PONTIFICIA UNIVERSIDADE CATOLICA DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE ECONOMIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

SERGIO ARTUR LUZ WAGNER

NOVAS E VELHAS ABORDAGENS DA TEORIA DA ESCOLHA E DA UTILIDADE

PORTO ALEGRE, 2009,

SERGIO ARTUR LUZ WAGNER

NOVAS E VELHAS ABORDAGENS DA TEORIA DA ESCOLHA E DA UTILIDADE

Dissertação apresentada como requisito para obtenção de grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Economia da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Orientador: Dr. Augusto Mussi Alvim

PORTO ALEGRE, 2009,

SERGIO ARTUR LUZ WAGNER

NOVAS E VELHAS ABORDAGENS DA TEORIA DA ESCOLHA E DA UTILIDADE

Dissertação apresentada como requisito para obtenção de grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Economia da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Aprovada em ______ de ____________________ de ________

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Carlos Eduardo Lobo e Silva - PUCRS

____
Prof. Dra. Izete Pengo Bagolin – PUCRS

____
Prof. Dra. Maria Lucrecia Calandro - FEE

____
Prof. Augusto Mussi Alvim - PUCRS

Dedico esta Dissertação a minha Jacheline
(com amor e carinho), e aos meus Pais,

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu Orientador Augusto Mussi Alvim pelos conselhos e insistência em ser claro e objetivo com o que se escreve em um trabalho científico.

Ao amigo Volnei da Conceição Picoloto, por horas de conversas, regadas a café, sobre economia, política e tudo mais.

Aos amigos, Dimitri, Vilson, Sidnei, Roberto, Resin, Demian, Mônica, Pe Carlos e outros que me propuseram e ainda me propõe uma boa amizade e agradáveis conversas.

A minha irmã Ana Paula, e aos meus sobrinhos Lucas e Ian e meu cunhado Leandro, pela pouca convivência, mas satisfatória.

As minhas duas professoras do primário, Salete e Nelci, que foram parte integrante para eu continuar na arte do saber.

Aprendi que um homem só tem
o direito de olhar um outro de cima
para
baixo para ajudá-lo a levantar-se

Gabriel Garcia Marques

RESUMO

Até pouco tempo havia apenas um posicionamento frente o dilema da escolha envolvendo o risco, que era baseado no processo do indivíduo racional. Atualmente, com novas técnicas de compreensão do risco e principalmente do complexo instituto da incerteza, já é possível de se delimitar o que leva as pessoas a decidirem e a se equivocarem em alguns processos de decisão.

Neste trabalho apresentaremos um pequeno resumo histórico dos processos, visando certa linha de pensamento, no que tange aos mecanismos de escolha, e sucessivamente vem sendo aprimorado com a interpretação de fenômenos que antecipadamente, não eram considerados relevantes o que neste caso se refere a Teoria da Perspectiva (*Prospect Theory*), de *Daniel Kahnemann* e *Amos Tversky*.

Em vista desta teoria, uma das principais referências ao estudo dos mecanismos de risco e incerteza é a re-interpretação da medida. A existência de um hiato entre as duas teorias estudadas, *EU* Utilidade Esperada e *NEU* Utilidade Não Esperada, certifica o quando para o fenômeno da escolha, a possibilidade antecipada de definição do risco é importante. Na *EU* as escolhas envolvem um traçado axiomático Neoclássico consistente com a concepção filosófica de risco. Para a *NEU*, e necessariamente para a Teoria da Perspectiva, o processo de escolha ocorre principalmente no que se delimita por Heurísticas de Decisão.

Ambas as teorias vêem o ser humano por dois enfoques bastante claros. A primeira, *EU*, percebe o ato humano como característica de um conjunto lógico de procedimentos. Não havendo obediência a estes atributos, não haveria a constituição de um projeto de felicidade, de bem estar como subjetivos da escolha racional. Para a *NEU* o indivíduo é visto como um agregado, onde a soma de componentes assessórios subjetivos, não necessariamente necessita representar a máxima felicidade, na Teoria *EU*, mas que demonstrem as verdadeiras faces daquilo que representa a Utilidade, a escolha e seu risco inerente.

Em nosso trabalho ainda incorremos na tênue relação entre risco e incerteza. Estas relações são apresentadas como diferenças controversas em cada uma das Teorias analisadas, e principalmente, como elas interferem nos mecanismos de construção da Teoria da Perspectiva.

ABSTRACT

Until little time the quandary of the choice had only one positioning front involving the risk that was established in the process of the rational individual. Currently, with new techniques of understanding of the risk and mainly of the complex institute of the uncertainty, already it is possible of if delimiting what it takes the people to decide and if to make a mistake in some processes of decision.

