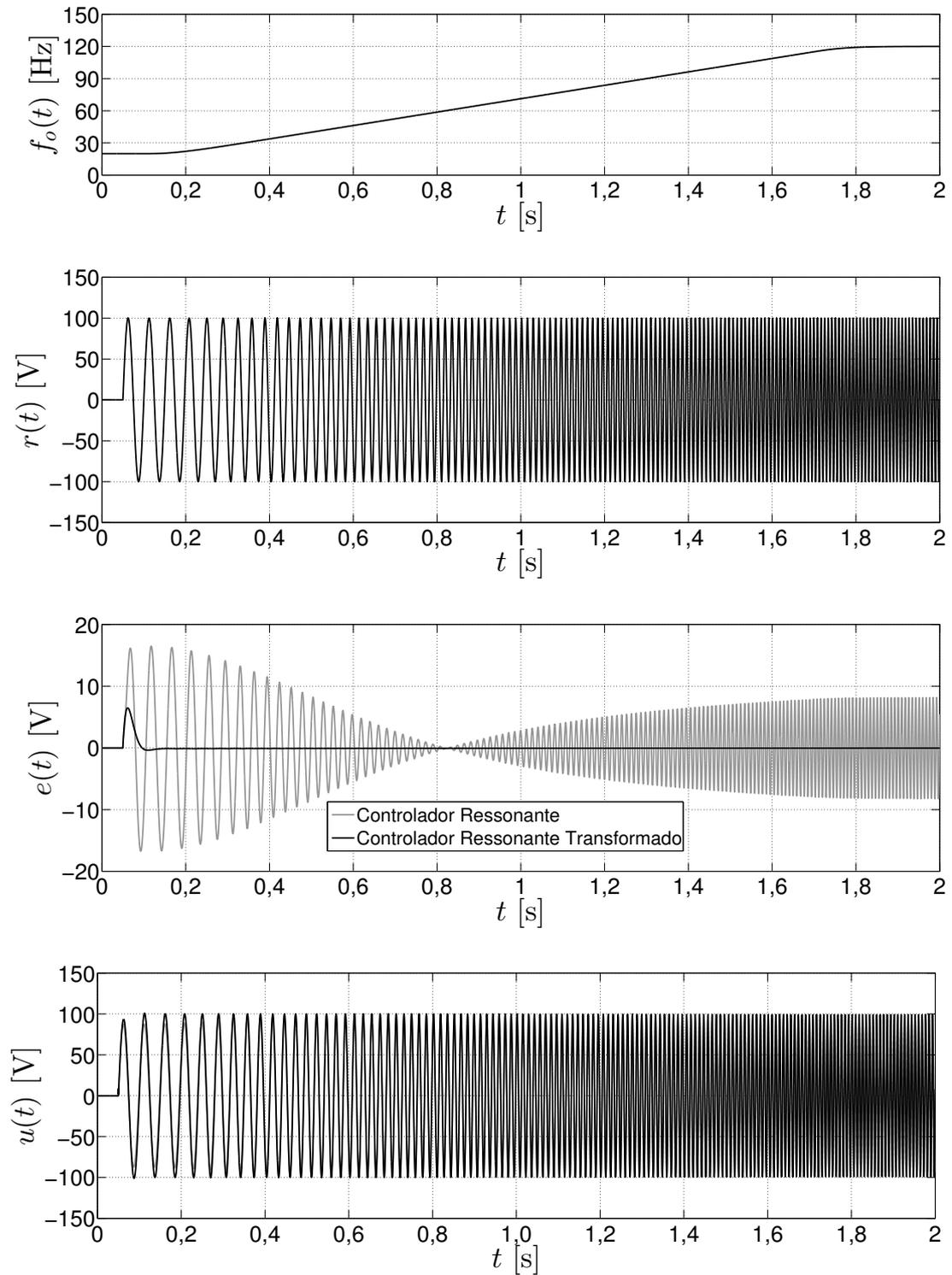
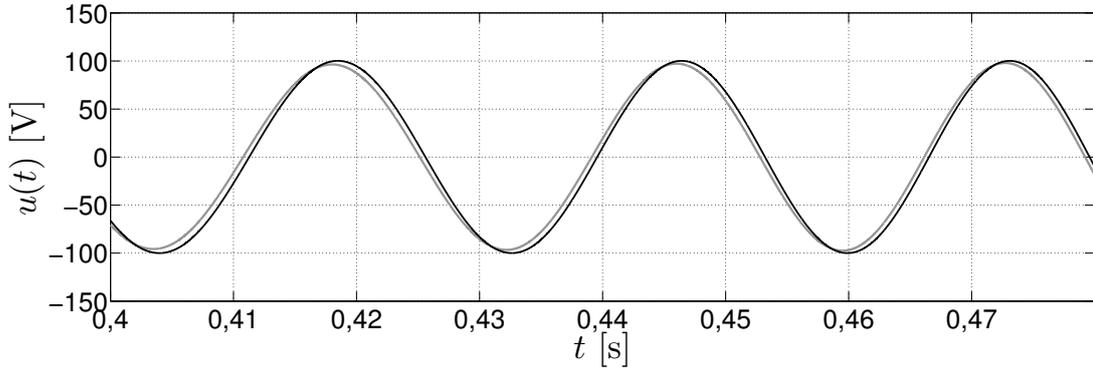


Figura 12 – Comparação amplificada do sinal de controle do instante 0,4 s até 0,48 s



4.6 Exemplo Numérico 2: Motor de Corrente Contínua

Para este exemplo, considere um motor de corrente contínua com dinâmica governada pelas equações:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{b(t)}{J_r} x_1(t) + \frac{k_t I_f}{J_r} x_2(t) + \frac{1}{J_r} d(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k_w I_f}{L_a} x_1(t) - \frac{R_a}{L_a} x_2(t) + \frac{1}{L_a} u(t).\end{aligned}\tag{4.46}$$

O estado $x_1(t)$ [rad/s] é a posição angular do eixo do motor e o estado $x_2(t)$ [A] é a corrente elétrica na armadura. O sinal de controle $u(t)$ [V] é a tensão aplicada na armadura. A entrada de perturbação $d(t)$ [N] é um torque de carga aplicado no eixo do motor. A variável controlada é a rotação do motor: $y(t) = x_1(t)$. O sinal $b(t)$ é um parâmetro incerto/variante que representa o coeficiente de atrito viscoso no eixo no motor, onde assume-se que este é limitado entre $b_1 \leq b(t) \leq b_2$. Os parâmetros restantes J_r , I_f , R_a , L_a , k_t e k_w são respectivamente o momento de inércia do rotor, a corrente de campo, a resistência da armadura, a indutância da armadura, a constante de torque e a constante contra-eletromotiva. Os valores numéricos de cada parâmetro estão organizados na Tabela 4. O modelo da planta, com incertezas na forma politópica é dado pelas matrizes

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{J_r} & \frac{k_t I_f}{J_r} \\ -\frac{k_w I_f}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{b_2}{J_r} & \frac{k_t I_f}{J_r} \\ -\frac{k_w I_f}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix}, \quad B_{d1} = B_{d2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_r} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{4.47}$$

para $i \in \{1, 2\}$.

Tabela 4 – Parâmetros numéricos do motor de corrente contínua.

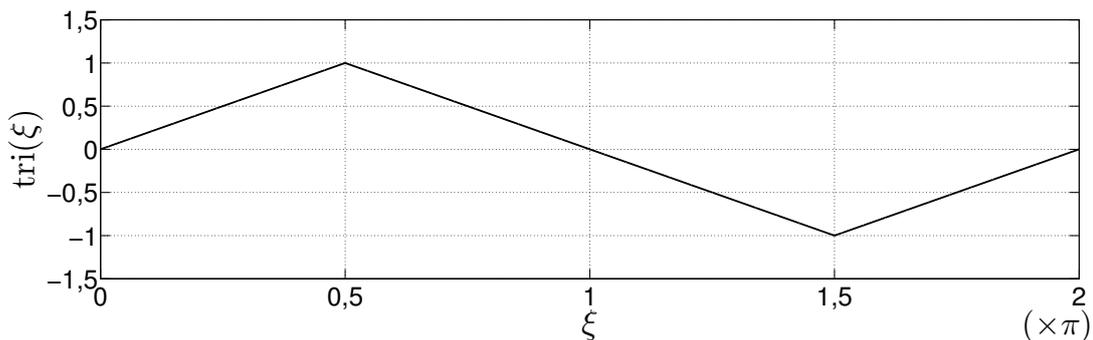
Parâmetro	Valor	Unidade
J_r	$1 \cdot 10^{-4}$	kg m ²
J_e	1	kg m ²
k_t	0,5	Nm/A
I_f	1	A
k_w	0,5	Vs/rad
R_a	1	Ω
L_a	0,17	H
b_1	$1 \cdot 10^{-3}$	kg m s/rad
b_2	$5 \cdot 10^{-3}$	kg m s/rad

Para avaliar a rejeição de perturbação periódicas, assume-se que o eixo do motor é excêntrico, produzindo um torque $d(t)$ dependente da posição angular $x_0(t)$ do motor:

$$d(t) = J_e p_d(x_0(t)) . \quad (4.48)$$

onde a constante J_e denota o momento de inércia da excentricidade. Aqui, a dinâmica do sinal $x_0(t)$ é governada pela equação diferencial $\dot{x}_0(t) = x_1(t)$. Serão avaliados dois cenários com diferentes funções de excentricidade $p_d(\xi)$. No primeiro a função é senoidal, ou seja, $p_d(\xi) = \text{sen}(\xi)$. Já no segundo será empregada uma função triangular $p_d(\xi) = \text{tri}(\xi)$ (que contém infinitas harmônicas), permitindo assim comparar Controladores Ressonantes de múltiplos modos. A definição $\text{tri}(\xi)$ está disposta na Figura 13.

Figura 13 – Definição da função $\text{tri}(\xi)$. Segue que $\text{tri}(\xi) = \text{tri}(\xi - 2\pi) \forall \xi \in \mathbb{R}$.



O sinal de perturbação, neste exemplo, é periódico de período variante no tempo desde que a trajetória $x_0(t)$ não seja linear ou que $x_1(t)$ não seja constante. Seguindo a metodologia de transformação de sinais para o domínio- θ na Subseção 3.4.1, pode-se escolher sinais de transformação $\theta(t) = \varrho x_0(t)$ e $\Omega(t) = \varrho x_1(t)$. Escolhendo $\varrho = 1$, o sinal $d(t)$ pode ser representado no domínio- θ por $\mathbf{d}(\theta) = p_d(\theta)$, onde o período é a constante $T_\theta = 2\pi$. Segue portanto que a frequência de ressonância ω_{r_θ} no domínio- θ deve ser unitária. O parâmetro arbitrário k_{r_θ} também foi mantido no valor padrão unitário.

O sinal de referência $r(t)$ neste exemplo não é necessariamente periódico pois denota a rotação do motor desejada a cada instante. Para gerar $r(t)$ será utilizado uma composição de sinais de degrau filtrados. Mas visto que o Controlador Ressonante Transformado no formato proposto apresenta um integrador, deve haver a garantia do seguimento em regime permanente de sinais de degrau de referência. Para gerar o sinal $r(t)$ foi utilizado um sinal de referência (*a priori*) $r_{deg}(t)$, construído pela seguinte definição por partes:

$$r_{deg}(t) = \begin{cases} 15 \text{ rad/s} & 0 \text{ s} \leq t < 35 \text{ s} \\ 5 \text{ rad/s} & 35 \text{ s} \leq t < 70 \text{ s} \\ 10 \text{ rad/s} & 70 \text{ s} \leq t \leq 100 \text{ s} \end{cases} \quad (4.49)$$

Por sua vez, o sinal de referência final $r(t)$ é então gerado pela filtragem de $r_{deg}(t)$ conforme

$$R(s) = \left(\frac{\omega_f}{s + \omega_f} \right)^{n_f} R_{deg}(s) , \quad (4.50)$$

onde ω_f é a frequência de corte do filtro da referência e n_f é a ordem do filtro. Foi considerado nas simulações: $\omega_f = 0,4 \text{ rad/s}$ e $n_f = 4$.

Este sinal de referência definido deve introduzir variações no período da perturbação $d(t)$ visto que $x_1(t)$ deverá variar para seguir esta referência. Será assumido aqui que o Controlador Transformado deverá garantir desempenho de rejeição para todo $x_1 \in [4, 16] \text{ rad/s}$. Assim define-se os limites $\Omega_1 = 4 \text{ rad/s}$ e $\Omega_2 = 16 \text{ rad/s}$ do conjunto $\mathcal{B}_\Omega \in [\Omega_1, \Omega_2]$ que engloba os valores admissíveis do parâmetro variante do controlador. Com base nestes limites, foi construído o modelo politópico do controlador segundo (4.18). Após foi construído o modelo aumentado do sistema conforme indicado em (4.25).

Para o cenário com $p_d(\xi)$ senoidal será incluído apenas o modo fundamental no Controlador Ressonante Transformado. Já no cenário com $p_d(\xi)$ triangular serão avaliados controladores com até oito modos harmônicos. Uma vez que o sinal triangular considerado possui simetria ímpar, foram adicionados apenas modos harmônicos ímpares neste exemplo, visto que os modos harmônicos pares não contribuem para a rejeição do distúrbio neste caso.

As penalidades para síntese \mathcal{H}_2 foram definidas como $R_z = 1$ e $Q_z = \text{diag}\{Q_x, Q_c\}$, com $Q_x = I_2$ e $Q_c = 300I_{n_c}$, lembrando que $n_c = 1 + 2n_h$. Utilizando o LMILAB para resolver o problema de otimização indicado no passo-a-passo da Subseção 4.4.4 resultou nos ganhos de realimentação K_a organizados no Apêndice 1.

Novamente o desempenho do Controlador Ressonante Transformado será comparado com a abordagem de Controle Ressonante tradicional. Este último foi implementado para a frequência nominal do motor $\Omega_n = 10 \text{ rad/s}$. Utilizando as relações de equivalência discutidas no exemplo anterior, segue que $\omega_{r_n} = \omega_{r_\theta} \Omega_n$ é a frequência de ressonância fixa

deste controlador e $k_{rn} = k_{r\theta} \Omega_n$ é o ganho na sua entrada. Desta forma, o mesmo ganho de realimentação K_a foi utilizado entre os controladores comparados.

As simulações foram executadas no *software* MATLAB/Simulink para um tempo total de 100 s. O parâmetro incerto da planta simulada foi mantido no seu valor médio, ou seja, $b(t) = (b_1 + b_2)/2$. O estado inicial da planta foi configurado como $x_1(0) = 5$ rad/s e $x_2(0) = 0,03$ A.

4.6.1 Análise e Discussão dos Resultados

Figura 14 – Comparação entre a saída $y(t)$, o sinal de erro $r(t)$ e a entrada de controle $u(t)$ no cenário com $p_d(\xi)$ senoidal.

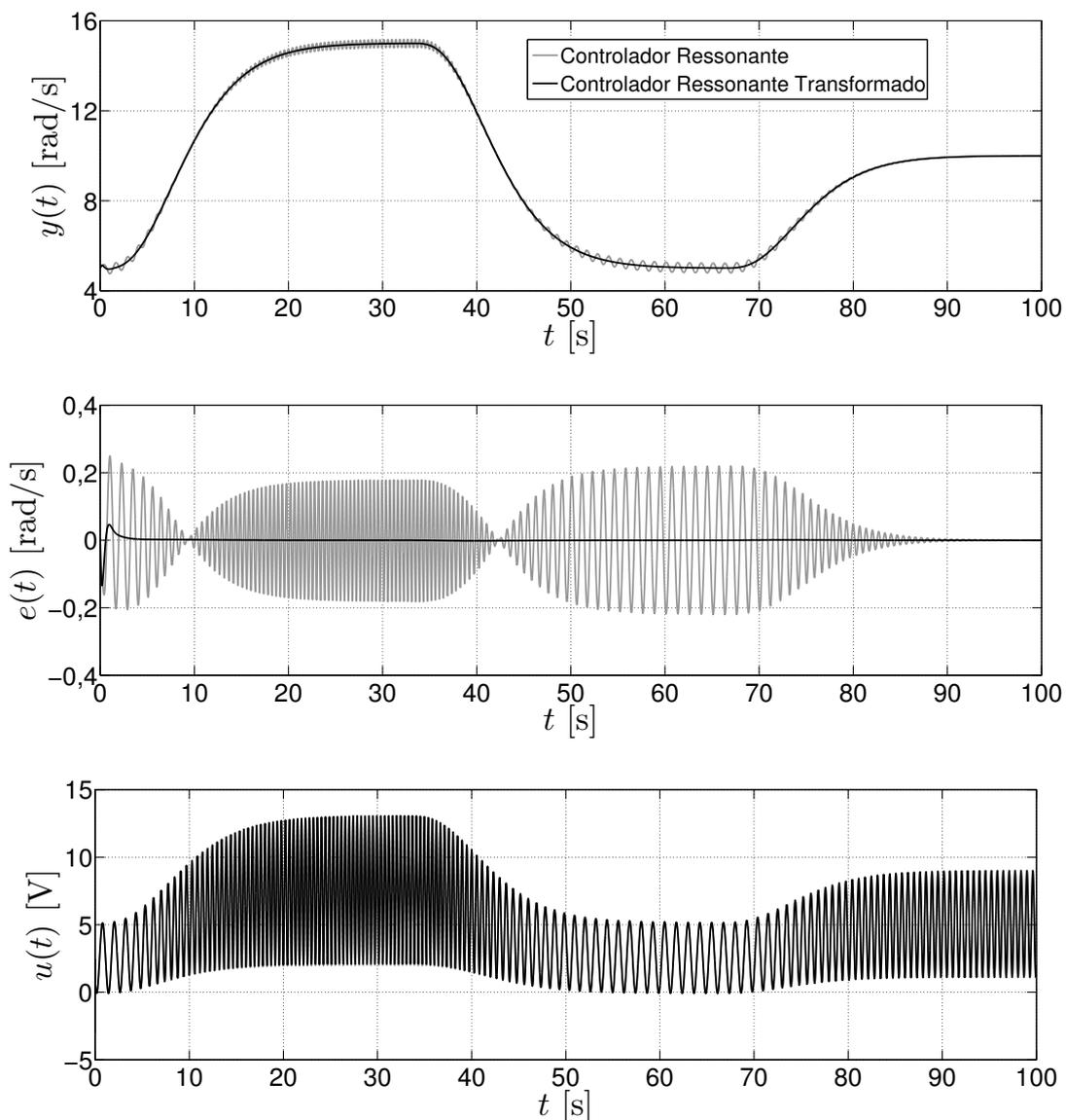
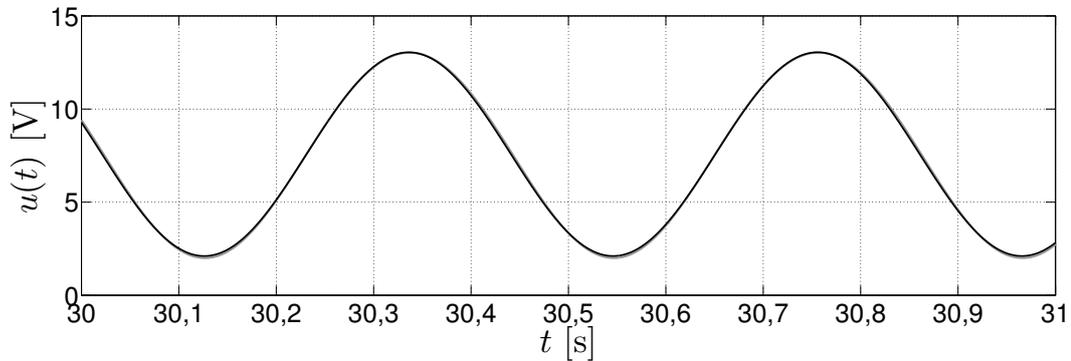


Figura 15 – Ampliação da resposta de $u(t)$ mostrada na Figura 14. Mesmo através desta ampliação é difícil diferenciar visualmente as curvas.



A Figura 14 apresenta as respostas temporais geradas pelo Controlador Ressonante Transformado e pelo Controlador Ressonante tradicional. Neste análise inicial a função $p_d(\xi)$ considerada é senoidal e os controladores possuem apenas o modo fundamental de ressonância. Esta figura compara a velocidade angular do motor $y(t) = x_1(t)$, o sinal de erro $r(t)$ e o sinal de controle $u(t)$. Quando a rotação do motor é igual ou muito próxima ao valor nominal 10 rad/s verifica-se que Controlador Ressonante tradicional é capaz de rejeitar a perturbação do sistema. O mesmo não ocorre quando a rotação é está distante do valor de sintonia, onde nota-se a propagação de oscilações no erro de cerca de $\pm 0,2$ rad/s. Por outro lado, a estratégia de controle proposta mantém o erro praticamente nulo após o tempo para a acomodação da dinâmica do controlador. Comparando o sinal de controle $u(t)$ é difícil visualizar diferenças entre os controladores comparados. Mesmo na Figura 15 que amplia este sinal entre 60s até 62s, as respostas mostram-se muito similares. No entanto, nesta mesma faixa de tempo nota-se uma significativa diferença na redução da oscilação na saída do sistema.

Seguindo a análise, a Figura 16 compara o sinal $e(t)$ no cenário com $p_d(\xi)$ triangular, além disso a Figura 17 também compara o sinal de controle neste mesmo cenário. Nestas figuras estão dispostas respostas para um, dois, quatro e oito modos harmônicos de ressonância. Com apenas um modo, observa-se que o Controlador Ressonante Transformado apresenta um residual de erro com amplitude de $\pm 0,08$ rad/s, contudo esta amplitude residual é mantida desde 10 rad/s até o final do tempo simulado. Já o Controlador Ressonante tradicional apresenta um residual ainda maior quando encontra-se fora de sincronia, principalmente entre 50s e 70s quando o erro oscila entorno de ± 2 rad/s. Com o aumento do número de modos harmônicos observa-se um grande benefício na rejeição do distúrbio por parte do Controlador Ressonante Transformado, onde sua resposta em regime aproxima-se cada vez mais da origem. Já em relação ao Controlador Ressonante, apesar do desempenho também melhorar quando $y(t)$ está próximo do valor nominal, nota-se que o erro residual fora de sincronia aparenta estar inalterado. Para comparar de

forma precisa o erro de cada controlador testado foi organizada a Tabela 5. Observando os valores nesta tabela verifica-se que o desempenho do Controlador Ressonante tradicional na verdade começa a piorar com o aumento do número de modos a partir de quatro. Esta observação indica claramente que a adição de modos harmônicos não beneficia o controlador tradicional para operar fora de sincronia, podendo até degradar o desempenho. Por outro lado, nota-se que o valor *RMS* do erro do Controlador Ressonante Transformado aproxima-se cada vez mais de zero com o aumento do número do modos.

Figura 16 – Comparação do sinal de erro $e(t)$ no cenário com $p_d(\xi)$ triangular para diferentes n_h modos harmônicos dos controladores. A mesma legenda da Figura 14 aplica-se aqui.

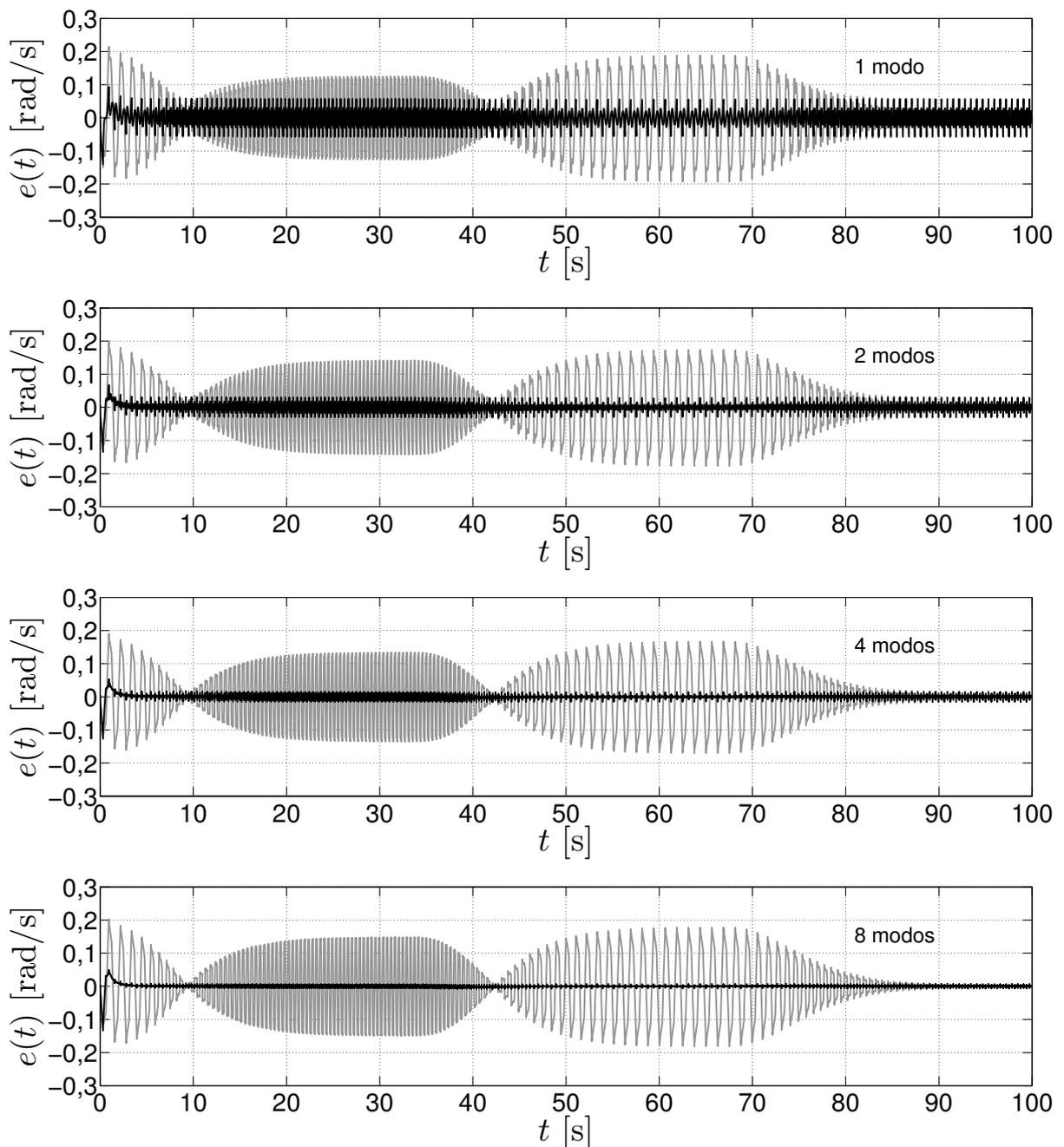


Figura 17 – Comparação ampliada do sinal de controle $u(t)$ no cenário com $p_d(\xi)$ triangular para diferentes n_h modos harmônicos. A mesma legenda da Figura 14 aplica-se aqui.

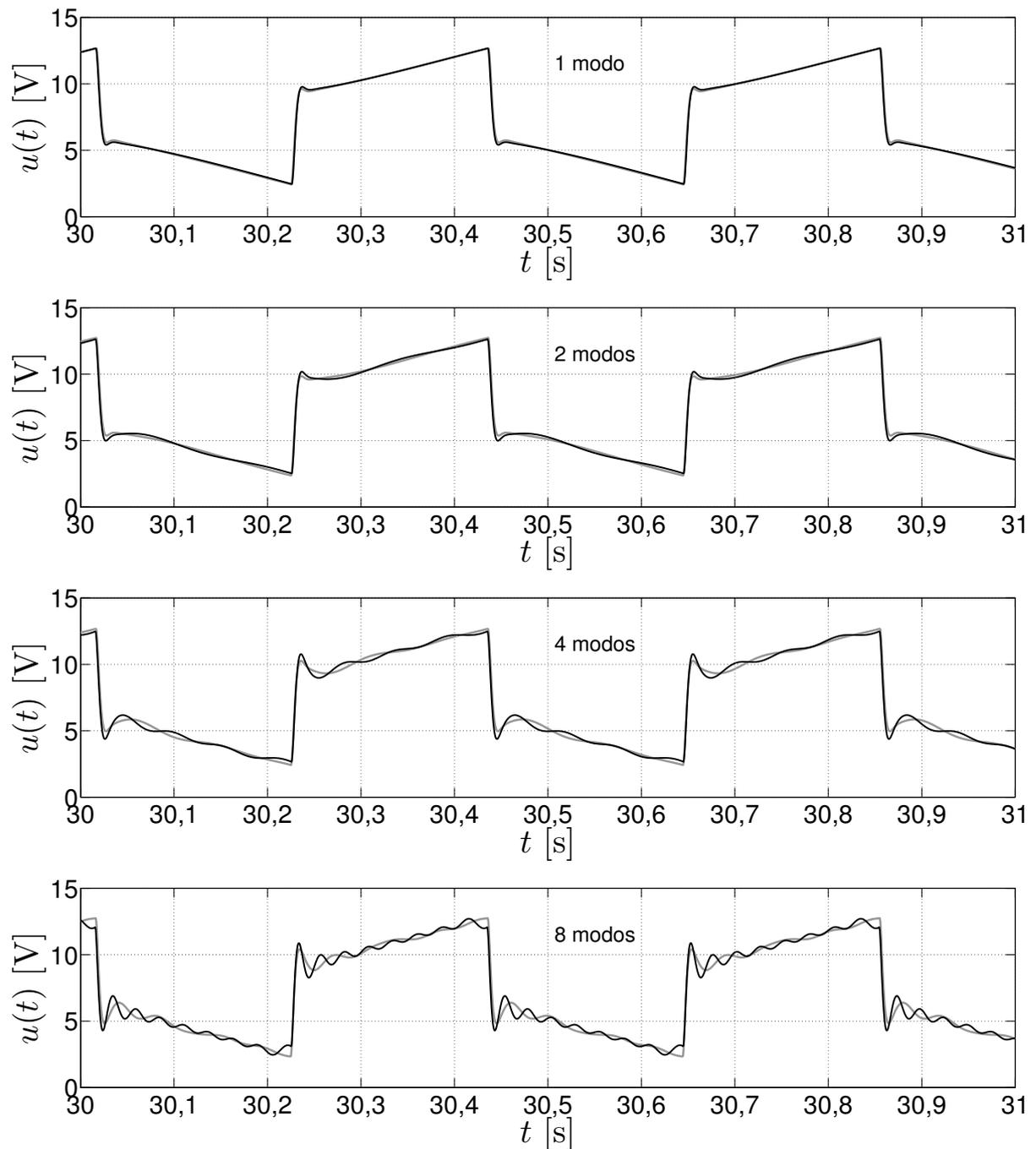


Tabela 5 – Comparação do valor RMS do sinal de erro $e(t)$ entre os controladores simulados no cenário com $p_d(\xi)$ triangular. A faixa de tempo considerada é a partir do instante 15 s até 100 s. A unidade dos valores é rad/s.

Número de modos	Controlador Ressonante	Controlador Ressonante Transformado
1	0,08910	0,00221
2	0,00850	0,00092
3	0,00834	0,00054
4	0,00834	0,00038
5	0,00846	0,00028
6	0,00865	0,00022
7	0,00886	0,00017
8	0,00905	0,00014

4.7 Comentários Finais

Neste capítulo foi apresentada a topologia proposta de Controle Ressonante Transformado com base na teoria de mudança de domínio desenvolvida anteriormente no Capítulo 3. Uma forma sistemática de projeto foi apresentada para síntese robusta dos ganhos de realimentação do controlador. Por fim, os exemplos numéricos apresentados comprovaram o desempenho da estratégia de controle proposta para o seguimento e/ou rejeição de sinais de período variante no tempo.

5 Controlador Repetitivo Transformado

Este capítulo trata o desenvolvimento da segunda estratégia de controle proposta neste trabalho: o Controlador Repetitivo Transformado. A definição do controlador no domínio da frequência- θ é realizada primeiramente, então é formulada a transformação para o domínio do tempo. Seções especiais tratam do método proposto para o cômputo do atraso de transporte do controlador, além de uma metodologia para compensação da distorção causada pelo filtro passa-baixas que possibilita a estabilização em malha-fechada do Controlador Repetitivo. Posteriormente está organizada a metodologia sistemática para síntese robusta do controlador. Ao fim do capítulo são mostrados exemplos numéricos para demonstração e avaliação da proposta.

5.1 Definição do Controlador no domínio- θ

A função de transferência do Controlador Repetitivo no domínio da frequência- θ é definida como:

$$\mathbf{G}_{\text{rp}}(s_\theta) = \frac{\mathbf{Y}_{\text{rp}}(s_\theta)}{\mathbf{E}(s_\theta)} = \frac{\mathbf{Q}_f(s_\theta)e^{-\tau_\theta s_\theta}}{1 - \mathbf{Q}_f(s_\theta)e^{-\tau_\theta s_\theta}}, \quad (5.1)$$

onde τ_θ é um atraso de transporte constante no domínio- θ e $\mathbf{Q}_f(s)$ denota a função de transferência de um filtro de primeira ordem na forma:

$$\mathbf{Q}_f(s) = k_{f_\theta} \frac{\omega_{c\theta}}{s_\theta + \omega_{c\theta}}. \quad (5.2)$$

Aqui, $\omega_{c\theta}$ é a frequência- θ de corte do filtro e k_{f_θ} é o ganho do filtro. Por hora, considere que $k_{f_\theta} = 1$ (ganho DC unitário do filtro).

Idealmente (desconsiderando a presença do filtro), este Controlador Repetitivo possui infinitos polos em $s_\theta = 2\pi n/\tau_\theta \forall n \in \mathbb{Z}$. Portanto basta sintonizar $\tau_\theta = T_\theta$ para a garantir o seguimento/rejeição de qualquer sinal periódico no domínio- θ . É notável entretanto, conforme já mostrado na Figura 8, que a presença do filtro desloca a posição dos polos, fazendo com que a sintonia de τ_θ não seja efetiva. Na Seção 5.4 será proposta uma metodologia para compensação desta distorção do filtro, onde serão apresentadas equações para sintonizar $\tau_\theta \neq T_\theta$ e $k_{f_\theta} \neq 1$ para atingir o desempenho de seguimento/rejeição ótimo em uma frequência- θ central de interesse.

No espaço de estados do domínio- θ , este controlador pode ser realizado conforme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{\text{rp}}(\theta) &= -\omega_{c\theta} \mathbf{x}_{\text{rp}}(\theta) + k_{f_\theta} \omega_{c\theta} \boldsymbol{\eta}(\theta - \tau_\theta) \\ \boldsymbol{\eta}(\theta) &= \mathbf{x}_{\text{rp}}(\theta) + \mathbf{e}(\theta) \\ \mathbf{y}_{\text{rp}}(\theta) &= \mathbf{x}_{\text{rp}}(\theta) \end{cases}, \quad (5.3)$$

onde $\mathbf{x}_{rp} \in \mathbb{R}$ é o estado do controlador no domínio- θ e $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}$ é simplesmente um sinal auxiliar para facilitar a notação. Convenientemente nesta realização, o estado do controlador é igual a saída do controlador, portanto será omitida na sequência do trabalho a relação $\mathbf{y}_{rp}(\theta) = \mathbf{x}_{rp}(\theta)$ (bem como $y_{rp}(t) = x_{rp}(t)$).

5.2 Transformação do Controlador para o Domínio do Tempo

Aplicando a transformação de domínio, proposta na Seção 3.2, é possível transportar a representação do Controlador Repetitivo definido no domínio- θ para o domínio do tempo, sem alterar sua característica dinâmica. A partir da Transformada- Θ inversa no controlador (5.3) resulta:

$$\begin{cases} \dot{x}_{rp}(t) &= -\Omega(t) \omega_{c\theta} x_{rp}(t) + \Omega(t) k_{f\theta} \omega_{c\theta} \eta(t - \tau(t)) \\ \eta(t) &= x_{rp}(t) + e(t) \end{cases}, \quad (5.4)$$

O atraso de transporte variante no tempo $\tau(t)$ é desconhecido *a priori*. Contudo considera-se disponível em tempo-real o sinal de transformação $\theta(t)$ e sua derivada $\Omega(t)$, assim o valor de $\tau(t)$ pode ser determinado pela solução da equação (3.20) no Teorema 3.2:

$$\theta(t) - \theta(t - \tau(t)) = \tau_\theta. \quad (5.5)$$

Desta forma garante-se que o atraso $\boldsymbol{\eta}(\theta - \tau_\theta)$ no domínio- θ é equivalente ao atraso variante $\eta(t - \tau(t))$ no domínio do tempo. A seção subsequente irá propor um observador dinâmico para encontrar a solução de $\tau(t)$ com base na informação em tempo-real de $\theta(t)$ e sua derivada $\Omega(t)$.

Para compactar a notação, o controlador será trabalhado na forma

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) &= A_c(\Omega(t)) x_c(t) + B_c(\Omega(t)) \eta(t - \tau(t)) \\ \eta(t) &= x_c(t) + e(t) \end{cases}, \quad (5.6)$$

onde $x_c = x_{rp}$ e os coeficientes em função de Ω , $A_c(\Omega) \in \mathbb{R}$ e $B_c(\Omega) \in \mathbb{R}$, são

$$A_c(\Omega) = -\Omega \omega_{c\theta}, \quad B_c(\Omega) = \Omega k_{f\theta} \omega_{c\theta}. \quad (5.7)$$

Esta arquitetura será chamada de Controlador Repetitivo Transformado, pois representa a dinâmica equivalente do Controlador Repetitivo no domínio- θ .

5.3 Observador do Atraso de Transporte Variante no Tempo

Objetivo desta seção é organizar um modelo para observar a solução $\tau(t)$ da equação (5.5), permitindo assim a implementação do Controlador Repetitivo Transformado. Primeiramente será introduzido um sinal de erro de observação $e_\tau(t)$ tal que para $e_\tau(t) = 0$, $\tau(t)$ satisfaça a relação desejada (5.5). Posteriormente será abordada a dinâmica deste sinal de erro e a metodologia de observação proposta para garantir a convergência assintótica de $e_\tau(t)$ para zero.

5.3.1 Dinâmica Proposta do Observador

Deixe $e_\tau(t)$ descrever o erro da equação (5.5) conforme:

$$e_\tau(t) = \theta(t) - \theta(t - \tau(t)) - \tau_\theta . \quad (5.8)$$

Desta forma, quando $e_\tau(t) = 0$ é fácil notar que $\tau(t)$ satisfaz (5.5).

Para projetar um observador robusto, que garanta a convergência assintótica de $e_\tau(t)$ para a zero propõe-se forçar a seguinte dinâmica exponencial

$$\dot{e}_\tau(t) = -\alpha e_\tau(t) . \quad (5.9)$$

Desta forma, o erro deve tender exponencialmente para zero com uma taxa de decaimento α (contanto que este parâmetro seja positivo, isto é $\alpha \in \mathbb{R}_+$). O objetivo portanto é encontrar a dinâmica do observador $\dot{\tau}(t)$ que atenda a condição (5.9).

Ao realizar derivada temporal do sinal de erro definido em (5.8) obtém-se:

$$\dot{e}_\tau(t) = \Omega(t) - \Omega(t - \tau(t))(1 - \dot{\tau}(t)) . \quad (5.10)$$

Aplicando agora esta relação de $\dot{e}_\tau(t)$ na dinâmica desejada (5.9) gera

$$\Omega(t) - \Omega(t - \tau(t))(1 - \dot{\tau}(t)) = -\alpha e_\tau(t) . \quad (5.11)$$

Então, basta isolar $\dot{\tau}(t)$ para expressar a dinâmica do observador proposto:

$$\dot{\tau}(t) = 1 - \frac{\Omega(t) + \alpha e_\tau(t)}{\Omega(t - \tau(t))} . \quad (5.12)$$

O valor $\tau(t)$ pode ser determinado em tempo-real, em função de $\theta(t)$ e $\Omega(t)$, pela seguinte integração:

$$\tau(t) = \int_{t_0}^t \left(1 - \frac{\Omega(\xi) + \alpha e_\tau(\xi)}{\Omega(\xi - \tau(\xi))} \right) d\xi + \tau(t_0) . \quad (5.13)$$

Assim, mesmo que seja escolhido um valor inicial $\tau(t_0)$ equivocado, $\tau(t)$ irá convergir exponencialmente para a solução de (5.5), visto que a dinâmica (5.9) foi imposta.

Para validade do método proposto deve-se ainda garantir que $\Omega(t - \tau(t))$ nunca seja zero para evitar a singularidade do modelo. Também deve-se assegurar que os atrasos $\theta(t - \tau(t))$ e $\Omega(t - \tau(t))$ sejam valores válidos para todo $t > t_0$. Em outras palavras, deve-se garantir que o retardo no tempo $t - \tau(t)$ seja sempre maior ou igual a zero. Na sequência é apresentada uma forma sistemática para determinar o tempo de início t_0 da observação e a faixa de valores iniciais $\tau(t_0)$ que garantem estes requisitos.

5.3.2 Escolha do tempo de início t_0 e do valor inicial $\tau(t_0)$

Para garantir que $t - \tau(t) \geq 0$ em todo $t \geq t_0$, basta escolher o tempo inicial t_0 como o valor supremo τ_{sup} do atraso. Desta forma, na mais extrema situação possível verifica-se que $t_0 - \tau(t_0) = \tau_{sup} - \tau_{sup} = 0$.

Suponha que $\Omega(t) \geq \Omega_1$, onde Ω_1 é um valor positivo que representa o valor mínimo de $\Omega(t)$ para todo $t \geq 0$. Desta forma o problema da singularidade é evitado contanto que $\Omega_1 > 0$. Também é possível neste caso determinar o valor supremo de τ_{sup} baseado neste limite Ω_1 .

Para calcular o valor supremo de $\tau(t)$ basta analisar a relação (5.5): $\theta(t) - \theta(t - \tau(t)) = \tau_\theta$. Lembre que $\theta(t)$ é por definição estritamente crescente. Note que o quanto mais lento θ cresce, mais tempo demora para este sinal atingir o incremento de τ_θ , e portanto, maior é o atraso que satisfaz a relação (5.5). Portanto, a trajetória $\theta(t)$ que maximiza $\tau(t)$ é a que contém a menor taxa de variação possível. Então, dada a restrição $\dot{\theta}(t) = \Omega(t) \geq \Omega_1$, chega-se a conclusão que a reta $\theta(t) = \Omega_1 t$ é a trajetória de menor taxa de variação possível e que, conseqüentemente, maximiza a solução de $\tau(t)$. Portanto basta aplicar esta trajetória na equação (5.5) para verificar τ_{sup}

$$\Omega_1 t - \Omega_1(t - \tau(t)) = \tau_\theta \quad \therefore \quad \tau_{sup} = \frac{\tau_\theta}{\Omega_1}. \quad (5.14)$$

Por fim deve-se levar em consideração a dinâmica da observação da solução de $\tau(t)$. Dado que o observador apresenta um decaimento exponencial do erro, então a escolha de um valor inicial $\tau(t_0) \leq \tau_{sup}$ implica sempre que $\tau(t) \leq \tau_{sup}$ para todo $t > t_0$.

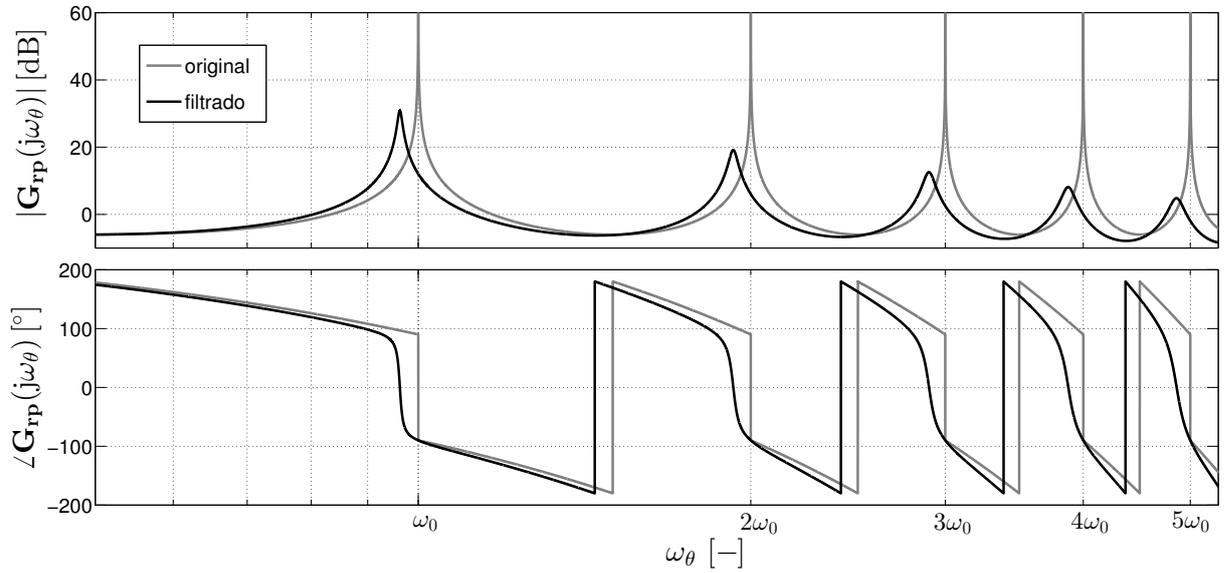
Resumindo, os seguintes requerimentos garantem a funcionalidade correta do observador:

- Deve-se escolher uma taxa de decaimento $\alpha > 0$ para a dinâmica do erro de observação.
- Deve-se assegurar que o sinal $\Omega(t)$ possui um limite inferior positivo Ω_1 para todo $t \geq 0$.
- Deve-se iniciar a observação no instante $t_0 = \tau_\theta / \Omega_1$.
- Deve-se escolher um valor inicial $\tau(t_0) \leq \tau_\theta / \Omega_1$.

5.4 Compensação da Distorção do Filtro Passa-Baixas

O filtro passa-baixas do Controlador Repetitivo causa uma degradação no desempenho de seguimento e/ou rejeição. Este efeito pode ser verificado no diagrama de bode da Figura 20. Nesta resposta em frequência- θ , o Controlador Repetitivo filtrado considera $\tau_\theta = T_\theta$ (o atraso do controlador no domínio- θ igual ao período dos sinais neste domínio) e também $k_{q\theta} = 1$ (ganho do filtro unitário). A frequência- θ de corte selecionada para este exemplo gráfico é $\omega_{c\theta} = 4$. É fácil notar que o filtro atenua os picos originalmente com ganho infinito, além de deslocar estas frequências de ressonância.

Figura 18 – Comparação no domínio da frequência- θ entre o Controlador Repetitivo original e filtrado.



Na sequência é proposta uma metodologia para sintonização dos parâmetros τ_θ (diferente de T_θ) e k_{f_θ} (diferente de 1) de modo a compensar a distorção do filtro e garantir o melhor desempenho possível de seguimento/rejeição.

Para realizar a correção proposta, deve-se escolher uma frequência- θ central de ajuste ω_θ^* . Esta frequência- θ deve ser a mais significativa do espectro dos sinais de referência/distúrbio. Sem perda de generalidade, será trabalhado com ω_θ^* igual à frequência- θ fundamental dos sinais:

$$\omega_\theta^* = \omega_{0\theta} = \frac{2\pi}{T_\theta} \quad (5.15)$$

dado que nas aplicações práticas exemplificadas neste trabalho, a componente fundamental será sempre a mais significativa.

A método proposto consiste em forçar o Controlador Repetitivo filtrado a ser idêntico ao Controlador Repetitivo sem o filtro na frequência- θ central de ajuste, isto é:

$$\frac{\mathbf{Q}_f(s_\theta)e^{-\tau_\theta s_\theta}}{1 - \mathbf{Q}_f(s_\theta)e^{-\tau_\theta s_\theta}} = \frac{e^{-T_\theta s_\theta}}{1 - e^{-T_\theta s_\theta}} \quad \text{quando} \quad s_\theta = j\omega_\theta^* . \quad (5.16)$$

Note que o problema pode ser simplificado para

$$\mathbf{Q}_f(j\omega_\theta^*)e^{-j\tau_\theta\omega_\theta^*} = e^{-jT_\theta\omega_\theta^*} . \quad (5.17)$$

A equação (5.17) na forma complexa pode ser separada em duas equações de magnitude e fase:

$$\left| \mathbf{Q}_f(j\omega_\theta^*) \right| = 1 , \quad \angle \mathbf{Q}_f(j\omega_\theta^*) - \omega_\theta^* \tau_\theta = -\omega_\theta^* T_\theta . \quad (5.18)$$

Então, aplicando a função de transferência $\mathbf{Q}_f(s_\theta)$ do filtro e substituindo s_θ por $j\omega_\theta^*$:

$$\frac{k_{f\theta}\omega_{c\theta}}{\sqrt{\omega_\theta^{*2} + \omega_{c\theta}^2}} = 1, \quad -\omega_\theta^*\tau_\theta - \arctan\left(\frac{\omega_\theta^*}{\omega_{c\theta}}\right) = -\omega_\theta^*T_\theta. \quad (5.19)$$

Desta forma basta isolar $k_{f\theta}$ e τ_θ nas equações em (5.19), resultando no atraso compensado

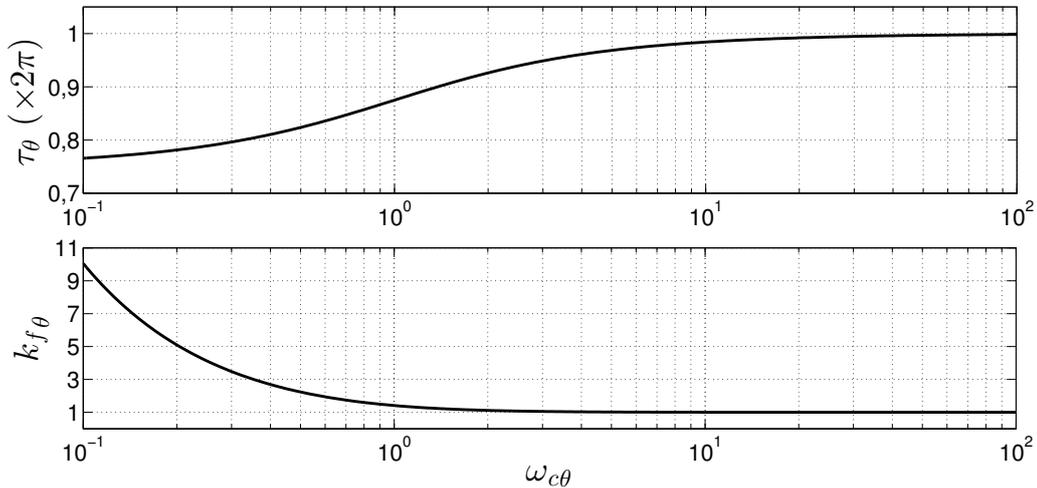
$$\tau_\theta = T_\theta - \frac{1}{\omega_\theta^*} \arctan\left(\frac{\omega_\theta^*}{\omega_{c\theta}}\right), \quad (5.20)$$

e no ganho do filtro

$$k_{f\theta} = \frac{1}{\omega_{c\theta}} \sqrt{\omega_\theta^{*2} + \omega_{c\theta}^2}. \quad (5.21)$$

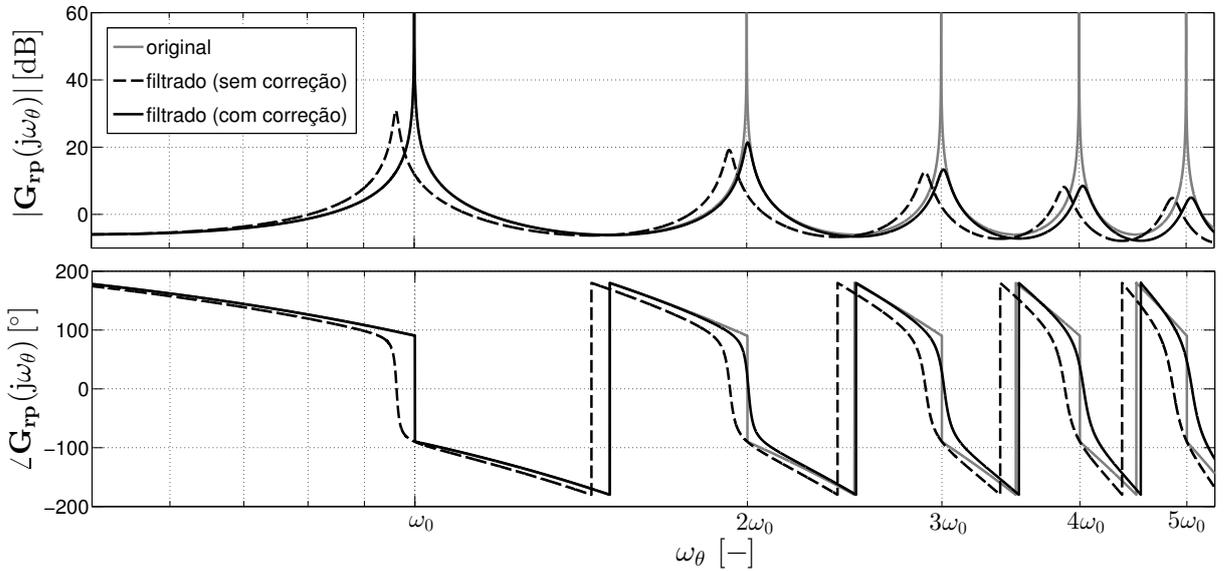
Tomando como exemplo os valores numéricos $T_\theta = 2\pi$ e $\omega_{c\theta} = 4$, observa-se que o resultado das equações (5.20) e (5.21) é respectivamente $\tau_\theta = 1,922\pi$ e $k_{f\theta} = 1,0308$. Portanto nota-se que a compensação impõe um atraso um pouco menor que o período dos sinais. A Figura 19 mostra o valor numérico dos resultados de (5.20) e (5.21) considerando $T_\theta = 2\pi$. Note que para valores elevados de $\omega_{c\theta}$, os parâmetros tendem aos valores padrões $\tau_\theta = T_\theta$ e $k_{f\theta} = 1$. Entretanto, para valores inferiores de $\omega_{c\theta}$ verifica-se que $\tau_\theta < T_\theta$ e $k_{f\theta} > 1$.

Figura 19 – Valores numéricos dos parâmetros compensados em função de $\omega_{c\theta}$. Aqui foi considerado $T_\theta = 2\pi$.



O diagrama de bode na Figura 20 subsequente demonstra o efeito da compensação proposta na resposta em frequência- θ . Neste exemplo, ambos os controladores filtrados possuem $\omega_{c\theta} = 4$. Enquanto o controlador sem correção utiliza $\tau_\theta = T_\theta$ e $k_{f\theta} = 1$, o controlador com a correção considera estes parâmetros conforme as relações (5.20) e (5.21). Observe que a compensação faz com que o Controlador Repetitivo filtrado seja idêntico ao original na frequência de interesse $\omega_\theta^* = \omega_{0\theta}$.

Figura 20 – Comparação no domínio da frequência- θ entre o Controlador Repetitivo original, filtrado (sem correção) e filtrado (com a correção proposta).



5.5 Metodologia para Síntese Robusta

Esta seção apresenta uma metodologia sistemática para síntese de uma lei de controle de realimentação de estados incluindo o Controlador Repetitivo Transformado. O procedimento será espelhado na mesma metodologia proposta para o Controlador Ressonante Transformado, onde primeiramente é realizada a modelagem politópica do controlador, então é organizado o modelo aumentado do sistema, e por fim são apresentados os critérios de estabilidade e desempenho robusto.

A lei de controle a ser considerada é

$$u(t) = K x(t) + K_c x_c(t) , \quad (5.22)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é matriz de ganhos de realimentação da planta e $K_c \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ matriz de ganhos de realimentação do controlador. Neste caso a realimentação de estados do controlador é equivalente a realimentação da saída, visto que $y_c(t) = x_c(t)$.

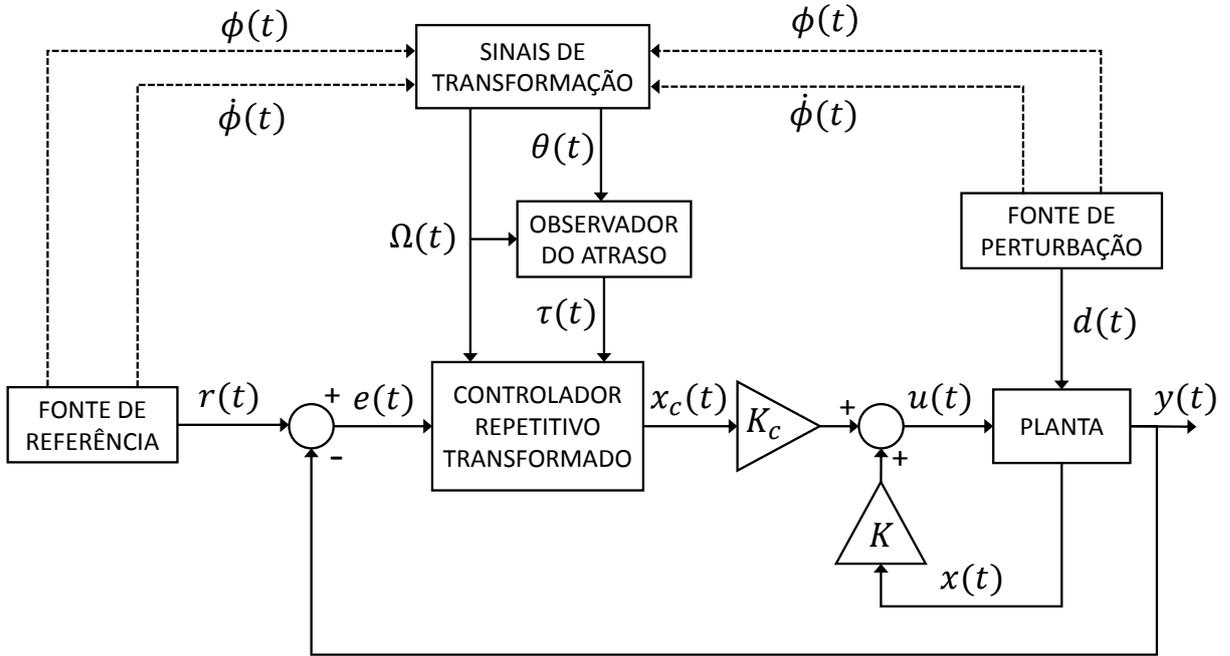
O diagrama de blocos na Figura 21 demonstra a estrutura geral do Controlador Repetitivo Transformado inserido na malha de controle.

5.5.1 Representação Politópica do Controlador

Para obter uma condição de estabilidade para o Controlador Repetitivo é necessário tratar o parâmetro variante no tempo $\Omega(t)$. Portanto deve-se garantir que $\Omega(t)$ pertence a um politopo valores admissíveis:

$$\Omega \in \mathcal{B}_\Omega = [\Omega_1, \Omega_2] \subset \mathbb{R} , \quad (5.23)$$

Figura 21 – Diagrama de blocos do Controlador Repetitivo Transformado em malha fechada.



onde Ω_1 e Ω_2 denotam, respectivamente o valor mínimo e valor máximo de $\Omega(t)$ para todo $t \geq 0$. Neste caso, deve-se garantir ainda que $\Omega_1 > 0$ para assegurar a funcionalidade do observador do atraso.

Dada esta suposição em relação ao sinal $\Omega(t)$, o Controlador Repetitivo Transformado pode ser escrito na seguinte forma politópica

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c(\lambda_c) x_c(t) + B_c(\lambda_c) \eta(t - \tau(t)) \\ \eta(t) = x_c(t) + e(t) \end{cases}, \quad (5.24)$$

onde $\lambda_c \in \mathcal{B}_{\lambda_c} \subset \mathbb{R}^2$ é um parâmetro incerto e o conjunto \mathcal{B}_{λ_c} é definido por:

$$\mathcal{B}_{\lambda_c} = \left\{ \lambda_{cj} : \sum_{j=1}^2 \lambda_{cj} = 1, 0 \leq \lambda_{cj} \leq 1, j = 1, 2 \right\} \subset \mathbb{R}^2. \quad (5.25)$$

Os termos $A_c(\lambda_c)$ e $B_c(\lambda_c)$ são expressos conforme

$$\begin{bmatrix} A_c(\lambda_c) & B_c(\lambda_c) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^2 \lambda_{cj} \begin{bmatrix} A_{cj} & B_{cj} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

de tal forma que A_{cj} e B_{cj} ($j \in \{1, 2\}$) representem os termos variantes $A_c(\Omega)$ e $B_c(\Omega)$ avaliados no j -ésimo vértice do politopo \mathcal{B}_{Ω} , ou seja:

$$A_{cj} = A_c(\Omega_j) = -\Omega_j \omega_{c\theta}, \quad B_{cj} = B_c(\Omega_j) = \Omega_j k_{f\theta} \omega_{c\theta}. \quad (5.27)$$

5.5.2 Modelo Aumentado do Sistema

Para unir a representação dinâmica da planta e do controlador deve-se organizar o modelo aumentado do sistema. Novamente aqui, será considerado um modelo de planta conforme descrito na Seção 3.1.

De início, é conveniente escrever a dinâmica do controlador inserindo a relação $e(t) = r(t) - y(t)$ e a equação $y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_d d(t)$ conforme o modelo da saída da planta:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) = & A_c(\lambda_c)x_c(t) + B_c(\lambda_c)x_c(t - \tau(t)) + B_c(\lambda_c)r(t - \tau(t)) - \\ & B_c(\lambda_c)Cx(t - \tau(t)) - B_c(\lambda_c)Du(t - \tau(t)) - B_c(\lambda_c)D_d d(t - \tau(t)) . \end{aligned} \quad (5.28)$$

Então pode-se definir o vetor aumentado de estados $x_a \in \mathbb{R}^{n_a}$ ($n_a = n + 1$) e também um vetor aumentado de entradas exógenas $d_a \in \mathbb{R}^3$ conforme

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} , \quad d_a(t) = \begin{bmatrix} d(t) \\ d(t - \tau(t)) \\ r(t - \tau(t)) \end{bmatrix} . \quad (5.29)$$

A dinâmica deste sistema aumentado é descrita conforme:

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) = & A_a(\lambda, \lambda_c)x_a(t) + A_{\tau_a}(\lambda_c)x_a(t - \tau(t)) + \\ & B_a(\lambda)u(t) + B_{\tau_a}(\lambda_c)u(t - \tau(t)) + B_{d_a}(\lambda, \lambda_c)d_a(t) . \end{aligned} \quad (5.30)$$

tal que as matrizes aumentadas $A_a(\lambda, \lambda_c) \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, $A_{\tau_a}(\lambda_c) \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, $B_a(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_a \times m}$, $B_{\tau_a}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_a \times m}$ e $B_{d_a}(\lambda, \lambda_c) \in \mathbb{R}^{n_a \times 3}$ são:

$$\begin{aligned} A_a(\lambda, \lambda_c) = & \begin{bmatrix} A(\lambda) & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & A_c(\lambda_c) \end{bmatrix} , \quad A_{\tau_a}(\lambda_c) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ -B_c(\lambda_c)C & B_c(\lambda_c) \end{bmatrix} , \\ B_a(\lambda) = & \begin{bmatrix} B(\lambda) \\ 0_{1 \times m} \end{bmatrix} , \quad B_{\tau_a}(\lambda_c) = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ -B_c(\lambda_c)D \end{bmatrix} , \\ B_{d_a}(\lambda, \lambda_c) = & \begin{bmatrix} B_d(\lambda) & 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \\ 0 & -B_c(\lambda_c)D_d & B_c(\lambda_c) \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (5.31)$$

Para contemplar a união da incerteza politópica da planta e controlador, a dinâmica do sistema aumentado será reescrita na forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) = & A_a(\lambda_a)x_a(t) + A_{\tau_a}(\lambda_a)x_a(t - \tau(t)) + \\ & B_a(\lambda_a)u(t) + B_{\tau_a}(\lambda_a)u(t - \tau(t)) + B_{d_a}(\lambda_a)d_a(t) . \end{aligned} \quad (5.32)$$

tal que $\lambda_a \in \mathcal{B}_{\lambda_a} \subset \mathbb{R}^{2^{(p+1)}}$ é um parâmetro incerto aumentado e o conjunto \mathcal{B}_{λ_a} é definido como:

$$\mathcal{B}_{\lambda_a} = \left\{ \lambda_{a(i,j)} : \sum_{i=1}^{2^p} \sum_{j=1}^2 \lambda_{a(i,j)} = 1 , 0 \leq \lambda_{a(i,j)} \leq 1 , i = 1, 2, \dots, 2^p , j = 1, 2 \right\} . \quad (5.33)$$

Desta forma, as matrizes aumentadas incertas $A_a(\lambda_a)$, $A_{\tau_a}(\lambda_a)$, $B_a(\lambda_a)$, $B_{\tau_a}(\lambda_a)$ e $B_{da}(\lambda_a)$ são descritas por

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_a(\lambda_a) & A_{\tau_a}(\lambda_a) & B_a(\lambda_a) & B_{\tau_a}(\lambda_a) & B_{da}(\lambda_a) \end{bmatrix} = \\ & \sum_{i=1}^{2^p} \sum_{j=1}^2 \lambda_{a(i,j)} \begin{bmatrix} A_{a(i,j)} & A_{\tau_a(j)} & B_{a(i)} & B_{\tau_a(j)} & B_{da(i,j)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Na relação (5.34), as matrizes $A_{a(i,j)}$, $B_{a(i,j)}$ e $B_{da(i,j)}$, ($i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$ e $j \in \{1, 2\}$) representam todas as possíveis combinações de A_i , B_i e B_{di} com A_{c_j} e B_{c_j} para todo i e todo j :

$$\begin{aligned} A_{a(i,j)} &= \begin{bmatrix} A_i & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & A_{c_j} \end{bmatrix}, & A_{\tau_a(j)} &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ -B_{c_j}C & B_{c_j} \end{bmatrix}, \\ B_{a(i)} &= \begin{bmatrix} B_i \\ 0_{1 \times m} \end{bmatrix}, & B_{\tau_a(j)} &= \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ -B_{c_j}D \end{bmatrix}, \\ B_{da(i,j)} &= \begin{bmatrix} B_{di} & 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \\ 0 & -B_{c_j}D_d & B_{c_j} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Para finalizar a representação da malha-fechada do sistema deve-se incluir a lei de controle proposta em (5.22). Representando esta lei de controle em função do vetor de estados aumentado obtém-se:

$$u(t) = K_a x_a(t) \quad (5.36)$$

onde $K_a \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$ é matriz aumentada de ganhos de realimentação, obtida por

$$K_a = \begin{bmatrix} K & K_c \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

Note também que $u(t - \tau(t)) = K_a x_a(t - \tau(t))$. Então a dinâmica completa do sistema em malha-fechada é dada pelo seguinte modelo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= \left(A_a(\lambda_a) + B_a(\lambda_a)K_a \right) x_a(t) + \\ & \left(A_{\tau_a}(\lambda_a) + B_{\tau_a}(\lambda_a)K_a \right) x_a(t - \tau(t)) + B_{da}(\lambda_a) d_a(t). \end{aligned} \quad (5.38)$$

5.5.3 Critérios de Estabilidade e Desempenho Robusto

Em (YAMAMOTO; HARA, 1988) foi demonstrado que mesmo para sistemas lineares de dimensão infinita, a estabilidade assintótica interna do sistema também implica a estabilidade *BIBO* (ver Teorema 5.12 desta mesma referência). Com base nesta observação, o vetor de entradas exógenas $d_a(t)$ será desconsiderado (sem perda de generalidade) para solução do problema de síntese, assim como realizado anteriormente para o caso do Controlador Ressonante Transformado. Segue então que a representação considerada do sistema será:

$$\dot{x}_a(t) = \left(A_a(\lambda_a) + B_a(\lambda_a)K_a \right) x_a(t) + \left(A_{\tau_a}(\lambda_a) + B_{\tau_a}(\lambda_a) \right) x_a(t - \tau(t)). \quad (5.39)$$

Novamente será incluída uma saída $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ ($n_z = n_a + m$) para modelagem de um critério de desempenho \mathcal{H}_2 para o sistema em malha-fechada:

$$z(t) = C_z x_a(t) + D_z u(t) . \quad (5.40)$$

As matrizes $C_z \in \mathbb{R}^{n_z \times n_a}$ e $D_z \in \mathbb{R}^{n_z \times m}$ são

$$C_z = \begin{bmatrix} Q_z \\ 0_{m \times n_a} \end{bmatrix} , \quad D_z = \begin{bmatrix} 0_{n_a \times m} \\ R_z \end{bmatrix} . \quad (5.41)$$

onde $Q_z \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ e $R_z \in \mathbb{R}^{m \times m}$ são matrizes diagonais (positivas definidas) de penalidades. Estas matrizes devem ser definidas conforme já indicado anteriormente em (4.33). Assim define-se a função de custo da síntese como o quadrado da norma \mathcal{L}_2 desta saída de desempenho:

$$\mathcal{J}_2 = \|z(t)\|_2^2 = \int_0^\infty z^\top(t)z(t)dt . \quad (5.42)$$

A representação dinâmica final do sistema em malha-fechada é portanto expressa conforme:

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = (A_a(\lambda_a) + B_a(\lambda_a)K_a) x_a(t) + (A_{\tau_a}(\lambda_a) + B_{\tau_a}(\lambda_a)) x_a(t - \tau(t)) \\ z(t) = (C_z + D_z K_a) x_a(t) \end{cases} . \quad (5.43)$$

Desta forma chega-se em um problema de síntese robusta \mathcal{H}_2 para um sistema sujeito à um atraso de transporte variante no tempo, conforme descrito no Problema 5.1. Na sequência são apresentados dois teoremas alternativos para a resolução deste problema. Primeiramente, o Teorema 5.1 apresenta um critério de estabilidade baseado na abordagem de Lyapunov-Razumikhin. Após, o Teorema 5.2 apresenta outro critério de estabilidade baseado na abordagem de Lyapunov-Krasovskii.

Problema 5.1. *Dado um valor $\omega_{c\theta} \in \mathbb{R}_+$ determinado a priori, encontrar um ganho robusto K_a e um conjunto \mathcal{B}_τ de forma que o sistema (5.43) seja assintoticamente estável para todo $\lambda_a \in \mathcal{B}_{\lambda_a}$ para qualquer sinal $\tau(t)$ satisfazendo $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ e $\dot{\tau} \in \mathcal{B}_\tau$, além disso, tal que a função de custo \mathcal{J}_2 em (5.42) seja minimizada.*

Teorema 5.1. *Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas $\hat{P} \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$ e $X \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, uma matriz $\hat{K}_a \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$ e um escalar positivo $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ que satisfaçam*

$$\begin{bmatrix} \text{He} \{ A_{a(i,j)} \hat{P} + B_{a(i)} \hat{K}_a \} + \beta \hat{P} & A_{\tau a(j)} \hat{P} + B_{\tau a(j)} \hat{K}_a & \hat{P} C_z^\top + \hat{K}_a^\top D_z^\top \\ \star & -\beta \hat{P} & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 , \quad (5.44)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ \star & \hat{P} \end{bmatrix} > 0 , \quad (5.45)$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$ e todo $j \in \{1, 2\}$. Então o sistema (4.34) com $K_a = \hat{K}_a \hat{P}^{-1}$ é assintoticamente estável para todo $\lambda \in \mathcal{B}_{\lambda_a}$ para qualquer sinal $\tau(t)$ que satisfaça $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ e $\dot{\tau} \in \mathcal{B}_{\dot{\tau}} = \mathbb{R}$. Também, a função de custo \mathcal{J}_2 satisfaz

$$\mathcal{J}_2 < x_a^\top(0) X x_a(0) \quad (5.46)$$

quando $x_a(0) \neq 0$ e $x_a(t) = 0 \forall t < 0$.

Demonstração. Conforme já mostrado pelo Teorema 2.6 (baseado no Teorema da Estabilidade de Lyapunov-Razumikhin), se existir uma função de Lyapunov quadrática $V(x_a(t))$ que satisfaça

$$\dot{V}(x_a(t)) < -\beta(V(x_a(t)) - V(x_a(t - \tau(t)))) \quad (5.47)$$

para um escalar positivo β , então o sistema (5.43) é assintoticamente estável para qualquer trajetória de atraso $\tau(t) \geq 0$.

Reforçando ainda a seguinte condição

$$\dot{V}(x_a(t)) < -\beta(V(x_a(t)) - V(x_a(t - \tau(t)))) - z^\top(t) z(t) \quad (5.48)$$

implica (por integração) que

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_2^2 &< V(x_a(0)) + \beta \int_0^\infty (V(x_a(t - \tau(t))) - V(x_a(t))) dt \\ &< V(x_a(0)) + \beta \int_{-\tau_{sup}}^0 V(x_a(t)) dt \end{aligned} \quad (5.49)$$

onde τ_{sup} denota o valor supremo de $\tau(t)$. Definindo $V(x_a(t)) = x_a^\top(t) P x_a(t)$, segue que

$$\|z(t)\|_2^2 < x_a^\top(0) P x_a(0) + \beta \int_{-\tau_{sup}}^0 x_a^\top(t) P x_a(t) dt \quad (5.50)$$

então verifica-se que

$$\|z(t)\|_2^2 < x_a^\top(0) P x_a(0) \quad (5.51)$$

quando $x_a(0) \neq 0$ e $x_a(t) = 0 \forall t < 0$.

Realizando a derivada $\dot{V}(x_a(t))$ em (5.47) ao longo da trajetória do sistema resulta:

$$\begin{bmatrix} \text{He} \{ P A_a(\lambda_a) + P B_a(\lambda_a) K_a \} + \beta P & P A_{\tau_a}(\lambda_a) + P B_{\tau_a}(\lambda_a) K_a & C_z^\top + K_a^\top D_z^\top \\ * & -\beta P & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (5.52)$$

Pré- e pós-multiplicando a relação (5.52) por $\text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, I\}$ e substituindo:

$$\hat{P} = P^{-1}, \quad \hat{K}_a = K_a P^{-1}, \quad (5.53)$$

resulta em

$$\begin{bmatrix} \text{He} \{ A_a(\lambda_a) \hat{P} + B_a(\lambda_a) \hat{K}_a \} + \beta \hat{P} & A_{\tau_a}(\lambda_a) \hat{P} + B_{\tau_a}(\lambda_a) \hat{K}_a & \hat{P} C_z^\top + \hat{K}_a^\top D_z^\top \\ * & -\beta \hat{P} & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (5.54)$$

Por argumentos de convexidade, se a relação (5.44) é satisfeita para todo $i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$ e todo $j \in \{1, 2\}$, então (7.71) também satisfaz para todo $\lambda_a \in \mathcal{B}_{\lambda_a}$.

Aplicando também a troca de variáveis na inequação (5.51) resulta

$$\|z(t)\|_2^2 < x_a^\top(0) \hat{P}^{-1} x_a(0) \quad (5.55)$$

Mas definindo $X = X^\top > \hat{P}^{-1}$ (conforme (5.45) pelo complemento de Schür) produz a relação (5.46). \square

Teorema 5.2. *Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas $\hat{P} \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, $\hat{S} \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$ e $X \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, uma matriz $\hat{K}_a \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$ e um escalar positivo $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ que satisfaçam*

$$\begin{bmatrix} \text{He} \{ A_{a(i,j)} \hat{P} + B_{a(i)} \hat{K}_a \} + \hat{S} & A_{\tau_a(j)} \hat{P} + B_{\tau_a(j)} \hat{K}_a & \hat{P} C_z^\top + \hat{K}_a^\top D_z^\top \\ * & (\mu - 1) \hat{S} & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (5.56)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ * & \hat{P} \end{bmatrix} > 0, \quad (5.57)$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$ e todo $j \in \{1, 2\}$. Então o sistema (4.34) com $K_a = \hat{K}_a \hat{P}^{-1}$ é assintoticamente estável para qualquer sinal $\tau(t)$ que satisfaça $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ e $\dot{\tau} \in \mathcal{B}_{\dot{\tau}} = (-\infty, \mu]$. Também, a função de custo \mathcal{J}_2 satisfaz

$$\mathcal{J}_2 < x_a^\top(0) X x_a(0) \quad (5.58)$$

quando $x_a(0) \neq 0$ e $x_a(t) = 0 \forall t < 0$.

Demonstração. Conforme já demonstrado no Teorema 2.5 (baseado no Teorema da Estabilidade de Lyapunov-Krasovskii) considere o funcional:

$$V(x_{a\xi}(t)) = x_a^\top(t) P x_a(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x_a^\top(\varphi) S x_a(\varphi) d\varphi \quad (5.59)$$

onde $\xi \in [-\tau(t), 0]$, $P = P^\top > 0$ e $S = S^\top > 0$. Neste caso, o sistema é assintoticamente estável se

$$\dot{V}(x_{a\xi}(t)) = \dot{x}_a^\top(t) P x_a(t) + x_a^\top(t) P \dot{x}_a(t) + x_a^\top(t) S x_a(t) - x_a^\top(t) (1 - \dot{\tau}(t)) S x_a(t) < 0. \quad (5.60)$$

Limitando a taxa de variação do atraso conforme $\dot{\tau}(t) \leq \mu$, então segue que a condição

$$\dot{V}(x_{a\xi}(t)) < \dot{x}_a^\top(t)Px(t) + x_a^\top(t)P\dot{x}_a(t) + x_a^\top(t)Sx_a(t) - x_a^\top(t)(1 - \mu)Sx_a(t) < 0. \quad (5.61)$$

assegura a estabilidade assintótica do sistema.

Reforçando ainda o a seguinte condição

$$\dot{V}(x_a(t)) < -z^\top(t)z(t) \quad (5.62)$$

implica (por integração) que

$$\|z(t)\|_2^2 < x_a^\top(0)Px_a(0) + \int_{-\tau(0)}^0 x_a^\top(t)Sx_a(t)dt < x_a^\top(0)Px_a(0) + \int_{-\tau_{sup}}^0 x_a^\top(t)Sx_a(t)dt. \quad (5.63)$$

Assumindo ainda que $x_a(0) \neq 0$ e $x_a(t) = 0 \forall t < 0$ resulta que

$$\|z(t)\|_2^2 < x_a^\top(0)Px_a(0). \quad (5.64)$$

Combinando as relações (5.61) e (5.62), e aplicando a dinâmica do sistema produz

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{PA_a(\lambda_a) + PB_a(\lambda_a)K_a\} + S & PA_{\tau_a}(\lambda_a) + PB_{\tau_a}(\lambda_a)K_a & C_z^\top + K_a^\top D_z^\top \\ * & (\mu - 1)S & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.65)$$

Pré- e pós-multiplicando a relação (5.65) por $\text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, I\}$ e substituindo:

$$\hat{P} = P^{-1}, \quad \hat{S} = P^{-1}SP^{-1}, \quad \hat{K}_a = K_aP^{-1}, \quad (5.66)$$

resulta em

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{A_a(\lambda_a)\hat{P} + B_a(\lambda_a)\hat{K}_a\} + \hat{S} & A_{\tau_a}(\lambda_a)\hat{P} + B_{\tau_a}(\lambda_a)\hat{K}_a & \hat{P}C_z^\top + \hat{K}_a^\top D_z^\top \\ * & (\mu - 1)\hat{S} & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (5.67)$$

Novamente, pela propriedade da convexidade, se a relação (5.56) é satisfeita para todo $i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$ e todo $j \in \{1, 2\}$, então (5.67) também satisfaz para todo $\lambda_a \in \mathcal{B}_{\lambda_a}$.

Aplicando também a troca de variáveis na inequação (5.64) resulta que $\|z(t)\|_2^2 < x(0)^\top \hat{P}^{-1}x(0)$. Mas definindo $X = X^\top > \hat{P}^{-1}$ (conforme (5.57) pelo complemento de Schür) produz a relação (5.58). \square

Observação 5.1. Enquanto que o Teorema 5.1 (Razumikhin) apresenta uma condição de estabilidade independente da trajetória do atraso, o Teorema 5.1 (Krasovskii) requer uma restrição para a taxa de variação máxima $\dot{\tau}(t)$. Neste último caso, porém, a solução é

possivelmente menos conservadora para aplicações onde naturalmente $\tau(t)$ varia lentamente. Também podem haver sistemas em que o Teorema 5.1 não é capaz de fornecer uma solução factível (FRIDMAN, 2014).

Ao utilizar o Teorema 5.2, contudo, deve-se garantir que o atraso observado respeite a condição $\dot{\tau}(t) \leq \mu$. Para auxiliar na escolha do limite μ , pode-se estimar a taxa de variação máxima esperada $\hat{\mu}$ da solução exata de $\tau(t)$ com base nos limites Ω_1 e Ω_2 do sinal de transformação. Para isso, pode-se considerar a solução do seguinte valor supremo

$$\sup_{t \geq t_0, e_{\tau}(t)=0} \left(\dot{\tau}(t) \right) = \sup_{t \geq t_0} \left(1 - \frac{\Omega(t)}{\Omega(t - \tau(t))} \right) < \hat{\mu} = 1 - \frac{\Omega_1}{\Omega_2}. \quad (5.68)$$

5.5.4 Passo-a-passo sistemático de projeto

Para resolver de forma sistemática o Problema 5.1 com base nos Teoremas 5.1 e 5.2 é aconselhável o seguinte fluxo de projeto:

- **Passo 1:** Obter o modelo da planta na forma politópica conforme apresentado na Seção 3.1.
- **Passo 2:** Verificar se os sinais de referência/distúrbio são representáveis na forma $r(t) = p_r(\phi(t))$, $d(t) = p_d(\phi(t))$. Identificar o período T_p de $p_r(\cdot)$ e $p_d(\cdot)$. Então definir o fator ϱ para definir o período do sinais no domínio- θ : $T_\theta = \varrho T_p$.
- **Passo 3:** Definir os limites Ω_1 e Ω_2 do politopo que enquadra o parâmetro variante $\Omega(t)$. Estime a variação máxima do atraso $\hat{\mu}$ pela equação (5.68).
- **Passo 4:** Escolher a frequência- θ de corte do filtro passa-baixas do Controlador Repetitivo Transformado. Uma escolha razoável é

$$\omega_{c\theta} > \omega_{0\theta} = \frac{2\pi}{T_\theta}. \quad (5.69)$$

- **Passo 5:** Computar os parâmetros compensados τ_θ e $k_{f\theta}$ em função de $\omega_{c\theta}$.
- **Passo 6:** Definir as matrizes diagonais Q_z e R_z para formular o critério de desempenho transitório do sistema.
- **Passo 7:** Construir as matrizes (5.35) o modelo politópico aumentado do sistema.
- **Passo 8:** Resolver o seguinte problema de otimização convexa baseado no Teorema 5.1 (Razumikhin):

$$\underset{X, \hat{P}, \hat{K}}{\text{minimizar}} \text{tr}(X) \text{ sujeito a } \{ (5.45), (5.44) \}, \quad (5.70)$$

realizando uma varredura na escolha de β . Considerar a solução com o menor valor objetivo $\text{tr}(X)$. Caso não seja possível encontrar uma solução factível, retornar ao Passo 3 e reduzir $\omega_{c\theta}$, ou pular para o Passo 9.

- **Passo 9:** Resolver o seguinte problema de otimização convexa baseado no Teorema 5.2 (Krasovskii):

$$\underset{X, \hat{P}, \hat{K}}{\text{minimizar}} \text{tr}(X) \text{ sujeito a } \{ (5.57), (5.56) \}. \quad (5.71)$$

realizando uma varredura na escolha de μ .

- **Passo 10:** Comparar as soluções factíveis obtidas no Passo 8 e Passo 9. Ponderar o valor objetivo $\text{tr}(X)$ e a máxima taxa de variação μ permitida para o atraso, relacionando com o atraso máximo esperado $\hat{\mu}$ para a aplicação. Então escolher uma solução definitiva para utilizar o ganho de realimentação K_a sintetizado.
- **Passo 11:** Escolher uma taxa de decaimento α para o observador. Uma boa escolha é uma taxa de decaimento mais rápida que a dinâmica do sistema.
- **Passo 12:** Analisar o desempenho em malha-fechada do sistema. Se o erro residual relativo às harmônicas dos sinais de referência/distúrbio for elevado, considerar retornar ao Passo 2 e elevar $\omega_{c\theta}$.

5.6 Exemplo Numérico 1: Inversor de Frequência

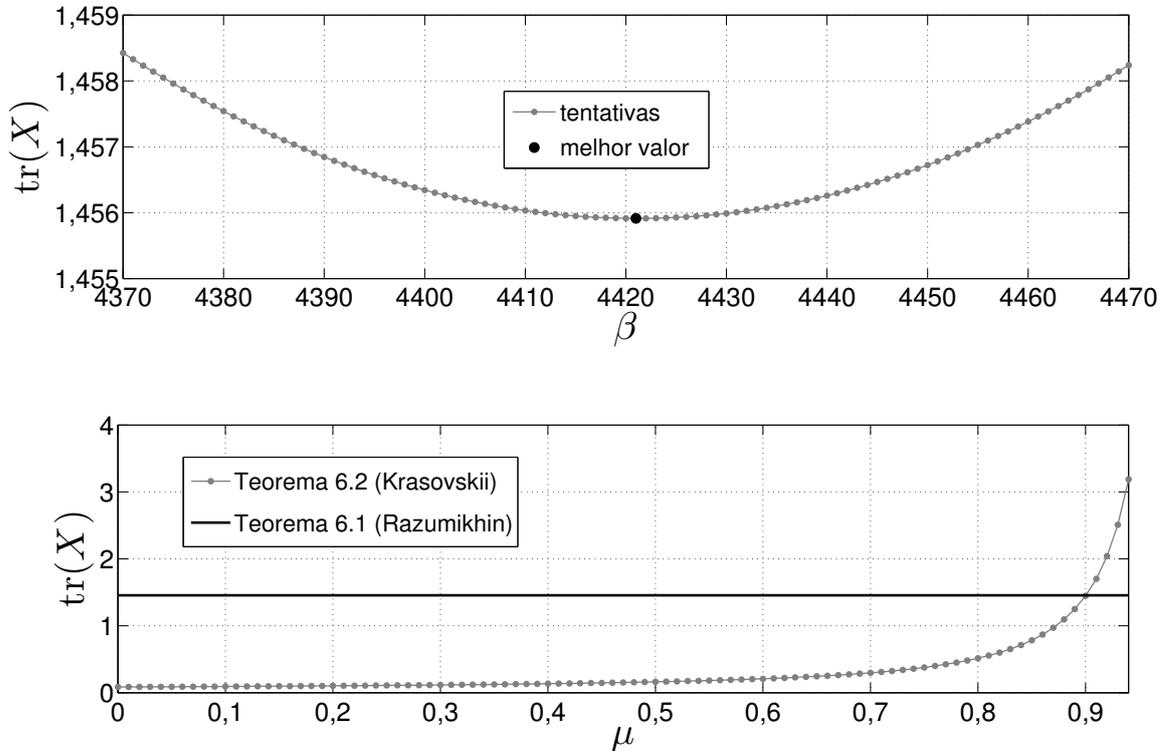
Considere para este exemplo numérico o mesmo sistema inversor de frequência *PWM* abordado na Seção 4.5. O objetivo de controle neste exemplo é regular a saída do inversor para seguir um sinal de referência $r(t) = V_{pk} \text{sen}(\phi(t))$ de frequência variável no tempo $\dot{\phi}(t) = 2\pi f_o(t)$, conforme as equações (4.41) e (4.42). Serão utilizados os mesmos sinais de transformação $\theta(t) = \phi(t)$ e $\Omega(t) = \dot{\phi}(t)$ definidos para o Controlador Ressonante Transformado, capazes de representar o sinal de referência no domínio- θ com um período fixo de $T_\theta = 2\pi$ rad.

A mesma faixa de garantia de desempenho considerada para o projeto do Controlador Ressonante Transformado também será aqui utilizada. Isto é, $f_{o1} \leq f_o(t) \leq f_{o2}$, para $f_{o1} = 20$ Hz e $f_{o2} = 120$ Hz, levando aos limites $\Omega_1 = 125,6637$ rad/s e $\Omega_2 = 753,9822$ rad/s do politopo \mathcal{B}_Ω que engloba os valores admissíveis do parâmetro variante do controlador.

Foi escolhida uma frequência- θ de corte do filtro de $\omega_{c\theta} = 25\omega_{0\theta}$, ou seja, pouco acima de uma década da frequência- θ fundamental de $\mathbf{r}(\theta)$. Sabe-se que $\omega_{0\theta} = 2\pi/T_\theta = 1$, portanto $\omega_{c\theta} = 25$ foi o valor considerado. Determinados $\omega_{c\theta}$ e T_θ , foram calculados os parâmetros compensados τ_θ e $k_{f\theta}$ utilizando as expressões (5.20) e (5.21), o que resultou nos valores $\tau_\theta = 1,9873\pi$ e $k_{f\theta} = 1,0008$. A partir destes parâmetros verificou-se que o atraso máximo do Controlador Repetitivo Transformado é $\tau_{sup} = \tau_\theta/\Omega_1 = 0,0497$ s.

As mesmas penalidades da síntese \mathcal{H}_2 consideradas no projeto do Controlador Ressonante Transformado foram aqui utilizadas, realizando apenas a adequação da dimensão

Figura 22 – Acima, a varredura realizada para encontrar o melhor valor de β para síntese utilizando o Teorema 5.1. Abaixo, a derivada máxima μ permitida para $\tau(t)$ e o respectivo valor objetivo da síntese utilizando o Teorema 5.2.



das matrizes. Isto é, foi definido $R_z = 1$ e $Q_z = \text{diag}\{Q_x, Q_c\}$, com $Q_x = I_2$ e $Q_c = 10$. Utilizando o LMILAB, foram resolvidos problemas de otimização com base nos Teoremas 5.1 (Razumikhin) e 5.2 (Krasovskii), seguindo o fluxo descrito no passo-a-passo da Subseção 5.5.4. A Figura 22 mostra (acima) a varredura realizada para encontrar o valor ótimo para o escalar β presente no Teorema 5.1. O melhor valor encontrado foi $\beta = 4421$, produzindo o menor objetivo $\text{tr}(X) = 1,4559$ pelo problema de otimização. A Figura 22 também apresenta (abaixo) o valor objetivo $\text{tr}(X)$ obtido para diferentes valores de μ (isto é, a máxima taxa de variação permitida para o atraso do controlador), agora referindo-se ao uso do Teorema 5.2. Através desta análise pôde-se concluir que o método de Krasovskii oferece uma solução menos conservadora até a taxa máxima de $\mu = 0,9$, para este exemplo específico. Acima deste patamar, a solução pelo método de Razumikhin mostra-se menos conservadora, visto que a derivada máxima do atraso é ilimitada quando utiliza-se esta formulação para prova de estabilidade. Com base nos limites Ω_1 e Ω_2 , espera-se uma taxa de variação máxima de $\hat{\mu} = 0,8333$ para o atraso, utilizando a relação (5.68). Através desta análise, seria razoável a escolha de alguma solução por Krasovskii com μ entre 0,8333 e 0,9, ou diretamente a solução por Razumikhin que permite taxa de variação ilimitada para o atraso. Foi escolhido aqui trabalhar com esta última opção. O ganho de realimentação K_a resultante desta síntese selecionada está disposto no Apêndice 1. Também, a taxa de

decaimento $\alpha = 100$ foi definida para observação do atraso.

Para avaliar a eficácia do Controle Repetitivo Transformado, este será comparado a um Controlador Repetitivo tradicional. Forçando $\Omega(t) = \Omega_n$ (com $\Omega_n = 2\pi f_{0n}$ e $f_{0n} = 60$ Hz representando a frequência nominal de sintonia) é possível gerar um Controlador Repetitivo tradicional (sintonizado para esta frequência específica) a partir do Controlador Repetitivo Transformado, conforme a demonstração na sequência.

Deixe ω_{cn} ser frequência usual de corte do Controlador Repetitivo, k_f o ganho do filtro e τ_n o atraso nominal deste controlador. Deixe a dinâmica deste controlador ser então expressa por

$$\dot{x}_{rp}(t) = -\omega_{cn} x_{rp}(t) + k_{f_n} \omega_c \eta(t - \tau_n). \quad (5.72)$$

Comparando com a dinâmica do Controlador Repetitivo Transformado em (7.52), para $\Omega(t) = \Omega_n$, verifica-se a equivalência

$$\omega_{cn} = \Omega_n \omega_{c\theta}, \quad k_{f_n} = k_{f\theta}. \quad (5.73)$$

Visto também que $\Omega(t) = \Omega_n$, então $\theta(t) = \Omega_n t$, então τ_n é a solução de (5.5), ou seja, $\Omega_n t - \Omega_n t + \Omega_1 \tau_n = \tau_\theta$ que resulta

$$\tau_n = \frac{\tau_\theta}{\Omega_n}. \quad (5.74)$$

Utilizando os mesmos parâmetros $\omega_{c\theta}$, τ_θ , $k_{f\theta}$ projetados para o Controle Repetitivo Transformado, resultou em $\omega_{cn} = 9424,8$ rad/s, $k_{f_n} = 1,0008$ e $\tau_n = 0,0166$.¹ Assim, este Controlador Repetitivo tradicional também considera a compensação proposta do filtro passa-baixas e o mesmo ganho de realimentação K_a pode ser utilizado, visto que $\Omega_n \in \mathcal{B}_\Omega$.

Conforme a análise comparativa realizada entre os Controladores Ressonante Transformado e tradicional, é conveniente aqui manter os mesmos ganhos de realimentação para destacar as diferenças de desempenho pela dinâmica dos controladores, e não pelo nível da realimentação dos estados.

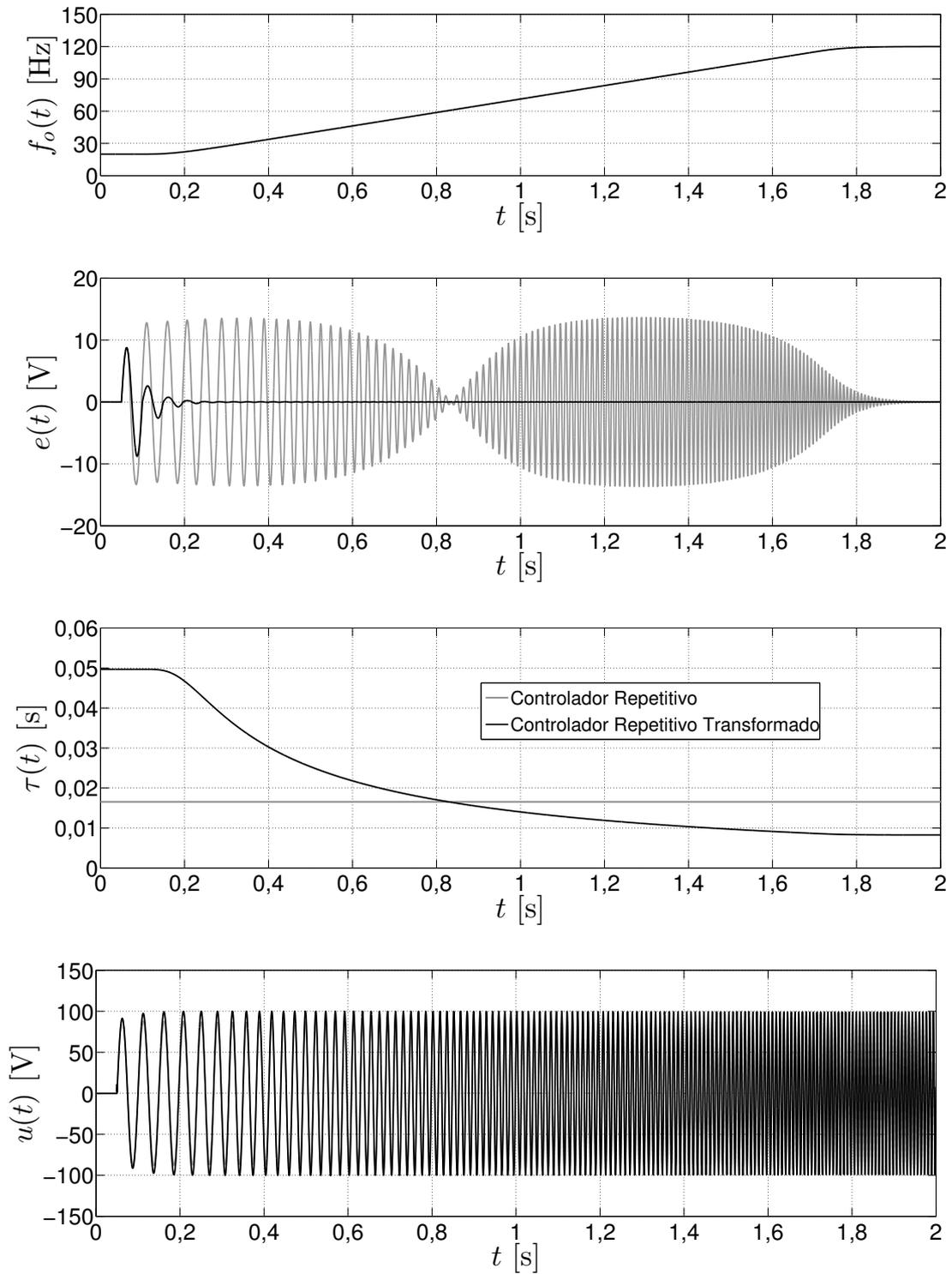
A simulação dos controladores foi efetuada no MATLAB/Simulink seguindo as mesmas configurações descritas na Seção 4.5, referente à análise comparativa do Controlador Ressonante Transformado.