In this work we will present a small historical summary of the processes, having aimed at certain line of thought, in what it refers to the choice mechanisms, and successively comes being improved with the interpretation of phenomena that, were anticipated not considered excellent what in this in case that the Theory of the Perspective is mentioned (*Prospect Theory*), of *Daniel Kahnemann* and *Amos Tversky*. In sight of this theory, one of the main references to the study of the mechanisms of risk and uncertainty it is the reverse speed-interpretation of the measure. The existence of a hiatus between the two studied theories, Expected Utility and *NEU* Non Expected Utility, certify when for the phenomenon of the choice, the anticipated possibility of definition of the risk is important.

In me those choices involve an axiomatic tracing consistent Neoclassical with the philosophical conception of risk. For the *NEU*, and necessarily for the Theory of the Perspective, the choice process occurs mainly in what it is delimited for Heuristically of Decision. Both the theories see the human being for two sufficiently clear approaches. The first one, I, perceive the human act as characteristic of a logical set of procedures. Not having obedience to these attributes, he would not have the constitution of a happiness project, of welfare as subjective of the rational choice.

For the *NEU* the individual is seen as an aggregate, where the addition of subjective accessories components, not necessarily needs to represent the maximum happiness, in the Theory I, but that they demonstrate the true faces of what represents the Utility, the choice and its inherent risk. Into our work still we incur into the tenuous relation between risk and uncertainty. These relations are presented as differences controversies in each one of the analyzed Theories, and mainly, as they intervene with the mechanisms of construction of the Theory of the Perspective.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As Teorias que envolvem o papel da utilidade como resultado da preferência e escolha definidas pelos indivíduos, passando por paradigmáticas transformações ao longo da História do Pensamento Econômico. Sejam estes, aspectos psicológicos, metodológicos, filosóficos, a Economia busca-se neles para construir teorias que possam definir qual a melhor maneira do ser humano definir e entender suas escolhas.

Assim o presente trabalho busca apresentar em quatro capítulos a construção e as várias etapas de desenvolvimento das teorias que entrelaçam o processo de utilidade. Como nos apresenta *Varian* (2007), utilidade é uma forma abstrata para medirmos os efeitos concretos da preferência e da escolha. Na medida em que a construção teórica da formação do processo de escolha individual se apresenta, a dicotomia entre as duas principais teorias do comportamento (Teoria da Utilidade Esperada e Teoria da Utilidade Não Esperada) se forma.

Desta forma, o primeiro capítulo será a apresentação inicial da Teoria da Utilidade, quando de seus primórdios em Teoria do Valor e Utilidade. A ênfase convergirá para a História do Pensamento Econômico com suas escolas de pensamento. O objetivo é apresentar a formação da idéia de utilidade, e a dicotomia entre Utilidade Marginal e Utilidade Esperada com as idéias principais de cada escola.

No segundo capítulo, seguindo a mesma linha teórica será dada referência a apresetação dos elementos chave da Teoria da Utilidade. Isto será feito através da descrissão dos principais axiomas e pressupostos que constituem a parte do pensamento matemático da utilidade, e principalmente, como reforço técnico da Teoria da Utilidade Esperada.

Para o terceiro capítulo teremos a apresentação teórica da Teoria da Utilidade Esperada, com seus pressupostos e com alguns problemas metodológicos inerentes a ela. Estes problemas serão postos em uma seqüência de eventos exemplificáveis. Assim, para determinarmos as falhas da teoria, sem desmerecer o contexto principal, apresentaremos os principais paradoxos que reforçarão a idéia de um novo paradima para uma nova teoria da utilidade.

No quarto capítulo será apresentada uma nova consepção de utilidade, a Teoria da Utilidade Não Esperada, que será o contraponto ao modelo do *mainstream*. Ela buscará como teoria e prática, redefinir os conceitos que a Teoria da Utilidade Esperada não considerou. Para isto, a ênfase será apresentação de outras teorias que compõe o universo da Utilidade Não Esperada, mas seguindo os próprios. Desta forma a idéia principal é apontar novos caminhos naquilo que refere a captura de elementos que *a priori* não são efetivamente considerados pela Teoria da Utilidade Esperada. Para um exemplo objetivo será apresentado o trabalho de *Kahnemann* e *Tversky* com sua Teoria da Perspectiva, demonstrando com isso que há uma nova possibilidade de medir a utilidade das escolhas dos indivíduos como função da existência de riscos inerentes a estes processos.