5.6.1 Análise e Discussão dos Resultados

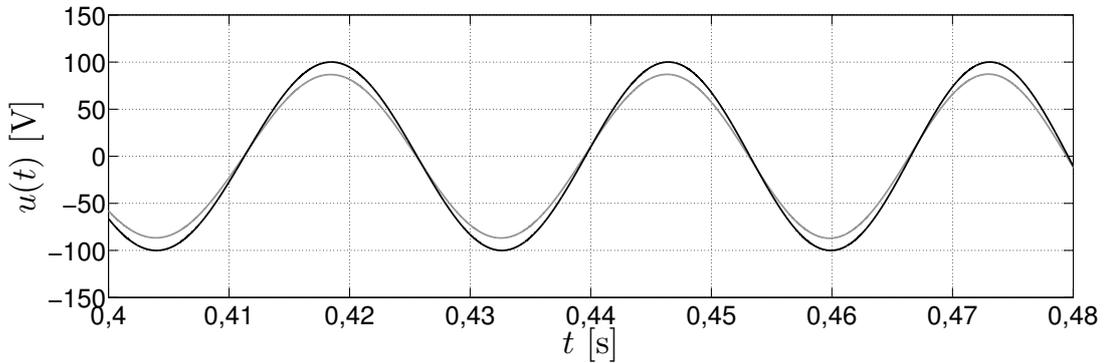
A Figura 23 apresenta a comparação do erro $e(t)$, do sinal de controle $u(t)$ e do atraso $\tau(t)$ entre o Controlador Repetitivo Transformado e o tradicional. Analisando o sinal de erro, nota-se que o Controlador Repetitivo tradicional garante a rejeição da perturbação apenas quando a frequência $f_o(t)$ da referência encontra-se próximo ao valor

¹ Conforme esta demonstração, o Controlador Repetitivo tradicional é um caso particular do Controlador Repetitivo Transformado, quando seu sinal de transformação $\Omega(t)$ é mantido constante.

Figura 23 – Acima, a frequência fundamental instantânea $f_o(t)$ do sinal de referência $r(t)$. Abaixo, a comparação do erro $e(t)$, do atraso $\tau(t)$ e do sinal de controle $u(t)$ entre o Controlador Repetitivo Transformado e o tradicional.



nominal 60 Hz ou na sua primeira harmônica 120 Hz. O Controlador Repetitivo Transformado por sua vez mantém o erro praticamente nulo após o tempo de acomodação de sua dinâmica.

Figura 24 – Comparação ampliada dos sinais de controle $u(t)$ na Figura 23.

A Figura 23 apresenta também o atraso variante $\tau(t)$ gerado pelo observador proposto para atingir a sincronia com a variação do período da referência.

Os sinais de controle $u(t)$ podem ser comparados no final de Figura 23 e na visualização ampliada da Figura 24. Verifica-se que o Controlador Repetitivo tradicional, quando fora de sincronia, gera uma forma de onda praticamente em fase com o sinal do Controlador Transformado, porém com uma pequena diferença de amplitude.

5.7 Exemplo Numérico 2: Motor de Corrente Contínua

Considere agora o sistema motor de corrente contínua conforme apresentado na Subseção 4.6. Supostamente neste exemplo de aplicação, o eixo do motor está sujeito a um torque de distúrbio por excentricidade na forma $d(t) = J_e p_d(x_0(t))$.

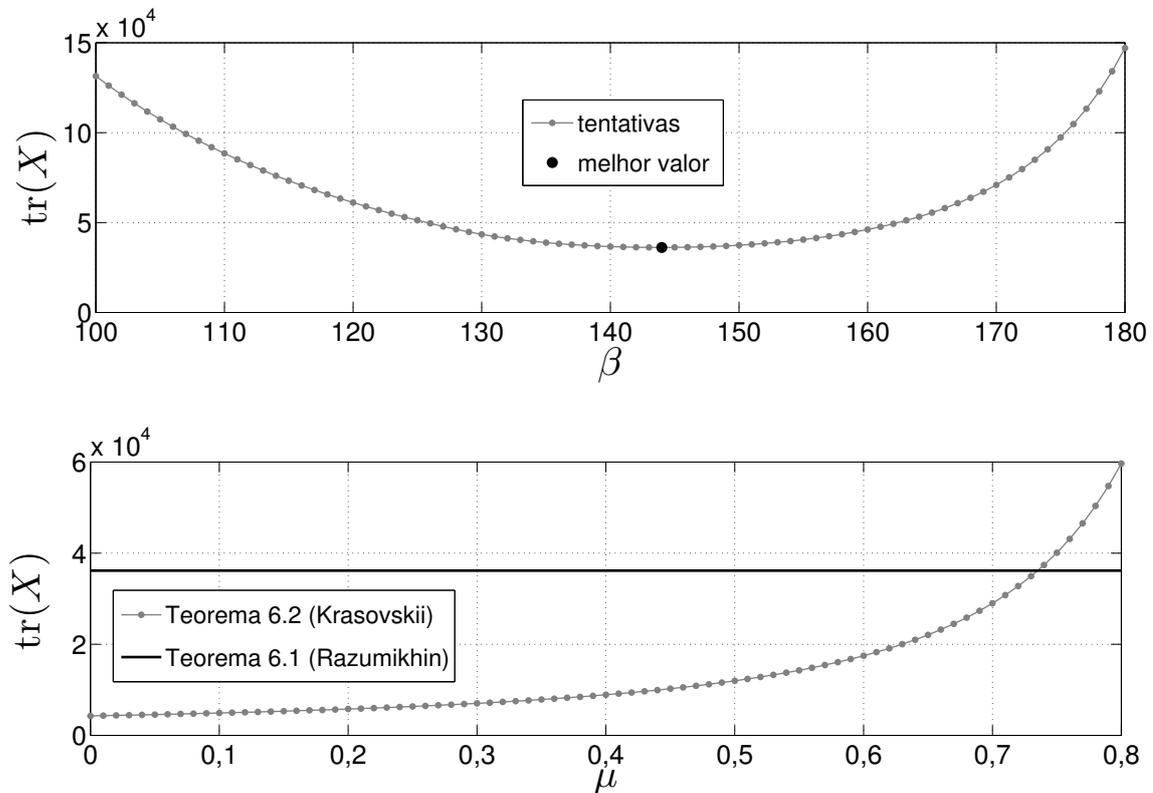
Os mesmos sinais de transformação definidos na Subseção 4.6 são aqui utilizados, isto é, $\theta(t) = x_0(t)$, e $\Omega(t) = x_1(t)$. Recordando, esta escolha leva o sinal de distúrbio para domínio- θ com um período fixo de $T_\theta = 2\pi$ rad. Aqui também considera-se a garantia de desempenho para os limites $\Omega_1 = 4$ rad/s e $\Omega_2 = 16$ rad/s.

Neste exemplo foi escolhido novamente com uma frequência de corte do filtro de $\omega_{c\theta}$. Assim os mesmos parâmetros compensados do exemplo anterior são aproveitados aqui: $\tau_\theta = 1,9873\pi$ rad e $k_{f\theta} = 1,008$. Dados estes parâmetros, o atraso de transporte supremo do Controlador Repetitivo Transformado é $\tau_{sup} = \tau_\theta/\Omega_1 = 1,5608$ s. Este foi, portanto, o tempo de início t_0 da observação do atraso $\tau(t)$.

A síntese \mathcal{H}_2 foi realizada com as mesmas penalidades utilizadas no projeto do Controlador Ressonante Transformado para esta mesma aplicação, ou seja, $R_z = 1$ e $Q_z = \text{diag}\{Q_x, Q_c\}$, onde $Q_x = I_2$ e $Q_c = 300$. Novamente, foram seguidos os passos descritos na Subseção 5.5.4, onde os problemas de otimização com *LMI*s foram solucionados pelo LMILAB. Referindo-se ao Teorema 5.1 (Razumikhin), foi encontrado o menor valor objetivo $\text{tr}(X) = 3,6147 \cdot 10^4$ para o escalar $\beta = 144$, conforme apresentado ao topo da

Figura 25. Já Referindo-se ao Teorema 5.2 (Krasovskii), foram encontradas soluções factíveis para μ no máximo até 0,8, porém passando de 0,73 o valor objetivo já torna-se maior do que o gerado pelo Teorema 5.1. A taxa de variação máxima esperada neste exemplo, segundo a equação (5.68), é $\hat{\mu} = 0,75$. Com base na análise destes dados portanto, o ganho de realimentação sintetizado pelo método de Razumikhin mostra-se diretamente a melhor escolha a se considerar. De fato, esta foi a opção selecionada para análise comparativa. A matriz de ganhos K_a considerada está apresentada no Apêndice 1. Além disso, para implementação do observador do atraso foi escolhida a taxa de decaimento $\alpha = 10$.

Figura 25 – Acima, a varredura realizada para encontrar o melhor valor de β para síntese utilizando o Teorema 5.1. Abaixo, a derivada máxima μ permitida para $\tau(t)$ e o respectivo valor objetivo da síntese utilizando o Teorema 5.2.



A estratégia de controle proposta neste capítulo será comparada frente a um Controlador Repetitivo tradicional, sintonizado na frequência nominal de rotação $\Omega_n = 10$ rad/s. Os parâmetros equivalentes deste controlador foram determinados pelas relações (5.73) e (5.74), resultado $\omega_{cn} = 10$ rad/s e $\tau_n = 0,6243$ s.

A simulação dos controladores foi efetuada no MATLAB/Simulink seguindo as mesmas características consideradas para análise comparativa do Controlador Ressonante Transformado na Seção 4.6. A diferença é que aqui será considerado diretamente o cenário em que $p_d(\xi)$ é uma função triangular, visto que os Controladores Repetitivos já consideram o tratamento das componentes harmônicas dos sinais.

Diferentemente do exemplo numérico anterior, a análise subsequente será estendida para contemplar discussões a respeito da eficácia do método proposto de compensação do filtro passa-baixas e da metodologia de observação do atraso $\tau(t)$. Além disso será realizada uma breve comparação entre os Controladores Repetitivo e Ressonante Transformados.

5.7.1 Análise e Discussão dos Resultados

Na Figura 26 encontra-se a comparação da resposta temporal entre os Controladores Repetitivo Transformado e Repetitivo tradicional. Conforme esperado, a estratégia de controle proposta mantém o erro $e(t)$ muito próximo de zero após o tempo de acomodação do controlador. Já a metodologia tradicional de Controle Repetitivo só garante a rejeição da perturbação para a rotação específica de 10 rad/s. É interessante notar que o sinal de controle $u(t)$ do Controlador Repetitivo Transformado também demonstra-se menos oscilatório que o sinal de controle do Repetitivo tradicional, quando este encontra-se fora de sincronia, conforme ampliado pela Figura 27.

5.7.1.1 Análise da Compensação do Filtro Passa-Baixas

Até o momento, todos os Controladores Repetitivos comparados apresentavam a metodologia proposta de compensação do filtro passa-baixas. Agora deseja-se demonstrar que ocorre um significativa perda desempenho quando não considera-se esta compensação.

A Figura 28 compara o erro $e(t)$ entre os Controladores Repetitivo Transformado e tradicional. Aqui, porém, a compensação não é considerada, ou seja, utiliza-se $\tau_\theta = T_\theta = 2\pi$ rad (em oposição ao valor anterior de $\tau_\theta = 1,9873\pi$ rad) e $k_{f_\theta} = 1$ (ao invés de $k_{f_\theta} = 1,0008$). No caso do Repetitivo tradicional, os valor equivalentes não compensados são $\tau_n = \tau_\theta/\Omega_n = 0,6283$ s (em oposição ao valor anterior de $\tau_n = 0,6243$ s) e $k_{f_n} = 1$. Observe que o erro residual, mesmo no caso do Repetitivo Transformado, é visível durante todo o tempo de execução. Na sequência, a Figura 29 compara de forma ampliada a resposta em regime permanente do Repetitivo Transformado com e sem a compensação. Aqui verifica-se claramente a perda desempenho para rejeição de frequências baixas (próximas à fundamental) quando não utiliza-se o método proposto. Mais adiante, a Tabela 6 mostra o valor *RMS* do sinal de erro $e(t)$ para todos os tipos de Controladores Repetitivos testados. O cálculo do valores efetivo foi realizado a partir do instante 15s para desconsiderar o tempo de acomodação inicial dos controladores. Note que a compensação proposta reduz o *RMS* do erro de 0,0076 rad/s para o valor de 0,0005 rad/s, no caso do Controlador Repetitivo Transformado.

Figura 26 – Comparação da saída $y(t)$, do sinal de erro $e(t)$, do atraso $\tau(t)$ e do sinal de controle $u(t)$ entre o Controlador Repetitivo Transformado e o tradicional. Neste cenário, a função da excentricidade $p_d(\xi)$ é triangular.

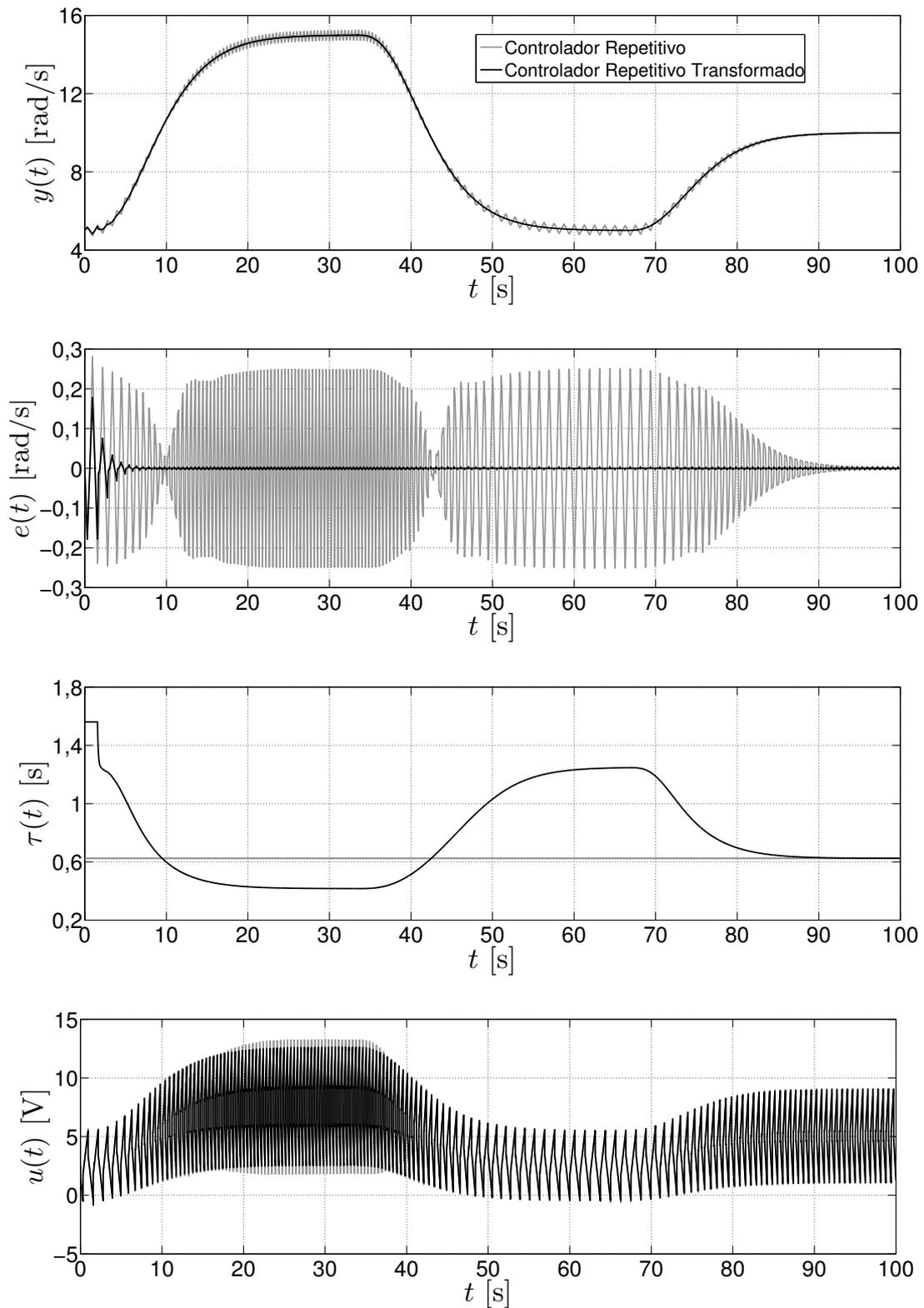


Figura 27 – Comparação ampliada do sinal de controle $u(t)$ apresentado na Figura 26.

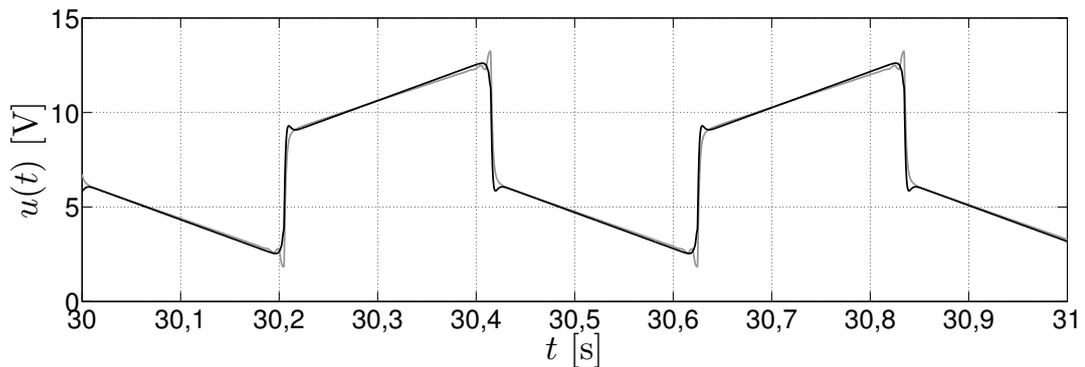


Figura 28 – Comparação do sinal de erro $e(t)$ entre os Controladores Repetitivo Transformado e Repetitivo sem compensação do filtro passa-baixas.

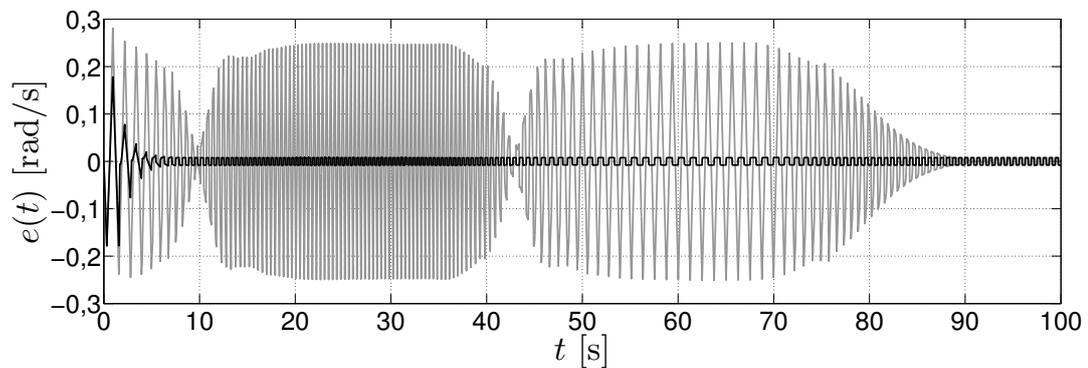
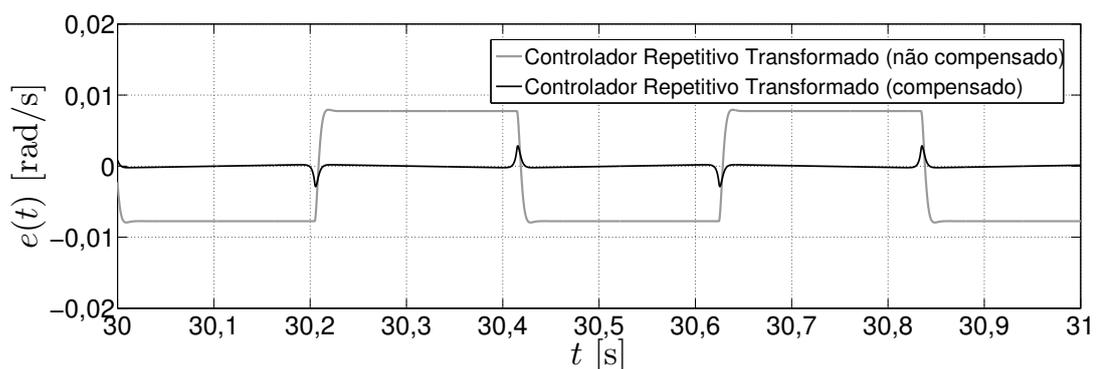


Figura 29 – Comparação ampliada do sinal de erro $e(t)$ entre Controladores Repetitivos Transformados com e sem compensação do filtro passa-baixas.



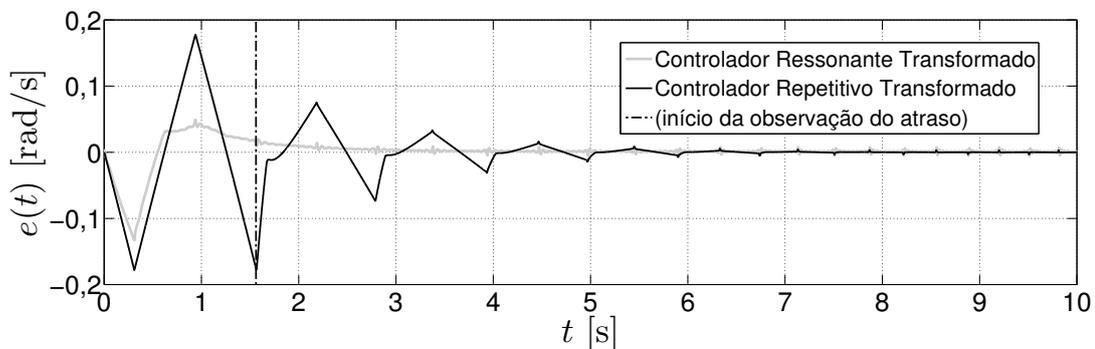
5.7.1.2 Comparação com o Controlador Ressonante Transformado

Seguindo análise dos resultados, as Figuras 30 e 31 comparam o desempenho do Controlador Repetitivo Transformado com o Controlador Ressonante Transformado com oito modos harmônicos. Visualizando o erro transitório na Figura 30, percebe-se que o Controlador Ressonante Transformado apresenta um tempo de acomodação menor em

Tabela 6 – Comparação do valor RMS do sinal de erro $e(t)$ entre diferentes controladores. A faixa de tempo para o cálculo do valor efetivo foi de 15 s até 60 s.

Controlador	RMS de $e(t)$ [rad/s]
Repetitivo (não compensado)	0,1223
Repetitivo Transformado (não compensado)	0,0076
Repetitivo (compensado)	0,1220
Repetitivo Transformado (compensado)	0,0005
Ressonante Transformado (8 modos)	0,0014

Figura 30 – Comparação do erro transitório entre os Controladores Ressonante (de oito modos) e Repetitivo Transformados.



relação ao Controlador Repetitivo Transformado. Em contrapartida, ao visualizar a Figura 31 nota-se que o erro residual em regime permanente do Repetitivo é bem inferior ao erro residual do Ressonante com oito modos. De fato, conforme a Tabela 6, o valor RMS do erro em regime do Repetitivo Transformado é quase três vezes menor do que o Ressonante Transformado de oito modos. Outra vantagem do Controlador Repetitivo é o sinal de controle visivelmente menos oscilatório conforme mostra a Figura 31.

5.7.1.3 Análise do Observador do Atraso

Para comprovar a funcionalidade do observador proposto para o cômputo do atraso $\tau(t)$ está apresentada a Figura 32. A condição inicial $\tau(t_0)$ e o tempo de início t_0 da observação foram configurados iguais ao atraso máximo $\tau_{sup} = 1,5608$ s seguindo assim os requisitos comentados na Seção 5.3.1. A Figura 32 demonstra claramente que o sinal de erro de observação $e_\tau(t)$, após instante de início t_0 , tende exponencialmente para zero como a taxa de decaimento $\alpha = 10$ escolhida. A trajetória $\tau(t)$ gerada foi mostrada anteriormente na Figura 26

Figura 31 – Comparação do erro e do sinal de controle em regime permanente entre os Controladores Ressonante (de oito modos) e Repetitivo Transformados.

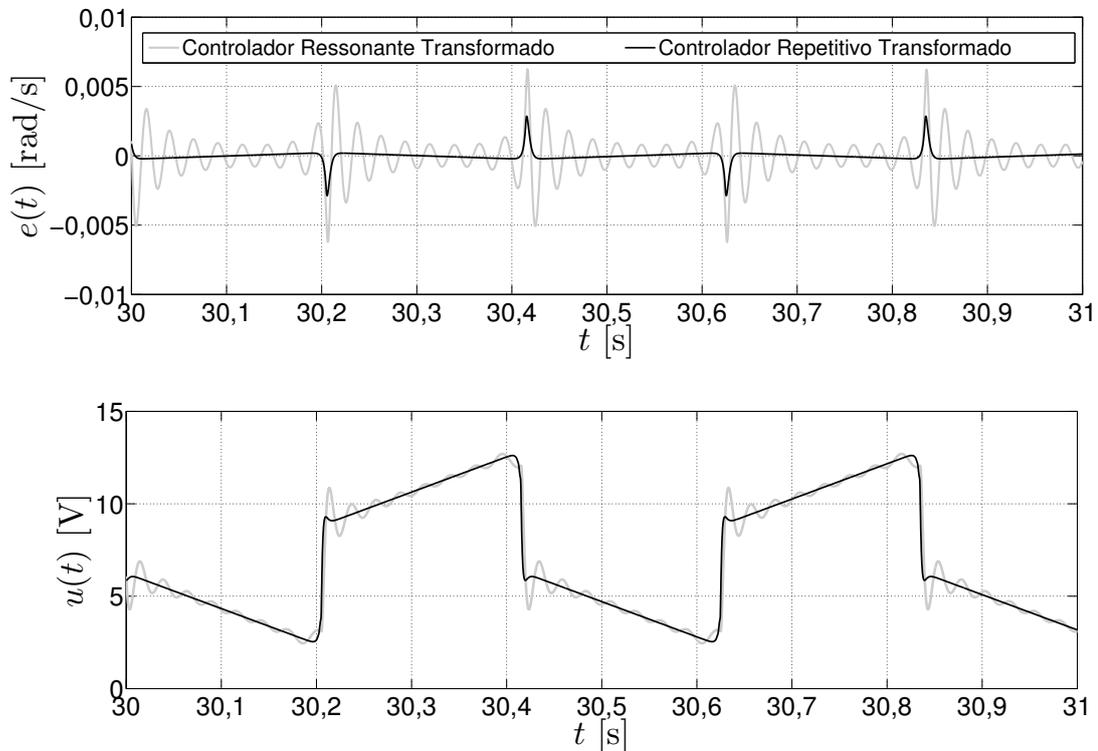
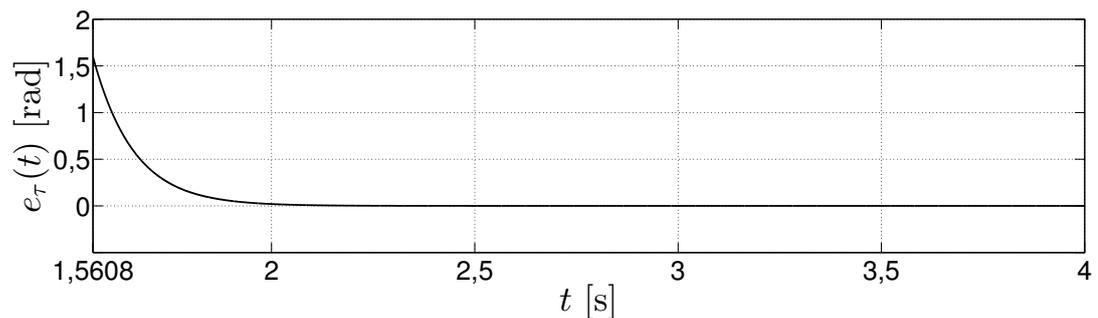


Figura 32 – Dinâmica do erro de observação $e_r(t)$ do atraso do Controlador Repetitivo Transformado. A convergência assintótica para zero segue até o final da simulação realizada.



5.8 Comentários Finais

Este capítulo apresentou a topologia proposta de Controle Repetitivo Transformado baseada na teoria do domínio- θ desenvolvida no Capítulo 3. Uma metodologia de síntese robusta foi apresentada para o projeto dos parâmetros do controlador, onde condições de estabilidade baseadas nos Teoremas de Lyapunov-Krasovskii e de Lyapunov-Razumikhin foram consideradas para tratar o atraso de transporte inserido na malha de controle do sistema.

6 Aplicação para Turbinas Eólicas

Neste capítulo, as estratégias de controle desenvolvidas previamente são empregadas para a aplicação de turbinas eólicas. Visto que estes sistemas apresentam característica dinâmica altamente não-linear, multi-variável e multi-objetivo, foi necessário o desenvolvimento de uma metodologia de projeto especial para o emprego dos Controladores Transformados nesta aplicação.

6.1 Introdução à Aplicação

Dados recentes evidenciam o aumento da temperatura global (MARCOTT et al., 2013) e uma forte correlação da temperatura dos oceanos com o níveis CO_2 (SHAKUN et al., 2012) sugerem uma urgência na procura de fontes de energia renováveis. Neste contexto as turbinas eólicas têm um significativo papel, com grande capacidade para produção de energia em todo o mundo (CHU; MAJUMDAR, 2012). Para reduzir o custo por kWh e melhorar a eficiência, existe uma forte tendência ao aumento do tamanho das turbinas eólicas. Por este motivo é imprescindível o desenvolvimento de materiais e metodologias de controle para mitigar os esforços mecânicos sofridos por estas estruturas, sem comprometer a produção de energia (HAYMAN; WEDEL-HEINEN; BRØNDSTED, 2008; BOSSANYI, 2003). Uma observação crucial é que uma porção significativa das cargas mecânicas presentes nas turbinas eólicas originam-se de distorções no perfil da velocidade do vento incidente nas pás, devido aos efeitos de cisalhamento do solo (*shear*), sombra da torre (*tower shadow*) e atenuação por turbinas próximas (*wake*) (BIANCHI; BATTISTA; MANTZ, 2006). Além disso, como as turbinas eólicas são máquinas rotativas, estas cargas tornam-se periódicas, levando conseqüentemente ao desgaste da estrutura por tensões de fadiga. Dadas estas observações, as metodologias de Controladores Transformados desenvolvidas encaixam-se fortemente para esta aplicação.

6.2 Modelagem do Sistema

Esta seção apresenta a modelagem dinâmica de uma turbina eólica. Primeiramente será apresentado um modelo não-linear para o sistema. Então serão abordados os pontos de equilíbrio ideais do sistema, de forma a obter a produção ótima de potência. Em seguida será organizado um modelo linearizado (visando o projeto de controle) para descrever a dinâmica do sistema no entorno destes pontos de equilíbrio.

Será considerado aqui uma turbina eólica de eixo de rotação horizontal e com três pás aerodinâmicas. O modelo do sistema utilizado apresenta dois graus de liberdade: a

rotação da turbina e o modo de deflexão frontal da torre. Serão considerados os efeitos dinâmicos mecânicos e aerodinâmicos, seguindo a abordagem adotada por (BIANCHI; BATTISTA; MANTZ, 2006; ØSTERGAARD; STOUSTRUP; BRATH, 2009). O leitor pode utilizar as Tabelas 7, 8 e 9 como guia para a simbologia adotada para representar o sistema. A Tabela 9 apresenta os parâmetros numéricos do modelo com base em uma turbina eólica de larga escala de potência nominal de 2,5 MW. Além disso, o esquemático da Figura 33 representa os principais sinais do modelo da turbina eólica.

Tabela 7 – Lista de sinais importantes do modelo no espaço de estados. Segue que $i \in \{1, 2, 3\}$.

Símbolo	Significado	Unidade
x_0	posição angular da turbina	rad
x_1	rotação da turbina	rad/s
x_2	deflexão frontal da torre	m
x_3	taxa de deflexão frontal da torre	m/s
u_i	comando do ângulo de inclinação da i -ésima pá	° (graus)
u_4	comando do torque contrário do gerador	Nm
y_i	carga mecânica medida na i -ésima pá	N
d_i	velocidade do vento na i -ésima pá	m/s
δ	velocidade do vento média	m/s

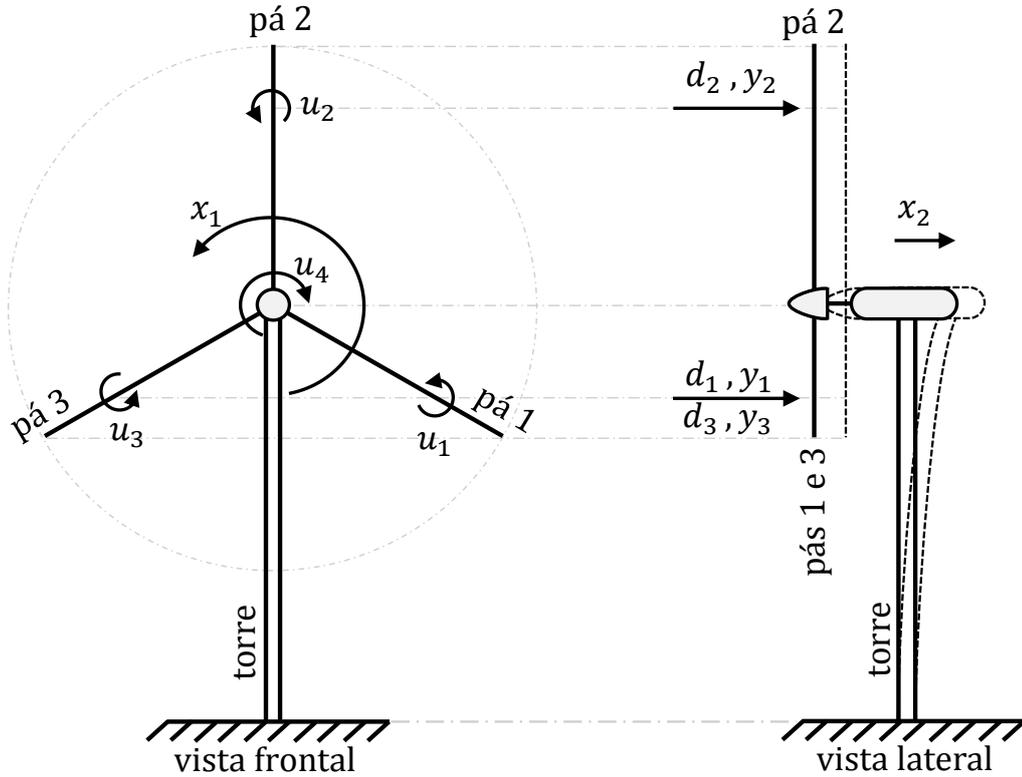
Tabela 8 – Lista de variáveis auxiliares. Segue que $i \in \{1, 2, 3\}$.

Símbolo	Significado	Unidade
$F_{A,i}$	empuxo aerodinâmico frontal na i -ésima pá	N
$M_{A,i}$	momento aerodinâmico útil na i -ésima pá	Nm
$P_{A,i}$	potência aerodinâmica capturada pela i -ésima pá	W
ϑ_i	razão entre velocidade do vento tangencial de ponta e a velocidade do vento relativa à i -ésima pá	–
C_F	coeficiente de empuxo aerodinâmico	–
C_M	coeficiente de momento aerodinâmico	–
C_P	coeficiente de potência aerodinâmica	–

Tabela 9 – Parâmetros de um turbina eólica típica de três pás e potência nominal de 2,5 MW (SELVAM et al., 2009).

Símbolo	Significado	Valor	Unidade
R_t	raio da turbina	40	m
ρ_a	densidade do ar	1,25	kg/m ³
m_t	massa da estrutura	$1,5657 \cdot 10^5$	kg
d_t	fator de amortecimento da torre	$2,8 \cdot 10^3$	Ns/m
s_t	fator elástico da torre	$1,235 \cdot 10^6$	N/m
J_r	momento de inércia do rotor	$1,1255 \cdot 10^6$	kgm ²

Figura 33 – Diagrama esquemático dos principais sinais do modelo da turbina eólica.



6.2.1 Modelo Não-Linear do Sistema

Suponha que $x \in \mathbb{R}^3$ é o vetor de estados do sistema, $u \in \mathbb{R}^4$ e o vetor de entradas de controle e $d \in \mathbb{R}^3$ é o vetor de entradas de distúrbio. A Tabela 7 apresenta o significado físico de cada sinal presente nestes vetores. Dadas estas definições pode-se escrever a dinâmica não-linear do sistema no espaço de estados conforme:¹.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), d(t)) , \quad (6.1)$$

onde a função vetor $f(x, u, d)$ é definida como (BIANCHI; BATTISTA; MANTZ, 2006; SELVAM et al., 2009),

$$f(x, u, d) = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_r} \left(\sum_{i=1}^3 M_{A,i}(x, u, d) - u_4 \right) \\ x_3 \\ \frac{1}{m_t} \left(\sum_{i=1}^3 F_{A,i}(x, u, d) - s_t x_2 - d_t x_3 \right) \end{bmatrix} . \quad (6.2)$$

As funções auxiliares $F_{A,i}(x, u, d)$, $M_{A,i}(x, u, d)$ (conforme a descrição da Tabela 8) são expressas segundo

¹ Adicionalmente segue a dinâmica da posição angular da turbina é $\dot{x}_0(t) = x_1(t)$. Esta equação será tratada a parte da representação dinâmica principal do sistema.

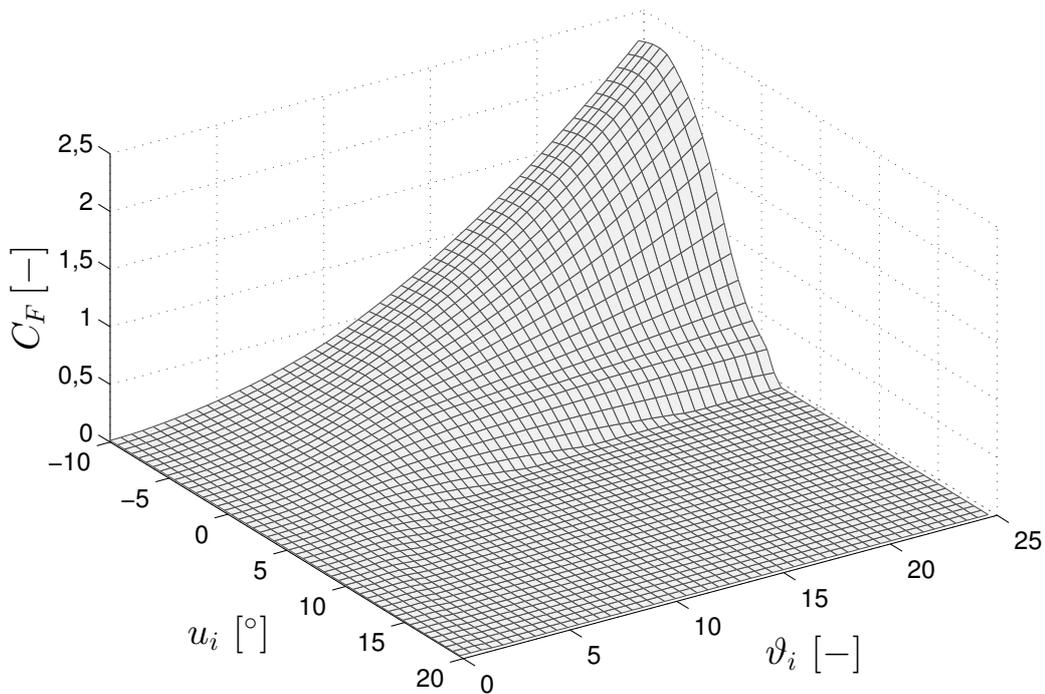
$$M_{A,i}(x, u, d) = \frac{1}{2} \rho_a \pi R_t^3 (d_i - x_3)^2 C_M(\vartheta_i, u_i) , \quad (6.3)$$

$$F_{A,i}(x, u, d) = \frac{1}{2} \rho_a \pi R_t^2 (d_i - x_3)^2 C_F(\vartheta_i, u_i) , \quad (6.4)$$

$$\vartheta_i = \frac{R_t x_1}{d_i - x_3} . \quad (6.5)$$

O perfil das funções de eficiência aerodinâmica $C_M(\vartheta_i, u_i)$ e $C_F(\vartheta_i, u_i)$ estão demonstrados nas Figuras 34 e 35. Estes coeficientes foram estimados através das equações da Teoria do Elemento da Pá (*Blade Element Theory*) (BIANCHI; BATTISTA; MANTZ, 2006).

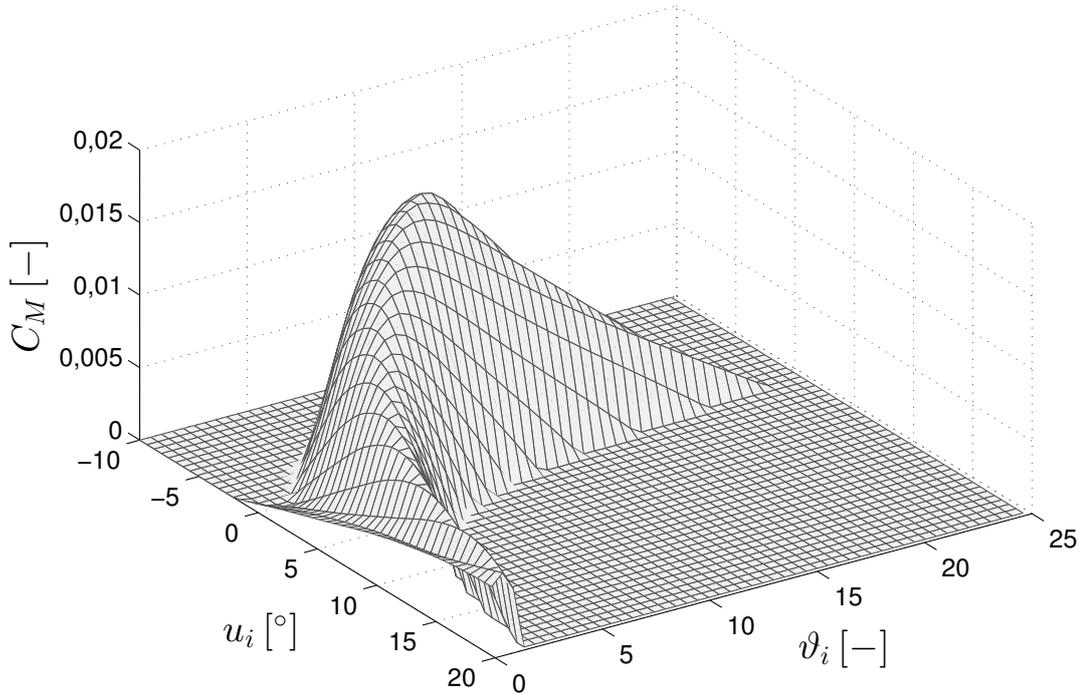
Figura 34 – Coeficiente $C_F(\vartheta_i, u_i)$ de empuxo aerodinâmico (BIANCHI; BATTISTA; MANTZ, 2006).



Vale destacar que $M_{A,i}(x, u, d)$ representa o momento aerodinâmico útil produzido na i -ésima pá, ou seja, que contribui para a produção de potência. Por outro lado a força aerodinâmica $F_{A,i}(x, u, d)$ atua na direção normal ao plano de rotação da turbina e portanto introduz tensões indesejadas na estrutura. O objetivo de controle, além de assegurar a produção de potência, será minimizar as oscilações $F_{A,i}(x, u, d)$ em cada pá para aliviar a fadiga no sistema. Para isso, será assumido que as pás da turbina eólica estão equipadas com sensores capazes de medir estas forças tensoras (SELVAM et al., 2009). Desta forma, define-se a saída do sistema $y \in \mathbb{R}^3$ como

$$y(t) = h(x(t), u(t), d(t)) , \quad (6.6)$$

Figura 35 – Coeficiente $C_M(\vartheta_i, u_i)$ de momento aerodinâmico útil (BIANCHI; BATTISTA; MANTZ, 2006).



onde a função vetor $h(x, u, d) \in \mathbb{R}^3$ é

$$h(x, u, d) = \begin{bmatrix} F_{A,1}(x, u, d) \\ F_{A,2}(x, u, d) \\ F_{A,3}(x, u, d) \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

6.2.2 Pontos de Equilíbrio Ótimos

Um quesito fundamental para o projeto de controle de turbinas eólicas é a extração ideal da potência disponível pelo vento. Uma prática comum na literatura para manipular a eficiência do sistema é considerar um ponto de equilíbrio variável, dependente da velocidade média do vento $\delta(t)$ incidente no plano da turbina (ØSTERGAARD; STOUSTRUP; BRATH, 2009). Na prática é possível detectar este sinal em tempo real por meio de sensores *LIDAR* (*Light Detection and Ranging*) (SIMLEY et al., 2014), e com base nesta informação pode-se alterar o sistema de controle para deslocar o equilíbrio do sistema.

Os regimes de operação típicos de uma turbina eólica estão organizados na Tabela 10. Note que quando $\delta(t)$ está abaixo de um valor mínimo δ_{min} deve-se travar a turbina, pois potência produzida neste caso seria muito baixa para viabilizar o funcionamento do sistema. Por outro lado, quando $\delta(t)$ é superior a um valor máximo δ_{max} , também deve-se travar a turbina, neste caso para evitar danos aos sistema. Quando a velocidade

do vento é dita abaixo da velocidade nominal ($\delta_{min} \leq \delta(t) < \delta_n$) o objetivo é obter a máxima transferência de potência. Já quando velocidade do vento é dita acima da velocidade nominal ($\delta_n \leq \delta(t) \leq \delta_{max}$) deve-se limitar a produção de potência para o valor máximo/nominal que a turbina comporta, para evitar assim demasiadas cargas mecânicas no sistema.

Tabela 10 – Regimes de operação de uma turbina eólica em função da velocidade média do vento.

Velocidade média do vento	Regime de operação
$\delta(t) < \delta_{min}$	Turbina travada
$\delta_{min} \leq \delta(t) < \delta_n$	Máxima transferência de potência
$\delta_n \leq \delta(t) \leq \delta_{max}$	Produção constante de potência
$\delta(t) > \delta_{max}$	Turbina travada

Na sequência são demonstradas as funções de equilíbrio para as variáveis do sistema: $\bar{x}(\delta)$, $\bar{u}(\delta)$, $\bar{d}(\delta)$ visando assegurar a forma de atuação descrita na Tabela 10.

Para a análise do equilíbrio do sistema deve-se considerar

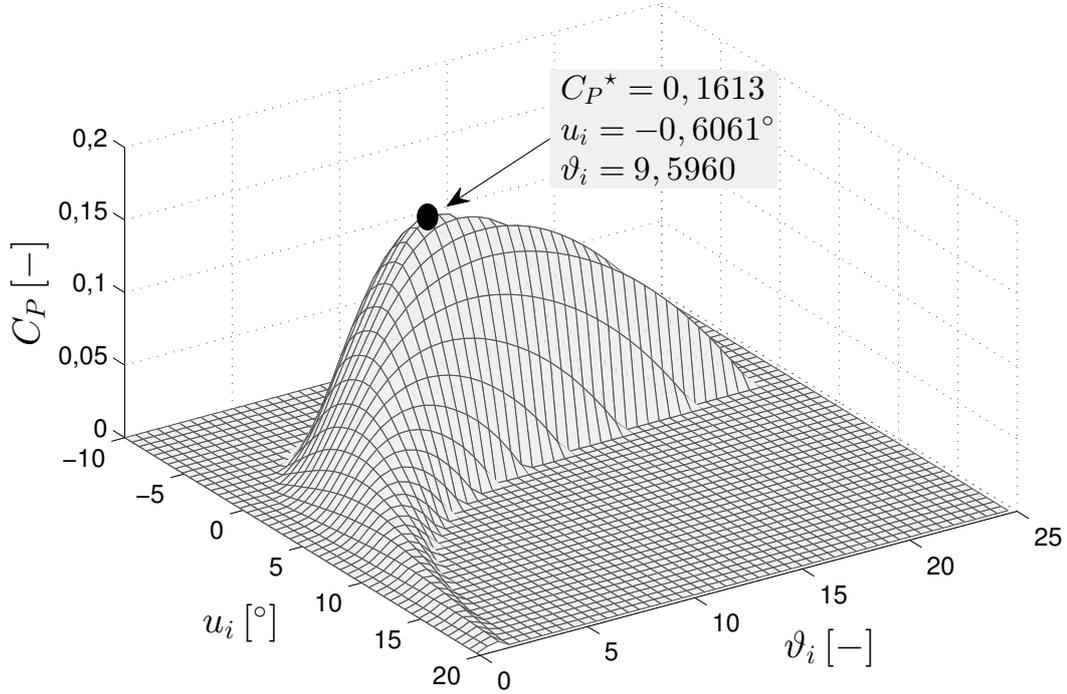
$$f(\bar{x}(\delta), \bar{u}(\delta), \bar{d}(\delta)) = 0 . \quad (6.8)$$

Também, deve-se desconsiderar modos persistentes dos sinais de distúrbio, considerando assim que $\bar{d}(\delta) = \delta$, ou seja, o ponto de equilíbrio da velocidade do vento de cada pá igual a própria velocidade média δ .