Por fim, como apanhado final, faremos uma análise geral de todo o assunto apresentado ao logo do trabalho. Reportaremos-nos a retomada de todas as abordagens apresentadas, às teses defendidas pelas escolas de pensamento, seus autores com enfoque principal da dicotomia teórica das duas mais significativas escolas de pensamento economico em Teoria da Utilidade.

1. UTILIDADE COMO ESCOLA DE PENSAMENTO

1.1. A Construção das Teorias do Valor em Smith, Ricardo e John Mill.

O livro "*An Inquiry Into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*" de *Adam Smith*[1], (1778), foi o primeiro estudo sistemático e amplo do capitalismo mercantil, e o contexto entre lucro e capital. Na, observação de *Hunt* (1982, p. 56-78), o comportamento econômico tinha como conotação, principalmente, motivos egoístas e gananciosos (apesar de admitir que, no comportamento não econômico, as pessoas tivessem outros motivos, inclusive altruístas). Até então, apenas os filósofos e teólogos passavam o tempo a determinar uma causa para a razão, emoções, e morte.

Antes, a economia era apenas uma ciência empírica (de forte conotação positiva). No período de *Adam Smith*, século 18, a Inglaterra passava por um amplo processo chamado Primeira Revolução Industrial. A observação atenta dos costumes e práticas mercantis fez despertar no pensamento intelectual o estudo atento e de alguns fenômenos econômicos.

Pelo contexto do período, século dezessete, com suas revoluções militares, e instabilidades social e política, motivar-se-ia ainda, a desfragmentação do pensamento cristão dominante (*mainstream* cristão). Isto foi conseqüência de uma mudança de eixo social e das modificações políticas da época. Observe-se que, até então, Igreja e Poder sempre foram aliados fortes, servindo de exemplo das conquistas da Península Ibérica (com o reinado de Portugal e os Reis de Castela) pela busca de mais riquezas para seus reinos.

Por assim dizer, o modelo cristão, ou *mainstream* cristão, motivou mudanças diante da forte bipolaridade religiosa entre as duas conotações cristãs (protestante e católica), sendo a primeira muito mais flexível do que a segunda. Isto caracterizaria também a consolidação liberalismo clássico, amparado no processo de evolução do capitalismo (veja-se isso o iluminismo). A Teoria da Utilidade surgiu como uma nova metodologia na compreensão dos mecanismos do processo de escolha, cuja riquesa seria o prêmio pelo sucesso e não do pecado pela ambição.

[1] Adam Smith (1723–1790) economista escoces. Principais obras, "Os *Ensaios sobre temas filosóficos* (1795)", *An Inquiry Into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*" de *Adam Smith*[1], (1778). Segundo *Hunt* (1982, p.51).

> […] Os novos capitalistas da classe média queriam ter liberdade, não só em relação as restrições econômicas que atrapalhavam a produção e o comércio, mas também em relação ao opróbrio moral que a Igreja Católica tinha associado aos seus motivos e às suas atividades. O protestantismo não só os libertou da condenação religiosa, como também acabou transformando em virtudes os motivos pessoais, egoístas e aquisitivos que a Igreja medieval tanto desprezara.

A evolução do conceito de utilidade como distinção entre valor de uso e valor de troca seria ponto de controvérsia entre dois grupos de intelectuais. O grupo de *Smith*, que não aceitava a possibilidade de ser a utilidade algo mensurável, e o grupo de *Bentham*[2] e *Jevons*[2], que apontava a utilidade como processo de medida da satisfação, e assim, da felicidade. Na exemplificação de *Bell* (1976, p.172).

> […] Smith se refere à utilidade ou "valor de uso". Apresenta ele o paradoxo entre o valor de troca e o valor de uso tomando como exemplos o diamante e a água, seu interesse pela utilidade termina aí. Não considera ele a utilidade como pré-requisito do valor e, naturalmente, despreza-a como fator determinante do valor de troca.

E complementa *Hunt* (1982, p. 74) que,

> […] Os economistas que defendem uma teoria do valor baseada na utilidade referem-se a esta passagem como "o paradoxo da água e do diamante". Smith, porém, não via isto como um paradoxo, mas, simplesmente, como uma afirmativa de que o valor de uso e o valor de troca não estavam sistematicamente relacionados entre si. Posteriormente teóricos da utilidade explicariam esta diferenciação entre a utilidade total dos diamantes (à qual Smith se referira) e sua utilidade marginal.

As pessoas faziam parte de um novo sistema institucional, já fora do período das trevas, que buscava na percepção de *Smith,* diferenciar a oportunidade do agente. Conforme as sociedades se agregavam política e economicamente, surgia uma nova sociedade industrial crescendo e construindo relações institucionais mais complexas do que as praticadas no período feudalista. Além de práticas como o escambo (muito comum no período feudal), as relações de troca da economia passaram mais complexas com o incremento da moeda (cunhadas institucionalmente pelo aval dos reis) nas práticas do mercantilismo europeu nos períodos do quinhentismo e do seissentismo. A moeda, como unidade de conta, reserva de valor, meio de troca, e acumulação de capital era o objetivo de toda nação.

---

[2] Jeremy Benthan (1748–1832), economista e filósofo inglês, e Willian Stanley Jevons (1835–1882) economista britânico. Principais obras: de *Benthan* "*The Principles of Morals and Legislations*" (1780) e por parte de *Jevons* "*Theory of Political Economy* (1871).

Desde então, o aspecto social e econômico da riqueza como reflexo do prazer e felicidade individual (egoísta) sobre o social (altruísta), segundo a doutrina liberalista de *Smith*, buscava um forte apelo à livre iniciativa. Na observação de *Nunes Avelãs*, (199, p.147) à afirmação de *Adam Smith*, de que "não devemos o pão à benevolência do padeiro, mas ao seu interesse egoísta".

Assim como *Smith*, *David Ricardo*[3], outro dos teóricos da Economia Política também não tinha muita simpatia pelo proposto pelos utilitaristas como base da Teoria da Utilidade. Um dos principais problemas apontados *Smith*, era a falta de uma explicação mais convincente pela parte da corrente marginalista do significado verdadeiro da utilidade em diversos aspectos Eonômicos, o que não o convencia. Já *Ricardo* não aceitara a explicação da corrente utilitarista sobre designação de bens de luxo.

Na observação feliz de *Hunt* (1982, p. 118),

> […] Ricardo começou seus Princípios afirmando que, embora todas as mercadorias que tinham valor tivessem que ter utilidade – caso contrário, não poderia ser colocado no mercado – a utilidade não estabelecia valor. Disse ele o seguinte "Possuindo utilidade as mercadorias recebem seu valor de troca de duas fontes: de sua escassez e da quantidade de trabalho necessária para sua obtenção".

John Stuart Mill [3] o último dos clássicos, junto a *Malthus* [3] *Ricardo* e *Smith*, também pouco contribuiu para a discussão sobre a Teoria da Utilidade. Após escrever "*Principles of Political Economy*" em 1848 declararia que tudo o que se poderia acrescentar sobremaneira à lei do valor já havia sido feito.

Neste momento, a Teoria do Valor–Trabalho de *Ricardo*, e o modelo de Utilidade (determinado pelos teóricos da Economia Política como modelo de preferência), de *Jeremy Bentham* apresentavam um relevante passo na discussão ambivalente entre valor e utilidade.

[3] David Ricardo (1772–1823) economista inglês, sua principal obra em Economia Política: "*Principles of political economy and taxation"* de 1817. John Stuart Mill (1806–1873) filosofo e economista inglês. Principais obras: "Sistema de Lógica Dedutiva (1843), Princípios da Economia Política (1844)". Thomas Malthus (1766-1834), economista britânico, suas principais obras: "*Princípios de economia política* (1820) e *Definições em economia política* (1827)".

1.2. O Paradigma da Maximização da Felicidade pelo Desenvolvimento da Teoria da Preferência (Utilidade) em Benthan, Jevons e Gossen.

Na História do Pensamento Econômico, mais precisamente entre o fim do século dezessete e o último quartel do século dezoito, desenvolveu-se um objetivo determinante por uma teoria que fosse capaz de desenvolver o ideal filosófico da busca da felicidade (ou maneira de se poder medi-la), em oposição à posição de *Adam Smith*. A primeira intervenção foi de *Jeremy Bentham*. Ele acreditava que a busca da felicidade poderia ser maximizada (medida) por intermédio da teoria criada (Teoria Utilitarista) que era baseada na concepção de felicidade como meio de bem estar individual. O conceito foi apresentado em seus dois livros: "*The Principles of Morals and Legislations*", e "*The Philosophy of Economic Science*".

Como nos mostra *Cusinato* (2003, p. 24-25), o primeiro dos livros de *Bentham* faz referência ao princípio da utilidade como modelo mecanicista e elaborador de um sistema de causa e efeito. O outro livro apresenta a concepção da Utilidade Marginal Decrescente (como pode ser vista na figura 1), isto é, o quantum de riqueza necessária e seu impacto no grau de felicidade. Ou seja, pela definição do autor, à medida que se ganha mais riqueza o seu acréscimo em felicidade não mais aumenta (decresce) de forma progressiva.