Note que com base apenas na equação (6.8) existem múltiplas soluções possíveis $\bar{x}(\delta)$ e $\bar{u}(\delta)$. Contudo, a solução de interesse é a que satisfaz a produção de potência apresentada na Tabela 10. Para isso, deve-se incluir uma restrição relacionada à potência de equilíbrio sistema. Sabe-se que a potência aerodinâmica produzida em cada pá é $P_{A,i}(x, u, d) = M_i(x, u, d) x_1$ (o momento na pá multiplicado pela rotação da turbina), equação que é comumente escrita na forma

$$P_{A,i}(x, u, d) = \frac{1}{2} \rho \pi R_t^2 (d_i - x_3)^3 C_P(\vartheta_i, u_i) , \quad (6.9)$$

onde $C_P(\lambda_i, u_i) := \vartheta_i C_M(\vartheta_i, u_i)$ é o coeficiente de potência aerodinâmica relativo a i -ésima pá. Este coeficiente representa a razão entre a potência disponível no vento (dentro do plano da turbina) e a potência capturada pela pá. A Figura 36 mostra o perfil desta função utilizando $C_M(\vartheta_i, u_i)$ apresentado anteriormente na Figura 34. Observe o ponto ótimo $C_P^* = 0.1613$ onde ocorre a máxima captura de potência de cada pá, neste exemplo, para $u_i = -0,6061^\circ$ e $\vartheta_i = 9,5960$. A potência total da turbina é dada pelo somatório das potências capturadas pelas pás: $P_A = P_{A,1} + P_{A,2} + P_{A,3}$. A eficiência máxima total desta turbina eólica é portanto $3 C_P^* = 0,4839$.

Figura 36 – Coeficiente $C_P(\vartheta_i, u_i)$ de potência aerodinâmica extraída na i -ésima pá.

Por meio da expressão (6.9) pode-se determinar a potência total $\bar{P}_A(\delta)$ produzida no equilíbrio do sistema:

$$\bar{P}_A(\delta) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \rho \pi R_t^2 \delta^3 C_P \left(\frac{R_t \bar{x}_1(\delta)}{\delta}, \bar{u}_i(\delta) \right) \quad (6.10)$$

Para garantir a simetria do sistema é adequado utilizar $\bar{u}_1(\delta) = \bar{u}_2(\delta) = \bar{u}_3(\delta)$, ou seja, mesmo ângulo de inclinação de equilíbrio para todas pás. Assim $\bar{P}_A(\delta)$ é simplificado para

$$\bar{P}_A(\delta) = \frac{3}{2} \rho \pi R_t^2 \delta^3 C_P \left(\frac{R_t \bar{x}_1(\delta)}{\delta}, \bar{u}_i(\delta) \right) \quad (6.11)$$

para qualquer $i \in \{1, 2, 3\}$.

Assim, resta apenas determinar a curva de potência ideal $\bar{P}_A(\delta)$ a ser imposta para possibilitar então a solução de $\bar{x}(\delta)$ e $\bar{u}(\delta)$.

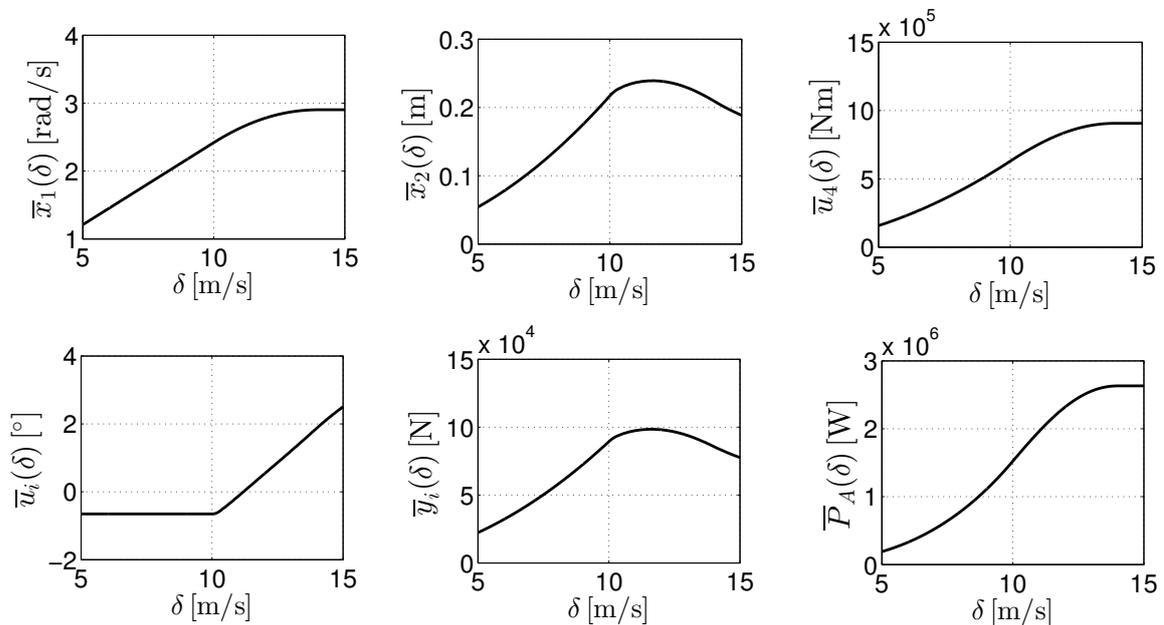
Com base na Tabela 10, quando $\delta_{min} \leq \delta < \delta_n$ deve-se obter a máxima extração de potência, o que é equivalente a forçar $C_P(\vartheta_i, u_i) = C_P^*$. Já quando $\delta_n \leq \delta \leq \delta_{max}$ deve-se limitar a potência produzida para a produção nominal, isto é: $\bar{P}_A(\delta) = \bar{P}_A(\delta_n)$. A curva resultante desejada pode ser expressa conforme

$$\bar{P}_A(\delta) = \begin{cases} \frac{3}{2} \rho \pi R_t^2 \delta^3 C_P^* & \text{se } \delta_{min} \leq \delta < \delta_n \\ \frac{3}{2} \rho \pi R_t^2 \delta_n^3 C_P \left(\frac{R_t \bar{x}_1(\delta_n)}{\delta_n}, \bar{u}_i(\delta_n) \right) & \text{se } \delta_n \leq \delta \leq \delta_{max} \end{cases} \quad (6.12)$$

Neste exemplo será considerado $\delta_{min} = 5$ m/s, $\delta_n = 12$ m/s e $\delta_{max} = 15$ m/s. O valor da potência nominal assim é $\bar{P}_A(\delta_n) = 2,631$ MW. A curva de potência de equilíbrio pode ser visualizada no canto inferior direito da Figura 37. Para garantir uma transição suave entre os regimes de operação, a curva $\bar{P}_A(\delta)$ foi suavizada entre 11 m/s e 13 m/s pela inserção de um polinômio de terceira ordem (permitindo assim igualar o valor e a derivada nas conexões).

Combinando a curva de potência $\bar{P}_A(\delta)$ desejada com as equações (6.11) e (6.8), pode-se resolver numericamente as funções de equilíbrio $\bar{x}(\delta)$, $\bar{u}(\delta)$ e $\bar{y}(\delta)$. Estas funções de equilíbrio restantes estão organizadas também na Figura 37.

Figura 37 – Pontos de equilíbrio do sistema em função da velocidade média do vento δ .



É interessante ressaltar a função de equilíbrio da rotação da turbina $\bar{x}_1(\delta)$. Observe que no regime de máxima transferência de potência a turbina opera com rotação variável. Neste caso, os sinais de distúrbio $d_i(t)$ devem apresentar um período variante no tempo, semelhante ao caso do motor desbalanceado operando com velocidade angular variante. Esta característica viabiliza a aplicação da metodologia de controle proposta neste trabalho.

6.2.3 Modelo no Entorno dos Pontos de Equilíbrio

O foco agora é a obtenção de um modelo numericamente tratável do ponto de vista de projeto de controle. Para isto será empregada a metodologia de linearização Jacobiana, que por fim irá resultar um modelo linear de parâmetros variantes no tempo. Esta característica está associada ao ponto de equilíbrio $\delta(t)$, visto que este é variante no tempo.

Primeiramente são definidas as variações dos sinais do sistema no entorno do ponto de equilíbrio:

$$\begin{aligned}\Delta d(t) &= d(t) - \bar{d}(\delta(t)) \\ \Delta x(t) &= x(t) - \bar{x}(\delta(t)) \\ \Delta u(t) &= u(t) - \bar{u}(\delta(t)) \\ \Delta y(t) &= y(t) - \bar{y}(\delta(t))\end{aligned}\quad (6.13)$$

Desenvolvendo a derivada temporal $\Delta \dot{x}(t)$ produz

$$\Delta \dot{x}(t) = \dot{x}(t) - \frac{\partial \bar{x}(\delta)}{\partial \delta} \dot{\delta}(t). \quad (6.14)$$

Realizando a expansão em Série de Taylor no termo $\dot{x}(t)$ resulta:

$$\Delta \dot{x}(t) = A(\delta(t)) \Delta x(t) + B(\delta(t)) \Delta u(t) + B_d(\delta(t)) \Delta d(t) + \mathcal{O}(2) - \frac{\partial \bar{x}(\delta)}{\partial \delta} \dot{\delta}(t) \quad (6.15)$$

De forma similar, desenvolvendo a expansão Série de Taylor $y(t)$ produz

$$\Delta y(t) = C(\delta(t)) \Delta x(t) + D(\delta(t)) \Delta u(t) + D_d(\delta(t)) \Delta d(t) + \mathcal{O}(2) \quad (6.16)$$

As matrizes $A(\delta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $B(\delta) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, $B_d(\delta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $C(\delta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $D(\delta) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, $D_d(\delta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ representam os seguintes Jacobianos:

$$\begin{aligned}A(\delta) &= \left. \frac{\partial f(x, u, d)}{\partial x} \right|_{\text{eq}(\delta)}, \quad B(\delta) = \left. \frac{\partial f(x, u, d)}{\partial u} \right|_{\text{eq}(\delta)}, \quad B_d(\delta) = \left. \frac{\partial f(x, u, d)}{\partial d} \right|_{\text{eq}(\delta)}, \\ C(\delta) &= \left. \frac{\partial h(x, u, d)}{\partial x} \right|_{\text{eq}(\delta)}, \quad D(\delta) = \left. \frac{\partial h(x, u, d)}{\partial u} \right|_{\text{eq}(\delta)}, \quad D_d(\delta) = \left. \frac{\partial h(x, u, d)}{\partial d} \right|_{\text{eq}(\delta)},\end{aligned}\quad (6.17)$$

onde $|\text{eq}(\delta)$ denota a avaliação da função resultante no ponto de equilíbrio do sistema dado δ , isto é: a substituição de x por $\bar{x}(\delta)$, de u por $\bar{u}(\delta)$ e de d por $\bar{d}(\delta)$. O símbolo " $\mathcal{O}(n)$ " em (6.14) e (6.15) denota os termos de ordem maior ou igual a n da Série de Taylor, isto é, os termos em função de $\Delta x^n(t)$, $\Delta x^{n+1}(t)$, $\Delta x^{n+2}(t)$, \dots , $\Delta u^n(t)$, $\Delta u^{n+1}(t)$, $\Delta u^{n+2}(t)$, \dots , $\Delta d^n(t)$, $\Delta d^{n+1}(t)$, $\Delta d^{n+2}(t)$, \dots .

Para obter um modelo linearizado, serão assumidas pequenas variações $\Delta x(t)$, $\Delta u(t)$, $\Delta d(t)$ das variáveis do sistema em relação ao equilíbrio, deste modo pode-se considerar que $\mathcal{O}(2) \approx 0$. Também será considerado que a velocidade média do vento varia lentamente ($\dot{\delta}(t) \approx 0$) produzindo a lenta variação do ponto de equilíbrio do sistema. Assim o último termo em (6.14) também será descartado. O modelo considerado para o projeto de controle portanto assume a forma:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}(t) &= A(\delta(t)) \Delta x + B(\delta(t)) \Delta u + B_d(\delta(t)) \Delta d \\ \Delta y(t) &= C(\delta(t)) \Delta x + D(\delta(t)) \Delta u + D_d(\delta(t)) \Delta d \end{cases} \quad (6.18)$$

Desenvolvendo as derivadas parciais em (6.17) pode-se escrever as matrizes do modelo como:

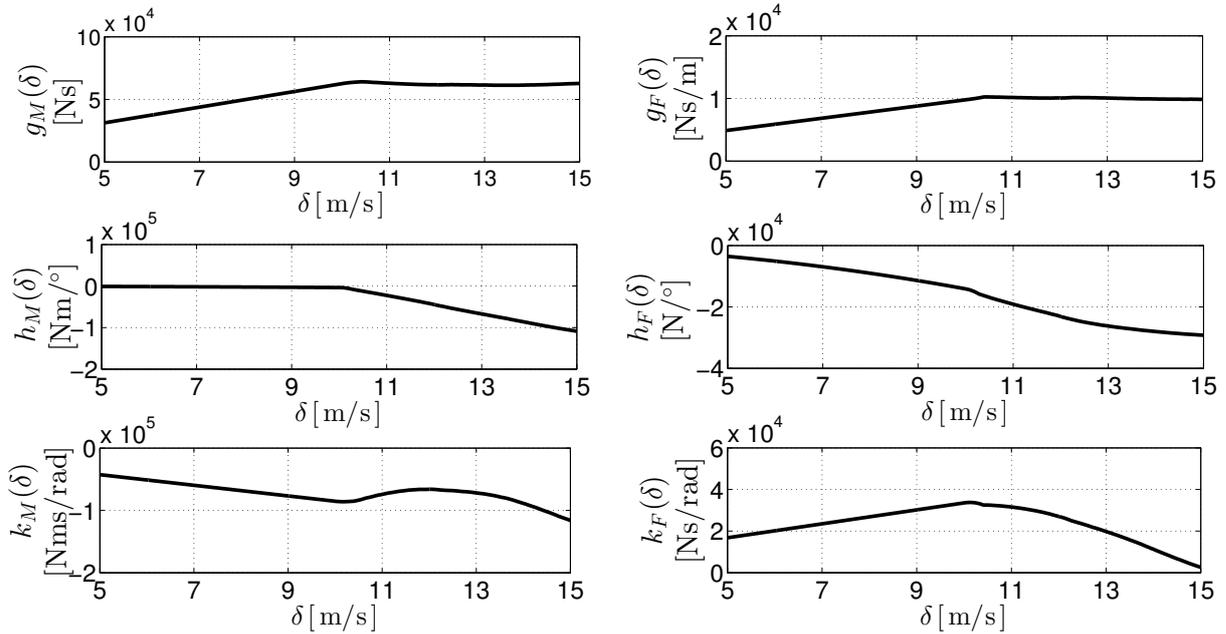
$$\begin{aligned}
A(\delta) &= \begin{bmatrix} \frac{3k_M(\delta)}{J_r} & 0 & -\frac{3g_M(\delta)}{J_r} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3k_F(\delta)}{m_t} & -\frac{s_t}{m_t} & -\frac{d_t + 3g_F(\delta)}{m_t} \end{bmatrix}, & C(\delta) &= \begin{bmatrix} k_F(\delta) & 0 & -g_F(\delta) \\ k_F(\delta) & 0 & -g_F(\delta) \\ k_F(\delta) & 0 & -g_F(\delta) \end{bmatrix}, \\
B(\delta) &= \begin{bmatrix} \frac{h_M(\delta)}{J_r} & \frac{h_M(\delta)}{J_r} & \frac{h_M(\delta)}{J_r} & -\frac{1}{J_r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h_F(\delta)}{m_t} & \frac{h_F(\delta)}{m_t} & \frac{h_F(\delta)}{m_t} & 0 \end{bmatrix}, & D(\delta) &= \begin{bmatrix} h_F(\delta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_F(\delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_F(\delta) & 0 \end{bmatrix}, \\
B_d(\delta) &= \begin{bmatrix} \frac{g_M(\delta)}{J_r} & \frac{g_M(\delta)}{J_r} & \frac{g_M(\delta)}{J_r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{g_F(\delta)}{m_t} & \frac{g_F(\delta)}{m_t} & \frac{g_F(\delta)}{m_t} \end{bmatrix}, & D_d(\delta) &= \begin{bmatrix} g_F(\delta) & 0 & 0 \\ 0 & g_F(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & g_F(\delta) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

As funções escalares $g_M(\delta)$, $h_M(\delta)$, $k_M(\delta)$, $g_F(\delta)$, $h_F(\delta)$, $k_F(\delta)$ são definidas pelas seguintes derivadas parciais:

$$\begin{aligned}
g_M(\delta) &:= \frac{\partial}{\partial d_i} M_{A,i}(\bar{x}(\delta), \bar{u}(\delta), \bar{d}(\delta)), & g_F(\delta) &:= \frac{\partial}{\partial d_i} F_{A,i}(\bar{x}(\delta), \bar{u}(\delta), \bar{d}(\delta)), \\
h_M(\delta) &:= \frac{\partial}{\partial u_i} M_{A,i}(\bar{x}(\delta), \bar{u}(\delta), \bar{d}(\delta)), & h_F(\delta) &:= \frac{\partial}{\partial u_i} F_{A,i}(\bar{x}(\delta), \bar{u}(\delta), \bar{d}(\delta)), \\
k_M(\delta) &:= \frac{\partial}{\partial x_1} M_{A,i}(\bar{x}(\delta), \bar{u}(\delta), \bar{d}(\delta)), & k_F(\delta) &:= \frac{\partial}{\partial x_1} F_{A,i}(\bar{x}(\delta), \bar{u}(\delta), \bar{d}(\delta)).
\end{aligned} \tag{6.20}$$

para qualquer $i \in \{1, 2, 3\}$.

As funções $F_{A,i}(x, u, d)$ e $M_{A,i}(x, u, d)$ dependem dos coeficientes de eficiência $C_F(\vartheta_i, u_i)$ e $C_M(\vartheta_i, u_i)$, estes que não apresentam uma descrição analítica, o que impede consequentemente de resolver as derivadas (6.20) analiticamente (ØSTERGAARD; STOUSTRUP; BRATH, 2009). Ao invés disso, é útil a resolução numérica destas funções realizando uma varredura na faixa de trabalho de δ , de posse das trajetórias de equilíbrio do sistema. Este procedimento foi realizado aplicando os parâmetros do sistema e as curvas de equilíbrio resolvidas anteriormente. O perfil resultante das funções $g_M(\delta) \cdots k_F(\delta)$ está demonstrado na Figura 38.

Figura 38 – Parâmetros variantes em função de δ no modelo linearizado do sistema.

6.3 Projeto dos Controladores Transformados

Os objetivos do sistema controle da turbina eólica são:

- Manter as variáveis do sistemas próximas aos pontos de equilíbrio mostrados na Figura 37 para garantir geração ideal de potência.
- Minimizar a influência das variações da velocidade do vento $\Delta d(t)$ na variação de carga mecânica $\Delta y(t)$ das pás da turbina, aliviando assim o dano estrutural no sistema por fadiga.

Para controlar o sistema sujeito a um ponto de equilíbrio variável é proposto o uso da arquitetura de controle descrita no diagrama de blocos da Figura 39. Supõe-se que a velocidade do vento média $\delta(t)$, os estados do sistema $x(t)$ e a saída $y(t)$ estão disponíveis em tempo-real. Assim pode-se determinar $\Delta x(t)$ e $\Delta y(t)$ pelo deslocamento destas variáveis em relação ao ponto de equilíbrio em função de $\delta(t)$. O controlador por sua vez é responsável por determinar $\Delta u(t)$ em função de $\Delta x(t)$ e $\Delta y(t)$. O sinal absoluto $u(t)$ é, por fim, gerado pela soma de $\Delta u(t)$ com o valores de equilíbrio das entradas de controle.

Para considerar a atenuação do distúrbio serão empregados os Controladores Resonante e Repetitivo Transformados baseados no PMI, onde a característica periódica de $\Delta d(t)$ é explorada para este fim. Uma breve análise da característica destes sinais de distúrbios é apresentada na sequência para justificar a aplicabilidade do controladores

aqui o vetor $\Xi \in \mathbb{R}^3$ denota o espaçamento angular de cada pá da turbina, isto é,

$$\Xi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}\pi \\ \frac{4}{3}\pi \end{bmatrix} \text{ rad} . \quad (6.22)$$

Observe que os sinais de distúrbio são dependentes da posição angular de cada pá, o que leva a produção de componentes periódicas nestes sinais visto que a turbina é uma máquina rotativa. Mais ainda, estas componentes periódicas apresentam um período variante no tempo durante o regime abaixo da velocidade média nominal, onde o ponto de equilíbrio da rotação é variável. Baseando-se nesta observação, a metodologia proposta de Controladores Ressonante e Repetitivo Transformado encaixa-se adequadamente para esta aplicação.

O primeiro passo para iniciar a definição dos controladores é a identificação dos sinais de transformação $\theta(t)$ e $\Omega(t)$. Considerando lentas alterações no campo de vento $\mathcal{V}(\psi_t, r_t, t) \approx \mathcal{V}(\psi_t, r_t)$ e também a lenta mudança do ponto de equilíbrio do sistema, pode-se escrever que

$$\Delta d_i(t) \approx p_d(x_0(t) + \Xi_i) , \quad (6.23)$$

onde $p_d(\xi)$ é uma função² com período 2π . Assim é percebido que é suficiente a escolha dos sinais de transformação

$$\theta(t) = x_0(t) , \quad \Omega(t) = x_1(t) , \quad (6.24)$$

onde aqui será utilizado $\varrho = 1$. Estes sinais de transformação representam o distúrbio no domínio- θ conforme

$$\Delta \mathbf{d}_i(\theta) \approx p_d(\theta + \Xi_i) , \quad (6.25)$$

onde período dos sinais neste domínio é a constante $T_\theta = 2\pi$ rad. Note que é possível definir o sinal de transformação $\theta(t)$ como a posição angular de qualquer pá, visto que não altera o período dos sinais no domínio- θ .

6.3.2 Definição dos sinais de erro do sistema

O sinal de erro principal do sistema $e(t) \in \mathbb{R}^3$ é expresso como

$$e(t) = -\Delta y(t) \quad (6.26)$$

representando a variação da carga mecânica entorno do ponto de equilíbrio, para cada pá da turbina. Nesta formulação apresentada, os sinais de referência para as saídas são iguais a zero, pois $\Delta y(t) = 0$ representa que $y(t) = \bar{y}(\delta(t))$, ou seja, o valor de equilíbrio desejado da saída.

² Note que $p_d(\xi)$ não precisa necessariamente ser conhecida para o projeto do controle, apenas deve-se ter o conhecimento de seu período T_p .

Para utilizar os controladores propostos nesta aplicação, portanto, é necessário adequar as definições originais para comportar o espaço euclidiano deste sinal de erro. O procedimento a ser adotado consiste em replicar a dinâmica do controlador para cada sinal de erro. Portanto a arquitetura de controle adotada deve ser capaz de atenuar individualmente as cargas mecânicas das pás, explorando a possibilidade de gerar sinais de inclinação das pás $u_1(t)$, $u_2(t)$ e $u_3(t)$ diferentes a cada instante. Este paradigma de implementação é conhecido na literatura como *Individual Pitch Control* (Controle Individual de Inclinação das Pás) (ZHANG; CHEN; CHENG, 2013).

Para considerar a regulação da rotação da turbina eólica $x_1(t)$ para o valor de equilíbrio, será utilizado um sinal de erro auxiliar $e_x(t)$ definido como

$$e_x(t) = -C_x \Delta x(t), \quad C_x = [1 \ 0 \ 0]. \quad (6.27)$$

Enquanto que o erro principal $e(t)$ será tratado por meio dos Controladores Ressonante e Repetitivo Transformados, este erro auxiliar $e_x(t)$ será tratado por um integrador, objetivando apenas a rejeição do nível DC em regime permanente.

6.3.3 Abordagem 1: Controlador Ressonante Transformado

Com base na definição original do Controlador Ressonante Transformado apresentada no Capítulo 4 será desenvolvida a adaptação para o caso de múltiplas entrada de erro. Considere agora $x_r \in \mathbb{R}^6$ o vetor de estados do Controlador Ressonante Transformado, onde a dinâmica é expressa por

$$\dot{x}_r(t) = \Omega(t) \left(A_{r\theta} x_r(t) + B_{r\theta} e(t) \right) \quad (6.28)$$

e as matrizes $A_{r\theta} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, $B_{r\theta} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$, neste caso, são a combinação diagonal dos blocos originais, isto é:

$$A_{r\theta} = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (6.29)$$

$$B_{r\theta} = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Aqui está implícito o uso dos parâmetros $\omega_{r\theta} = 1$ e $k_{r\theta} = 1$, dado que o período T_θ foi previamente fixado no valor de 2π rad. Na forma de múltiplos modos harmônicos, este controlador é expresso conforme

$$\dot{x}_R(t) = \Omega(t) \left(A_{R\theta} x_R(t) + B_{R\theta} e(t) \right) \quad (6.30)$$

onde $x_R \in \mathbb{R}^{6n_h}$, n_h representa o número de modos harmônicos e as matrizes $A_{R\theta} \in \mathbb{R}^{6n_h \times 6n_h}$ e $B_{R\theta} \in \mathbb{R}^{6n_h \times 3}$ são definidas por:

$$A_{R\theta} = \text{diag} \{A_{r\theta}, 2A_{r\theta}, \dots, n_h A_{r\theta}\}, \quad B_{R\theta} = \begin{bmatrix} B_{r\theta} \\ B_{r\theta} \\ \vdots \\ B_{r\theta} \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Para incluir a rejeição assintótica de componentes DC dos sinais $e(t)$, serão acrescentados estados integradores. Para o erro auxiliar $e_x(t)$, também será acrescentado um integrador adicional conforme mencionado anteriormente. A dinâmica dos estados integradores é portanto

$$\dot{x}_I(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}, \quad (6.32)$$

onde $x_I \in \mathbb{R}^4$ representa os estados integradores. Segue que $e_x(t)$ é definido precisamente por:

$$e_x(t) = -C_x \Delta x(t), \quad C_x = [1 \ 0 \ 0]. \quad (6.33)$$

Realizada a definição das porções ressonante e integradora, pode-se escrever a representação total do controlador, utilizando um vetor estado do controlador:

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} x_I(t) \\ x_R(t) \end{bmatrix}, \quad (6.34)$$

onde $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ tal que ($n_c = 4 + 6n_h$). A dinâmica deste controlador pode ser expressa como

$$\dot{x}_c(t) = A_c \Omega(t) x_c(t) + B_{c1} e_x(t) + (B_{c2} + B_{c3} \Omega(t)) e(t) \quad (6.35)$$

tal que as matrizes constantes $A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_{c1} \in \mathbb{R}^{n_c \times 1}$, $B_{c2} \in \mathbb{R}^{n_c \times 3}$ e $B_{c3} \in \mathbb{R}^{n_c \times 3}$ são

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 6n_h} \\ \star & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 6n_h} \\ \star & \star & A_{R\theta} \end{bmatrix}, \quad B_{c1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{3 \times 1} \\ 0_{6n_h \times 1} \end{bmatrix}, \quad B_{c2} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 3} \\ I_3 \\ 0_{6n_h \times 3} \end{bmatrix}, \quad B_{c3} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} \\ B_{R\theta} \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$

Na sequência, será demonstrada conveniente notação adotada onde o termo $\Omega(t)$ é expresso em evidência.

6.3.3.1 Modelo Aumentado da Planta com Controlador Ressonante Transformado

O objetivo agora é realizar a combinação da dinâmica do controlador proposto com o modelo do sistema entorno dos pontos de equilíbrio, produzindo um modelo aumentado do sistema. Por fim será incluída a lei de controle de realimentação de estados para obtenção da dinâmica completa do sistema em malhada fechada.

Tabela 11 – Mapa dos estados do Controlador Ressonante Transformado proposto para turbinas eólicas.

Estados do controlador	Tipo	Modo harmônico	Erro dedicado
x_{c1}	Integrador	—	e_x
x_{c2}	Integrador	—	e_1
x_{c3}	Integrador	—	e_2
x_{c4}	Integrador	—	e_3
x_{c5} , x_{c6}	Ressonante	1º	e_1
x_{c7} , x_{c8}	Ressonante	1º	e_2
x_{c9} , x_{c10}	Ressonante	1º	e_3
x_{c11} , x_{c12}	Ressonante	2º	e_1
x_{c13} , x_{c14}	Ressonante	2º	e_2
x_{c15} , x_{c16}	Ressonante	2º	e_3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$x_{c(n_c-5)}$, $x_{c(n_c-4)}$	Ressonante	n_h -ésimo	e_1
$x_{c(n_c-3)}$, $x_{c(n_c-2)}$	Ressonante	n_h -ésimo	e_2
$x_{c(n_c-1)}$, $x_{c(n_c)}$	Ressonante	n_h -ésimo	e_3

Para formular a representação aumentada serão assumidas pequenas variações $\Delta x_1(t)$ da rotação da turbina entorno do valor de equilíbrio $\bar{x}_1(\delta(t))$. Assim, para o projeto de controle, o sinal de transformação $\Omega(t) = x_1(t)$ será aproximado como um sinal exógeno em um função da velocidade média do vento $\delta(t)$, ou seja:

$$\Omega(t) \approx \bar{\Omega}(\delta(t)) \quad (6.37)$$

onde $\bar{\Omega}(\delta)$ é igual a função de equilíbrio $\bar{x}_1(\delta)$ da rotação do turbina, isto é

$$\bar{\Omega}(\delta) = \bar{x}_1(\delta) . \quad (6.38)$$

Dadas estas ressalvas, pode-se escrever a dinâmica do controlador como

$$\dot{x}_c(t) = A_c \bar{\Omega}(\delta(t)) x_c(t) + B_{c1} e_x(t) + \left(B_{c2} + B_{c3} \bar{\Omega}(\delta(t)) \right) e(t) \quad (6.39)$$

originando assim um modelo de parâmetros variantes em função de $\delta(t)$, tal como o modelo da planta em (6.18).

Substituindo $e_x(t)$ por $-C_x \Delta x(t)$, $e(t)$ por $-\Delta y(t)$, e finalmente aplicando o modelo da saída gera

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) = & A_c \bar{\Omega}(\delta(t)) x_c(t) - B_{c1} C_x \Delta x(t) - \\ & B_{c2} C(\delta(t)) \Delta x(t) - B_{c2} D(\delta(t)) \Delta u(t) - B_{c2} D_d(\delta(t)) \Delta d(t) - \\ & B_{c3} \hat{C}(\delta(t)) \Delta x(t) - B_{c3} \hat{D}(\delta(t)) \Delta u(t) - B_{c3} \hat{D}_d(\delta(t)) \Delta d(t) . \end{aligned} \quad (6.40)$$

Para evitar expressar a dinâmica do controlador em função da multiplicação de funções

de δ , foram definidas novas matrizes

$$\begin{aligned}\hat{C}(\delta) &= \bar{\Omega}(\delta) C(\delta) = \begin{bmatrix} \hat{k}_F(\delta) & 0 & -\hat{g}_F(\delta) \\ \hat{k}_F(\delta) & 0 & -\hat{g}_F(\delta) \\ \hat{k}_F(\delta) & 0 & -\hat{g}_F(\delta) \end{bmatrix}, \\ \hat{D}(\delta) &= \bar{\Omega}(\delta) D(\delta) = \begin{bmatrix} \hat{h}_F(\delta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{h}_F(\delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{h}_F(\delta) & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{D}_d(\delta) &= \bar{\Omega}(\delta) D_d(\delta) = \begin{bmatrix} \hat{g}_F(\delta) & 0 & 0 \\ 0 & \hat{g}_F(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & \hat{g}_F(\delta) \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{6.41}$$

Assim identifica-se explicitamente os novos parâmetros escalares variantes do sistema em função de δ :

$$\hat{g}_F(\delta) = \bar{\Omega}(\delta) g_F(\delta), \quad \hat{h}_F(\delta) = \bar{\Omega}(\delta) h_F(\delta), \quad \hat{k}_F(\delta) = \bar{\Omega}(\delta) k_F(\delta),\tag{6.42}$$

originados pela combinação do modelo da saída da planta com o modelo do controlador. O perfil numérico destas funções estão mostrados na Figura 40. Esta formulação é essencial para o método de análise de estabilidade do modelo que será adotado na sequência do trabalho.

Realizada a descrição de $\dot{x}_c(t)$ em função de $\Delta x(t)$, $\Delta u(t)$ e $\Delta d(t)$ e identificados os parâmetros em função de δ , pode-se iniciar a combinação dos modelos da planta e controlador. Deixe $x_a \in \mathbb{R}^{n_a}$, onde $n_a = n_c + 3 = 7 + 6n_h$, representar o vetor de estados aumentado conforme

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}.\tag{6.43}$$

A dinâmica do vetor de estados aumentado pode se descrita como

$$\dot{x}_a(t) = A_a(\delta(t))x_a(t) + B_a(\delta(t))\Delta u(t) + B_{da}(\delta(t))\Delta d(t)\tag{6.44}$$

onde as matrizes aumentadas $A_a(\delta) \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, $B_a(\delta) \in \mathbb{R}^{n_a \times 4}$ e $B_{da}(\delta)(\delta) \in \mathbb{R}^{n_a \times 4}$ são:

$$\begin{aligned}A_a(\delta) &= \begin{bmatrix} A(\delta) & 0 \\ -B_{c1}C_x - B_{c2}C(\delta) - B_{c3}\hat{C}(\delta) & A_c\bar{\Omega}(\delta) \end{bmatrix}, \\ B_a(\delta) &= \begin{bmatrix} B(\delta) \\ -B_{c2}D(\delta) - B_{c3}\hat{D}(\delta) \end{bmatrix}, \\ B_{da}(\delta) &= \begin{bmatrix} B_d(\delta) \\ -B_{c2}D_d(\delta) - B_{c3}\hat{D}_d(\delta) \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{6.45}$$

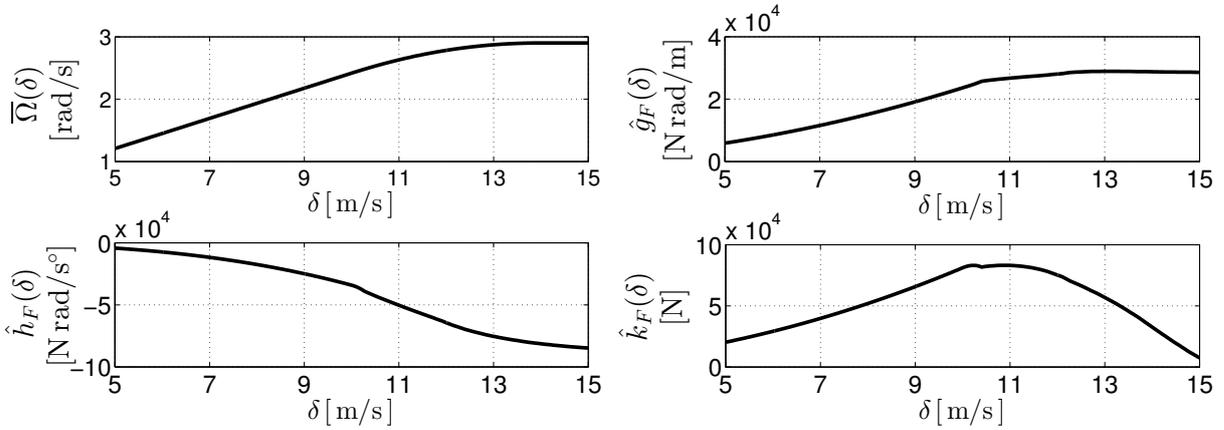
Considera-se a seguinte lei de controle de realimentação de estados para o sistema:

$$\Delta u(t) = K \Delta x(t) + K_c x_c(t) = K_a x_a(t) \quad \therefore \quad K_a = \begin{bmatrix} K & K_c \end{bmatrix}, \quad (6.46)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ são os ganhos de realimentação da planta, $K_c \in \mathbb{R}^{4 \times n_c}$ são os ganhos de realimentação do controlador e $K_a \in \mathbb{R}^{4 \times n_a}$ o ganho de realimentação aumentado do sistema. Inserindo (6.46) no modelo (6.44) resulta:

$$\dot{x}_a(t) = \left(A_a(\delta(t)) + B_a(\delta(t))K_a \right) x_a(t) + B_{da}(\delta(t)) \Delta d(t). \quad (6.47)$$

Figura 40 – Novos parâmetros variantes em função de δ resultantes da combinação do modelo da controlador com o modelo da planta.



6.3.4 Abordagem 2: Controlador Repetitivo Transformado

Esta seção desenvolve o mesmo procedimento anterior, porém utilizando o Controlador Repetitivo Transformado. De forma semelhante, será apresentado primeiramente a adaptação da definição original do controlador no Capítulo 5 para comportar o espaço do erro. Em seguida será desenvolvido o modelo aumentado da planta com este controlador.

Deixe agora $x_{rp} \in \mathbb{R}^3$ representar o vetor de estados do Controlador Repetitivo Transformado, onde sua a dinâmica é expressa como

$$\begin{cases} \dot{x}_{rp}(t) &= -\Omega(t) \omega_{c\theta} I_3 x_{rp}(t) + \Omega(t) k_{f\theta} \omega_{c\theta} I_3 \eta(t - \tau(t)) \\ \eta(t) &= x_{rp}(t) + e(t) \end{cases} \quad (6.48)$$

onde $\eta \in \mathbb{R}^3$ neste caso. Em relação à definição original, foram adicionadas apenas matrizes identidade para manter a consistência dimensional do controlador. Vale ressaltar que $\tau(t)$ deve ser resolvido pelo mesmo observador proposto no Capítulo 5. As mesmas compensações dos parâmetros τ_θ e $k_{f\theta}$ propostas também são aplicáveis neste caso.

Visto que o Controlador Repetitivo Transformado já contém um polo na origem do plano complexo, não há a necessidade de adicionar integradores para $e(t)$, tal como

realizado para o Controlador Ressonante Transformado. Contudo é necessário incluir um integrador adicional que considere a rejeição de componente DC em regime permanente de $e_x(t) = -\Delta x_1(t)$. Este estado integrador adicional $x_I \in \mathbb{R}$ apresenta portanto a dinâmica:

$$\dot{x}_I(t) = e_x(t) \quad (6.49)$$

Novamente, a dinâmica do controlador será combinada em um único vetor de estados conforme

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} x_I(t) \\ x_{rp}(t) \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

sendo $x_c \in \mathbb{R}^4$. A dinâmica deste vetor de estados pode ser expressa como

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c \Omega(t) x_c(t) + B_{c1} e_x(t) + B_{c2} \Omega(t) \eta(t - \tau(t)) \\ \eta(t) = C_\eta x_c(t) + e(t) \end{cases} \quad (6.51)$$

onde as matrizes constantes $A_c \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $B_{c1} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$, $B_{c2} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ e $C_\eta \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ são:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times 3} \\ \star & -\omega_{c\theta} I_3 \end{bmatrix}, \quad B_{c1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \quad B_{c2} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 3} \\ k_{f\theta} \omega_{c\theta} I_3 \end{bmatrix}, \quad C_\eta = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} & I_3 \end{bmatrix}. \quad (6.52)$$

Tabela 12 – Mapa dos estados do Controlador Repetitivo Transformado para turbinas eólicas.

Estados do controlador	Tipo	Erro dedicado
x_{c1}	Integrador	e_x
x_{c2}	Repetitivo	e_1
x_{c3}	Repetitivo	e_2
x_{c4}	Repetitivo	e_3

6.3.4.1 Modelo Aumentado da Planta com o Controlador Repetitivo Transformado

O primeiro passo para elaborar o modelo aumentado do sistema é aproximar o parâmetro variante $\Omega(t) = x_1(t)$ por seu valor no equilíbrio do sistema $\bar{\Omega}(\delta(t)) = \bar{x}_1(\delta(t))$, supondo pequenos desvios $\Delta x_1(t)$ da rotação da turbina entorno do equilíbrio $\bar{x}_1(\delta(t))$. Assim a dinâmica do controlador pode ser representada por:

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c \bar{\Omega}(\delta(t)) x_c(t) + B_{c1} e_x(t) + B_{c2} \bar{\Omega}(\delta(t)) \eta(t - \tau(t)) \\ \eta(t) = C_\eta x_c(t) + e(t) \end{cases} \quad (6.53)$$

Aplicando o modelo da saída na expressão de $e(t)$ resulta:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) = & A_c \bar{\Omega}(\delta(t)) x_c(t) + B_{c2} C_\eta \bar{\Omega}(\delta(t)) x_c(t - \tau(t)) - \\ & B_{c1} C_x \Delta x(t) - B_{c2} \hat{C}(\delta(t)) \Delta x(t - \tau(t)) - \\ & B_{c2} \hat{D}(\delta(t)) \Delta u(t - \tau(t)) - B_{c2} \hat{D}_d(\delta(t)) \Delta d(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (6.54)$$

onde $\tilde{C}(\delta)$, $\tilde{D}(\delta)$ e $\tilde{D}_d(\delta)$ denotam as mesmas matrizes definidas em (6.41). Aqui foi considerado também que $\Delta d(t) = \Delta d(t - \tau(t))$.

Declarando o vetor de estados aumentado $x_a \in \mathbb{R}^{n_a}$ conforme a mesma definição em (6.43), porém aqui com $n_a = 7$, e também o vetor aumentado de entradas de distúrbio $\Delta d_a \in \mathbb{R}^6$ conforme

$$\Delta d_a(t) = \begin{bmatrix} \Delta d(t) \\ \Delta d(t - \tau(t)) \end{bmatrix}, \quad (6.55)$$

permite escrever o modelo aumentado do sistema como

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) = & A_a(\delta(t)) x_a(t) + A_{\tau_a}(\delta(t)) x_a(t - \tau(t)) + \\ & B_a(\delta(t)) \Delta u(t) + B_{\tau_a}(\delta(t)) \Delta u(t - \tau(t)) + B_{d_a}(\delta(t)) \Delta d_a(t). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Os termos aumentados $A_a(\delta) \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, $A_{\tau_a}(\delta) \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, $B_a(\delta) \in \mathbb{R}^{n_a \times 4}$, $B_{\tau_a}(\delta) \in \mathbb{R}^{n_a \times 4}$ e $B_{d_a}(\delta) \in \mathbb{R}^{n_a \times 3}$ são:

$$A_a(\delta) = \begin{bmatrix} A(\delta) & 0_{3 \times 1} \\ -B_{c1} C_x & A_c \bar{\Omega}(\delta) \end{bmatrix}, \quad A_{\tau_a}(\delta) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \\ -B_{c2} \hat{C}(\delta) & B_{c2} C_\eta \bar{\Omega}(\delta) \end{bmatrix}, \quad (6.57)$$

$$B_a(\delta) = \begin{bmatrix} B(\delta) \\ 0_{1 \times 4} \end{bmatrix}, \quad B_{\tau_a}(\delta) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 4} \\ -B_{c2} \hat{D}(\delta) \end{bmatrix},$$

$$B_{d_a}(\delta) = \begin{bmatrix} B_d(\delta) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{4 \times 3} & -B_{c2} \hat{D}_d(\delta) \end{bmatrix}. \quad (6.58)$$

Aplicando a mesma lei de controle definida em (6.46), porém com $K_c \in \mathbb{R}^4$, resulta no seguinte modelo da malha-fechada do sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) = & \left(A_a(\delta(t)) + B_a(\delta(t)) K_a \right) x_a(t) + \\ & \left(A_{\tau_a}(\delta(t)) + B_{\tau_a}(\delta(t)) K_a \right) x_a(t - \tau(t)) + B_{d_a}(\delta(t)) \Delta d_a(t). \end{aligned} \quad (6.59)$$

6.4 Metodologia de Síntese Robusta

Esta seção é dedicada para apresentar a metodologia considerada para sintetizar a matriz de ganhos K_a para ambos os Controladores Ressonante e Repetitivo Transformados. Para estabelecer critérios estabilidade e desempenho do sistema do sistema em malha-fechada, serão utilizados os modelos previamente organizados em (6.59) e (6.47).

O primeiro passo será o tratamento da característica variante no tempo do sistema, dependente da velocidade média do vento δ . Visto que a dependência do modelo em relação a δ é não-linear, não possível aplicar a modelagem polipótica diretamente pela definição de valores mínimo máximo δ_{min} e δ_{max} , pois a propriedade da convexidade se aplica apenas quando a dependência de δ é linear. Um opção válida neste sentido seria a utilização de

múltiplos parâmetros variantes associados para cada função $g_M(\delta)$, $h_M(\delta)$, $k_M(\delta)$, $g_F(\delta)$, $h_F(\delta)$, $k_F(\delta)$, $\tilde{g}_F(\delta)$, $\tilde{h}_F(\delta)$, $\tilde{k}_F(\delta)$, $\bar{\Omega}(\delta)$, definindo seus respectivos limites máximos e mínimos. Esta abordagem contudo será descartada, pois seria demasiadamente complexa do ponto de vista numérico pela elevada quantidade de vértices, além do notável conservadorismo envolvido. Para contornar este problema será apresentada uma metodologia de aproximação linear por partes de sistemas sujeitos a variações paramétricas não-lineares. Este procedimento consiste basicamente na divisão do sistema para diferentes faixas no domínio δ onde a variação das funções $g_M(\delta) \cdots \bar{\Omega}(\delta)$ é aproximadamente linear.

6.4.1 Aproximação Linear por Partes dos Parâmetros Variantes

Considere de forma genérica $S(\delta)$ a matriz de um sistema em função (possivelmente não-linear) de um parâmetro variante $\delta(t)$. Deixe $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_p}\}$ representar um conjunto de n_p pontos estritamente crescentes no domínio δ , formando $n_p - 1$ sub-domínios em $[\delta_1, \delta_2]$, $[\delta_2, \delta_3], \dots, [\delta_{n_p-1}, \delta_{n_p}]$. Deixe $\tilde{S}^i(\delta)$ denotar um matriz linearmente dependente de δ , conectando $S(\delta_i)$ com $S(\delta_{i+1})$ no i -ésimo sub-domínio $[\delta_i, \delta_{i+1}]$, ou seja:

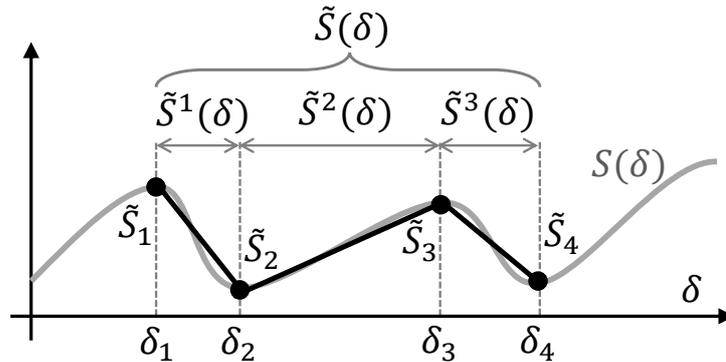
$$\tilde{S}^i(\delta) := \frac{\tilde{S}_{i+1} - \tilde{S}_i}{\delta_{i+1} - \delta_i}(\delta - \delta_i) + \tilde{S}_i, \quad \tilde{S}_i := S(\delta_i). \quad (6.60)$$

Definem-se $\tilde{S}^i(\delta)$, $i \in \{1, 2, \dots, n_p - 1\}$, as componentes lineares por partes da matriz do sistema $S(\delta)$. Adicionalmente definem-se as matrizes constantes \tilde{S}_i , $i \in \{1, 2, \dots, n_p\}$, como vértices destas componentes. Então com a escolha adequada de $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_p}\}$, é possível aproximar a matriz original $S(\delta)$ na forma linear por partes $\tilde{S}(\delta)$ conforme a relação:

$$S(\delta) \approx \tilde{S}(\delta) = \tilde{S}^i(\delta) \quad \text{quando } \delta \in [\delta_i, \delta_{i+1}] \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n_p - 1\}. \quad (6.61)$$

A Figura 41 apresenta a interpretação gráfica desta formulação matemática.

Figura 41 – Interpretação gráfica da aproximação linear por partes de $S(\delta)$. Aqui considera-se $S(\delta) \in \mathbb{R}$ e $n_p = 4$.



A vantagem desta formulação é possibilidade de enquadrar todos os possíveis valores de $\tilde{S}(\delta)$ em um conjunto convexo

$$\tilde{S}(\delta) \in \text{Co}\{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \dots, \tilde{S}_{n_p}\} \quad (6.62)$$

dado pelo envelope convexo formado pelos vértices da aproximação. Assim, pode-se escrever o sistema na tradicional forma politópica conforme

$$\tilde{S}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \tilde{S}_i \quad (6.63)$$

onde o vetor λ pertence ao seguinte conjunto:

$$\lambda \in \mathcal{B}_\lambda = \left\{ \lambda_i : \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n_p \right\} \subset \mathbb{R}^{n_p}. \quad (6.64)$$

Esta formulação então permite aplicar a propriedade da convexidade das *LMI*s para resolução do problema de controle.

Para empregar esta metodologia nos modelos aumentados da turbina eólica (com ambos os Controladores Transformados) deve-se avaliar o perfil das funções $g_M(\delta) \cdots \bar{\Omega}(\delta)$ para então escolher os vértices $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_p}\}$ que aproximem adequadamente a variação destas funções por porções lineares. Para isso, foram seccionados $n_p = 6$ pontos localizados em $\delta_1 = 5$ m/s, $\delta_2 = 7,5$ m/s, $\delta_3 = 10,2$ m/s, $\delta_4 = 11,8$ m/s, $\delta_5 = 13,8$ m/s e $\delta_6 = 15$ m/s. O perfil gráfico resultante está demonstrado na Figura 42.

6.4.2 Síntese para o Controlador Ressonante Transformado

Aplicando a metodologia de aproximação linear por partes, é possível representar o modelo aumentado do sistema (com o Controlador Ressonante Transformado) em (6.47) na seguinte forma politópica

$$\dot{x}_a(t) = \left(\tilde{A}_a(\lambda) + \tilde{B}_a(\lambda)K_a \right) x_a(t) + \tilde{B}_{da}(\lambda) \Delta d(t). \quad (6.65)$$

As matrizes incertas $\tilde{A}_a(\lambda)$, $\tilde{B}_a(\lambda)$ e $\tilde{B}_{da}(\lambda)$ são definidas como

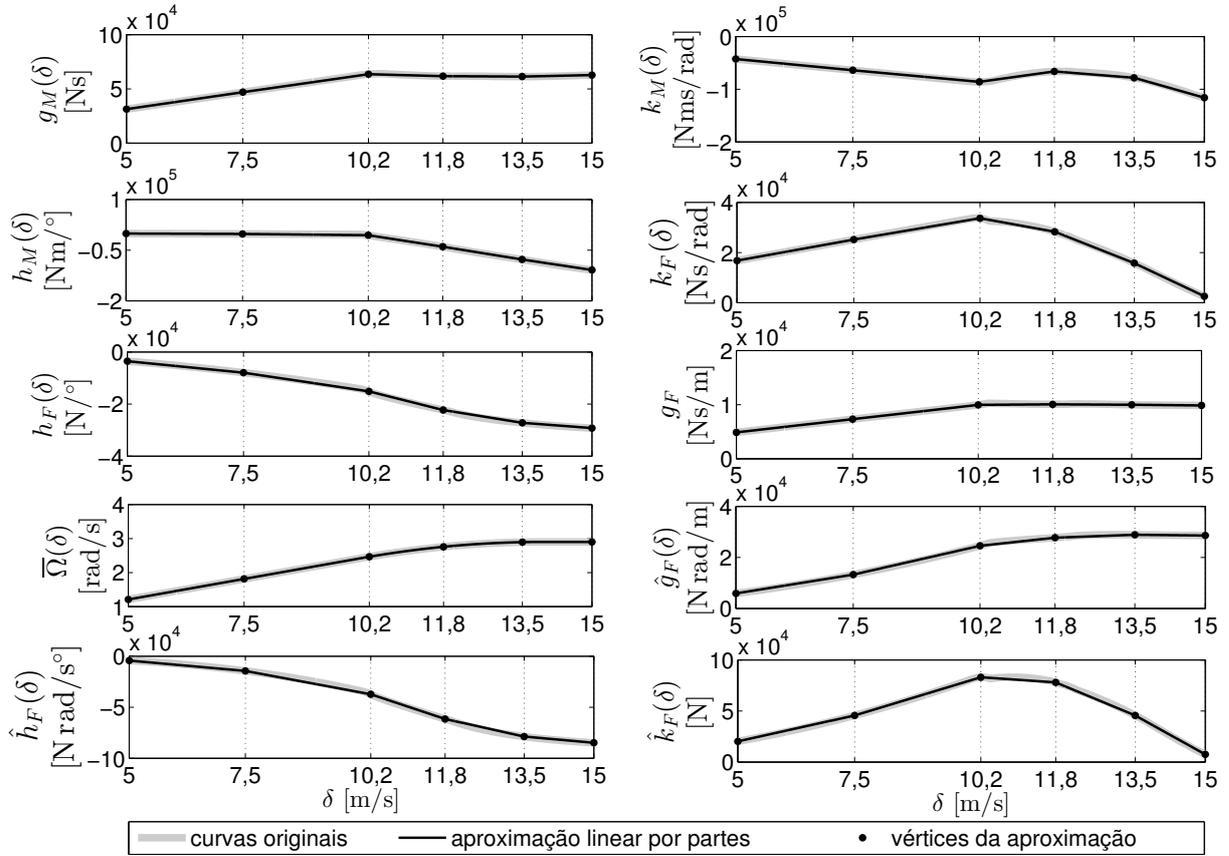
$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_a(\lambda) & \tilde{B}_a(\lambda) & \tilde{B}_{da}(\lambda) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ai} & \tilde{B}_{ai} & \tilde{B}_{dai} \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

onde \tilde{A}_{ai} , \tilde{B}_{ai} e \tilde{B}_{dai} representam a avaliação de $A_a(\delta)$, $B_a(\delta)$, $B_{da}(\delta)$ – em (6.45) – no i -ésimo vértice δ_i da aproximação linear por partes, isto é:

$$\tilde{A}_{ai} = A_a(\delta_i), \quad \tilde{B}_{ai} = B_a(\delta_i), \quad \tilde{B}_{dai} = B_{da}(\delta_i), \quad (6.67)$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, n_p\}$. Supõe-se aqui a utilização dos $n_p = 6$ vértices destacados na Figura 42, assumindo que estes são representativos característica variante dos parâmetros originais.

Figura 42 – Aproximação linear por partes das funções de δ contidas no modelo da turbina eólica.



Visto que análise de estabilidade e desempenho do sistema em malha-fechada será baseada em um modelo linearizado sistema, será garantido na verdade apenas a estabilidade local do sistema para desvios suficientemente pequenos em relação ao ponto de equilíbrio do sistema. Uma análise *a posteriori* poderia ser realizada para estimar a região de atração dos estados do sistema, utilizando por exemplo os métodos propostos em (COUTINHO et al.,) e (CHESI, 2013), entretanto esta análise está além do escopo deste trabalho. De maneira similar, serão assumidas variações das perturbações $\Delta d(t)$ suficientemente pequenas para que a estabilidade local entrada-estado no equilíbrio do sistema implique também na estabilidade BIBO local do sistema. Assim $\Delta d(t)$ será descartado para solução do problema de síntese. Além disso, a justificativa para a rejeição assintótica das entradas de distúrbio para as saídas do sistema foi realizada neste trabalho com base no PMI.

Dadas estas ressalvas, é possível empregar a mesma metodologia de síntese robusta \mathcal{H}_2 proposta na Seção 4.4 para o Controlador Ressonante Transformado. O desempenho transitório do sistema é definido novamente por uma função de custo $\mathcal{J}_2 = \|z(t)\|_2^2$, onde $z(t) = C_z x_a(t) + D_z \Delta u(t)$ representa a saída de desempenho. Propõe-se a construção dos termos C_z , D_z na forma proposta apresentada em (4.32), onde são utilizadas matrizes

diagonais Q_z e R_z contendo a penalidade individual de cada estado aumentado e de cada entrada de controle. A representação do sistema considerada para o projeto de controle assume então a seguinte forma final:

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) &= (\tilde{A}_a(\lambda) + \tilde{B}_a(\lambda)K_a) x_a(t) \\ z(t) &= (C_z + D_z K_a) x_a(t) \end{cases} \quad (6.68)$$

O problema de síntese assim resume-se ao tradicional problema do controle robusto \mathcal{H}_2 , conforme expresso na sequência.

Problema 6.1. *Encontrar um ganho robusto K_a tal que o sistema (6.68) seja assintoticamente estável para todo $\lambda_a \in \mathcal{B}_\lambda$ e que a função de custo \mathcal{J}_2 seja minimizada.*

Para resolver o Problema 6.1, pode-se utilizar o mesmo Teorema 4.1 apresentado na Seção 4.4. A diferença, neste caso, é que a variação paramétrica da dinâmica da planta e do controlador foram unificados nos mesmos vértices do modelo politópico, enquanto que na metodologia anteriormente a variação do modelo da planta e controlador é mantida independente. Portanto o mesmo Teorema 4.1 deve ser simplesmente adaptado para considerar a avaliação das *LMIs* no conjunto de vértices $\{1, 2, \dots, n_p\}$ do modelo politópico aqui considerado. Tal modificação resulta no Teorema 6.1.

Teorema 6.1. *Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas $\hat{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e uma matriz $\hat{K}_a \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$ que satisfaçam*

$$\begin{bmatrix} \text{He} \{ \tilde{A}_{ai} \hat{P} + \tilde{B}_{ai} \hat{K}_a \} & \hat{P} C_z^\top + \hat{K}_a^\top D_z^\top \\ \star & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (6.69)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ \star & \hat{P} \end{bmatrix} > 0, \quad (6.70)$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, n_p\}$. Então o sistema (6.68) com $K_a = \hat{K}_a \hat{P}^{-1}$ é assintoticamente estável para todo $\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$ e função de custo \mathcal{J}_2 satisfaz

$$\mathcal{J}_2 < x_a^\top(0) X x_a(0). \quad (6.71)$$

Demonstração. Equivalente ao mostrado anteriormente no Teorema 2.9. □

O passo-a-passo sistemático para realizar a síntese do controle para turbina eólica é equivalente ao descrito na Subseção 4.4.4. Contudo, deve-se seguir a partir do Passo 5, visto que os passos iniciais que envolvem a modelagem do sistema já foram neste capítulo detalhados para a turbina eólica.

6.4.3 Síntese para o Controlador Repetitivo Transformado

A metodologia de síntese será agora espelhada para o caso do Controlador Repetitivo Transformado. Aplicando desta vez a aproximação linear por partes no modelo (6.59) permite escrever o sistema aumentado na seguinte forma politópica:

$$\dot{x}_a(t) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_a(\lambda) + \tilde{B}_a(\lambda)K_a \\ \tilde{A}_{\tau a}(\lambda) + \tilde{B}_{\tau a}(\lambda)K_a \end{pmatrix} x_a(t) + \tilde{B}_{da}(\lambda) \Delta d_a(t) \quad (6.72)$$

onde as matrizes $\tilde{A}_a(\lambda)$, $\tilde{B}_a(\lambda)$, $\tilde{A}_{\tau a}(\lambda)$, $\tilde{B}_{\tau a}(\lambda)$ e $\tilde{B}_{da}(\lambda)$ são

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_a(\lambda) & \tilde{B}_a(\lambda) & \tilde{A}_{\tau a}(\lambda) & \tilde{B}_{\tau a}(\lambda) & \tilde{B}_{da}(\lambda) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ai} & \tilde{B}_{ai} & \tilde{A}_{\tau ai} & \tilde{B}_{\tau ai} & \tilde{B}_{dai} \end{bmatrix} \quad (6.73)$$

Aqui, as matrizes contantes \tilde{A}_{ai} , \tilde{B}_{ai} , $\tilde{A}_{\tau ai}$, $\tilde{B}_{\tau ai}$ e \tilde{B}_{dai} representam a avaliação das matrizes (6.57) no i -ésimo vértice do conjunto $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_p}\}$, ou seja:

$$\tilde{A}_{ai} = A_a(\delta_i), \quad \tilde{B}_{ai} = B_a(\delta_i), \quad \tilde{A}_{\tau ai} = A_{\tau a}(\delta_i), \quad \tilde{B}_{\tau ai} = B_{\tau a}(\delta_i), \quad \tilde{B}_{dai} = B_{da}(\delta_i). \quad (6.74)$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, n_p\}$.

Novamente, aqui será trabalhado com a garantia de estabilidade e desempenho local do sistema no entorno do ponto de equilíbrio. Também, a entrada de distúrbio $\Delta d_a(t)$ será descartada para o projeto de controle, seguindo as mesmas razões previamente dadas.

O critério de desempenho será tratado na forma \mathcal{H}_2 , utilizando a mesma função de custo $\mathcal{J}_2 = \|z(t)\|_2^2$ e a mesma definição do sinal de saída $z(t)$ descrito anteriormente. Assim, a forma final da representação do sistema considerada para o projeto de controle é:

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_a(\lambda) + \tilde{B}_a(\lambda)K_a \\ \tilde{A}_{\tau a}(\lambda) + \tilde{B}_{\tau a}(\lambda)K_a \end{pmatrix} x_a(t) + \begin{pmatrix} \tilde{A}_{\tau a}(\lambda) + \tilde{B}_{\tau a}(\lambda)K_a \end{pmatrix} x_a(t - \tau(t)) \\ z(t) &= (C_z + D_z K_a) x_a(t) \end{cases} \quad (6.75)$$

O problema de controle é portanto definido conforme o Problema 6.2. Os teoremas subsequentes oferecem a base para solução deste problema.

Problema 6.2. *Dado $\omega_{c\theta}$ definido a priori, encontrar um ganho robusto K_a e uma região $\mathcal{B}_{\dot{\tau}} \subset \mathbb{R}$ tal que o sistema (6.75) seja assintoticamente estável para todo $\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$ e para todo sinal $\tau(t)$ satisfazendo $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ e $\dot{\tau} \in \mathcal{B}_{\dot{\tau}}$, além disso, tal que a função de custo \mathcal{J}_2 seja minimizada.*

Teorema 6.2. *Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas $\hat{P} \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$ e $X \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, uma matriz $\hat{K}_a \in \mathbb{R}^{4 \times n_a}$ e um escalar positivo $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ que satisfaçam*

$$\begin{bmatrix} \text{He} \{ \tilde{A}_{ai} \hat{P} + \tilde{B}_{ai} \hat{K}_a \} + \beta \hat{P} & \tilde{A}_{\tau ai} \hat{P} + \tilde{B}_{\tau ai} \hat{K}_a & \hat{P} C_z^\top + \hat{K}_a^\top D_z^\top \\ * & -\beta \hat{P} & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (6.76)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ \star & \hat{P} \end{bmatrix} > 0, \quad (6.77)$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, n_p\}$. Então o sistema (6.75) com $K_a = \hat{K}_a \hat{P}^{-1}$ é assintoticamente estável para todo $\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$ para qualquer sinal $\tau(t)$ que satisfaça $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ e $\dot{\tau} \in \mathcal{B}_{\dot{\tau}} = \mathbb{R}$. Também, a função de custo \mathcal{J}_2 satisfaz

$$\mathcal{J}_2 < x_a^\top(0) X x_a(0) \quad (6.78)$$

quando $x_a(0) \neq 0$ e $x_a(t) = 0 \forall t < 0$.

Demonstração. Equivalente ao Teorema 5.1. □

Teorema 6.3. *Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas $\hat{P} \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, $\hat{S} \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$ e $X \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, uma matriz $\hat{K}_a \in \mathbb{R}^{4 \times n_a}$ e um escalar positivo $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ que satisfaçam*

$$\begin{bmatrix} \text{He} \{ \tilde{A}_{ai} \hat{P} + \tilde{B}_{ai} \hat{K}_a \} + \hat{S} & \tilde{A}_{\tau ai} \hat{P} + \tilde{B}_{\tau ai} \hat{K}_a & \hat{P} C_z^\top + \hat{K}_a^\top D_z^\top \\ \star & (\mu - 1) \hat{S} & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (6.79)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ \star & \hat{P} \end{bmatrix} > 0, \quad (6.80)$$

para todo $k \in \{1, 2, \dots, n_p\}$. Então o sistema (6.75) com $K_a = \hat{K}_a \hat{P}^{-1}$ é assintoticamente estável para todo $\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$ para qualquer sinal $\tau(t)$ que satisfaça $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ e $\dot{\tau} \in \mathcal{B}_{\dot{\tau}} = (-\infty, \mu]$. Também, a função de custo \mathcal{J}_2 também satisfaz

$$\mathcal{J}_2 < x_a^\top(0) X x_a(0) \quad (6.81)$$

quando $x_a(0) \neq 0$ e $x_a(t) = 0 \forall t < 0$.

Demonstração. Equivalente ao Teorema 5.2. □

Com base nos Teoremas 6.2 e 6.3 pode-se utilizar o fluxo sistemático de projeto detalhado na Subseção 5.5.4. Agora porém, já estão detalhados os Passos 1, 2 e 3 relacionados à modelagem do sistema.

6.5 Resultados

Esta seção apresenta resultados numéricos de simulação na forma de uma análise comparativa dos controladores propostos em relação à abordagens tradicionais. Primeiramente será apresentada a forma considerada para simulação do campo de vento no

plano de rotação da turbina. Após serão explicadas as configurações dos controladores considerados para a análise comparativa, juntamente com os parâmetros de penalidade considerados para cada caso. Na sequência serão apresentadas as respostas temporais obtidas pelas simulações e a discussão a respeito.

6.5.1 Simulação do Campo de Vento

Para realizar a simulação numérica da turbina eólica deve-se encontrar o campo de vento $\mathcal{V}(\psi_t, r_t, t)$ no plano da turbina eólica. Assim o sinal de velocidade do vento efetivo de cada pá $d_i(t)$ é dado pela avaliação deste campo na posição angular $\psi_t(t) = x_0(t) + \Xi_i$ (com Ξ denotando o vetor de espaçamento angular das pás) e no raio efetivo $r_t = (3/4) R_t$, conforme tratado anteriormente na Subseção 6.3.1.

O campo de vento pode ser modelado pela multiplicação de campos individuais, relacionados a cada efeito de distorção:

$$\mathcal{V}(\psi_t, r_t, t) = \delta(t) \mathcal{V}_{SH}(\psi_t, r_t) \mathcal{V}_{TS}(\psi_t, r_t) \mathcal{V}_{TB}(\psi_t, r_t, t) . \quad (6.82)$$

Aqui, $\delta(t)$ a velocidade do vento raiz incidente no centro do disco de atuação da turbina, (considerado também como a velocidade média de referência para geração das trajetórias de equilíbrio, sinal que supostamente é sensorado pelo sistema). Os campos de distorção estáticos $\mathcal{V}_{SH}(\psi_t, r_t)$ e $\mathcal{V}_{TS}(\psi_t, r_t)$ representam respectivamente a distorção pelo cisalhamento do solo e pela sombra da torre. Por fim o campo dinâmico $\mathcal{V}_{TB}(\psi_t, r_t, t)$ representa distorção pelo efeito de turbulência. Outro possível efeito dinâmico é o rastro (*wake*) de turbinas eólicas precedentes, um modelo deste efeito não será incluído neste trabalho.

O efeito $\mathcal{V}_{SH}(\psi_t, r_t)$ corresponde à atenuação no fluxo do vento causada pela rugosidade do solo, fazendo com que a velocidade do vento seja mais intensa em altitudes superiores. Este efeito pode ser modelado conforme (BIANCHI; BATTISTA; MANTZ, 2006):

$$\mathcal{V}_{SH}(\psi_t, r_t) = \left(\frac{z_t(\psi_t, r_t) + h_t}{h_t} \right)^{a_{SH}} , \quad (6.83)$$

onde $z_t(\psi_t, r_t) = r_t \cos(\psi_t)$ é altitude em relação ao eixo de rotação da turbina, h_t é altura da turbina do solo até o eixo de rotação e a_{SH} é o fator de cisalhamento dependente da rugosidade do solo. Para avaliar numericamente esta expressão, foi considerado $h_t = 55,953$ m (SELVAM et al., 2009) e um coeficiente $a_{SH} = 0,2$ (assumindo a presença de grama no solo) (BIANCHI; BATTISTA; MANTZ, 2006).

Por sua vez, o efeito $\mathcal{V}_{TS}(\psi_t, r_t)$ descreve a distorção aerodinâmica na região próxima à estrutura da torre. Este efeito pode ser modelado pela seguinte equação (HOUT-

ZAGER; WINGERDEN; VERHAEGEN, 2013):

$$\mathcal{V}_{ts}(\psi_t, r_t) = \begin{cases} 1 - \frac{y_t^2 - x_t^2(\psi_t, r_t)}{(y_t^2 + x_t^2(\psi_t, r_t))^2} \frac{(1.2 D_t)^2}{4} & \text{if } z_t(\psi_t, r_t) < 0 \\ 1 & \text{if } z_t(\psi_t, r_t) > 0 \end{cases}, \quad (6.84)$$

onde $x_t(\psi_t, r_t) = r_t \sin(\psi_t)$ é a posição lateral em relação ao centro de rotação da turbina, y_t é o afastamento frontal do plano de rotação das pás em relação à torre e D_t é o diâmetro da torre. Para avaliar este campo, foi assumido $y_t = 4$ m and $D_t = 1$ m (SELVAM et al., 2009).

Para representar efeito de turbulência será considerado um modelo estocástico uniforme no espaço, conforme proposto em (NICHITA et al., 2002). Conforme esta referência, a componente de turbulência $\mathcal{V}_{TB}(t)$ pode ser simulada pela expressão

$$\mathcal{V}_{TB}(t) = 1 + k_{TB} w_c(t) \quad (6.85)$$

onde k_{TB} é um parâmetro positivo livre que denota a intensidade da turbulência e $w_c(t)$ é um ruído “colorido”, resultante da filtragem de um ruído branco $w(t) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (com média zero e variância unitária). Baseado análise de séries temporais, (NICHITA et al., 2002) propõe o seguinte filtro para gerar $w_c(t)$:

$$\frac{W_c(s)}{W(s)} = \frac{\alpha_1 T_{TB} s + 1}{(T_{TB} s + 1)(\alpha_2 T_{TB} s + 1)}, \quad (6.86)$$

onde T_{TB} denota a constante de tempo da turbulência, $\alpha_1 = 0,4$ e $\alpha_2 = 0,25$ são valores numéricos identificados para aproximar os dados experimentais. O termo T_{TB} pode ser aproximado conforme $T_{TB} = L_{TB}/\delta_n$, sendo δ_n a velocidade média nominal e L_{TB} o comprimento da turbulência. Considerando um valor comum de $L_{TB} = 180$ m junto com a mesma velocidade nominal utilizada de $\delta_n = 12$ m/s resulta na constante de tempo $T_{TB} = 15$ s. Por fim, a intensidade da turbulência foi mantida em $k_{TB} = 0,005$.

6.5.2 Configuração das Simulações

Uma análise comparativa será realizada entre os controladores listados na sequência. Para facilitar a discussão será associada uma sigla para cada arquitetura comparada.

- (CB.1) Controlador Básico de Referência – É estratégia de controle padrão que serve como base para avaliação dos controladores propostos. Esta abordagem apresenta apenas estados integradores para $e_x(t)$ e $e(t)$ (tal como acrescentado para o Controlador Ressonante Transformado). A lei de controle de realimentação de estados segue a mesma metodologia apresentada.
- (CB.2) Controlador Básico com Ganho Alto – É a mesma configuração de controle de CB.1, porém os ganhos de realimentação são sintetizados com menor penalidade na entrada de controle em relação aos demais controladores.

- (CRS. n_h) Controlador Ressonante tradicional com n_h modos harmônicos – Segue a mesma metodologia do Controlador Ressonante Transformado, porém com $\Omega(t) = \Omega_n$, onde o parâmetro $\Omega_n = 2,9020$ rad/s representa a rotação nominal/máxima da turbina (ver $\bar{x}_1(\delta)$ na Figura 37). Assim, este é equivalente a um Controlador Ressonante tradicional com frequência de ressonância constante sintonizada neste valor Ω_n .
- (CRST. n_h) Controlador Ressonante Transformado com n_h modos harmônicos – É o controlador proposto na Subseção 6.3.3.
- (CRP) Controlador Repetitivo tradicional – Segue a mesma metodologia do Controlador Repetitivo Transformado, porém utiliza $\Omega(t) = \Omega_n$, onde Ω_n é o mesmo descrito em CRS.h, originando uma frequência de corte constante do filtro de $\omega_c = \Omega_n \omega_{c\theta}$. Além disso, possui um atraso nominal constante de $\tau(t) = \tau_n = \tau_\theta / \Omega_n$. As compensações dos parâmetros τ_θ e $k_{f\theta}$ também são utilizadas.
- (CRPT) Controlador Repetitivo Transformado – Conforme proposto na Subseção 6.3.4.

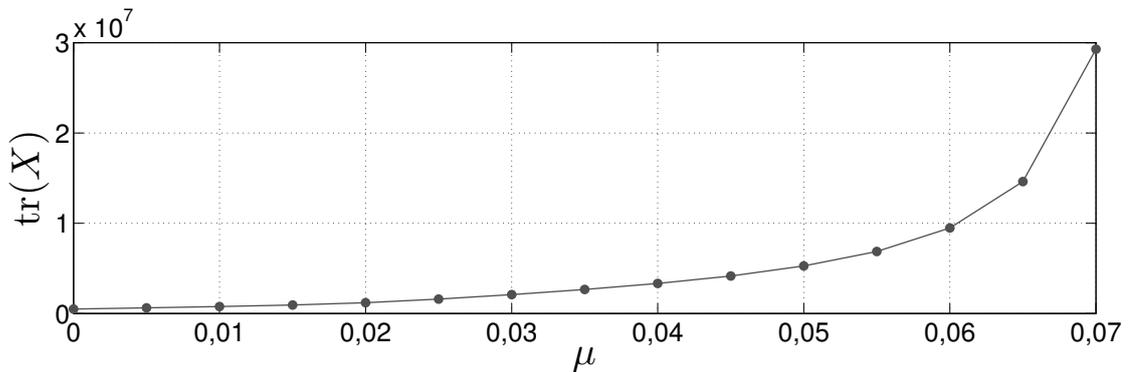
As abordagens CRS. n_h e CRST. n_h foram projetadas para $n_h \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Visto a elevada ordem destes controladores com o aumento do número de modos (6 estados para cada modo adicional) e o baixo benefício observado de $n_h = 4$ para $n_h = 5$, optou-se por limitar o projeto para este conjunto de valores.

A matriz K_a de realimentação foi sintetizada (independentemente) para cada estratégia seguindo a mesma metodologia de síntese robusta \mathcal{H}_2 apresentada. As matrizes diagonais de penalidades foram construídas conforme $Q_z = \text{diag}\{Q_x, Q_c\}$ e $R_z = \text{diag}\{R_{123}, R_4\}$, onde Q_x denota as penalidades dos estados da planta, Q_c denota as penalidades do controlador, R_{123} a penalidade no comando de inclinação das pás e R_4 a penalidade no comando do torque do gerador. As mesmas penalidades foram definidas entre os controladores CB.1, CRP e CRPT como $Q_x = I_3$, $Q_c = \text{diag}\{1, 40 I_3\}$, $R_{123} = I_3$ e $R_4 = 100$. Os controladores CRS. n_h e CRST. n_h foram sintetizados com os mesmos parâmetros, porém Q_c contém adicionalmente as penalidades dos estados ressonantes, isto é: $Q_c = \text{diag}\{1, 40 I_3, 40 I_{6n_h}\}$. Por fim, CB.2 contém os mesmos parâmetros de CB.1, com exceção da penalidade na entrada de inclinação das pás $R_{123} = 0,001 I_3$, que foi reduzido visando a obtenção de uma realimentação mais agressiva com ganhos mais elevados em relação aos demais controladores testados.

A frequência- θ de corte selecionada para os Controladores Repetitivos foi de $\omega_{c\theta} = 25$ (ou seja, 25 vezes maior que a frequência- θ fundamental dos sinais). Assim a frequência (usual) de corte equivalente para CRP foi portanto de $\omega_c = \Omega_n \omega_{c\theta} = 72,5503$ rad/s. A metodologia proposta de compensação do filtro passa-baixas foi aplicada para am-

bos CRP e CRPT, resultando em $\tau_\theta = 1,9873\pi$ rad e $k_{f_\theta} = 1,0008$. Para CRP, desta forma, o atraso nominal compensado foi de $\tau_n = \tau_\theta/\Omega_n = 2,1513$ s. No caso de CRPT, o atraso $\tau(t)$ deve variar entre este valor mínimo/nominal de 2,1513 s e o valor máximo de $\tau_{sup} = \tau_\theta/\bar{\Omega}(\delta_1) = 5,1632$ s, este último valor também representado o tempo de memória máximo requerido para implementação do controlador. Para sintetizar K_a para CRP, foi empregado o Teorema 6.3 com $\mu = 0$, pois o atraso é invariante. Já no caso de CRPT foram testados ambos Teoremas 6.3 e Teoremas 6.2, conforme o passo-a-passo sistemático proposto. Não foi possível encontrar um valor β para tornar factível a síntese pelo método de Razumikhin (Teorema 6.2), contudo foi possível encontrar soluções pelo método de Krasovskii (Teorema 6.3) para os valores de μ organizados na Figura 43. Com base na análise deste gráfico foi escolhido $\mu = 0,04$ como a taxa máxima de variação permitida para o atraso de transporte. A taxa de decaimento da observação do atraso $\tau(t)$ foi escolhida como $\alpha = 10$. As matrizes de ganhos K_a resultantes da solução dos problemas de otimização estão organizadas para cada estratégia de controle no Apêndice 1.

Figura 43 – Relação entre o valor objetivo $\text{tr}(X)$ e a máxima taxa de variação μ permitida para o atraso $\tau(t)$ de CRPT conforme o Teorema 6.3.



As simulações foram executadas no *software* MATLAB/Simulink utilizando o modelo não-linear da turbina eólica apresentado na Seção 6.2.1, onde tabelas de consulta bidimensionais foram empregadas para computar $C_F(\vartheta_i, u_i)$ e $C_M(\vartheta_i, u_i)$. O tempo total da simulação foi definido como 600 s. As condições iniciais $x(0)$ dos estados da planta foram configuradas para o ponto de equilíbrio relativo à $\delta(0)$.

6.5.3 Análise e Discussão dos Resultados

A velocidade média do vento $\delta(t)$ considerada no cenário simulado varia de 5 m/s até 15 m/s durante os 600 s de simulação. Esta variação permite testar toda a faixa de δ ao qual os controladores foram projetados. Assim, a rotação da turbina também deve variar do valor mínimo de 1,2092 rad/s até o valor máximo/nominal de 2,9020 rad/s conforme a trajetória de equilíbrio $\bar{x}_1(\delta)$, permitindo avaliar as vantagens dos Controladores Ressonante e Repetitivo Transformados em relação aos tradicionais. A Figura 44 mostra

Figura 44 – Sinal de velocidade do vento $d_1(t)$ na primeira pá da turbina eólica.

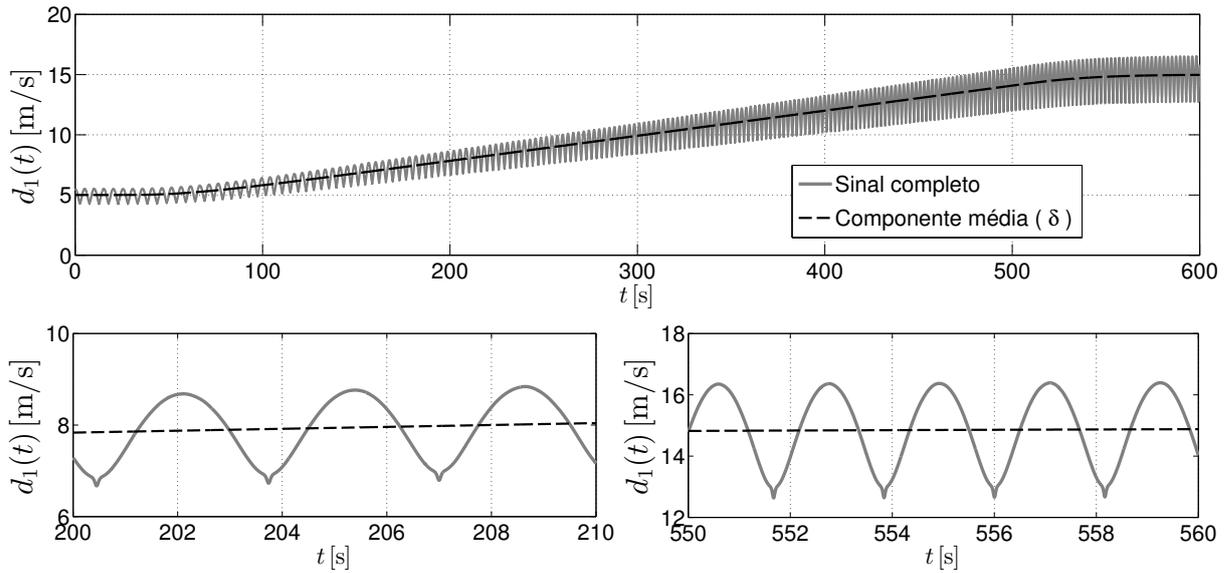
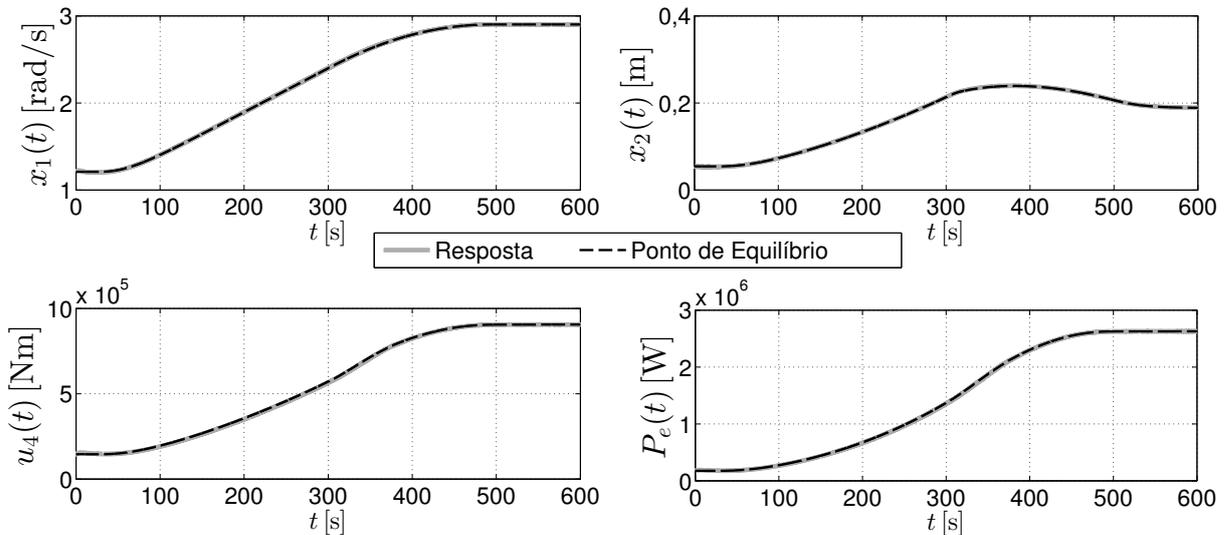


Figura 45 – Respostas temporais de: rotação da turbina $x_1(t)$, deflexão da torre $x_2(t)$, torque do gerador $u_4(t)$ e potência elétrica gerada $P_e(t)$.



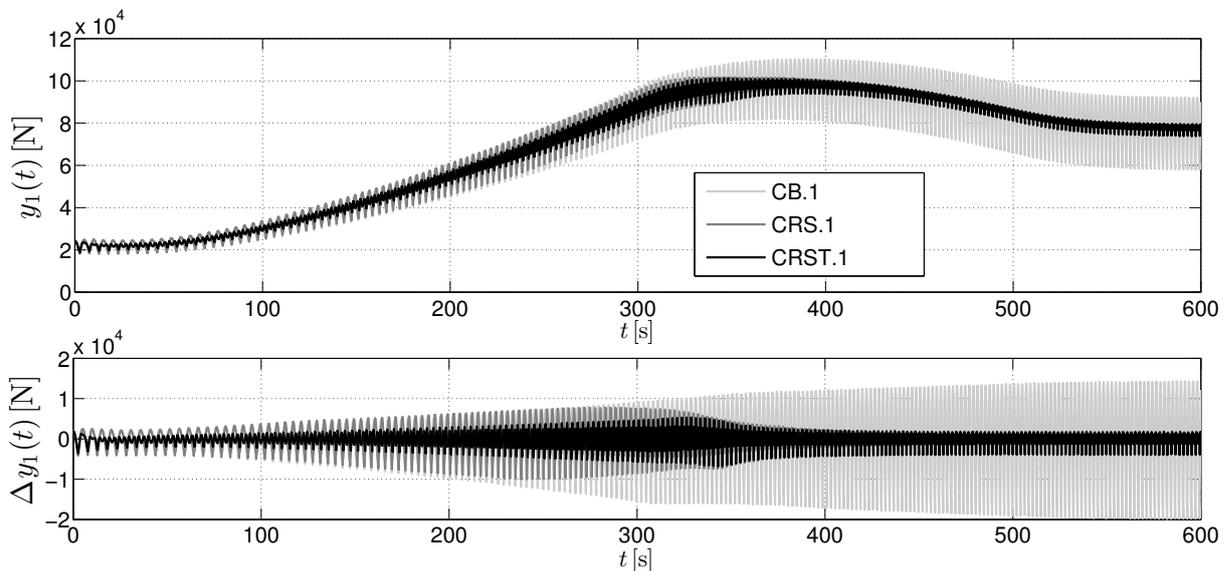
o sinal de velocidade do vento $d_1(t)$ na primeira pá da turbina eólica, incluindo os efeitos do campo de vento. Observe como o período das oscilações diminuí conforme o tempo passa, visto que a rotação da turbina também está aumentando (ver resposta $x_1(t)$ no canto superior esquerdo da Figura 45). Os sinais $d_2(t)$ e $d_3(t)$ apresentam uma forma de onda idêntica, porém defasados respectivamente de $\Xi_2 = (2/3)\pi$ rad e $\Xi_3 = (4/3)\pi$ rad, conforme o espaçamento angular das pás.

As respostas temporais na Figura 45 demonstram a rotação da turbina $x_1(t)$, a deflexão da torre $x_2(t)$, o sinal de controle de torque do gerador $u_4(t)$ e a potência elétrica de saída da turbina $P_e(t) = x_1(t) u_4(t)$. Em relação a estas variáveis, as diferenças na

variação da resposta entorno do equilíbrio foi desprezível entre todos os controladores simulados. Na Figura 45 foi utilizada a resposta de CRST.5 para ilustrar a resposta obtida.

A análise comparativa será realizada em relação aos sinais $y_i(t)$ (a carga mecânica na i -ésima pá) e $u_i(t)$ (comando de inclinação da i -ésima pá), onde diferenças notáveis foram obtidas entre as respostas de cada controlador simulado. Para demonstrar as respostas temporais, foram escolhidos os sinais da primeira pá da turbina ($y_1(t)$ e $u_1(t)$), dado que os sinais das demais pás apresentaram-se praticamente idênticos, contendo apenas a respectiva defasagem devido o espaçamento angular.

Figura 46 – Comparação da saída $y_1(t)$ e desvio entorno do equilíbrio $\Delta y_1(t)$ entre os controladores CB.1, CRS.1 e CRST.1.



As Figuras 46, 47, 48 e 49 comparam (acima) o sinal absoluto da saída $y_1(t)$ e (abaixo) o valor relativo ao ponto de equilíbrio $\Delta y_1(t)$ durante todo o tempo de simulação. As Figuras 46, 47, 48 comparam os controladores CB.1, CRS. n_h e CRST. n_h para respectivamente $n_h = 1$, $n_h = 2$ e $n_h = 5$. Já a Figura 49 compara os controladores CB.1, CRP e CRPT. Enquanto que o controlador CB.1 apresenta uma demasiada oscilação durante todo o tempo de simulação, os controladores CRP e CRS. n_h são capazes de atenuar a perturbação no últimos 200s da execução, quando a rotação da turbina está próxima do valor nominal. Contudo, nos primeiros 300s da simulação, quando a rotação da turbina diverge do valor nominal de sintonia, estes controlares perdem a propriedade de atenuação da perturbação, desempenhando de forma parecida ao controlador CB.1. No caso de CRP, pode-se notar em certos instantes que a amplitude de oscilação é até maior que o controlador básico CB.1. Por outro lado as estratégias propostas CRST. n_h e CRPT mantém praticamente o mesmo nível de atenuação durante toda simulação, independente da variação da rotação da turbina.

Figura 47 – Comparação da saída $y_1(t)$ e desvio entorno do equilíbrio $\Delta y_1(t)$ entre os controladores CB.1, CRS.2 e CRST.2.

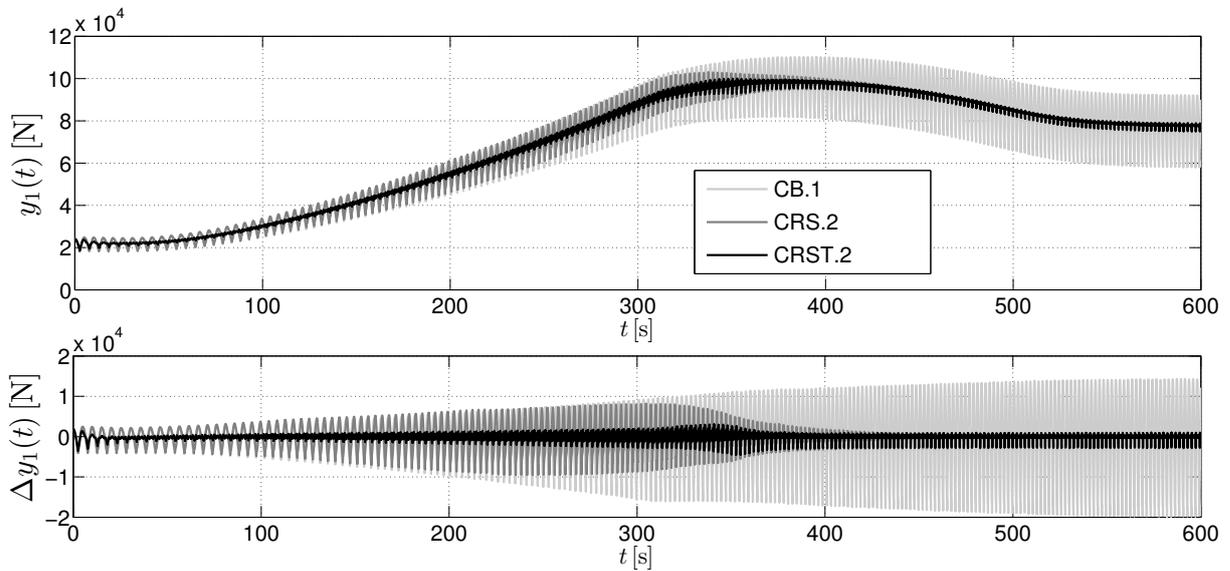
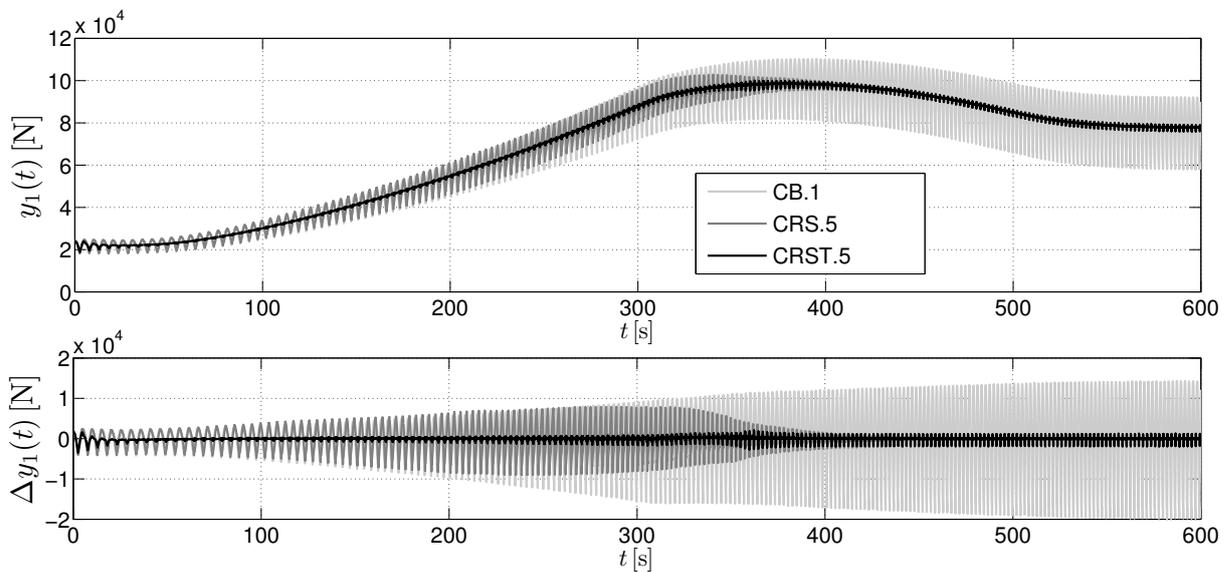


Figura 48 – Comparação da saída $y_1(t)$ e desvio entorno do equilíbrio $\Delta y_1(t)$ entre os controladores CB.5, CRS.5 e CRST.5.



Ao elevar o numero de modos n_h dos controladores $CRST.n_h$ e $CRS.n_h$ pôde-se notar um significativo benefício na redução da propagação da perturbação apara a saída do sistema. Porém, além de $n_h = 5$ o benefício torna-se muito baixo para justificar o incremento da ordem do controlador. Além disso, a resposta de $CRST.5$ já mostra-se comparável ao $CRPT$. Ao final da discussão, será apresentado a Tabela 13 contendo o valor RMS da variação da saída Δy_1 de cada controlador, para uma análise comparativa mais precisa.

Figura 49 – Comparação da saída $y_1(t)$ e desvio entorno do equilíbrio $\Delta y_1(t)$ entre os controladores CB.1, CRP e CRPT.

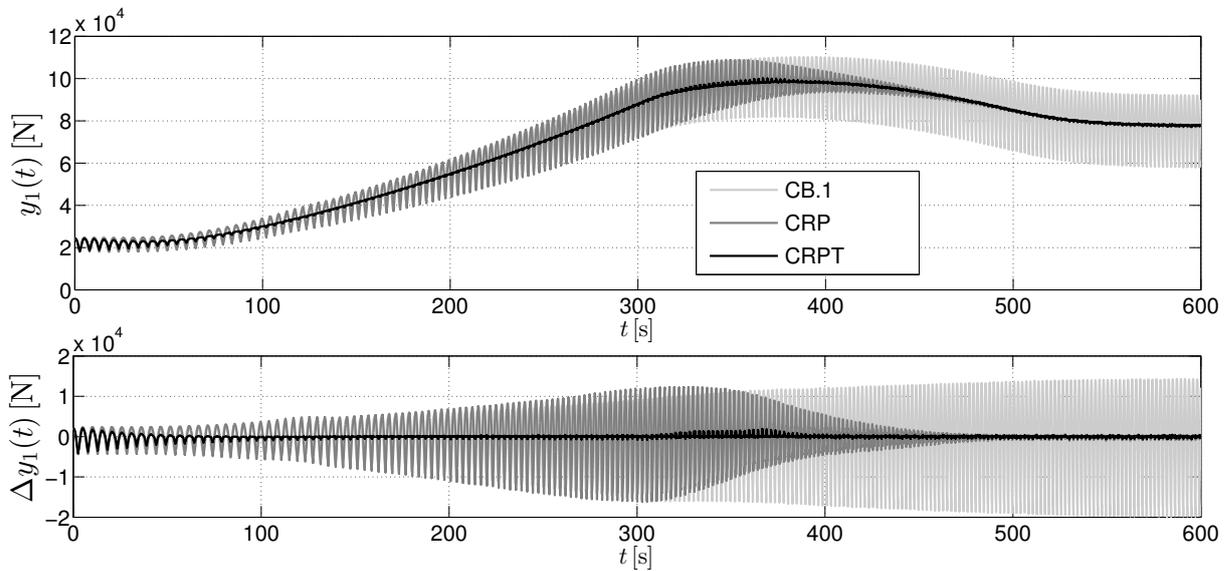
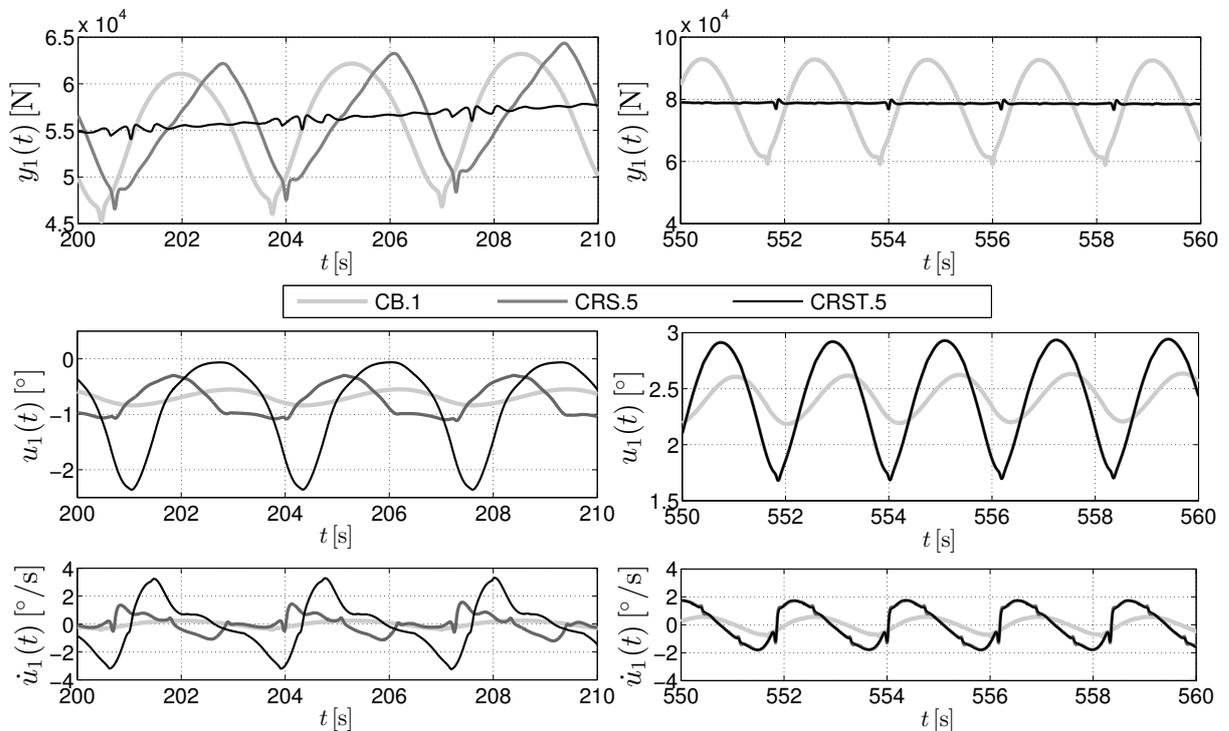
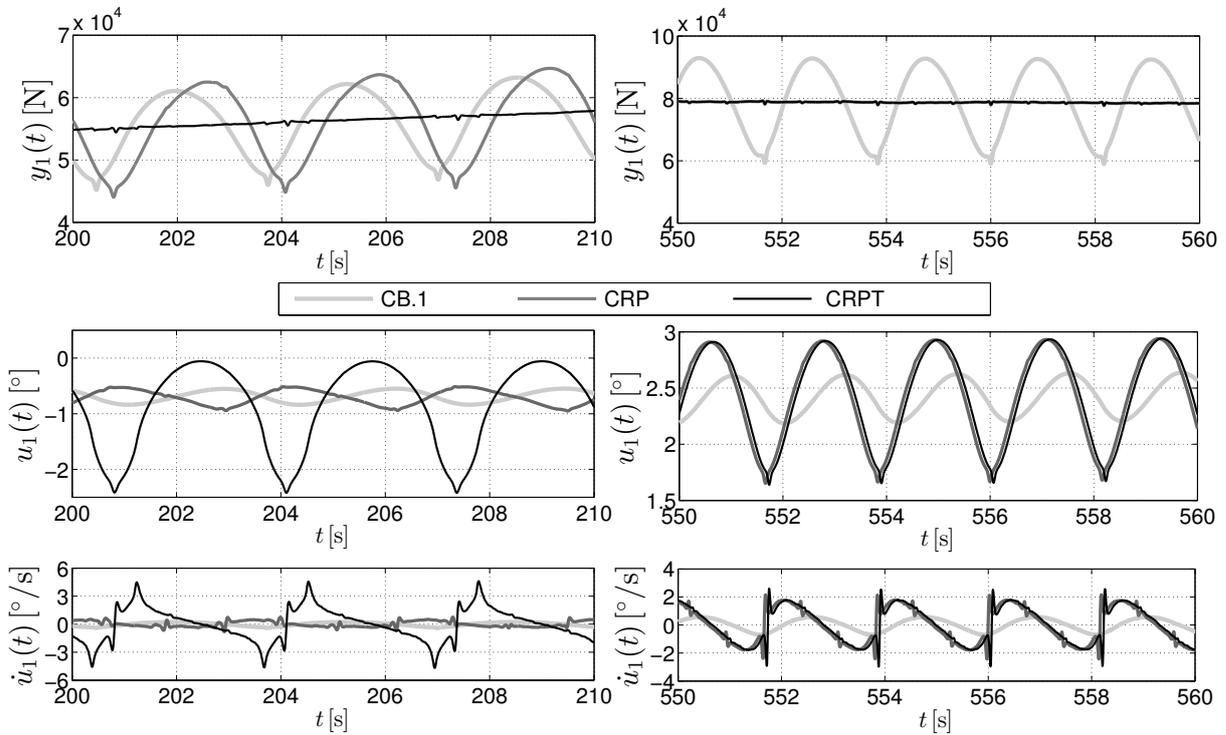


Figura 50 – Comparação ampliada entre CB.1, CRS.5 e CRST.5 para os sinais $y_1(t)$, u_1 e \dot{u}_1 nas faixas de tempo 200s até 210s e 550s até 560s.



Nas Figuras 50 e 51 segue uma comparação ampliada dos controladores CB.1, CRS.5, CRST.5, CRP e CRPT em diferentes faixas de tempo: de 200s até 210s (à esquerda) e 550s até 560s (à direita). Nestas figuras são apresentadas as respostas da carga na pá $y_1(t)$ (acima), comando de inclinação da pá $u_1(t)$ (centro) e a derivada deste sinal

Figura 51 – Comparação ampliada entre CB.1, CRP e CRPT para os sinais $y_1(t)$, u_1 e \dot{u}_1 nas faixas de tempo 200 s até 210 s e 550 s até 560 s.

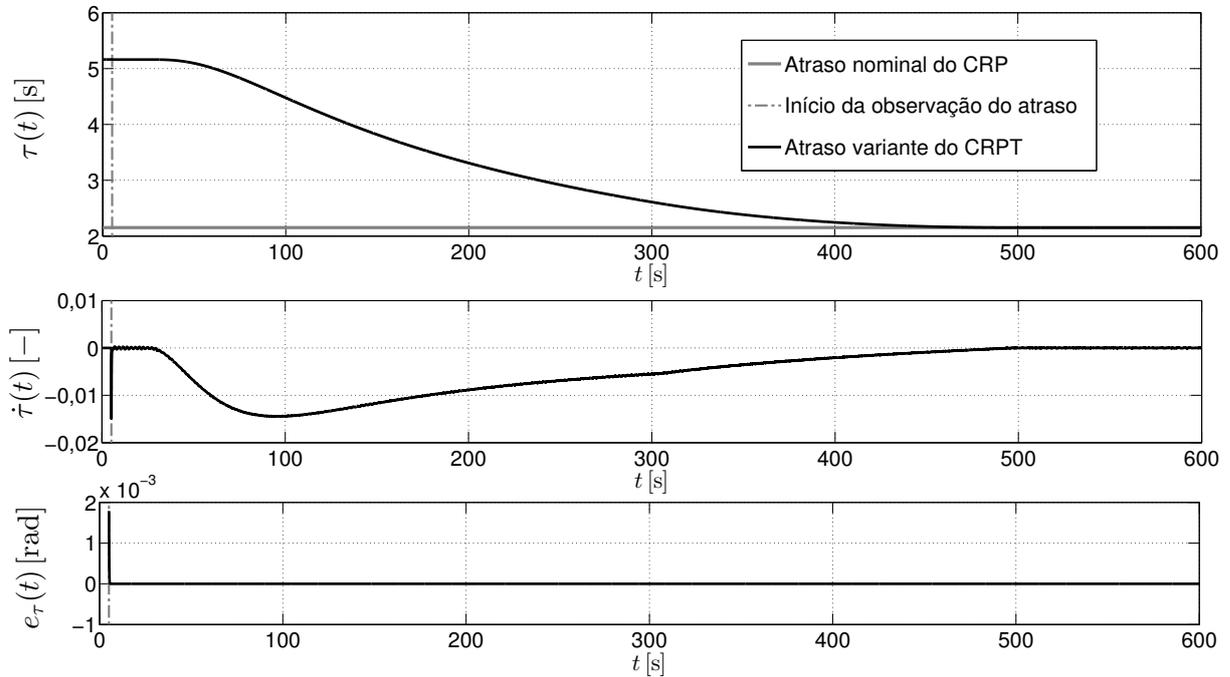


de controle $\dot{u}_1(t)$. Este último sinal tem um sentido importante no projeto de controle de turbinas eólicas, pois está relacionado ao desempenho requerido pelo atuador responsável pela inclinação das pás. Para um turbina eólica de potência nominal entorno de 2,5 MW, a faixa de $\dot{u}_i(t)$ usual é $\pm 8^\circ/s$. (HASSAN et al., 2011).

Na faixa de tempo 200 s até 210 s a rotação da turbina está entorno de 2 rad/s em contraste ao valor nominal 2,9020 rad/s ao qual os controladores CRS. n_h e CRP foram sintonizados. Já na faixa de tempo 550 s até 560 s a rotação da turbina encontra-se no valor. Ao analisar as figuras 50 e 51 fica claro que os Controladores Transformados propostos apresentam praticamente a mesma resposta nesta última faixa de tempo (inclusive sendo difícil de diferenciar visualmente as curvas do gráfico entre CRS.5 e CRST.5, e entre CRP e CRPT). Entretanto, na primeira faixa de tempo observa-se claramente a perda do desempenho de rejeição por parte de CRS.5 e CRP, neste caso apresentando um resposta muito similar ao controlador básico CB.1 que contém somente integradores. Em contrapartida, observa-se que as estratégias propostas CRST.5 e CRPT apresentam um desempenho de rejeição adequado em ambas as faixa de tempo mostradas.

A Figura 52 (ao topo) compara o sinal de atraso $\tau(t)$ do Repetitivo Transformado em relação ao valor nominal utilizado no Repetitivo tradicional. Observe que após o instante 450 s ambos os atrasos tornam-se iguais. É possível verificar aqui o valor de início t_0 da observação do atraso, que corresponde ao valor supremo do atraso $\tau_{sup} = 5,1632$ s.

Figura 52 – Comparação entre o atraso variante $\tau(t)$ de CRPT e o atraso nominal constante de CRP. Abaixo, os sinais de variação do atraso $\dot{\tau}(t)$ e erro da observação do atraso $e_{\tau}(t)$.



Ao centro da Figura 52 está disposta a taxa de variação $\dot{\tau}(t)$ do atraso durante toda a simulação. Neste cenário simulado, a variação de $\delta(t)$ manteve $\dot{\tau}(t)$ sempre abaixo de $\mu = 0,04$ (o valor máximo teórico permitido). Nesta simulação pôde-se observar a variação negativa do atraso, apresentado um valor mínimo de $-0,02$, visto que o período dos sinais está comprimindo com o tempo (pelo aumento da rotação da turbina, por sua vez devido ao $\delta(t)$ considerado crescente ao longo do tempo). Se fosse considerado o oposto, ou seja, $\delta(t)$ decrescente, ocorreria a diminuição do período da rotação ao longo do tempo, e portanto o sinal $\dot{\tau}(t)$ seria positivo. Mesmo nesse caso, a taxa de variação do atraso estaria limitada até $0,02$, ainda abaixo de $\mu = 0,04$ não excedendo assim o limite de projeto. Adicionalmente, o terceiro gráfico na Figura 52 mostra o erro $e_{\tau}(t)$ utilizado para observação do atraso, onde comprova-se a convergência deste sinal para zero.

Sabe-se que as estratégias de controle projetadas com base no PMI são capazes de garantir a rejeição assintótica de perturbações independente do desempenho transitório do sistema, desde que sejam considerados os modos permanentes destes sinais. Isto é, seja a característica transitória mais rápida ou mais lenta, isto não interfere na resposta em regime permanente do sistema. Já quando o controlador não considera todos os modos permanentes dos sinais, observa-se a presença de um erro em regime permanente. Este residual está intimamente relacionado com o desempenho transitório do sistema, onde nota-se que sistemas mais rápidos apresentam um menor residual no regime permanente em relação a sistemas mais lentos. Com base nesta observação, será discutida na sequên-

cia a comparação dos controladores propostos em relação a estratégia de controle CB.2 que contém ganhos de realimentação significativamente mais elevados em relação às demais estratégias, devendo apresentar uma característica transitória mais rápida e um erro residual por consequência menor.

Figura 53 – Comparação entre CB.2, CRST.5 e CRP da variação da saída $\Delta y_1(t)$ entorno do ponto de equilíbrio.

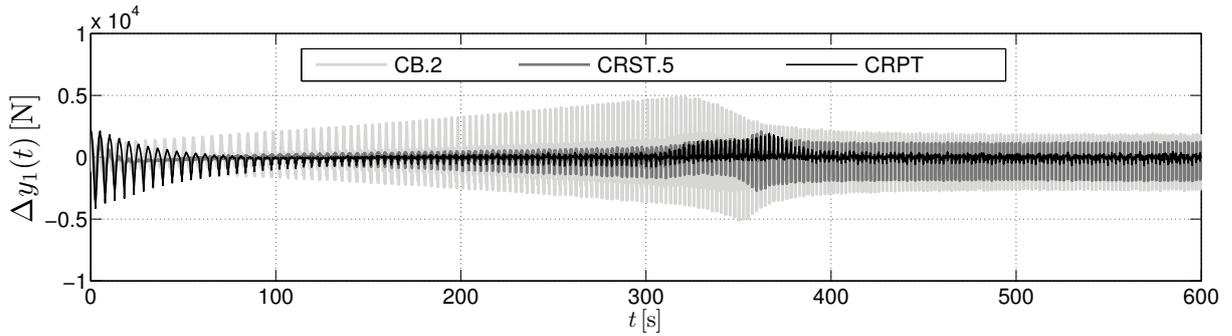
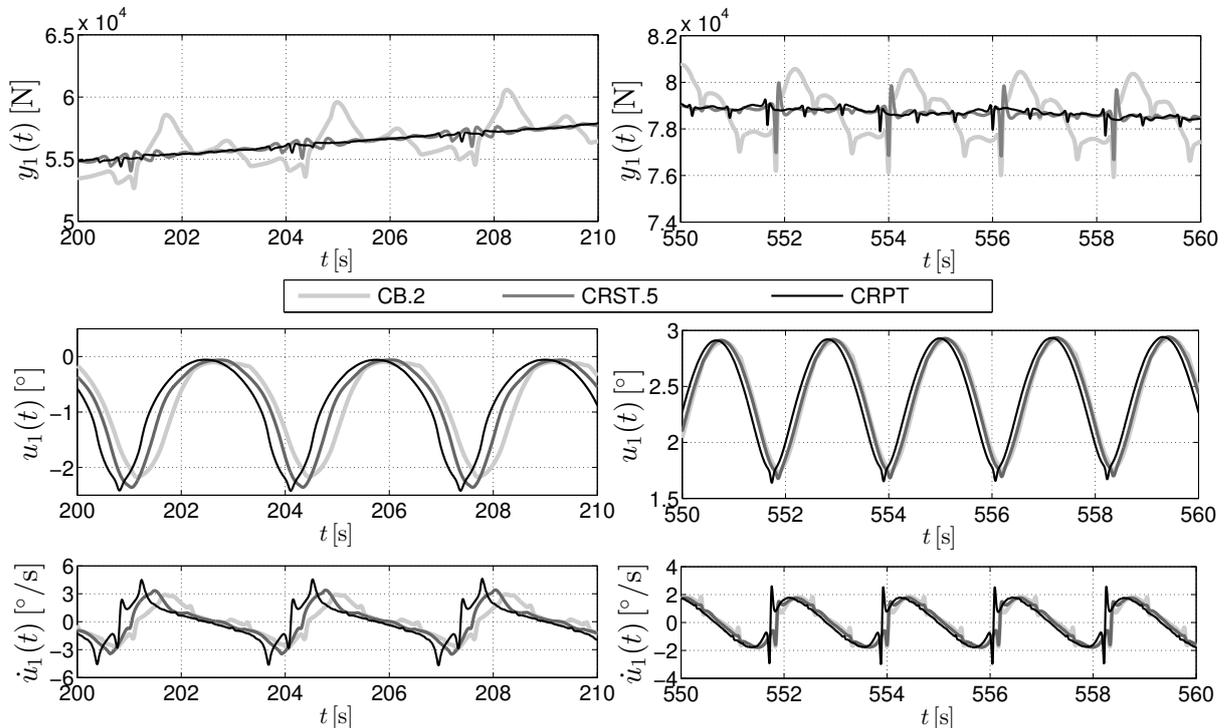


Figura 54 – Comparação ampliada entre CB.2, CRST.5 e CRP seguindo a mesma disposição das Figuras 51 e 50.



A Figura 53 compara o sinal $\Delta y_1(t)$ entre os controladores CB.2, CRST.T e CRP durante todo o tempo de simulação. Na sequência, a Figura 54 apresenta a comparação ampliada seguindo a mesma organização das Figuras 51 e 50 mostradas anteriormente. Observe agora que a amplitude de $u_1(t)$ e $\dot{u}_1(t)$ de CB.2 é comparável aos controladores CRST.5 e CRPT. Contudo, uma notável vantagem ainda é observada na saída $y_1(t)$ por

parte dos controladores proposto, mesmo estes utilizando uma realimentação mais suave em relação a CB.2.

Por fim, a Tabela 13 apresenta o valor *RMS* da variação $\Delta y_1(t)$ do instante inicial 15 s até o final da simulação: 600 s, desconsiderando assim o tempo de acomodação inicial dos controladores. Este valor representa fisicamente a variação de carga sofrida por cada pá da turbina eólica durante a faixa de tempo analisada, ou ainda, relacionado ao dano por fadiga sofrido por estas estruturas. A Tabela 13 deixa claro a ineficiência dos controladores CRP e CRS. n_h (para todos n_h testados) na presente aplicação com perturbação de período variante no tempo. Por outro lado as estratégias propostas (demarcadas em negrito na Tabela 13) apresentam uma significativa redução de carga nas pás. Com exceção de CRS.1, todas estes controladores propostos superam inclusive o controle com CB.2, que apresenta uma realimentação muito agressiva em relação aos outros controladores.

Tabela 13 – Valor efetivo (RMS) do sinal $\Delta y_1(t)$ do instante 15 s até o final da simulação: 600 s para todos os controladores testados. A estratégias propostas estão demarcadas em negrito.

Controlador	<i>RMS</i> de $\Delta y_1(t)$ [N]
CB.1	7942,4
CB.2	1291,4
CRS.1	3022,4
CRS.2	2869,5
CRS.3	2837,9
CRS.4	2820,3
CRS.5	2812,3
CRST.1	1555,4
CRST.2	629,46
CRST.3	347,41
CRST.4	300,31
CRST.5	282,92
CRP	4868,0
CRPT	253,73

6.6 Comentários Finais

Este capítulo apresentou uma metodologia de projeto dos Controladores Transformados para redução da carga mecânica periódica em turbinas eólicas. A modelagem realizada considerou os objetivos primários de geração de potência na forma de condições de equilíbrio em função da velocidade média do vento. Um modelo linearizado foi

obtido para descrever a dinâmica do sistema no entorno destas condições de equilíbrio do sistema. Neste sentido, os Controladores Transformados foram empregados para tratar a rejeição das entradas de perturbação e manter as saídas do sistema próximas aos valores desejados. As topologias de controle propostas mostraram-se eficazes nesta aplicação com sinais de período variante no tempo, apresentando melhor desempenho de rejeição em relação às estratégias tradicionais de Controle Ressonante e Repetitivo.

A principal contribuição científica contida neste capítulo foi o projeto de controladores para turbinas eólicas com base no PMI, que ainda consideram a rejeição da perturbação para largas variações no período durante o regime de operação abaixo da velocidade nominal. A literatura já considera diversas estratégias de controle para turbinas eólicas com base no PMI (NAVALKAR et al., 2014; HOUTZAGER; WINGERDEN; VERHAEGEN, 2013; ZHANG; CHEN; CHENG, 2013). Nestas propostas, o tratamento das variações do período das entradas de distúrbio foi ressaltado como um problema em aberto para investigações futuras (HOUTZAGER; WINGERDEN; VERHAEGEN, 2013).

7 Projeto e Implementação no Domínio Discreto

O foco deste capítulo é apresentar uma metodologia para projeto dos controladores propostos diretamente no domínio discreto, permitindo assim a implementação digital em microcontroladores com base em equações de diferença. Para transportar a dinâmica dos Controladores Transformados do domínio contínuo para o domínio discreto serão empregadas operações de discretização. Para efetuar a síntese robusta dos ganhos de realimentação, serão apresentados critérios de estabilidade e desempenho também na forma de *LMI*s, porém diretamente para o domínio discreto. Ao final do capítulo serão apresentados resultados experimentais referentes a aplicação dos Controladores Transformados em um motor de corrente contínua. Uma análise comparativa será apresentada comparando as estratégias propostas em oposição às tradicionais.

7.1 Operações de Discretização

Antes de iniciar formulação no domínio discreto é conveniente a introdução dos conceitos, principalmente referente às operações de discretização. Considere o fator constante T_s como o período de amostragem do sistema digital, isto é, o tempo entre a aquisição de cada amostra. Este parâmetro relaciona o domínio do tempo $t \in \mathbb{R}_+^*$ com o domínio das amostras $k \in \mathbb{Z}_+^*$ conforme:

$$t = k T_s . \quad (7.1)$$

Dado um sinal contínuo $x(t)$, sua forma discreta $\mathbf{x}[k]$ é obtida pela aplicação da relação (7.1).

$$x(t) = x(k T_s) \Rightarrow \mathbf{x}[k] . \quad (7.2)$$

7.1.1 Discretização das Operações de Derivada e Atraso

No contexto de discretização de sistemas contínuos existem as técnicas de aproximação por integração numérica como *Euler Forward*, *Euler Backwards* e *Tustin*. Especificamente para o caso de sistemas lineares, podem ser utilizadas as técnicas de mapeamento do polos/zeros, e discretização exata (retenção de ordem zero) (OGATA, 1987). Visto que o objetivo será a discretização dos Controladores Transformados desenvolvidos (que possuem dinâmica não-linear) será trabalhado aqui com a discretização por integração numérica. Por simplicidade, optou-se por trabalhar com o método de *Euler Forward*. A investigação de outras formas de discretização, bem como a reformulação dos Controla-

dores Transformados diretamente no domínio discreto (sem necessitar aproximações de discretização) é deixada como uma proposta para trabalhos futuros.

O método de *Euler Forward* consiste em aproximar a derivada de um sinal $\dot{x}(t)$ conforme mostrado abaixo:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(kT_s) \approx \frac{x(kT_s + 1) - x(kT_s)}{T_s} \Rightarrow \frac{\mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}[k]}{T_s} = \frac{\Delta \mathbf{x}[k]}{T_s} \quad (7.3)$$

Note que esta aproximação representa a derivada de um sinal como a diferença do sinal entre as amostras futura e atual, dividido pelo tempo T_s entre estas amostras. Para obter uma aproximação razoável deve-se assegurar que o período de amostragem T_s é muito mais rápido que a dinâmica do sistema (OGATA, 1987).

Resta ainda organizar uma forma para tratar as operações de retardo temporal, já referindo-se ao caso do Controlador Repetitivo Transformado. Na verdade, operações de atraso temporal são facilmente convertidas do domínio contínuo para o domínio discreto. Pela simples aplicação da relação (7.1), segue que um atraso no domínio do tempo de $\tau(t)$ é equivalente a um atraso $\tau_d[k]$ (medido em número de amostras):

$$\frac{\tau(t)}{T_s} = \frac{\tau(kT_s)}{T_s} = \tau_d(kT_s) \Rightarrow \tau_d[k] \quad (7.4)$$

Deve-se levar em consideração somente o fato de que o domínio das amostras pertence a um conjunto de valores inteiros. Quando o atraso $\tau(t)$ é divisível pelo período de amostragem T_s , então a operação de retardo no domínio discreto é equivalente ao domínio contínuo. Já quando $\tau(t)$ não é divisível por T_s , pode-se considerar arredondamento do valor: $\lfloor \tau_d[k] \rfloor$. Formante, a discretização do atraso é representada conforme:

$$x(t - \tau(t)) = x(kT_s - \tau(kT_s)) \Rightarrow \mathbf{x}[k - \lfloor \tau_d[k] \rfloor] \quad (7.5)$$

Para evitar que o erro introduzido por este arredondamento seja significativo, deve-se assegurar que T_s é muito menor que os valores de $\tau(t)$.

Neste trabalho ficarão implícitas as operações de arredondamento $\lfloor \cdot \rfloor$ nos deslocamentos temporais, isto é,

$$\mathbf{x}[k - \lfloor \tau_d[k] \rfloor] \equiv \mathbf{x}[k - \tau_d[k]] , \quad (7.6)$$

para desta forma não sobrecarregar a notação.

7.1.2 Modelo Discreto da Planta Controlada

Para tratar as condições de estabilidade em malha-fechada será considerado um modelo discreto da dinâmica da planta, representável na seguinte forma politópica:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}(\lambda) \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}(\lambda) \mathbf{u}[k] + \mathbf{B}_d(\lambda) \mathbf{d}[k] \\ \mathbf{y}[k] = \mathbf{C} \mathbf{x}[k] + \mathbf{D} \mathbf{u}[k] + \mathbf{D}_d \mathbf{d}[k] \\ \mathbf{e}[k] = \mathbf{r}[k] - \mathbf{y}[k] \end{cases} \quad (7.7)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de controle, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$ é a saída, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}$ é o sinal de referência, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}$ é a entrada de distúrbio e $\mathbf{e} \in \mathbb{R}$ é o sinal de erro. As matrizes incertas modelo discreto $\mathbf{A}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{B}_d(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ são supostamente representáveis na forma polipótica tradicional

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\lambda) & \mathbf{B}(\lambda) & \mathbf{B}_d(\lambda) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2^p} \lambda_i \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i & \mathbf{B}_{di} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

para termos A_i , B_i e B_{di} , $i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$, sendo p o número de parâmetros incertos da planta. Segue que a variável λ está contida no conjunto:

$$\lambda \in \mathcal{B}_\lambda = \left\{ \lambda_i : \sum_{i=1}^{2^p} \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, 2^p \right\} \subset \mathbb{R}^{2^p}. \quad (7.9)$$

Considera-se os demais termos $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ e $D_d \in \mathbb{R}$ constantes. Caso o modelo contínuo da planta controlada seja conhecido (conforme apresentado na Seção 3.1) bem como o período de amostragem T_s do sistema, pode-se obter o modelo discretizado pelo método *Euler Forward* através das relações:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\lambda) &= T_s \mathbf{A}(\lambda) + \mathbf{I}_n, & \mathbf{B}(\lambda) &= T_s \mathbf{B}(\lambda), & \mathbf{B}_d(\lambda) &= T_s \mathbf{B}_d(\lambda), \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C}, & \mathbf{D} &= \mathbf{D}, & D_d &= D_d. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Permanece-se aqui a suposição de que os sinais de referência $r(t)$ e distúrbio $d(t)$ apresentam a forma periódica variante no tempo $p_r(\phi(t))$ e $p_r(\phi(t))$ para funções $p_r(\xi)$ e $p_d(\xi)$ de mesmo período conhecido T_p , $\phi(t)$ estritamente crescente e conhecido, além de $\dot{\phi}(t)$ positivo e conhecido. No domínio discreto representação equivalente desta classe de sinais é

$$\begin{aligned} r(t) = p_r(\phi(t)) &\Rightarrow \mathbf{r}[k] = p_r(\phi[k]), \\ d(t) = p_d(\phi(t)) &\Rightarrow \mathbf{d}[k] = p_d(\phi[k]). \end{aligned} \quad (7.11)$$

7.1.3 Discretização dos Sinais de Transformação

Sabe-se que no domínio contínuo pode-se escolher uma função $\theta(t) = \varrho \phi(t)$, para qualquer constante $\varrho > 0$, permitindo assim representar os sinais no domínio- θ com um período constante de $T_\theta = \varrho T_p$. O mesmo procedimento será aplicado no domínio discreto, porém utilizando um sinal de transformação $\theta[k]$ (representado a forma discreta de $\theta(t)$):

$$\theta(t) = \varrho \phi(t) \rightarrow \theta[k] = \varrho \phi[k]. \quad (7.12)$$

Resta verificar agora a forma equivalente discreta para o sinal $\Omega(t) = \dot{\theta}(t)$, que desempenha um papel fundamental para implementação dos controladores. Utilizando o método de discretização *Euler Forward* segue que:

$$\Omega(t) = \dot{\theta}(t) \Rightarrow \Omega[k] = \frac{\theta[k+1] - \theta[k]}{T_s}, \quad (7.13)$$

Para deixar implícito o período de amostragem do sistema é conveniente trabalhar com $\Omega_d[k] = T_s \Omega[k]$, visto que assim $\Omega_d[k]$ é diretamente a diferença do sinal $\theta[k]$ do instante futuro para o instante presente. Então segue que

$$\Omega_d[k] = T_s \Omega[k] = \theta[k+1] - \theta[k] = \varrho(\phi[k+1] - \phi[k]) = \varrho \Delta\phi[k]. \quad (7.14)$$

ou seja, $\Omega_d[k]$ é diretamente proporcional a variação $\Delta\phi[k] = \phi[k+1] - \phi[k]$ da trajetória $\phi[k]$ que compõe os sinais de referência/distúrbio.

7.2 Controlador Ressonante Transformado Discretizado

Esta seção é dedicada exclusivamente para a definição do Controlador Ressonante Transformado Discretizado, onde será detalhada a equação de diferença deste controlador além de uma metodologia de síntese robusta no domínio discreto.

7.2.1 Equação de Diferença do Controlador

Utilizando o modelo do Controlador Ressonante Transformado obtido em (4.8) e aplicando a discretização *Euler Forward* resulta:

$$\mathbf{x}_r[k+1] = (\Omega_d[k] A_{r\theta} + I_2) \mathbf{x}_r[k] + \Omega_d[k] B_{r\theta} \mathbf{e}[k]. \quad (7.15)$$

Aqui, as matrizes $A_{r\theta}$ e $B_{r\theta}$ são mesmas da definição no domínio contínuo, isto é:

$$A_{r\theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{r\theta} \\ \omega_{r\theta} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{r\theta} = \begin{bmatrix} k_{r\theta} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.16)$$

Note que o período de amostragem T_s foi absorvido pelo sinal $\Omega_d[k]$.

Para o modelo do Controlador Ressonante Transformado mais genérico em (6.39), com n_h modos harmônicos), o resultado da discretização é

$$\mathbf{x}_R[k+1] = (\Omega_d[k] A_{R\theta} + I_{2n_h}) \mathbf{x}_R[k] + \Omega_d[k] B_{R\theta} \mathbf{e}[k] \quad (7.17)$$

onde novamente os termos $A_{R\theta}$ e $B_{R\theta}$ seguem a mesma definição do caso contínuo:

$$A_{R\theta} = \text{diag} \{ A_{r\theta}, 2 A_{r\theta}, \dots, n_h A_{r\theta} \}, \quad B_{R\theta} = \begin{bmatrix} B_{r\theta} \\ B_{r\theta} \\ \vdots \\ B_{r\theta} \end{bmatrix}. \quad (7.18)$$

Para considerar o seguimento e/ou rejeição de sinais tipo degrau será incluído um estado integrador ao controlador. No domínio discreto, este é simplesmente um acumulador do erro conforme:

$$\mathbf{x}_I[k+1] = \mathbf{x}_I[k] + \mathbf{e}[k]. \quad (7.19)$$

Assim define-se o vetor de estados total do controlador $\mathbf{x}_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ ($n_c = 1 + 2n_h$) segundo:

$$\mathbf{x}_c[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_I[k] \\ \mathbf{x}_R[k] \end{bmatrix}. \quad (7.20)$$

A equação de diferença completa do controlador então pode ser escrita na forma

$$\mathbf{x}_c[k+1] = \mathbf{A}_c(\Omega_d[k]) \mathbf{x}_c[k] + \mathbf{B}_c(\Omega_d[k]) \mathbf{e}[k] \quad (7.21)$$

tal que as matrizes variantes $\mathbf{A}_c(\Omega_d) \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$ e $\mathbf{B}_c(\Omega_d) \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$ são definidas como:

$$\mathbf{A}_c(\Omega_d) = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times 2n_h} \\ \star & \Omega_d A_{R\theta} + I_{2n_h} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c(\Omega_d) = \begin{bmatrix} 1 \\ \Omega_d B_{R\theta} \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

7.2.2 Síntese Robusta no Domínio Discreto

O objetivo agora é encontrar matrizes de ganhos de realimentação $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{K}_c \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$ para uma lei de controle discreta na forma

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{K} \mathbf{x}[k] + \mathbf{K}_c \mathbf{x}_c[k], \quad (7.23)$$

de tal forma que o sistema apresente estabilidade e desempenho robusto. Será considerada uma planta controlada com a dinâmica descrita na Subseção 7.1.2. Para atingir este objetivo será apresentada a modelagem politópica do Cocontrolador Ressonante Discretizado e posteriormente o modelo aumentado do sistema. Então, será empregada a metodologia de controle robusto \mathcal{H}_2 para o caso discreto, tal com explicado na Subseção 2.4.4.

7.2.2.1 Representação Politópica Discreta do Controlador

O passo inicial para chegar na condição de estabilidade do sistema é assumir a limitação dos valores admissíveis para o parâmetro variante $\Omega_d[k]$ do controlador. Assim como formulado no caso contínuo, será aqui definido um conjunto $\mathcal{B}_{\Omega_d} = [\Omega_{d1}, \Omega_{d2}]$, tal que $\Omega_d[k] \in \mathcal{B}_{\Omega_d} \forall k \geq 0$. Desta forma, a equação do controlador em (7.21) pode ser reescrita na seguinte forma politópica

$$\mathbf{x}_c[k+1] = \mathbf{A}_c(\lambda_c) \mathbf{x}_c[k] + \mathbf{B}_c(\lambda_c) \mathbf{e}[k] \quad (7.24)$$

onde as matrizes $\mathbf{A}_c(\lambda_c)$ e $\mathbf{B}_c(\lambda_c)$ denotam

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_c(\lambda_c) & \mathbf{B}_c(\lambda_c) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^2 \lambda_{cj} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cj} & \mathbf{B}_{cj} \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

e $\lambda_c \in \mathcal{B}_{\lambda_c}$, sendo este conjunto \mathcal{B}_{λ_c} definido por

$$\mathcal{B}_{\lambda_c} = \left\{ \lambda_{cj} : \sum_{j=1}^2 \lambda_{cj} = 1, 0 \leq \lambda_{cj} \leq 1, j = 1, 2 \right\} \subset \mathbb{R}^2. \quad (7.26)$$

Por fim, as matrizes \mathbf{A}_{cj} e \mathbf{B}_{cj} , $j \in \{1, 2\}$ são obtidas por

$$\mathbf{A}_{cj} = \mathbf{A}_c(\Omega_{dj}) = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times 2n_h} \\ \star & \Omega_{dj} A_{R\theta} + I_{2n_h} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{cj} = \mathbf{B}_c(\Omega_{dj}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \Omega_{dj} B_{R\theta} \end{bmatrix}. \quad (7.27)$$

7.2.2.2 Modelo Aumentado Discreto do Sistema

Definindo o vetor aumentado de estados $\mathbf{x}_a \in \mathbb{R}^{n_a}$ ($n_a = n + n_c$) e o vetor aumentado de entradas de distúrbio $\mathbf{d}_a \in \mathbb{R}^2$ conforme

$$\mathbf{x}_a[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ \mathbf{x}_c[k] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_a[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{d}[k] \\ \mathbf{r}[k] \end{bmatrix}, \quad (7.28)$$

permite representar o modelo aumentado do sistema conforme

$$\mathbf{x}_a[k+1] = \mathbf{A}_a(\lambda_a) \mathbf{x}_a[k] + \mathbf{B}_a(\lambda_a) \mathbf{u}[k] + \mathbf{B}_{da}(\lambda_a) \mathbf{d}_a[k]. \quad (7.29)$$

onde $\lambda_a \in \mathcal{B}_{\lambda_a}$, para o conjunto \mathcal{B}_{λ_a} :

$$\mathcal{B}_{\lambda_a} = \left\{ \lambda_{a(i,j)} : \sum_{i=1}^{2^p} \sum_{j=1}^2 \lambda_{a(i,j)} = 1, \quad 0 \leq \lambda_{a(i,j)} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, 2^p, \quad j = 1, 2 \right\}. \quad (7.30)$$

As matrizes aumentadas do sistema seguem a representação

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_a(\lambda_a) & \mathbf{B}_a(\lambda_a) & \mathbf{B}_{da}(\lambda_a) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2^p} \sum_{j=1}^2 \lambda_{a(i,j)} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{a(i,j)} & \mathbf{B}_{a(i,j)} & \mathbf{B}_{da(i,j)} \end{bmatrix}. \quad (7.31)$$

onde obtém-se $\mathbf{A}_{a(i,j)}$, $\mathbf{B}_{a(i,j)}$ e $\mathbf{B}_{da(i,j)}$, para $i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$ e $j \in \{1, 2\}$, através de

$$\mathbf{A}_{a(i,j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & 0 \\ -\mathbf{B}_{c_j} \mathbf{C} & \mathbf{A}_{c_j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{a(i,j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ -\mathbf{B}_{c_j} \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{da(i,j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{di} & 0 \\ -\mathbf{B}_{c_j} \mathbf{D}_d & \mathbf{B}_{c_j} \end{bmatrix}, \quad (7.32)$$

Representando a lei de controle (7.23) também na forma aumentada

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{K}_a \mathbf{x}_a[k] \quad \therefore \quad \mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_c \end{bmatrix}, \quad (7.33)$$

possibilita escrever a dinâmica em malha-fechada do sistema como

$$\mathbf{x}_a[k+1] = \left(\mathbf{A}_a(\lambda_a) + \mathbf{B}_a(\lambda_a) \mathbf{K}_a \right) \mathbf{x}_a[k] + \mathbf{B}_a(\lambda_a) \mathbf{d}_a[k]. \quad (7.34)$$

7.2.2.3 Critérios de Estabilidade e Desempenho no Domínio Discreto

Com base no modelo aumentado organizado do sistema, pode-se estabelecer os critérios de estabilidade e desempenho \mathcal{H}_2 diretamente no domínio discreto.

Considere a saída de desempenho do sistema como $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$ ($n_z = n_a + m$):

$$\mathbf{z}[k] = \mathbf{C}_z \mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_z \mathbf{u}[k] \quad (7.35)$$

onde as matrizes $\mathbf{C}_z \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ e $\mathbf{D}_z \in \mathbb{R}^{n_z \times m}$ podem ser construídas como

$$\mathbf{C}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_z \\ 0_{m \times n_a} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_z = \begin{bmatrix} 0_{n_a \times m} \\ \mathbf{R}_z \end{bmatrix}. \quad (7.36)$$

Neste caso, as matrizes diagonais $\mathbf{Q}_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{R}_z \in \mathbb{R}^{m \times m}$ contém as penalidades na energia de cada estado e entrada de controle do sistema.

A função de custo \mathcal{H}_2 na forma discreta é expressa conforme

$$\mathcal{J}_2 = \|\mathbf{z}[k]\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{z}^T[k] \mathbf{z}[k] . \quad (7.37)$$

Para resolução do problema de estabilidade do sistema, será desconsiderado o vetor de entradas exógenas $\mathbf{d}_a[k]$, assim como efetuado para as sínteses no domínio contínuo. Portanto, a representação do sistema a ser tratada é

$$\begin{cases} \mathbf{x}_a[k+1] &= (\mathbf{A}_a(\lambda_a) + \mathbf{B}_a(\lambda_a)\mathbf{K}_a) \mathbf{x}_a[k] \\ \mathbf{z}[k] &= (\mathbf{C}_z + \mathbf{D}_z\mathbf{K}_a) \mathbf{x}_a[k] \end{cases} . \quad (7.38)$$

Assim, chega-se ao tradicional problema de controle robusto \mathcal{H}_2 no domínio discreto, de mesma forma apresentada na Subseção 2.4.4. Para formalizar, segue a descrição do Problema 7.1 e posteriormente Teorema 7.1 indicado para sua solução.

Problema 7.1. *Encontrar um ganho robusto \mathbf{K}_a tal que o sistema discreto (7.38) seja assintoticamente estável para todo $\lambda_a \in \mathcal{B}_{\lambda_a}$ e que a função de custo \mathcal{J}_2 em (7.37) seja minimizada.*

Teorema 7.1. *Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas $\hat{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e uma matriz $\hat{\mathbf{K}}_a \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaçam*

$$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}} \mathbf{A}_{a(i,j)}^T + \hat{\mathbf{K}}_a^T \mathbf{B}_{a(i,j)}^T & \hat{\mathbf{P}} \mathbf{C}_z^T + \hat{\mathbf{K}}_a^T \mathbf{D}_z^T \\ \star & -\hat{\mathbf{P}} & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 , \quad (7.39)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ \star & \hat{\mathbf{P}} \end{bmatrix} > 0 , \quad (7.40)$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$ e todo $j \in \{1, 2\}$. Então o sistema discreto (7.38) com $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{P}}^{-1}$ é assintoticamente estável e a função de custo \mathcal{J}_2 satisfaz

$$\mathcal{J}_2 < \mathbf{x}_a^T[0] \mathbf{X} \mathbf{x}_a[0] . \quad (7.41)$$

Demonstração. A prova é equivalente ao mostrado anteriormente no Teorema 2.10. \square

Os mesmos passos sistemáticos para o projeto do Controlador Ressonante Transformado no domínio contínuo (ver Subseção 4.4.4) são válidos também para domínio discreto. Além disso, para visualizar como deve ser realizada a implementação digital do Controlador Ressonante Transformado em um microcontrolador basta analisar a Tabela 14.

Tabela 14 – Algoritmo discreto completo do Controle Ressonante Transformado para implementação em um microcontrolador.

$$\begin{aligned}
\Omega_d[k] &= \varrho \Delta\phi[k] \\
e[k] &= r[k] - y[k] \\
x_{c1}[k+1] &= x_{c1}[k] + e[k] \\
x_{c2}[k+1] &= x_{c2}[k] - \Omega_d[k] \omega_{r\theta} x_{c3}[k] + \Omega_d[k] k_{r\theta} e[k] \\
x_{c3}[k+1] &= x_{c3}[k] + \Omega_d[k] \omega_{r\theta} x_{c2}[k] \\
x_{c4}[k+1] &= x_{c4}[k] - \Omega_d[k] 2\omega_{r\theta} x_{c5}[k] + \Omega_d[k] k_{r\theta} e[k] \\
x_{c5}[k+1] &= x_{c5}[k] + \Omega_d[k] 2\omega_{r\theta} x_{c4}[k] \\
&\vdots \\
x_{c(n_c-1)}[k+1] &= x_{c(n_c-1)}[k] - \Omega_d[k] n_h \omega_{r\theta} x_{c(n_c)}[k] + \Omega_d[k] k_{r\theta} e[k] \\
x_{c(n_c)}[k+1] &= x_{c(n_c)}[k] + \Omega_d[k] n_h \omega_{r\theta} x_{c(n_c-1)}[k] \\
u_1[k] &= K_{(1,1)} x_1[k] + K_{(1,2)} x_2[k] + \dots + K_{(1,n)} x(n)[k] + \\
&\quad K_{c(1,1)} x_{c1}[k] + K_{c(1,1)} x_{c2}[k] + \dots + K_{c(1,n_c)} x_{c(n_c)}[k] \\
u_2[k] &= K_{(2,1)} x_1[k] + K_{(2,2)} x_2[k] + \dots + K_{(2,n)} x(n)[k] + \\
&\quad K_{c(2,1)} x_{c1}[k] + K_{c(2,1)} x_{c2}[k] + \dots + K_{c(2,n_c)} x_{c(n_c)}[k] \\
&\vdots \\
u_m[k] &= K_{(m,1)} x_1[k] + K_{(m,2)} x_2[k] + \dots + K_{(m,n)} x(n)[k] + \\
&\quad K_{c(m,1)} x_{c1}[k] + K_{c(m,1)} x_{c2}[k] + \dots + K_{c(m,n_c)} x_{c(n_c)}[k]
\end{aligned}$$

7.3 Controlador Repetitivo Transformado Discretizado

Esta seção apresenta a definição do Controlador Repetitivo Transformado Discretizado, focando na definição das equações de diferença do controlador e do observador do atraso, além da síntese robusta no domínio discreto.

7.3.1 Equação de Diferença do Controlador

Aplicando a discretização *Euler Forward* para o Controlador Repetitivo Transformado definido no domínio contínuo em (7.52) resulta

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{rp}[k+1] &= (1 - \Omega_d[k] \omega_{c\theta}) \mathbf{x}_{rp}[k] + \Omega_d[k] k_{f\theta} \omega_{c\theta} \eta[k - \tau_d[k]] \\ \eta[k] &= \mathbf{x}_{rp}[k] + \mathbf{e}[k] \end{cases} \quad (7.42)$$

Aqui está implícita a absorção do período de amostragem T_s pelo sinal $\Omega_d[k]$, bem como pelo atraso discreto $\tau_d[k]$ em amostras. Este último, aliás, deve ser obtido pela solução da

relação (5.5), que na forma discreta torna-se

$$\theta[k] - \theta[k - \tau_d[k]] = \tau_\theta . \quad (7.43)$$

O parâmetro $\omega_{c\theta}$ aqui tem a mesma conotação do domínio contínuo. Além disso, os parâmetros τ_θ e $k_{f\theta}$ também podem ser calculados pela mesma metodologia de compensação proposta no domínio contínuo.

Para simplificar a notação do controlador será utilizada a representação

$$\begin{cases} \mathbf{x}_c[k+1] &= \mathbf{A}_c(\Omega_d[k]) \mathbf{x}_c[k] + \mathbf{B}_c(\Omega_d[k]) \eta[k - \tau_d[k]] \\ \eta[k] &= \mathbf{x}_{rp}[k] + \mathbf{e}[k] \end{cases} , \quad (7.44)$$

onde $\mathbf{x}_c \in \mathbb{R}$, e os termos variantes $\mathbf{A}_c(\Omega_d) \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{B}_c(\Omega_d) \in \mathbb{R}$ são definidos por

$$\mathbf{A}_c(\Omega_d) = 1 - \Omega_d \omega_{c\theta} , \quad \mathbf{B}_c(\Omega_d) = \Omega_d k_{f\theta} \omega_{c\theta} . \quad (7.45)$$

7.3.2 Equação de Diferença do Observador do Atraso

Para encontrar em tempo-real o valor de $\tau_d[k]$ que soluciona a relação (7.43) é proposta a discretização do observador desenvolvido para o domínio contínuo, da mesma maneira que foi realizada a discretização da dinâmica do controlador.

Primeiramente, é possível escrever o sinal de erro de observação $e_\tau(t)$, originalmente na forma contínua em (5.8):

$$\mathbf{e}_\tau[k] = \theta[k] - \theta[k - \tau_d[k]] - \tau_\theta . \quad (7.46)$$

Aplicando agora a discretização *Euler Forward* no modelo de observação em malha-fechada em (5.12) resulta

$$\tau[k+1] = T_s \left(1 - \frac{\Omega[k] + \alpha \mathbf{e}_\tau[k]}{\Omega[k - \tau_d[k]]} \right) + \tau[k] , \quad (7.47)$$

Substituindo $\Omega[k]$ por $\Omega_d[k] = T_s \Omega[k]$ é possível escrever:

$$\tau[k+1] = T_s \left(1 - \frac{\Omega_d[k] + \alpha_d \mathbf{e}_\tau[k]}{\Omega_d[k - \tau_d[k]]} \right) + \tau[k] , \quad (7.48)$$

onde α_d denota ganho de realimentação discretizado do erro:

$$\alpha_d = T_s \alpha . \quad (7.49)$$

Substituindo agora $\tau[k]$ por $T_s \tau_d[k]$ (para absorver o período de amostragem) gera então a forma final do observador discretizado:

$$\tau_d[k+1] = 1 - \frac{\Omega_d[k] + \alpha_d \mathbf{e}_\tau[k]}{\Omega_d[k - \tau_d[k]]} + \tau_d[k] . \quad (7.50)$$

Os mesmos critérios de projeto no caso contínuo devem ser também considerados aqui. Recordando, deve-se escolher um valor positivo para taxa de decaimento α , preferencialmente mais rápido que a dinâmica do sistema. Neste caso porém, deve-se evitar que a constante de tempo $1/\alpha$ do observador seja próxima ao período de amostragem T_s , para assim garantir que a aproximação da discretização seja válida. Portanto sugere-se a escolha de $0 < \alpha < 1/T_s$, ou ainda $0 < \alpha_d < 1$.

A amostra de início da observação k_0 deve ser, no mínimo, o valor supremo τ_{dsup} de $\tau_d[k]$, para evitar retorno temporal negativo, conforme explicado detalhadamente para o caso contínuo. Conhecido o valor mínimo Ω_{d1} do sinal $\Omega_d[k]$, então pode-se determinar τ_{dsup} pela equação:

$$\tau_{dsup} = \left\lceil \frac{\tau_\theta}{\Omega_{d1}} \right\rceil. \quad (7.51)$$

7.3.3 Síntese Robusta no Domínio Discreto

Aqui será mostrada uma metodologia de síntese robusta no domínio discreto visando determinar parâmetros de realimentação $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{K}_c \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ para uma lei de controle na forma (7.23). Serão seguidos os mesmos passos empregados para síntese do Controlador Ressonante Transformado Discretizado, porém agora leva-se em consideração adicionalmente a prova de estabilidade para o atraso de transporte na malha de controle.

7.3.3.1 Representação Politópica Discreta do Controlador

Considerando a limitação $\Omega_d[k] \in \mathcal{B}_{\Omega_d} = [\Omega_{d1}, \Omega_{d2}] \forall k > 0$ é possível representar o Controlador Repetitivo Transformado no formato politópico

$$\begin{cases} \mathbf{x}_c[k+1] &= \mathbf{A}_c(\lambda_c) \mathbf{x}_c[k] + \mathbf{B}_c(\lambda_c) \eta[k - \tau_d[k]] \\ \eta[k] &= \mathbf{x}_{rp}[k] + \mathbf{e}[k] \end{cases}, \quad (7.52)$$

onde os coeficientes incertos do modelo são

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_c(\lambda_c) & \mathbf{B}_c(\lambda_c) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^2 \lambda_{cj} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cj} & \mathbf{B}_{cj} \end{bmatrix} \quad (7.53)$$

para \mathbf{A}_{cj} e \mathbf{B}_{cj} obtidos através de

$$\mathbf{A}_{cj} = \mathbf{A}_c(\Omega_{dj}) = \Omega_{dj} \omega_{c\theta}, \quad \mathbf{B}_{cj} = \mathbf{B}_c(\Omega_{dj}) = \Omega_{dj} k_{f\theta} \omega_{c\theta}. \quad (7.54)$$

para $j \in \{1, 2\}$. Segue ainda que $\lambda \in \mathcal{B}_{\lambda_c}$, onde este conjunto está definido em (7.26).

7.3.3.2 Modelo Aumentado Discreto do Sistema

Considere $\mathbf{x}_a \in \mathbb{R}^{n_a}$ ($n_a = n + 1$) como o vetor aumentado de estados do sistema seguindo a mesma definição de (7.28) e $\mathbf{d}_a \in \mathbb{R}^3$ como o vetor aumentado de entradas

exógenas definido por

$$\mathbf{d}_a[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{d}[k] \\ \mathbf{d}[k - \tau_d[k]] \\ \mathbf{r}[k] \end{bmatrix}. \quad (7.55)$$

Então a dinâmica aumentada do sistema pode ser descrita por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] = & \mathbf{A}_a(\lambda_a) \mathbf{x}_a[k] + \mathbf{A}_{\tau_a}(\lambda_a) \mathbf{x}_a[k - \tau_d[k]] + \\ & \mathbf{B}_a(\lambda_a) \mathbf{u}[k] + \mathbf{B}_{\tau_a}(\lambda_a) \mathbf{u}[k - \tau_d[k]] + \mathbf{B}_{d_a}(\lambda_a) \mathbf{d}_a[k]. \end{aligned} \quad (7.56)$$

onde $\lambda_a \in \mathcal{B}_{\lambda_a}$, conforme (7.30), e as matrizes incertas denotam

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a(\lambda_a) & \mathbf{A}_{\tau_a}(\lambda_a) & \mathbf{B}_a(\lambda_a) & \mathbf{B}_{\tau_a}(\lambda_a) & \mathbf{B}_{d_a}(\lambda_a) \end{bmatrix} = \\ & \sum_{i=1}^{2^p} \sum_{j=1}^2 \lambda_{a(i,j)} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{a(i,j)} & \mathbf{A}_{\tau_a(j)} & \mathbf{B}_{a(i)} & \mathbf{B}_{\tau_a(j)} & \mathbf{B}_{d_a(i,j)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Os vértices $\mathbf{A}_{a(i,j)}$, $\mathbf{A}_{\tau_a(j)}$, $\mathbf{B}_a(\lambda_a)$, $\mathbf{B}_{\tau_a}(\lambda_a)$, e $\mathbf{B}_{d_a(i,j)}$ são construídos por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{a(i,j)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{A}_{c_j} \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_{\tau_a(j)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ -\mathbf{B}_{c_j} \mathbf{C} & \mathbf{B}_{c_j} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_{a(i)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ \mathbf{0}_{1 \times m} \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_{\tau_a(j)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times m} \\ -\mathbf{B}_{c_j} \mathbf{D} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_{d_a(i,j)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{d_i} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{B}_{c_j} \mathbf{D}_d & \mathbf{B}_{c_j} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.58)$$

para $i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$ e $j \in \{1, 2\}$.

Incluindo por fim a lei de controle (7.33) resulta na dinâmica em malha-fechada do sistema aumentado:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] = & \left(\mathbf{A}_a(\lambda_a) + \mathbf{B}_a(\lambda_a) \mathbf{K}_a \right) \mathbf{x}_a[k] + \\ & \left(\mathbf{A}_{\tau_a}(\lambda_a) + \mathbf{B}_{\tau_a}(\lambda_a) \mathbf{K}_a \right) \mathbf{x}_a[k - \tau_d[k]] + \mathbf{B}_{d_a}(\lambda_a) \mathbf{d}_a[k]. \end{aligned} \quad (7.59)$$

7.3.3.3 Critérios de Estabilidade e Desempenho no Domínio Discreto

Será apresentado aqui uma forma para síntese robusta \mathcal{H}_2 de sistemas discretos sujeitos a atraso de transporte variante no tempo. Considere a mesma função de custo $J_2 = \|\mathbf{z}[k]\|_2^2$, bem com a mesma definição da saída de desempenho $\mathbf{z}[k]$ da metodologia anterior relacionada ao Controlador Ressonante Discretizado. Considere também o descarte de $\mathbf{d}_a[k]$, visto que será trabalhado com a estabilidade assintótica interna do sistema. Dadas estas ressalvas, a representação empregada para síntese é

$$\begin{cases} \mathbf{x}_a[k+1] = \left(\mathbf{A}_a(\lambda_a) + \mathbf{B}_a(\lambda_a) \mathbf{K}_a \right) \mathbf{x}_a[k] + \left(\mathbf{A}_{\tau_a}(\lambda_a) + \mathbf{B}_{\tau_a}(\lambda_a) \mathbf{K}_a \right) \mathbf{x}_a[k - \tau_d[k]] \\ \mathbf{z}[k] = \left(\mathbf{C}_z + \mathbf{D}_z \mathbf{K}_a \right) \mathbf{x}_a[k] \end{cases}. \quad (7.60)$$

O Teorema 7.2 na sequência representa a forma discreta do Teorema 5.1 (referente ao método de Razumikhin no domínio contínuo), apresentando a solução para o Problema 7.2. Agora não será apresentada a opção de síntese pelo abordagem de Lyapunov-Krasovskii, visto que no caso discreto a formulação com o funcional quadrático “simples” de Lyapunov-Krasovskii só é factível quando o atraso de transporte é invariante (FRIDMAN, 2014)¹. Para contornar este problema é necessário emprego de transformações de modelo e funcionais estendidos de Lyapunov-Krasovskii. A aplicação de tais abordagens está fora do escopo do presente trabalho, remanescendo como uma possível investigação em trabalhos futuros.

Problema 7.2. Dado um valor $\omega_{c\theta} \in \mathbb{R}_+$ determinado a priori, encontrar um ganho robusto K_a de forma que o sistema discreto (7.60) seja assintoticamente estável para todo $\lambda_a \in \mathcal{B}_{\lambda_a}$ para qualquer sinal $\tau_d[k]$ satisfazendo $\tau_d \in \mathbb{Z}_+^*$ e tal que a função de custo \mathcal{J}_2 em (7.37) seja minimizada.

Teorema 7.2. Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas $\hat{P} \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$ e $X \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, uma matriz $\hat{K}_a \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$ e um escalar positivo $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ que satisfaçam

$$\begin{bmatrix} (\beta - 1)\hat{P} & 0 & \hat{P}A_{a(i,j)}^\top + \hat{K}_a^\top B_{a(i)}^\top & \hat{P}C_z^\top + \hat{K}_a^\top D_z^\top \\ \star & -\beta\hat{P} & \hat{P}A_{\tau_a(j)}^\top + \hat{K}_a^\top B_{\tau_a(j)}^\top & 0 \\ \star & \star & -\hat{P} & 0 \\ \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (7.61)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ \star & \hat{P} \end{bmatrix} > 0, \quad (7.62)$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$ e todo $j \in \{1, 2\}$. Então o sistema discreto (7.60) com $K_a = \hat{K}_a \hat{P}^{-1}$ é assintoticamente estável para todo $\lambda \in \mathcal{B}_{\lambda_a}$ para qualquer sinal $\tau_d[k]$ que satisfaça $\tau_d \in \mathbb{Z}_+^*$. Também, a função de custo \mathcal{J}_2 satisfaz

$$\mathcal{J}_2 < \mathbf{x}_a^\top[0] X \mathbf{x}_a[0] \quad (7.63)$$

quando $\mathbf{x}_a[0] \neq 0$ e $\mathbf{x}_a[k] = 0 \forall k < 0$.

Demonstração. A prova segue de maneira similar ao caso contínuo, conforme apresentado no Teorema 5.1. Com base no critério de estabilidade segundo Lyapunov-Razumikhin, se existir uma função de Lyapunov quadrática $V(\mathbf{x}_a[k])$ que satisfaça

$$\Delta V(\mathbf{x}_a[k]) < -\beta \left(V(\mathbf{x}_a[k]) - V(\mathbf{x}_a[k - \tau_d[k]]) \right) \quad (7.64)$$

¹ Para compreender de forma intuitiva este problema, lembre que o critério de estabilidade pelo funcional simples contínuo de Lyapunov-Krasovskii era factível para $\dot{\tau}(t) < 1$. No domínio discreto essa restrição torna-se $\Delta\tau_d[k] < 1$, que só é satisfeita quando $\tau_d[k]$ é invariante pois não é possível realizar incrementos menores que 1.

para um escalar positivo β , então o sistema discreto (7.60) é assintoticamente estável para qualquer sinal de atraso $\tau_d \in \mathbb{Z}_+^*$ (FRIDMAN, 2014). Reforçando ainda a condição

$$\Delta V(\mathbf{x}_a[k]) < -\beta \left(V(\mathbf{x}_a[k]) - V(\mathbf{x}_a[k - \tau_d[k]]) \right) - \mathbf{z}[k]^\top \mathbf{z}[k] \quad (7.65)$$

implica (ao somar a inequação de $k = 0$ até $k \rightarrow \infty$) que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}[k]\|_2^2 &< V(\mathbf{x}_a[0]) + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \left(V(\mathbf{x}_a[k - \tau_d[k]]) - V(\mathbf{x}_a[k]) \right) \\ &< V(\mathbf{x}_a[0]) + \beta \sum_{k=-\tau_{d_{sup}}}^{-1} V(\mathbf{x}_a[k]) \end{aligned} \quad (7.66)$$

onde $\tau_{d_{sup}}$ denota o valor supremo de $\tau_d[k]$. Definindo $V(\mathbf{x}_a[k]) = \mathbf{x}_a^\top[k] \mathbf{P} \mathbf{x}_a[k]$, segue que

$$\|\mathbf{z}[k]\|_2^2 < \mathbf{x}_a^\top[0] \mathbf{P} \mathbf{x}_a[0] + \beta \sum_{k=-\tau_{d_{sup}}}^{-1} \mathbf{x}_a^\top[k] \mathbf{P} \mathbf{x}_a[k] \quad (7.67)$$

então verifica-se que

$$\|\mathbf{z}[k]\|_2^2 < \mathbf{x}_a^\top[0] \mathbf{P} \mathbf{x}_a[0] \quad (7.68)$$

quando $\mathbf{x}_a[0] \neq 0$ e $\mathbf{x}_a[k] = 0 \forall k < 0$.

Realizando a diferença $\Delta V(\mathbf{x}_a[k])$ em (7.64) conforme a dinâmica do sistema resulta e aplicando o complemento de Schür resulta

$$\begin{bmatrix} (\beta - 1) \mathbf{P} & 0 & \mathbf{A}_a^\top(\lambda_a) + \mathbf{K}_a^\top \mathbf{B}_a^\top(\lambda_a) & \mathbf{C}_z^\top + \mathbf{K}_a^\top \mathbf{D}_z^\top \\ \star & -\beta \mathbf{P} & \mathbf{A}_{\tau_a}^\top(\lambda_a) + \mathbf{K}_a^\top \mathbf{B}_{\tau_a}^\top(\lambda_a) & 0 \\ \star & \star & -\mathbf{P} & 0 \\ \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (7.69)$$

Então pré- e pós-multiplicando a relação (7.69) por $\text{diag}\{\mathbf{P}^{-1}, \mathbf{P}^{-1}, I, I\}$ e substituindo:

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{K}}_a = \mathbf{K}_a \mathbf{P}^{-1}, \quad (7.70)$$

resulta em

$$\begin{bmatrix} (\beta - 1) \hat{\mathbf{P}} & 0 & \hat{\mathbf{P}} \mathbf{A}_a^\top(\lambda_a) + \hat{\mathbf{K}}_a^\top \mathbf{B}_a^\top(\lambda_a) & \hat{\mathbf{P}} \mathbf{C}_z^\top + \hat{\mathbf{K}}_a^\top \mathbf{D}_z^\top \\ \star & -\beta \hat{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}} \mathbf{A}_{\tau_a}^\top(\lambda_a) + \hat{\mathbf{K}}_a^\top \mathbf{B}_{\tau_a}^\top(\lambda_a) & 0 \\ \star & \star & -\hat{\mathbf{P}} & 0 \\ \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (7.71)$$

Por argumentos de convexidade, se a relação (7.71) for satisfeita para todo $i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$ e todo $j \in \{1, 2\}$, então (7.61) também satisfaz para todo $\lambda_a \in \mathcal{B}_{\lambda_a}$.

Aplicando também a troca de variáveis na inequação (7.68) resulta

$$\|\mathbf{z}[k]\|_2^2 < \mathbf{x}_a^\top[k] \hat{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{x}_a[k] \quad (7.72)$$

Mas definindo $\mathbf{X} = \mathbf{X}^\top > \hat{\mathbf{P}}^{-1}$ (conforme (7.62) pelo complemento de Schür) produz a relação (7.63). \square

Para efetuar o projeto do Controlador Repetitivo Transformado Discretizado pode-se utilizar os mesmos passos já descritos anteriormente na Subseção 5.5.4 para o caso contínuo. Neste caso deve-se porém empregar o Teorema 7.2 para solução dos problemas de otimização. Foi organizada também a Tabela 15 para ilustrar de forma genérica como deve ser realizada a implementação digital do Controlador Repetitivo Transformado.

Tabela 15 – Algoritmo discreto completo do Controle Repetitivo Transformado para implementação em um microcontrolador.

$$\begin{aligned}
 \theta[k] &= \varrho \phi[k] \\
 \Omega_d[k] &= \varrho \Delta \phi[k] \\
 \tau_d[k+1] &= 1 - \frac{\Omega_d[k] + \alpha_d (\theta[k] - \theta[k - \tau_d[k]] - \tau_\theta)}{\Omega_d[k - \tau_d[k]]} + \tau_d[k] \\
 e[k] &= r[k] - y[k] \\
 \eta[k] &= x_c[k] + e[k] \\
 x_c[k+1] &= (1 - \Omega_d[k] \omega_{c\theta}) x_c[k] + \Omega_d[k] \omega_{c\theta} k_{f\theta} \eta[k - \tau_d[k]] \\
 u_1[k] &= K_{(1,1)} x_1[k] + K_{(1,2)} x_2[k] + \dots + K_{(1,n)} x_n[k] + K_{c(1,1)} x_c[k] \\
 u_2[k] &= K_{(2,1)} x_1[k] + K_{(2,2)} x_2[k] + \dots + K_{(2,n)} x_n[k] + K_{c(2,1)} x_c[k] \\
 &\vdots \\
 u_m[k] &= K_{(m,1)} x_1[k] + K_{(m,2)} x_2[k] + \dots + K_{(m,n)} x_n[k] + K_{c(m,1)} x_c[k]
 \end{aligned}$$

7.4 Resultados Experimentais

Nesta seção serão apresentados resultados referentes à implementação prática digital dos Controladores Ressonante e Repetitivo Transformados, utilizando a metodologia desenvolvida anteriormente. Este experimento tem objetivo de realizar validação prática das estratégias de controle propostas neste trabalho, visto que até o momento foram demonstrados somente resultados de simulações.

Primeiramente será descrita a bancada experimental utilizada, logo após será apresentado o modelo identificado do sistema. Então será detalhado sobre o projeto dos controlador e, por fim, será realizada análise e discussão dos resultados.

7.4.1 Descrição da Bancada Experimental

A Figura 55 mostra um retrato da bancada experimental utilizada. O dispositivo controlado é um motor de corrente contínua Polulu (modelo 37Dx57L), com redução de engrenagens metálicas de relação 131:1. Este motor já possui um *encoder* diferencial acoplado de 64 pulsos por volta que, incluindo a relação de redução, totaliza uma resolução de 8400 pulsos por revolução do eixo do motor. Para comandar a tensão na armadura deste motor foi utilizada uma ponte-H LMD18200T de corrente máxima 3 A e tensão máxima de 55 V. A tensão de alimentação considerada foi de 12 V.

Figura 55 – Foto da bancada experimental utilizada.



Uma placa de interface programável Arduino DUE equipada com um microcontrolador ATMEL SAM3X8E (processador ARM Cortex-M3 de 84 MHz) realiza o processamento digital dos sinais envolvidos. Este módulo recebe como entrada a leitura do *encoder* e gera como saída o sinal de comando da ponte-H, assim estabelecendo um sistema em malha-fechada. Nesta placa Arduino, portanto, foram carregados os algoritmos de controle avaliados. Para garantir a correta amostragem dos dados, foi programada uma interrupção com intervalo fixo de $T_s = 0,01$ s para o cômputo do sinal de controle. Para tratar a leitura do *encoder* foi utilizada a biblioteca `Encoder.h` disponível no ambiente de programação do Arduino. Esta biblioteca já inclui a interrupção e as rotinas para contagem dos pulsos gerados pelo *encoder*.

Para produzir um torque de distúrbio no eixo do motor foi utilizado um braço articulado conforme mostrado na Figura 55. Nesta estrutura foi montada uma massa de 1,5 kg. Esta configuração é capaz de produzir um torque dependente da posição angular

do motor, assim originando uma perturbação de período variante no tempo caso a rotação seja variável.

7.4.2 Identificação do Modelo do Sistema

Para identificar a dinâmica do sistema primeiramente foi estabelecido um modelo discreto com parâmetros desconhecidos *a priori*. Posteriormente foi realizado um ensaio de resposta ao degrau, então a resposta do modelo foi comparada com a resposta deste ensaio para identificar os parâmetros. As equações consideradas do modelo estão organizadas em (7.73) e (7.74). Além disso, foram organizadas as Tabelas 16 e 17 respectivamente com lista de símbolos e parâmetros do modelo.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0[k+1] = \mathbf{x}_0[k] + \mathbf{x}_1[k] \\ \mathbf{x}_1[k+1] = a \mathbf{x}_1[k] + b \mathbf{u}[k] + b_d \mathbf{d}[k] \\ \mathbf{y}[k] = \mathbf{x}_1[k] \\ \mathbf{d}[k] = p_d(x_0[k]) \end{cases} \quad (7.73)$$

$$p_d(\xi) = \text{sen} \left(\frac{2\pi \xi}{N_{enc}} \right) \quad (7.74)$$

Tabela 16 – Lista de sinais no modelo do sistemas junto com as unidades de trabalho e o respectivo valor de conversão para o SI.

Símbolo	Significado	Unidade	Conversão para o SI
$\mathbf{x}_0[k]$	Posição diferencial do eixo	pulsos	$\times 2\pi/N_{enc}$ (rad)
$\mathbf{x}_1[k], \mathbf{y}[k]$	Rotação do eixo	pulsos/amostra	$\times 2\pi/(T_s N_{enc})$ (rad/s)
$\mathbf{u}[k]$	Sinal de controle	–	$\times V_{cc}/255$ (V)
$\mathbf{d}[k]$	Entrada de distúrbio	–	–

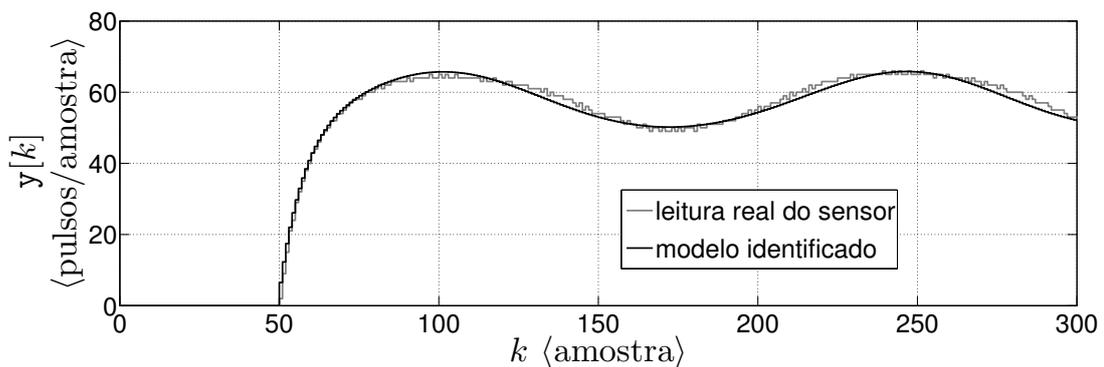
Tabela 17 – Lista dos parâmetros do modelo do sistema os respectivos valores numéricos.

Parâmetro	Valor	Unidade
a	0,8869	–
$b = g_{dc}(1 - a)$	0,0469	pulsos/amostra
g_{dc}	0,4150	pulsos/amostra
b_d	0,1885	pulsos/amostra
T_s	0,01	s/amostra
N_{enc}	8400	pulsos/rev
V_{cc}	12	V

Foi estabelecido que $\mathbf{x}_1[k]$ representa o estado de velocidade angular ou rotação do motor. Esta representa também a variável controlada de interesse $y[k] = \mathbf{x}_1[k]$. Considerou-se também o estado auxiliar $\mathbf{x}_0[k]$ representa a posição angular do motor. A leitura do *encoder* do sistema, em seu formato original, é justamente este sinal $\mathbf{x}_0[k]$, porém na unidade de pulsos. Para este motor utilizado, ocorrem $N_{enc} = 8400$ pulsos durante uma revolução do eixo. Na verdade chama-se esta leitura de posição diferencial, pois não há conhecimento do valor absoluto inicial, apenas da diferença da posição em relação ao valor de início. Para simplificar a implementação do controlar e evitar a introdução de fatores de conversão de ponto flutuante, foi escolhido identificar o modelo e projetar o controle diretamente nesta unidade de pulsos (ao invés de radianos). Portanto, estabelecendo que a rotação do motor $\mathbf{x}_1[k]$ é medida em pulsos/amostras, pode-se escrever que $\mathbf{x}_1[k] = \Delta x_0[k] = \mathbf{x}_0[k+1] - \mathbf{x}_0[k]$, implicando a primeira linha de (7.73).

Para descrever a evolução $\mathbf{x}_1[k+1]$ procurou-se ajustar um modelo de primeira ordem $\mathbf{x}_1[k+1] = a \mathbf{x}_1[k] + b u[k] + b_d d[k]$, onde a , b e b_d foram os parâmetros estabelecidos para o ajuste. Aqui $u[k]$ representa o sinal comando da ponte-H na faixa de 0 até 255 (visto que a placa de interface utilizada possui portas de saída *PMW* de 8 bits). Esta escala mapeia linearmente a tensão média entregue a armadura do motor, de 0V até $V_{cc} = 12V$. O sinal $d[k]$ aqui denota o distúrbio introduzido pela carga, modelado em função da posição angular do motor: $d[k] = p_d(x_0[k])$. Para identificação do sistema, foi atribuída uma função senoidal para $p_d(\xi)$ (de período $T_p = N_{enc}$) conforme a equação (7.74).

Figura 56 – Comparação entre os dados do ensaio do sistema e o modelo identificado. O valor final do degrau de entrada é $u[k] = 140$ para $k > 50$.



Para encontrar a , b e b_d , primeiramente foi identificado o ganho DC g_{dc} da entrada de controle $u[k]$ para a saída $y[k]$ pela análise direta da resposta ao degrau obtida. Assim pôde-se expressar que $b = g_{dc}(1-a)$, reduzindo o espaço de procura para dois parâmetros: o polo do sistema a e o ganho b_d da entrada de distúrbio. Realizando uma varredura para estes coeficientes a e b_d e comparando as respostas do modelo e do ensaio, chegou-se aos valores mostrados na Tabela 17. A Figura 56 compara a resposta do ensaio com o modelo

identificado. O sinal de entrada considerado é um degrau de valor final $u[k] = 140$ para $k > 50$.

O modelo na forma padrão, conforme apresentado em (7.7), foi organizado simplesmente por $A = a$, $B = b$, $B_d = b_d$, $C = 1$, $D = 0$ e $D_d = 0$. Apesar da metodologia apresentada permitir o uso de parâmetros incertos, foi escolhido trabalhar com um modelo invariante no tempo de parâmetros supostamente conhecidos.

7.4.3 Configurações dos Controladores

Seguindo a notação $d[k] = p_d(\phi[k])$ utilizada para definição dos Controladores Transformados, neste exemplo verifica-se $\phi[k] = \mathbf{x}_0[k]$ e que $T_p = N_{enc}$ é o período desta função $p_d(\xi)$. É fácil notar ainda que $\Delta\phi[k] = \mathbf{x}_1[k]$. Portanto ao escolher um sinal de transformação $\theta[k] = \varrho x_0[k]$ e sua respectiva diferença $\Omega_d[k] = \varrho x_1[k]$, representa-se o sinal de distúrbio no domínio- θ com um período fixo de $T_\theta = \varrho N_{enc}$. Foi escolhido deixar $\varrho = 1$ para que neste exemplo para que domínio- θ seja obtido diretamente pelos pulsos da contagem do *encoder*. Visto então que $T_\theta = 8400$ pulsos/rev, a frequência- θ fundamental dos sinais neste domínio- θ é $\omega_{0\theta} = (2\pi \text{ rad/rev})/T_\theta = 7,48 \cdot 10^{-4} \text{ rad/pulso}$. Este valor é importante para configuração correta dos Controladores Transformados.

Uma análise comparativa foi realizada entre as arquiteturas de controle listadas na sequência. Basicamente será seguido o mesmo *layout* comparativo empregado no Capítulo 6 (Aplicação para Turbinas Eólicas).

A faixa de valores de $\mathbf{x}_1[k]$ ao qual será garantido o desempenho dos Controladores Ressonante e Repetitivo Transformados foi escolhida entre 40 pulsos/amostra e 80 pulsos/amostra. Estes representam os respectivos limites mínimo Ω_{a1} e máximo Ω_{a2} considerados para o cálculo do sinal de transformação $\Omega_d[k]$. Em unidades do SI, esta faixa de velocidade angular considerada é $[2,9920, 5,9840]$ rad/s. Em relação aos Controladores Ressonante e Repetitivo tradicionais a serem comparados foi escolhido o valor nominal de rejeição $\Omega_{an} = 60$ pulsos/amostra, que equivale a $4,4880$ rad/s.

- (CB.1) Controlador Básico de Referência – É a estratégia de controle usual que serve como base para avaliação dos resultados. A lei de controle consiste na realimentação do estado da planta e do estado integrador do erro. As penalidades consideradas para síntese são $\mathbf{R}_z = 1000$, $\mathbf{Q}_z = \text{diag}\{\mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_c\}$, $\mathbf{Q}_x = 1$ e $\mathbf{Q}_c = 10$.
- (CB.2) Controlador Básico com Ganho Alto – É a mesma configuração de controle de (CB.1) porém sintetizado com uma penalidade inferior na energia do sinal de controle ($\mathbf{R}_z = 1$) objetivando a produção de uma realimentação agressiva para atenuação do distúrbio.

- (CRST. n_h) Controlador Ressonante Transformado com n_h modos harmônicos – Segue a metodologia proposta na Seção 7.2. Considera a frequência- θ fundamental de ressonância como $\omega_{r\theta} = \omega_{0\theta} = 7,48 \cdot 10^{-4}$ rad/pulso. Foi definido aqui também $k_{r\theta} = 1/\Omega_{dn}$. As penalidades consideradas são $R_z = 1000$, $Q_z = \text{diag}\{Q_x, Q_c\}$, $Q_x = 1$ e $Q_c = 10I_{n_c}$, $n_c = 1 + 2n_h$.
- (CRS. n_h) Controlador Ressonante tradicional com n_h modos harmônicos – É o caso particular de CRST. n_h para $\Omega_d[k]$ mantido constante no valor de rotação nominal $\Omega_{dn} = 60$ pulsos/amostra. Pelas relações de equivalência, sua frequência usual de ressonância é $\omega_{rn} = \Omega_{dn} \omega_{r\theta} = 0,04488$ rad/amostra e o ganho na entrada é $k_{rn} = \Omega_{dn} k_{r\theta} = 1$.
- (CRPT) Controlador Repetitivo Transformado – É o controlador proposto na Seção 7.3. Considera uma frequência- θ de corte do filtro passa baixas de $\omega_{c\theta} = 0,003$ rad/pulso (isto é: cerca de $4\omega_{0\theta}$). Os parâmetros compensados calculados neste caso são $\tau_\theta = 8073,32$ pulsos/rev e $k_{f\theta} = 1,0306$. Assim, o atraso supremo em amostras deve ser $\tau_{d\text{sup}} = 202$ amostras. A taxa de decaimento do observador do atraso foi escolhida como $\alpha = 1$, isto equivale a $\alpha_d = \alpha T_s = 0.01$ na forma discreta. As mesmas penalidades de CB.1 foram aqui consideradas.
- (CRP) Controlador Repetitivo tradicional – É o caso particular do Controlador Repetitivo Transformado para $\Omega_d[k]$ mantido constante no valor de rotação nominal $\Omega_{dn} = 60$ pulsos/amostra. Utilizando as relações de equivalência, este controlador considera a frequência usual de corte do filtro de $\omega_{cn} = \Omega_{dn} \omega_{c\theta} = 0,18$ rad/amostra, um atraso nominal de $\tau_{dn} = \tau_\theta/\Omega_{dn} = 135$ amostras e o ganho do filtro de $k_{fn} = k_{f\theta} = 1,0306$. Considera também as mesmas penalidades de CB.1.

Os controladores CRS. n_h e CRST. n_h foram projetados para $n_h \in \{1, 2\}$, visto que não foi verificada vantagem para números superiores de modos harmônicos.

A síntese robusta dos ganhos de realimentação K_a foi realizado independentemente para cada estratégia, utilizando as penalidades descritas anteriormente. Para os controladores sem atraso de transporte foi utilizado o Teorema 7.1, enquanto que para os controladores com atraso de transporte foi empregado o Teorema 7.2 para síntese. Os ganhos de realimentação obtidos para cada estratégia estão organizados no Apêndice 1. No caso de CRPT, foi encontrado-se $\beta = 0,1780$ como ótimo para melhor minimização da norma \mathcal{H}_2 . Já no caso de CRP, o valor ótimo encontrado foi de $\beta = 0,1649$.

O tempo total de execução foi determinado como 60s, ou seja: 6000 amostras. O sinal de referência $r[k]$ foi programado pela filtragem de um sinal de degrau composto

$\mathbf{r}_{deg}[k]$ definido como

$$\mathbf{r}_{deg}[k] = \begin{cases} 76 \text{ pulsos/amsotra} & 0 \leq k < 2000 \\ 44 \text{ pulsos/amsotra} & 2000 \leq k < 4000 \\ 60 \text{ pulsos/amsotra} & 4000 \leq k \leq 6000 \end{cases} . \quad (7.75)$$

O sinal de referência final $\mathbf{r}[k]$ foi obtido pelo seguinte filtro discreto de primeira ordem:

$$\mathbf{r}[k + 1] = a_f \mathbf{r}[k] + (1 - a_f) \mathbf{r}_{deg}[k] , \quad (7.76)$$

onde $a_f = 0,998$ foi o polo discreto considerado do filtro. Para inicialização dos Controladores Transformados, o parâmetro variante $\Omega_d[k]$ foi mantido no valor mínimo de projeto, isto é, $\Omega_d[k] = \Omega_{a1}$. Após $\mathbf{x}_1[k] > \Omega_{a1}$, então, foi utilizada a relação correta $\Omega_d[k] = \mathbf{x}_1[k]$ que garante a transformação dos controladores.

7.4.4 Análise e Discussão dos Resultados

A resposta obtida pelo controlador CB.1 está mostrada na Figura 57. Uma grande oscilação pico-a-pico de quase 20 pulsos/amostra pode ser observada na resposta $\mathbf{y}[k]$, devido a presença do distúrbio no sistema. Claramente nota-se aqui a variação do período das oscilações, de acordo com a rotação do motor. Visto que CB.1 contém apenas integrador, espera-se desta abordagem apenas a garantia da convergência do valor médio saída para a o valor de referência. Este resultado esperado pôde ser observado na resposta experimental mostrada na Figura 57.

Na sequência, a Figura 58 compara as respostas dos controladores CRS.1 e CRST.1. O resultado obtido é muito similar aos resultados de simulação discutidos anteriormente neste trabalho. O controlador CRS.1 demonstra uma significativa degradação de desempenho quando rotação do motor não está próxima do valor nominal de 60 pulsos/amostra, já CRST.1 mantém o mesmo desempenho após sua acomodação da faixa de interesse entre 40 e 80 pulsos/amostra. Utilizando apenas um modo harmônico, foi possível ainda notar presença de um erro residual. Através de uma análise gráfica pode-se concluir que este residual apresenta metade do período original do distúrbio, o que indica que este erro deve-se a presença de uma segunda harmônica na função $p_d(\xi)$ do distúrbio. Visando eliminar este erro residual, foram avaliados também os controladores CRS.2 e CRST.2 conforme o resultado mostrado na Figura 59. Agora nota-se que CRST.2 mantém uma resposta em regime praticamente livre de oscilações. No caso de CRS.2 este mesmo desempenho só ocorre quando $\mathbf{y}[k]$ está muito próximo ao valor nominal, conforme esperado.

A Figura 60 adiante compara os controladores CRP e CRPT. Pode-se notar que CRP, apesar de apresentar um desempenho de rejeição adequado para a rotação nominal, apresenta uma perda desempenho considerável quando fora de sincronia. Por outro lado

Figura 57 – Sinal de saída $y[k]$ e o sinal de controle $u[k]$ gerado pelo controlador CB.1.

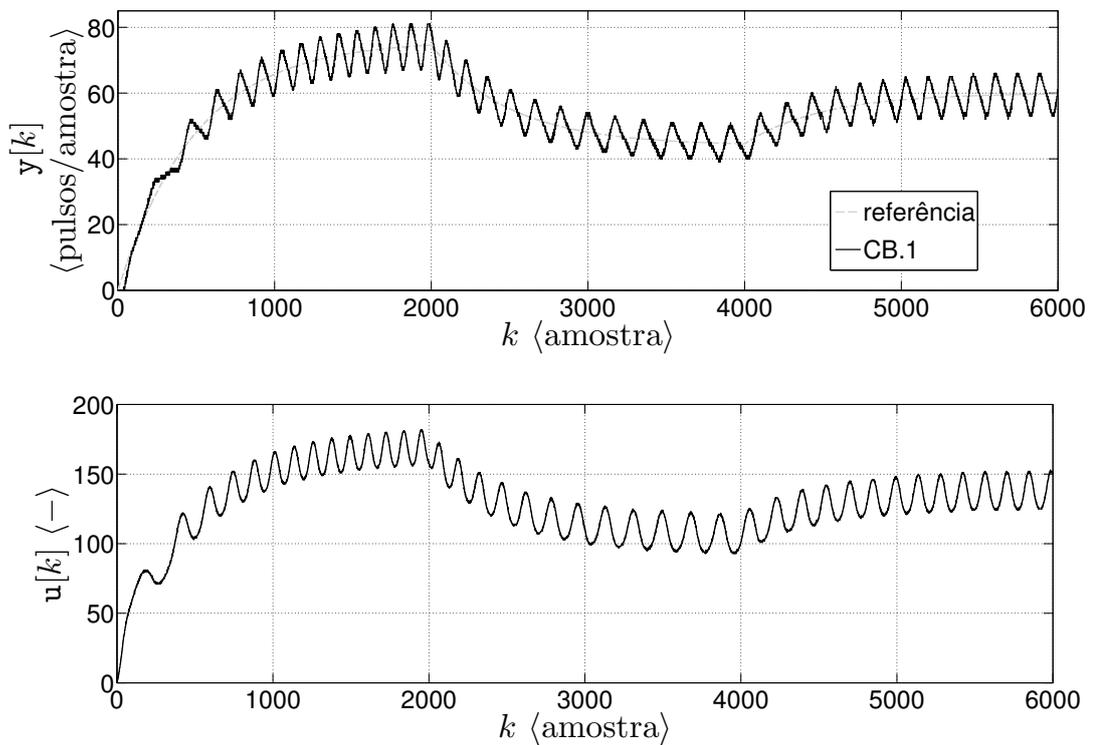


Figura 58 – Comparação da saída $y[k]$ e do sinal de controle $u[k]$ entre os controladores CRS.1 e CRST.1.

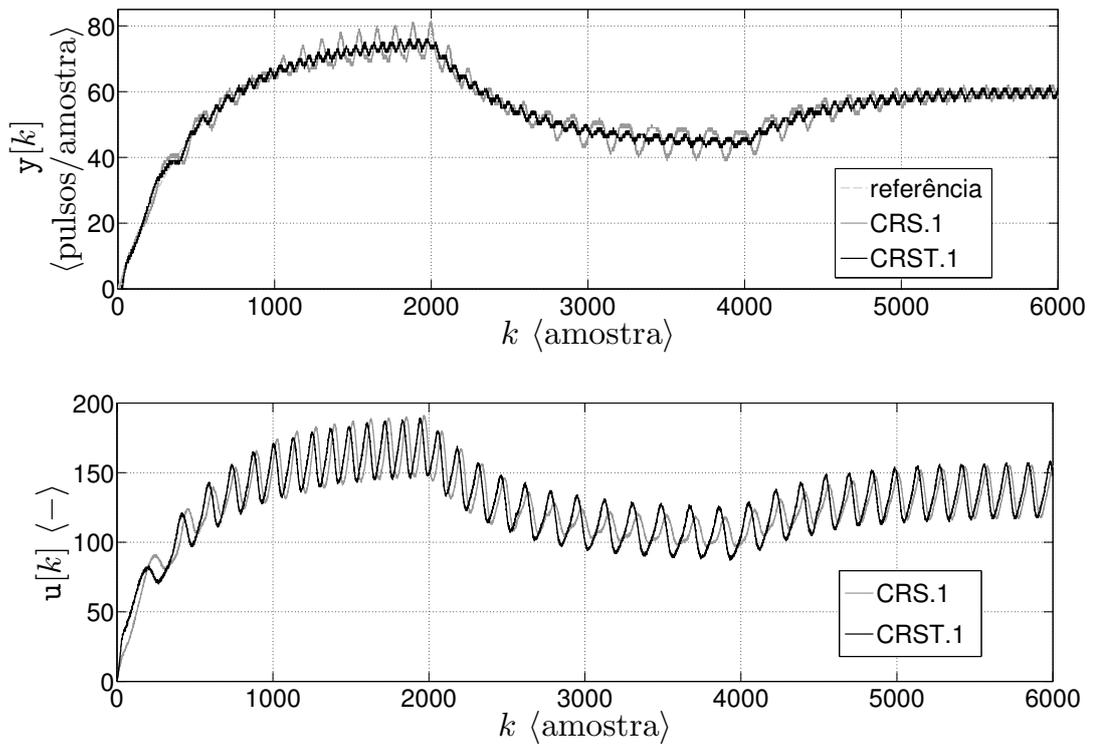
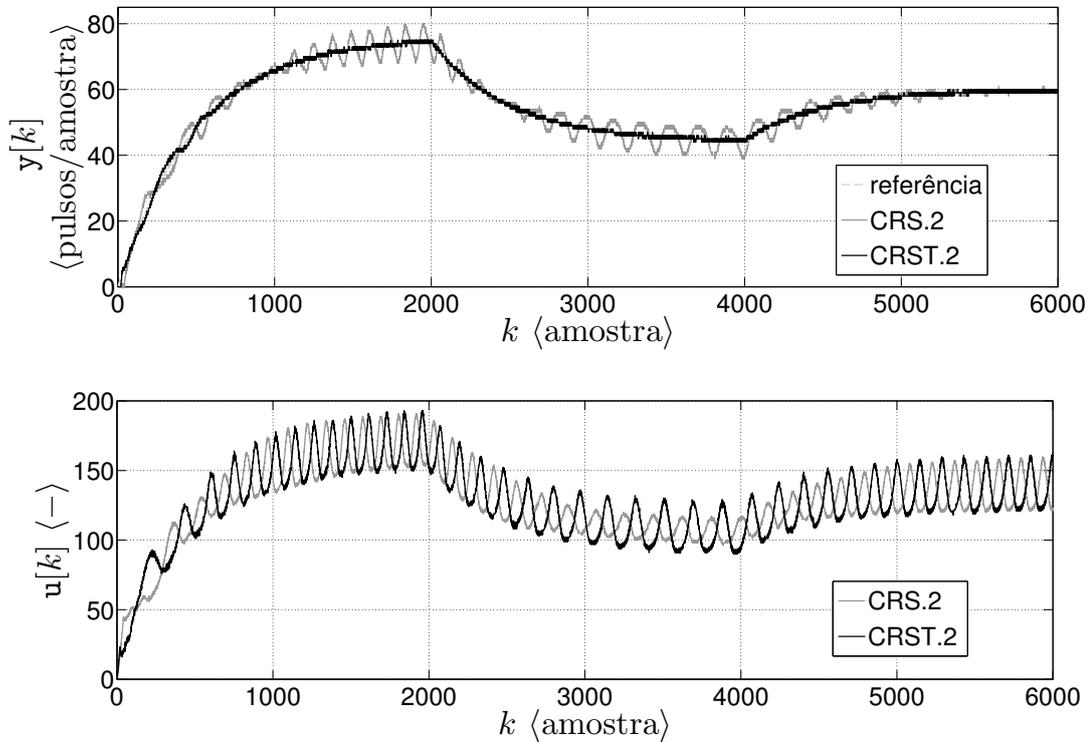


Figura 59 – Comparação da saída $y[k]$ e do sinal de controle $u[k]$ entre os controladores CRS.2 e CRST.2.

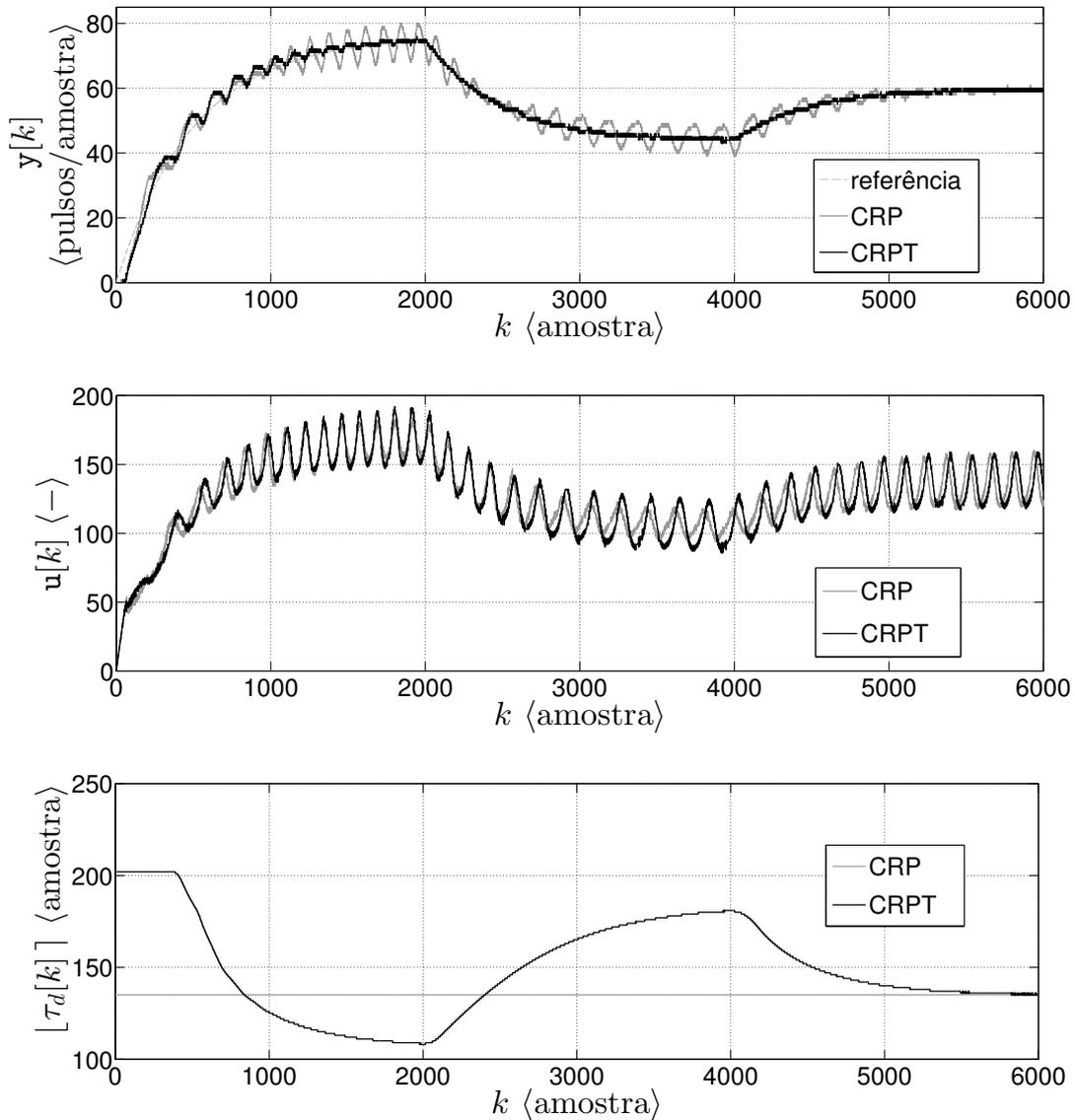


CRPT mantém uma resposta praticamente livre de oscilações durante o regime permanente, mostrando um desempenho muito similar a CRST.2. É notável contudo que CRPT apresenta um tempo de acomodação mais longo que CRST.2, característica que corrobora com os resultados de simulação discutidos anteriormente.

Por fim foi realizada a comparação de CRPT e CRST.2 perante ao controlador CB.2 sintonizado com baixa penalidade na entrada de controle. Conforme mostra a Figura 61, CB.2 é capaz atingir um resposta em regime comparável aos controladores CRPT e CRST.2, visto que a característica transitória mais rápida reduz também o residual em regime permanente. É importante ressaltar que CB.2 não é capaz (teoricamente) de atingir o erro nulo em regime permanente, assim como CRPT e CRST, tendo sempre um nível residual associado. Neste exemplo experimental contudo não há como diferenciar oscilações na rotação inferiores que 1 pulso/amostra, o valor de quantização do sensor do sistema.

Por outro lado, apesar de CB.2 mostrar um desempenho adequado ao analisar o sinal de saída $y[k]$, observa-se que seu sinal de controle $u[k]$ (ampliado na Figura 62) sofre uma demasiada oscilação por causa da realimentação agressiva. Em contraste, o sinal de controle das estratégias propostas mostram-se muito mais suaves. Esta observação comprova que a estratégia de realimentação com ganhos altos apresenta uma eficiência muito inferior a CRST.1, CRPT.1, pois demanda energia de controle consideravelmente

Figura 60 – Comparação da saída $y[k]$, do sinal de controle $u[k]$ e do atraso $\tau_d[k]$ entre os controladores CRP e CRPT.



superior para produzir uma resposta similar na saída.

Para comparar de forma numérica o desempenho dos controladores testados foi montada a Tabela 18 com valor *RMS* do sinal de erro $e[k]$ e da variação do sinal de controle $\Delta u[k]$. A janela de amostras considerada foi de 1500 até 6000, para assim descartar o tempo de acomodação inicial dos controladores. Fica evidente a vantagem das estratégias propostas CRPT e CRST. n_h em comparação às suas versões tradicionais CRP e CRS. n_h , visto que o cenário experimental apresentou variações no período da perturbação. Além disso, verifica-se aqui que o valor efetivo do erro dos controladores CRST.2 e CRPT é menor que o de CB.2, mesmo com uma variação efetiva do sinal de controle consideravelmente inferior.

Figura 61 – Comparação da saída $y[k]$ e do sinal de controle $u[k]$ entre os controladores CB.2, CRST.2, CRPT.

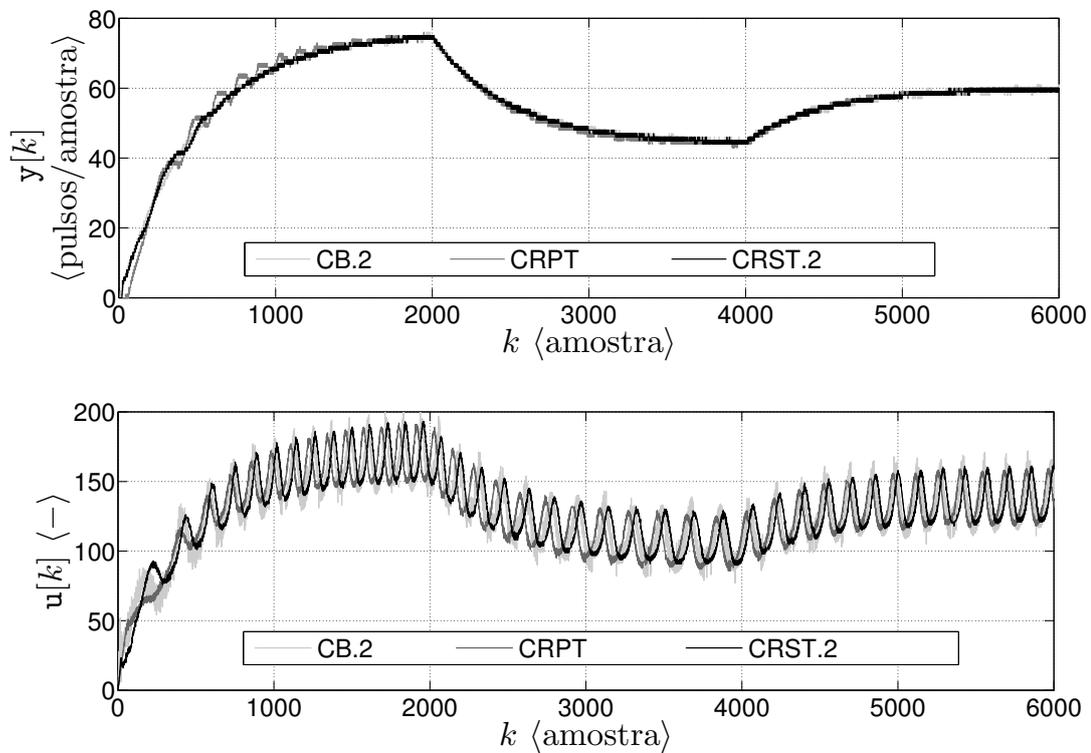
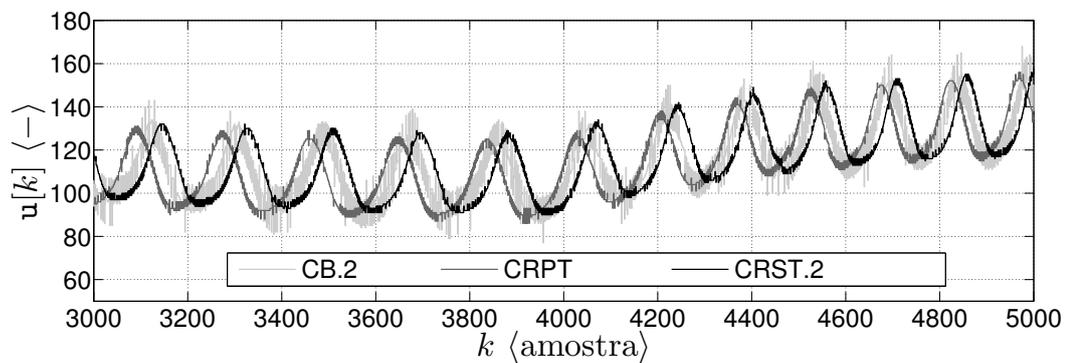


Figura 62 – Ampliação do sinal de controle $u[k]$ na Figura 61.



7.5 Comentários Finais

Este capítulo apresentou uma metodologia de discretização para a implementação dos Controladores Ressonante e Repetitivo Transformados no domínio do tempo discreto, bem como métodos sistemáticos de síntese destas topologias de controle discretizadas. Os resultados práticos experimentais em um motor de corrente contínua sujeito a uma carga excêntrica comprovaram as vantagens das estratégias de controle propostas neste trabalho em relação às estratégias tradicionais comparadas, conforme resumido na Tabela 18.

Tabela 18 – Valor efetivo (*RMS*) do sinal $e[k]$ e da variação do sinal de controle $\Delta u[k]$ da amostra 1500 até 6000, para todos os controladores testados no experimento. As estratégias propostas estão demarcadas em negrito.

Controlador	<i>RMS</i> de $e[k]$ ⟨pulsos/amostra⟩	<i>RMS</i> de $\Delta u[k]$ ⟨–⟩
CB.1	3,9472	0,8466
CB.2	0,5697	8,9187
CRS.1	2,5300	1,0568
CRS.2	2,4276	1,4055
CRST.1	0,9620	1,3587
CRST.2	0,4531	2,1634
CRP	2,4580	2,5154
CRPT	0,5289	2,6402

8 Conclusões e Perspectivas

Este trabalho propôs metodologias de controle que contemplam o seguimento de sinais de referência e/ou sinais de distúrbio periódicos, onde o período é variante no tempo. A estratégia desenvolvida de Controle Transformado é baseada na definição de um domínio- θ , onde os sinais de interesse podem ser representados com período constante. Foi demonstrado no Capítulo 3 que neste domínio virtual os controladores podem ser projetados com base no PMI para garantir o seguimento e/ou rejeição dos sinais em contexto. Além disso, a formulação realizada mostrou que pode-se transpor a representação dinâmica destes controladores do domínio- θ para o domínio do tempo tradicional, permitindo o uso de métodos tradicionais de implementação e síntese de controle. Esta ideia central do trabalho foi explorada em relação às topologias de Controle Ressonante e Repetitivo, originando os Controladores Ressonante e Repetitivo Transformados. Os Capítulos 4 e 5 abordaram estas estratégias propostas de controle, onde metodologias de síntese foram estabelecidas. Nestes mesmos capítulos, exemplos numéricos demonstraram a funcionalidade das estratégias propostas e, principalmente, ressaltaram as vantagens dos Controladores Transformados em relação às abordagens tradicionais de Controle Ressonante e Repetitivo em aplicações com sinais de período variante no tempo.

Na sequência do trabalho, o Capítulo 6 apresentou o emprego dos Controladores Transformados para turbinas eólicas visando a redução de cargas mecânicas periódicas nas pás destas estruturas. Os resultados de simulação mostraram que, em relação às estratégias tradicionais, os controladores propostos são eficazes para redução das oscilações nas forças tensores das pás, mesmo quando o regime de rotação da turbina é variável.

Ao final da dissertação, o Capítulo 7 apresentou metodologias de projeto e implementação digital dos Controladores Transformados no domínio do tempo discreto. Com base neste último desenvolvimento, pôde-se avaliar os Controladores Transformados através de uma aplicação experimental com um motor de corrente contínua sujeito a uma carga excêntrica. Os resultados práticos obtidos foram semelhantes aos resultados das aplicações simuladas realizadas previamente, comprovando a funcionalidade e eficácia da estratégia de controle proposta do contexto de rejeição/seguimento de sinais com período variante no tempo.

8.1 Perspectivas para Trabalhos Futuros

Há uma vasta perceptiva para o desenvolvimento de trabalhos futuros relacionados a esta dissertação. Em relação a teoria do domínio- θ disposta no Capítulo 3, deve-se estudar a abrangência da formulação realizada procurando encontrar novas aplicações práticas

que encaixam-se neste contexto. Em relação ao desenvolvimento dos Controladores Ressonante e Repetitivo Transformados, nos Capítulos 4 e 5, é sugerido para pesquisas futuras o refinamento da metodologia de síntese apresentada, procurando incluir, por exemplo, a garantia de estabilidade para a presença de atuadores saturantes, contexto ao qual podem ser investigadas metodologias *anti-windup* (CAO; LIN; WARD, 2004). Em relação ao critério de desempenho para síntese, também podem ser incorporadas funções de custo \mathcal{H}_∞ , para assim considerar a minimização do efeito de componentes não-harmônicas dos sinais de referência/distúrbio na saída do sistema. Em relação ao Controlador Repetitivo Transformado, é fundamental investigar novas condições de estabilidade menos conservadoras para tratar o atraso de transporte variante no tempo, empregando, por exemplo, alguns dos resultados indicados em FRIDMAN; NICULESCU (2008). Em relação a este mesmo controlador, é sugerida a investigação de filtros passa-baixas de ordem superior, oferecendo graus de liberdade para aplicação da metodologia proposta de compensação em frequência- θ para múltiplas frequências harmônicas de interesse.

Além das arquiteturas apresentadas nos Capítulos 4 e 5, novas estratégias de controle podem ser desenvolvidas com base na teoria de transformação do domínio- θ para o domínio do tempo. Uma ideia proposta neste sentido é a transformação de Controladores Ressonante e Repetitivo combinados em uma única topologia (SALTON et al., 2013b), assim permitindo unir a rápida resposta transitória característica do Controle Ressonante com o baixo residual em regime permanente característico do Controle Repetitivo. Outra ideia para trabalhos futuros é a formulação transposta da estratégia de Controle Repetitivo de Alta Ordem (STEINBUCH; WEILAND; SINGH, 2007), visando assim mesclar a robustez desta topologia para incertezas no atraso sintonizado com a adaptabilidade dos Controladores Transformados para amplas variações no período dos sinais.

Em relação à aplicação dos Controladores Transformados para turbinas eólicas, é fundamental investigar metodologias de síntese que garantem a estabilidade robusta do sistema mesmo para grandes desvios das variáveis do sistema entorno das condições de equilíbrio e, além disso, para rápidas mudanças no ponto de equilíbrio do sistema. Outro aspecto importante a ser considerado futuramente é a avaliação dos controladores propostos utilizando o pacote *FAST* (*Fatigue, Aerodynamics, Structures, and Turbulence*) (FADAEINEDJAD; MOALLEM; MOSCHOPOULOS, 2008) para simulação mais precisa da dinâmica da turbina eólica, visando assim a obtenção de resultados mais próximos à aplicação real.

No âmbito de projeto e implementação em tempo discreto, abordado no Capítulo 7, deve ser analisada a possibilidade de realizar a formulação discreta do domínio- θ e a obtenção de relações de transformação direta para o domínio do tempo discreto. Desta forma, seria possível a definição de controladores discretos para o tratamento de sinais discretos de período variante, sem empregar aproximações de discretização.

Referências

- BEN-BRAHIM, L. Iterative learning control for variable frequency drives. In: IEEE. *Power Electronics Specialists Conference, 2008. PESC 2008. IEEE*. [S.l.], 2008. p. 617–623. Citado na página 20.
- BIANCHI, F. D.; BATTISTA, H.; MANTZ, R. J. *Wind Turbine Control Systems: Principles, Modelling and Gain Scheduling Design*. [S.l.]: Springer, 2006. (Advances in Industrial Control). Citado 8 vezes nas páginas 7, 20, 113, 114, 115, 116, 117 e 139.
- BOSSANYI, E. Wind turbine control for load reduction. *Wind Energy*, Wiley Online Library, v. 6, n. 3, p. 229–244, 2003. Citado na página 113.
- BOYD, S. et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. 1st. ed. Philadelphia, PA: SIAM, 1994. Citado 4 vezes nas páginas 21, 31, 32 e 34.
- CAO, Y.; LIN, Z.; WARD, D. G. Anti-windup design of output tracking systems subject to actuator saturation and constant disturbances. *Automatica*, v. 40, n. 7, p. 1221–1228, 2004. Citado na página 178.
- CHANG, K.; SHIM, I.; PARK, G.-T. Adaptive repetitive control for an eccentricity compensation of optical disk drivers. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, v. 52, n. 2, p. 445–450, 2006. Citado na página 19.
- CHEN, C. *Linear System Theory and Design*. 3. ed. New York, NY: Oxford University Press, 1999. 346 p. Citado 3 vezes nas páginas 19, 44 e 72.
- CHEN, C.-L.; CHIU, G. T.-C. Spatially periodic disturbance rejection with spatially sampled robust repetitive control. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, American Society of Mechanical Engineers, v. 130, n. 2, p. 021002, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 66.
- CHEN, Y. et al. Robust higher order repetitive learning control algorithm for tracking control of delayed repetitive systems. In: *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1992. v. 3, p. 2504–2510. Citado na página 20.
- CHEN, Z. et al. Linear matrix inequality-based repetitive controller design for linear systems with time-varying uncertainties to reject position-dependent disturbances. *Internationaal Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Elsevier, v. 9, n. 8, p. 3241–3256, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 66.
- CHEOWAIT, B.; PANOMRUTTANARUG, B.; LENWARI, W. Design and analysis of current control for shunt active filter based on repetitive control technique using optimization in the frequency domain. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics - ROBIO 2008*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 871–876. Citado na página 19.
- CHESI, G. Rational Lyapunov functions for estimating and controlling the robust domain of attraction. *Automatica*, v. 49, n. 4, p. 1051 – 1057, 2013. ISSN 0005-1098. Citado na página 135.

- CHU, S.; MAJUMDAR, A. Opportunities and challenges for a sustainable energy future. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 488, n. 7411, p. 294–303, 2012. Citado na página 113.
- COUTINHO, D. et al. \mathcal{L}_2 -gain analysis and control of uncertain nonlinear systems with bounded disturbance inputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, John Wiley & Sons, Ltd., v. 18, n. 1, p. 88–110. ISSN 1099-1239. Citado na página 135.
- DOLAN, D. S.; LEHN, P. W. Simulation model of wind turbine 3p torque oscillations due to wind shear and tower shadow. In: IEEE. *Power Systems Conference and Exposition, 2006. PSCE'06. 2006 IEEE PES*. [S.l.], 2006. p. 2050–2057. Citado na página 124.
- ESCOBAR, G. et al. A repetitive-based controller for a power factor precompensator. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. 54, n. 9, p. 1968 – 1976, 2007. Citado na página 19.
- FADAEINEDJAD, R.; MOALLEM, M.; MOSCHOPOULOS, G. Simulation of a wind turbine with doubly fed induction generator by fast and simulink. *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 23, n. 2, p. 690–700, 2008. Citado na página 178.
- FLORES, J. et al. Robust repetitive control with saturating actuators: a lmi approach. In: IEEE. *American Control Conference (ACC), 2010*. [S.l.], 2010. p. 4259–4264. Citado na página 21.
- FLORES, J. V. et al. Robust repetitive control with saturating actuators: a lmi approach. In: *Proceedings of the 2010 American Control Conference (ACC'10)*. Baltimore, Maryland, USA: [s.n.], 2010. Citado na página 20.
- FLORES, J. V. et al. Repetitive control design for MIMO systems with saturating actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, n. 1, p. 192–198, 2012. Citado na página 48.
- FRANCIS, B. A.; WONHAM, W. M. The internal model principle for linear multivariable regulators. *Applied Mathematics and Optimization*, v. 2, n. 2, p. 170–194, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 40.
- FRIDMAN, E. *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2014. (Systems & Control: Foundations & Applications). Citado 5 vezes nas páginas 30, 31, 101, 163 e 164.
- FRIDMAN, E.; NICULESCU, S.-I. On complete lyapunov–krasovskii functional techniques for uncertain systems with fast-varying delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 18, n. 3, p. 364–374, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 178.
- GAHINET, P. et al. The lmi control toolbox. In: INSTITUTE OF ELECTRICAL ENGINEERS INC (IEE). *IEEE conference on decision and control*. [S.l.], 1994. v. 2, p. 2038–2038. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 37.
- GU, K.; KHARITONOV, V.; CHEN, J. *Stability of time-delay systems*. [S.l.]: Birkhäuser, 2003. Citado 5 vezes nas páginas 21, 27, 28, 29 e 30.

- HARA, S. et al. Repetitive control system: a new type servo system for periodic exogenous signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 33, n. 7, p. 659–668, Jul 1988. Citado na página 47.
- HASSAN, H. et al. Designing pitch controller for large wind turbines via LMI techniques. *Energy Procedia*, Elsevier, v. 12, p. 808–818, 2011. Citado na página 147.
- HAYKIN, S.; VEEN, B. V. *Signals and Systems*. 2. ed. [S.l.]: Wiley, 2002. 802 p. Citado na página 42.
- HAYMAN, B.; WEDEL-HEINEN, J.; BRØNDSTED, P. Materials challenges in present and future wind energy. *MRS bulletin*, Cambridge Univ Press, v. 33, n. 04, p. 343–353, 2008. Citado na página 113.
- HOUTZAGER, I.; WINGERDEN, J. van; VERHAEGEN, M. Wind turbine load reduction by rejecting the periodic load disturbances. *Wind Energy*, Wiley Online Library, v. 16, n. 2, p. 235–256, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 20, 140 e 151.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear systems*. New York, NY: Macmillan Publishing Company, 1992. xii+564 p. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- LACKNER, M. A.; ROTEA, M. A. Structural control of floating wind turbines. *Mechatronics*, v. 21, n. 4, p. 704 – 719, 2011. ISSN 0957-4158. Citado na página 20.
- LIUZZO, S.; TOMEI, P. A global adaptive learning control for robotic manipulators. *Automatica*, v. 44, n. 5, p. 1379 – 1384, 2008. Citado na página 19.
- MARCOTT, S. A. et al. A reconstruction of regional and global temperature for the past 11,300 years. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 339, n. 6124, p. 1198–1201, 2013. Citado na página 113.
- MERRY, R. et al. Delay-varying repetitive control with application to a walking piezo actuator. *Automatica*, v. 47, n. 8, p. 1737 – 1743, 2011. ISSN 0005-1098. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 66.
- NAKANO, M. et al. Elimination of position-dependent disturbances in constant-speed-rotation control systems. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 4, n. 9, p. 1241–1248, 1996. Citado na página 21.
- NAVALKAR, S. et al. Subspace predictive repetitive control to mitigate periodic loads on large scale wind turbines. *Mechatronics*, Elsevier, v. 0, n. Available online, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 151.
- NICHITA, C. et al. Large band simulation of the wind speed for real time wind turbine simulators. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, IEEE, v. 17, n. 4, p. 523–529, 2002. Citado na página 140.
- OGATA, K. *Discrete-Time Control Systems*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1987. (Prentice-Hall International Editions). ISBN 9780132161022. Citado 2 vezes nas páginas 152 e 153.
- ØSTERGAARD, K. Z.; STOUSTRUP, J.; BRATH, P. Linear parameter varying control of wind turbines covering both partial load and full load conditions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 19, n. 1, p. 92–116, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 114, 117 e 122.

- PEREIRA, L. F. A. et al. Multiple resonant controllers for uninterruptible power supplies - a systematic robust control design approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 61, n. 3, p. 1528–1538, 2014. Citado na página 19.
- PIPELEERS, G. et al. Robust high-order repetitive control: Optimal performance trade-offs. *Automatica*, v. 44, n. 10, p. 2628–2634, 2008. Citado na página 20.
- RUGH, W. J. *Linear system theory*. NJ: Prentice Hall Upper Saddle River, 1996. Citado na página 39.
- SALTON, A. et al. A complementary approach to resonant-repetitive controllers for the control of uninterruptible power supplies (ups). In: *39th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, IECON 2013*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 3222–3227. ISSN 1553-572X. Citado na página 72.
- SALTON, A. T. et al. A resonant-repetitive control scheme applied to uninterruptible power supplies (ups). *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 10, 19, 65, 74, 75 e 178.
- SELVAM, K. et al. Feedback-feedforward individual pitch control for wind turbine load reduction. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, John Wiley and Sons, Ltd., v. 19, n. 1, p. 72–91, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 10, 114, 115, 116, 139 e 140.
- SHAKUN, J. D. et al. Global warming preceded by increasing carbon dioxide concentrations during the last deglaciation. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 484, n. 7392, p. 49–54, 2012. Citado na página 113.
- SIMLEY, E. et al. Analysis of light detection and ranging wind speed measurements for wind turbine control. *Wind Energy*, Wiley Online Library, v. 17, n. 3, p. 413–433, 2014. Citado na página 117.
- STEINBUCH, M. Repetitive control for systems with uncertain period-time. *Automatica*, Elsevier, v. 38, n. 12, p. 2103–2109, 2002. Citado na página 20.
- STEINBUCH, M.; WEILAND, S.; SINGH, T. Design of noise and period-time robust high-order repetitive control, with application to optical storage. *Automatica*, v. 43, n. 12, p. 2086 – 2095, 2007. ISSN 0005-1098. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 178.
- SYRMOS, V. L. et al. Static output feedback: a survey. *Automatica*, Elsevier, v. 33, n. 2, p. 125–137, 1997. Citado na página 69.
- WIT, C. Canudas de; PRALY, L. Adaptive eccentricity compensation. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 8, n. 5, p. 757–766, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 64.
- YAMAMOTO, Y.; HARA, S. Relationships between internal and external stability for infinite-dimensional systems with applications to a servo problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 33, n. 11, p. 1044–1052, Nov 1988. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 96.
- YAO, W.-S.; TSAI, M.-C.; YAMAMOTO, Y. Implementation of repetitive controller for rejection of position-based periodic disturbances. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 21, n. 9, p. 1226–1237, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 66.

ZHANG, B.-L.; MA, L.; HAN, Q.-L. Sliding mode control for offshore steel jacket platforms subject to nonlinear self-excited wave force and external disturbance. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 14, n. 1, p. 163 – 178, 2013. ISSN 1468-1218. Citado na página 20.

ZHANG, Y.; CHEN, Z.; CHENG, M. Proportional resonant individual pitch control for mitigation of wind turbines loads. *Renewable Power Generation, IET*, IET, v. 7, n. 3, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 20, 126 e 151.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. *Essentials of robust control*. NJ: Prentice hall Upper Saddle River, 1998. Citado na página 21.

Apêndice 1 - Ganhos de Realimentação

Referente ao **Capítulo 4** (Controlador Ressonante Transformado), na **Seção 4.5**
(Exemplo Numérico 1: Inversor de Frequência):

$$K_a = \begin{bmatrix} -187,7098 & -108,3665 & 99,2044 & 226,5535 & -91,8663 \end{bmatrix} .$$

Referente ao **Capítulo 4** (Controlador Ressonante Transformado), na **Seção 4.6**
(Exemplo Numérico 2: Motor de Corrente Contínua):

- 1 modo harmônico:

$$K_a = \begin{bmatrix} -609,8936 & -101,0433 & 573,0662 & 846,0156 & 147,6220 \end{bmatrix}$$

- 2 modos harmônicos:

$$K_a = \begin{bmatrix} -631,9017 & -103,1173 & 646,3597 & 890,8102 & 90,5303 & \dots \\ \dots & 753,9887 & 337,7690 \end{bmatrix}$$

- 3 modos harmônicos:

$$K_a = \begin{bmatrix} -655,0351 & -106,2311 & 710,6399 & 928,0195 & 80,7782 & \dots \\ \dots & 831,0009 & 200,7814 & 741,6552 & 436,8370 \end{bmatrix}$$

- 4 modos harmônicos:

$$K_a = \begin{bmatrix} -697,0887 & -112,2172 & 781,0075 & 976,5362 & 82,4571 & \dots \\ \dots & 883,2623 & 142,5925 & 856,0766 & 266,2565 & 764,2459 & 502,3320 \end{bmatrix}$$

- 5 modos harmônicos:

$$K_a = \begin{bmatrix} -762,1965 & -121,7669 & 864,8733 & 1042,7166 & 89,8184 & \dots \\ \dots & 943,9917 & 109,4891 & 931,0049 & 185,1637 & 911,3105 & 304,8292 & \dots \\ \dots & 821,2583 & 550,6784 \end{bmatrix}$$

- 6 modos harmônicos:

$$K_a = \begin{bmatrix} -850,8878 & -134,7647 & 963,8002 & 1126,1772 & 101,2205 & \dots \\ \dots & 1017,5449 & 87,1831 & 1009,1728 & 132,4557 & 1006,0567 & 203,4239 & \dots \\ \dots & \dots & 993,6715 & 322,4716 & 912,1087 & 583,7213 \end{bmatrix}$$

- 7 modos harmônicos:

$$K_a = \begin{bmatrix} -958,8977 & -149,9331 & 1073,4858 & 1220,5762 & 115,6625 & \dots \\ \dots & 1099,7594 & 70,0437 & 1092,8016 & 91,6306 & 1095,6235 & 132,2865 & \dots \\ \dots & \dots & 1100,2118 & 199,1591 & 1097,3745 & 319,0110 & 1030,7650 & 598,1942 \end{bmatrix}$$

- 8 modos harmônicos:

$$K_a = \begin{bmatrix} -1080,7198 & -165,9326 & 188,9557 & 1320,0045 & 132,2943 & \dots \\ \dots & 1186,2527 & 56,0041 & 1179,2526 & 57,4739 & 1184,1964 & 75,4757 & \dots \\ \dots & \dots & 1194,1464 & 110,6594 & 1206,6235 & 173,7674 & 1214,9196 & 294,5606 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1168,1439 & 591,5170 \end{bmatrix}$$

Referente ao **Capítulo 5** (Controlador Repetitivo Transformado), na **Seção 5.6** (Exemplo Numérico 1: Inversor de Frequência):

$$K_a = \begin{bmatrix} -365,0543 & -170,4840 & 281,0159 \end{bmatrix} .$$

Referente ao **Capítulo 5** (Controlador Repetitivo Transformado), na **Seção 5.7** (Exemplo Numérico 2: Motor de Corrente Contínua):

$$K_a = \begin{bmatrix} -7195,6309 & -641,1592 & 4221,9872 \end{bmatrix} .$$

Referente ao **Capítulo 6** (Aplicação para Turbinas Eólicas), na **Seção 6.5** (Resultados):

- CB.1:

$$K_a = \begin{bmatrix} 2,9874 & 0,2003 & 0,7960 & -0,1815 & -30,6597 & 9,3404 & 9,3404 \\ 2,9874 & 0,2003 & 0,7960 & -0,1815 & 9,3404 & -30,6597 & 9,3404 \\ 2,9874 & 0,2003 & 0,7960 & -0,1815 & 9,3404 & 9,3404 & -30,6597 \\ 0,1409 & 0,0066 & 0,0001 & -0,0224 & 0,0348 & 0,0348 & 0,0348 \end{bmatrix}$$

- CB.2:

$$K_a = \begin{bmatrix} 2,8261 & 0,1819 & 0,7798 & -0,1671 & -847,0358 & 417,8820 & 417,8825 \\ 2,8261 & 0,1819 & 0,7798 & -0,1671 & 417,8820 & -847,0358 & 417,8826 \\ 2,8261 & 0,1819 & 0,7798 & -0,1671 & 417,8825 & 417,8826 & -847,0364 \\ 0,1336 & 0,0059 & 0,0001 & -0,0218 & 0,0448 & 0,0448 & 0,0448 \end{bmatrix}$$

- CRS.1:

$$K_a = \begin{bmatrix} 2,8708 & -2,1486 & 0,2975 & -0,1908 & -30,7263 & 9,2738 & 9,2738 & \dots \\ 2,8708 & -2,1486 & 0,2975 & -0,1908 & 9,2738 & -30,7263 & 9,2738 & \dots \\ 2,8708 & -2,1486 & 0,2975 & -0,1908 & 9,2738 & 9,2738 & -30,7263 & \dots \\ 0,1648 & 0,0119 & -0,0011 & -0,0277 & 0,0636 & 0,0636 & 0,0636 & \dots \\ \dots & -43,4922 & -5,8225 & 12,8075 & -0,3129 & 12,8075 & -0,3129 & \\ \dots & 12,8075 & -0,3129 & -43,4922 & -5,8225 & 12,8075 & -0,3129 & \\ \dots & 12,8075 & -0,3129 & 12,8075 & -0,3129 & -43,4922 & -5,8225 & \\ \dots & -0,0036 & 0,0074 & -0,0036 & 0,0074 & -0,0036 & 0,0074 & \end{bmatrix}$$

- CRS.2:

$$K_a = \begin{bmatrix} 3,2755 & -2,3753 & 0,3782 & -0,2252 & -30,7575 & 9,2425 & 9,2425 & \dots \\ 3,2755 & -2,3753 & 0,3782 & -0,2252 & 9,2425 & -30,7575 & 9,2425 & \dots \\ 3,2755 & -2,3753 & 0,3782 & -0,2252 & 9,2425 & 9,2425 & -30,7575 & \dots \\ 0,1723 & 0,0121 & -0,0011 & -0,0298 & 0,0799 & 0,0799 & 0,0799 & \dots \\ \dots & -43,9693 & -3,2522 & 12,5699 & -1,4293 & 12,5699 & -1,4293 & \dots \\ \dots & 12,5699 & -1,4293 & -43,9693 & -3,2522 & 12,5699 & -1,4293 & \dots \\ \dots & 12,5699 & -1,4293 & 12,5699 & -1,4293 & -43,9693 & -3,2522 & \dots \\ \dots & -0,0031 & 0,0068 & -0,0031 & 0,0068 & -0,0031 & 0,0068 & \dots \\ \dots & -43,6538 & -7,5207 & 12,0052 & 2,5824 & 12,0052 & 2,5824 & \\ \dots & 12,0052 & 2,5824 & -43,6538 & -7,5207 & 12,0052 & 2,5824 & \\ \dots & 12,0052 & 2,5824 & 12,0052 & 2,5824 & -43,6538 & -7,5207 & \\ \dots & -0,0007 & 0,0037 & -0,0007 & 0,0037 & -0,0007 & 0,0037 & \end{bmatrix}$$

• CRS.3:

$$K_a = \begin{bmatrix} 3,5578 & -2,5048 & 0,4397 & -0,2505 & -30,7523 & 9,2478 & 9,2478 & \dots \\ 3,5578 & -2,5048 & 0,4397 & -0,2505 & 9,2478 & -30,7523 & 9,2478 & \dots \\ 3,5578 & -2,5048 & 0,4397 & -0,2505 & 9,2478 & 9,2478 & -30,7522 & \dots \\ 0,1792 & 0,0123 & -0,0010 & -0,0317 & 0,0918 & 0,0918 & 0,0918 & \dots \\ \\ \dots & -44,1596 & -2,3128 & 12,4073 & -1,8728 & 12,4073 & -1,8728 & \dots \\ \dots & 12,4073 & -1,8728 & -44,1596 & -2,3128 & 12,4073 & -1,8728 & \dots \\ \dots & 12,4073 & -1,8728 & 12,4073 & -1,8728 & -44,1596 & -2,3128 & \dots \\ \dots & -0,0029 & 0,0064 & -0,0029 & 0,0064 & -0,0029 & 0,0064 & \dots \\ \\ \dots & -44,2548 & -4,2994 & 12,0246 & 1,4127 & 12,0246 & 1,4127 & \dots \\ \dots & 12,0246 & 1,4127 & -44,2548 & -4,2994 & 12,0246 & 1,4127 & \dots \\ \dots & 12,0246 & 1,4127 & 12,0246 & 1,4127 & -44,2548 & -4,2994 & \dots \\ \dots & -0,0005 & 0,0035 & -0,0005 & 0,0035 & -0,0005 & 0,0035 & \dots \\ \\ \dots & -43,4542 & -9,3409 & 11,7043 & 3,2108 & 11,7043 & 3,2108 & \dots \\ \dots & 11,7043 & 3,2108 & -43,4542 & -9,3409 & 11,7043 & 3,2108 & \dots \\ \dots & 11,7043 & 3,2108 & 11,7043 & 3,2108 & -43,4542 & -9,3409 & \dots \\ \dots & -0,0004 & 0,0023 & -0,0004 & 0,0023 & -0,0004 & 0,0023 & \dots \end{bmatrix}$$

• CRS.4:

$$K_a = \begin{bmatrix} 3,7694 & -2,5926 & 0,4864 & -0,2707 & -30,7325 & 9,2675 & 9,2675 & \dots \\ 3,7694 & -2,5926 & 0,4864 & -0,2707 & 9,2675 & -30,7325 & 9,2675 & \dots \\ 3,7694 & -2,5926 & 0,4864 & -0,2707 & 9,2675 & 9,2675 & -30,7325 & \dots \\ 0,1853 & 0,0126 & -0,0010 & -0,0333 & 0,1015 & 0,1015 & 0,1015 & \dots \\ \\ \dots & -44,2707 & -1,8229 & 12,2970 & -2,1204 & 12,2970 & -2,1204 & \dots \\ \dots & 12,2970 & -2,1204 & -44,2707 & -1,8229 & 12,2970 & -2,1204 & \dots \\ \dots & 12,2970 & -2,1204 & 12,2970 & -2,1204 & -44,2707 & -1,8229 & \dots \\ \dots & -0,0027 & 0,0062 & -0,0027 & 0,0062 & -0,0027 & 0,0062 & \dots \\ \\ \dots & -44,4734 & -2,9474 & 11,9625 & 0,9246 & 11,9625 & 0,9246 & \dots \\ \dots & 11,9625 & 0,9246 & -44,4734 & -2,9474 & 11,9625 & 0,9246 & \dots \\ \dots & 11,9625 & 0,9246 & 11,9625 & 0,9246 & -44,4734 & -2,9474 & \dots \\ \dots & -0,0004 & 0,0034 & -0,0004 & 0,0034 & -0,0004 & 0,0034 & \dots \\ \\ \dots & -44,1734 & -5,8915 & 11,8437 & 1,9881 & 11,8437 & 1,9881 & \dots \\ \dots & 11,8437 & 1,9881 & -44,1734 & -5,8915 & 11,8437 & 1,9881 & \dots \\ \dots & 11,8437 & 1,9881 & 11,8437 & 1,9881 & -44,1734 & -5,8915 & \dots \\ \dots & -0,0003 & 0,0022 & -0,0003 & 0,0022 & -0,0003 & 0,0022 & \dots \\ \\ \dots & -43,2673 & -10,6010 & 11,4845 & 3,6204 & 11,4845 & 3,6204 & \dots \\ \dots & 11,4845 & 3,6204 & -43,2673 & -10,6010 & 11,4845 & 3,6204 & \dots \\ \dots & 11,4845 & 3,6204 & 11,4845 & 3,6204 & -43,2673 & -10,6010 & \dots \\ \dots & -0,0003 & 0,0017 & -0,0003 & 0,0017 & -0,0003 & 0,0017 & \dots \end{bmatrix}$$

• CRS.5:

$$K_a = \begin{bmatrix} 3,9359 & -2,6571 & 0,5230 & -0,2877 & -30,7066 & 9,2934 & 9,2934 & \dots \\ 3,9359 & -2,6571 & 0,5230 & -0,2877 & 9,2934 & -30,7066 & 9,2934 & \dots \\ 3,9359 & -2,6571 & 0,5230 & -0,2877 & 9,2934 & 9,2934 & -30,7066 & \dots \\ 0,1908 & 0,0130 & -0,0010 & -0,0348 & 0,1098 & 0,1098 & 0,1098 & \dots \\ \\ \dots & -44,3456 & -1,5227 & 12,2179 & -2,2812 & 12,2179 & -2,2812 & \dots \\ \dots & 12,2179 & -2,2812 & -44,3456 & -1,5227 & 12,2179 & -2,2812 & \dots \\ \dots & 12,2179 & -2,2812 & 12,2179 & -2,2812 & -44,3456 & -1,5227 & \dots \\ \dots & -0,0026 & 0,0060 & -0,0026 & 0,0060 & -0,0026 & 0,0060 & \dots \\ \\ \dots & -44,5949 & -2,1720 & 11,9034 & 0,6465 & 11,9034 & 0,6465 & \dots \\ \dots & 11,9034 & 0,6465 & -44,5949 & -2,1720 & 11,9034 & 0,6465 & \dots \\ \dots & 11,9034 & 0,6465 & 11,9034 & 0,6465 & -44,5949 & -2,1720 & \dots \\ \dots & -0,0003 & 0,0033 & -0,0003 & 0,0033 & -0,0003 & 0,0033 & \dots \\ \\ \dots & -44,4299 & -4,3680 & 11,8387 & 1,4491 & 11,8387 & 1,4491 & \dots \\ \dots & 11,8387 & 1,4491 & -44,4299 & -4,3680 & 11,8387 & 1,4491 & \dots \\ \dots & 11,8387 & 1,4491 & 11,8387 & 1,4491 & -44,4300 & -4,3680 & \dots \\ \dots & -0,0002 & 0,0022 & -0,0002 & 0,0022 & -0,0002 & 0,0022 & \dots \\ \\ \dots & -44,0803 & -7,0300 & 11,7010 & 2,3746 & 11,7010 & 2,3746 & \dots \\ \dots & 11,7010 & 2,3746 & -44,0803 & -7,0300 & 11,7010 & 2,3746 & \dots \\ \dots & 11,7010 & 2,3746 & 11,7010 & 2,3746 & -44,0803 & -7,0300 & \dots \\ \dots & -0,0002 & 0,0016 & -0,0002 & 0,0016 & -0,0002 & 0,0016 & \dots \\ \\ \dots & -43,0949 & -11,5612 & 11,3127 & 3,9248 & 11,3127 & 3,9248 & \dots \\ \dots & 11,3127 & 3,9248 & -43,0949 & -11,5612 & 11,3127 & 3,9248 & \dots \\ \dots & 11,3127 & 3,9248 & 11,3127 & 3,9248 & -43,0949 & -11,5613 & \dots \\ \dots & -0,0003 & 0,0013 & -0,0003 & 0,0013 & -0,0003 & 0,0013 & \dots \end{bmatrix}$$

- CRST.1:

$$K_a = \begin{bmatrix} 1,5718 & -0,0171 & 1,5444 & -0,0958 & -23,7709 & 7,6195 & 7,6195 & \dots \\ 1,5718 & -0,0170 & 1,5446 & -0,0958 & 7,6194 & -23,7709 & 7,6192 & \dots \\ 1,5718 & -0,0170 & 1,5446 & -0,0958 & 7,6194 & 7,6192 & -23,7708 & \dots \\ 0,2326 & 0,0064 & 0,0015 & -0,0484 & 0,0626 & 0,0626 & 0,0626 & \dots \\ \dots & -53,7939 & -1,8692 & 5,1512 & 4,6062 & 5,1512 & 4,6062 & \\ \dots & 5,1495 & 4,6062 & -53,7953 & -1,8691 & 5,1486 & 4,6059 & \\ \dots & 5,1495 & 4,6062 & 5,1487 & 4,6061 & -53,7952 & -1,8689 & \\ \dots & -0,0028 & 0,0455 & -0,0028 & 0,0455 & -0,0028 & 0,0455 & \end{bmatrix}$$

- CRST.2:

$$K_a = \begin{bmatrix} 2,8214 & -0,0651 & 0,6176 & -0,2209 & -22,7148 & 7,6253 & 7,6253 & \dots \\ 2,8213 & -0,0651 & 0,6175 & -0,2209 & 7,6253 & -22,7148 & 7,6253 & \dots \\ 2,8213 & -0,0651 & 0,6175 & -0,2209 & 7,6253 & 7,6253 & -22,7148 & \dots \\ 0,4102 & 0,0427 & -0,0014 & -0,0637 & 0,0737 & 0,0737 & 0,0737 & \dots \\ \dots & -46,8239 & -0,2219 & 10,9860 & 1,8782 & 10,9859 & 1,8782 & \dots \\ \dots & 10,9860 & 1,8782 & -46,8239 & -0,2219 & 10,9861 & 1,8782 & \dots \\ \dots & 10,9860 & 1,8782 & 10,9861 & 1,8782 & -46,8238 & -0,2219 & \dots \\ \dots & 0,0130 & 0,0115 & 0,0130 & 0,0115 & 0,0130 & 0,0115 & \dots \\ \dots & -52,1949 & -7,0143 & 5,2129 & 3,7548 & 5,2129 & 3,7548 & \\ \dots & 5,2129 & 3,7548 & -52,1949 & -7,0143 & 5,2130 & 3,7548 & \\ \dots & 5,2130 & 3,7548 & 5,2131 & 3,7548 & -52,1949 & -7,0143 & \\ \dots & 0,0104 & -0,0031 & 0,0104 & -0,0031 & 0,0104 & -0,0031 & \end{bmatrix}$$

• CRST.3:

$$K_a = \begin{bmatrix} 2,5552 & -0,1964 & 0,7119 & -0,2236 & -22,4741 & 7,4779 & 7,4779 & \dots \\ 2,5552 & -0,1964 & 0,7119 & -0,2236 & 7,4779 & -22,4741 & 7,4779 & \dots \\ 2,5552 & -0,1964 & 0,7119 & -0,2236 & 7,4779 & 7,4779 & -22,4741 & \dots \\ 0,3860 & 0,0379 & -0,0020 & -0,0684 & 0,1037 & 0,1037 & 0,1037 & \dots \\ \\ \dots & -48,3377 & 1,3599 & 8,9185 & 1,9281 & 8,9185 & 1,9281 & \dots \\ \dots & 8,9185 & 1,9281 & -48,3377 & 1,3599 & 8,9185 & 1,9281 & \dots \\ \dots & 8,9185 & 1,9281 & 8,9185 & 1,9281 & -48,3377 & 1,3599 & \dots \\ \dots & 0,0198 & 0,0213 & 0,0198 & 0,0213 & 0,0198 & 0,0213 & \dots \\ \\ \dots & -55,1506 & -3,6811 & 2,3397 & 2,2530 & 2,3397 & 2,2530 & \dots \\ \dots & 2,3397 & 2,2530 & -55,1506 & -3,6811 & 2,3397 & 2,2530 & \dots \\ \dots & 2,3397 & 2,2530 & 2,3397 & 2,2530 & -55,1506 & -3,6811 & \dots \\ \dots & 0,0166 & 0,0015 & 0,0166 & 0,0015 & 0,0166 & 0,0015 & \dots \\ \\ \dots & -48,8754 & -9,1423 & 7,5405 & 3,9686 & 7,5405 & 3,9686 & \dots \\ \dots & 7,5405 & 3,9686 & -48,8754 & -9,1423 & 7,5405 & 3,9686 & \dots \\ \dots & 7,5405 & 3,9686 & 7,5405 & 3,9686 & -48,8754 & -9,1423 & \dots \\ \dots & 0,0056 & -0,0022 & 0,0056 & -0,0022 & 0,0056 & -0,0022 & \dots \end{bmatrix}$$

- CRST.4:

$$K_a = \begin{bmatrix} 2,4753 & -0,2609 & 0,7510 & -0,2264 & -22,2801 & 7,4693 & 7,4693 & \dots \\ 2,4753 & -0,2609 & 0,7510 & -0,2264 & 7,4693 & -22,2801 & 7,4693 & \dots \\ 2,4753 & -0,2609 & 0,7510 & -0,2264 & 7,4693 & 7,4693 & -22,2801 & \dots \\ 0,3791 & 0,0365 & -0,0022 & -0,0712 & 0,1230 & 0,1230 & 0,1230 & \dots \\ \\ \dots & -49,4632 & 2,3138 & 7,4796 & 2,0915 & 7,4796 & 2,0915 & \dots \\ \dots & 7,4796 & 2,0915 & -49,4632 & 2,3138 & 7,4796 & 2,0915 & \dots \\ \dots & 7,4796 & 2,0915 & 7,4796 & 2,0915 & -49,4632 & 2,3138 & \dots \\ \dots & 0,0230 & 0,0257 & 0,0230 & 0,0257 & 0,0230 & 0,0257 & \dots \\ \\ \dots & -57,4737 & -2,2876 & -0,1442 & 1,6641 & -0,1443 & 1,6641 & \dots \\ \dots & -0,1442 & 1,6641 & -57,4737 & -2,2876 & -0,1443 & 1,6641 & \dots \\ \dots & -0,1442 & 1,6641 & -0,1442 & 1,6641 & -57,4737 & -2,2876 & \dots \\ \dots & 0,0200 & 0,0030 & 0,0200 & 0,0030 & 0,0200 & 0,0030 & \dots \\ \\ \dots & -49,1469 & -5,8013 & 7,8593 & 2,3159 & 7,8593 & 2,3159 & \dots \\ \dots & 7,8593 & 2,3159 & -49,1469 & -5,8012 & 7,8593 & 2,3159 & \dots \\ \dots & 7,8593 & 2,3159 & 7,8593 & 2,3159 & -49,1469 & -5,8012 & \dots \\ \dots & 0,0058 & -0,0017 & 0,0058 & -0,0017 & 0,0058 & -0,0017 & \dots \\ \\ \dots & -46,7441 & -10,4443 & 8,9803 & 4,2625 & 8,9803 & 4,2625 & \dots \\ \dots & 8,9803 & 4,2625 & -46,7441 & -10,4443 & 8,9803 & 4,2625 & \dots \\ \dots & 8,9803 & 4,2625 & 8,9803 & 4,2625 & -46,7441 & -10,4443 & \dots \\ \dots & 0,0029 & -0,0017 & 0,0029 & -0,0017 & 0,0029 & -0,0017 & \dots \end{bmatrix}$$

• CRST.5:

$$K_a = \begin{bmatrix} 2,4444 & -0,2777 & 0,7591 & -0,2280 & -22,1478 & 7,4773 & 7,4773 & \dots \\ 2,4445 & -0,2778 & 0,7591 & -0,2280 & 7,4773 & -22,1478 & 7,4772 & \dots \\ 2,4444 & -0,2778 & 0,7591 & -0,2280 & 7,4773 & 7,4772 & -22,1478 & \dots \\ 0,3814 & 0,0367 & -0,0024 & -0,0737 & 0,1340 & 0,1340 & 0,1340 & \dots \\ \\ \dots & -50,1717 & 2,8618 & 6,5709 & 2,1547 & 6,5707 & 2,1548 & \dots \\ \dots & 6,5703 & 2,1550 & -50,1721 & 2,8620 & 6,5698 & 2,1550 & \dots \\ \dots & 6,5703 & 2,1549 & 6,5700 & 2,1550 & -50,1716 & 2,8619 & \dots \\ \dots & 0,0250 & 0,0275 & 0,0250 & 0,0275 & 0,0250 & 0,0275 & \dots \\ \\ \dots & -59,0922 & -1,5578 & -1,9016 & 1,2765 & -1,9016 & 1,2765 & \dots \\ \dots & -1,9023 & 1,2767 & -59,0927 & -1,5576 & -1,9026 & 1,2766 & \dots \\ \dots & -1,9020 & 1,2766 & -1,9024 & 1,2766 & -59,0924 & -1,5576 & \dots \\ \dots & 0,0226 & 0,0029 & 0,0226 & 0,0029 & 0,0226 & 0,0029 & \dots \\ \\ \dots & -49,1243 & -4,3818 & 7,9396 & 1,5507 & 7,9396 & 1,5507 & \dots \\ \dots & 7,9395 & 1,5507 & -49,1245 & -4,3818 & 7,9393 & 1,5507 & \dots \\ \dots & 7,9395 & 1,5507 & 7,9394 & 1,5507 & -49,1243 & -4,3818 & \dots \\ \dots & 0,0059 & -0,0018 & 0,0059 & -0,0018 & 0,0059 & -0,0018 & \dots \\ \\ \dots & -47,2066 & -7,0077 & 9,3946 & 2,6339 & 9,3946 & 2,6339 & \dots \\ \dots & 9,3946 & 2,6340 & -47,2067 & -7,0077 & 9,3945 & 2,6339 & \dots \\ \dots & 9,3946 & 2,6340 & 9,3945 & 2,6339 & -47,2066 & -7,0077 & \dots \\ \dots & 0,0030 & -0,0018 & 0,0030 & -0,0018 & 0,0030 & -0,0018 & \dots \\ \\ \dots & -45,6642 & -11,3752 & 9,5329 & 4,5411 & 9,5329 & 4,5411 & \dots \\ \dots & 9,5328 & 4,5411 & -45,6643 & -11,3752 & 9,5327 & 4,5411 & \dots \\ \dots & 9,5329 & 4,5411 & 9,5328 & 4,5411 & -45,6642 & -11,3752 & \dots \\ \dots & 0,0018 & -0,0016 & 0,0018 & -0,0016 & 0,0018 & -0,0016 & \dots \end{bmatrix}$$

- CRP:

$$K_a = \begin{bmatrix} 0,0651 & 0,0618 & -0,1349 & 0,0021 & -28,6600 & 11,5675 & 11,5675 \\ 0,0651 & 0,0618 & -0,1349 & 0,0021 & 11,5675 & -28,6601 & 11,5676 \\ 0,0651 & 0,0618 & -0,1349 & 0,0021 & 11,5675 & 11,5676 & -28,6601 \\ 19,6502 & 1,0656 & -1,4966 & -0,0302 & -0,6977 & -0,6977 & -0,6977 \end{bmatrix}$$

- CRPT:

$$K_a = \begin{bmatrix} -0,2116 & 0,0166 & -0,1830 & 0,0010 & -41,0310 & 5,3500 & 5,3499 \\ -0,2116 & 0,0166 & -0,1830 & 0,0010 & 5,3500 & -41,0309 & 5,3499 \\ -0,2115 & 0,0166 & -0,1830 & 0,0010 & 5,3500 & 5,3499 & -41,0309 \\ 33,2119 & 1,0216 & -3,5370 & -0,0313 & -2,4151 & -2,4151 & -2,4151 \end{bmatrix}$$

Referente ao **Capítulo 7** (Implementação Discreta), na **Seção 7.4** (Resultados Experimentais com um Motor de Corrente Contínua):

- CB.1:

$$K_a = [-0,7683 \quad 0,0982]$$

- CB.2:

$$K_a = [-9,4762 \quad 2,5131]$$

- CRS.1:

$$K_a = [-1,0809 \quad 0,0975 \quad 0,0484 \quad 0,0184]$$

- CRS.2:

$$K_a = [-1,5766 \quad 0,0964 \quad 0,0507 \quad 0,0096 \quad 0,0796 \quad -0,0043]$$

- CRST.1:

$$K_a = [-2,0927 \quad 0,1231 \quad 0,0990 \quad 0,0524]$$

- CRST.2:

$$K_a = [-2,9903 \quad 0,1271 \quad 0,0927 \quad 0,0369 \quad 0,1471 \quad 0,0008]$$

- CRP:

$$K_a = [-1,7285 \quad 1,1188]$$

- CRPT:

$$K_a = [-3,3596 \quad 1,2787]$$