Segundo *Hobsbawn* apud *Hunt* (1982, p. 148).

> [...] utilidade quer dizer a propriedade de qualquer objeto que tenda a produzir algum benefício, vantagem, prazer, bem ou felicidade (tudo isso, no caso, equivale à mesma coisa) ou (o que de novo equivale à mesma coisa) a impedir danos, dor, mal, ou infelicidade à parte cujo interesse esteja sedo considerado.

Recorda–se a afirmação de *Smith* (nos referindo ao paradoxo da água e do diamante) de que não era possível interpretar igualmente o valor de uso (utilidade) e o valor de troca. Esta explicação seria buscada na corrente utilitarista.

A construção do modelo utilitarista vai muito além de uma explicação mais concisa da Teoria do Valor-Utilidade. Note-se que sempre esteve presente o conflito moral e ético, delegado em um primeiro momento à religião católica, que abolia determinadas práticas sociais, como a usura. Em busca por uma reformulação sistemática da doutrina capitalista, pelos preceitos do Liberalismo Clássico, veio a seu encontro a Contra Reforma (de *Lutero*) que contribuiu também para o processo, ou seja, como conflito dos indivíduos por um modelo institucional libertário. O processo apresentado se demonstraria na criação de mercados onde os indivíduos teriam um papel mais intenso (e também egoísta) em suas decisões, sem serem intimidados com a moral (religiosa).

Note-se que o Homem (Ser Humano) está em permanente conflito em seu espaço social, e assim, busca razões para os problemas que o afligem. Este conflito serve como vetor para as idéias utilitaristas. Assim, a necessidade de obter prazer, felicidade, e satisfação são os componentes do "vetor" que para muitos pensadores da Escola da Utilidade Esperada, justifica esta busca.

Neste momento da História, na percepção de *Taylor* (1960, p.161), surge, então, neste período, o início da Filosofia Utilitarista, também conhecida como Benthamismo (Utilitarismo Inglês), consolidando então a continuação do ideal capitalista.

Na explanação de *Bentham* em *Hunt* (1982, p.149),

> [...] Os termos riqueza e valor se explicam mutuamente. Um artigo só entra na composição de uma riqueza se possui algum valor. A riqueza se mede de acordo com os graus deste valor. Todo o valor se baseia na Utilidade. Onde não há utilidade, não pode haver valor algum.

O eterno antagonismo entre prazer e dor fez *Bentham* defender o ideal da busca incessante pelo prazer, pela felicidade, como resposta inquestionável. Até então, não se compreendia cardinalmente o valor de um *quantum* de prazer ótimo, ou de uma felicidade ótima. Havia em conjunto com o pensamento utilitarista, um propósito mais racional derivados da Ciência Aplicável, mas ainda assim, faltava uma metodologia objetiva e demonstrativa.

E na observação de *Bentham* (apud *Hunt*, 1982, p. 148)*,* a quantificação do prazer se daria de oito maneiras. Por:

Sua intensidade	
Sua duração	Sua certeza ou incerteza
Sua proximidade ou afastamento	Sua fecundidade
Sua pureza	Sua extensão.

Na concepção Benthamista, a lógica utilitarista tinha como princípio uma moral própria e uma ética própria. Isto quer dizer que, fora o conflito entre o indivíduo e a Igreja, o ser moral e ético deveria ser uma conseqüência de um elemento político próprio, ou seja, capaz de ser individual para que o elemento social se fortalecesse. Neste mesmo enfoque, o racionalismo teria a função de servir ao interesse individual, com a condução direta e imparcial de um posicionamento científico das leis de mercado. Para os críticos do utilitarismo, *Bentham* e seus precursores confundiam felicidade com dinheiro.

Bentham também foi precursor do Utilitarismo Teleológico, que pregava que Deus cobrava com dor ou recompensava com prazer nesta vida ou no pós-vida aquele indivíduo que obedecesse aos ensinamentos da Igreja Protestante sem praguejar, como na observação de *Albee* apud *Taylor* (1960, p. 163),

> […] que o melhor comportamento, o mais conducente à felicidade dos nossos semelhantes em geral era sempre e unicamente apropriada para todo o mundo em seu próprio interesse pessoal.

No mesmo caminho de *Bentham*, *Willian Stanley Jevons* tomando as idéias Benthamistas de prazer e dor, construiu um modelo para medir os efeitos da utilidade em processos socais. À primeira vista, foi elaborado um modelo cartesiano no qual cada um de seus eixos representava os elementos simbólicos prazer e dor. A partir de então, se determinou que os fenômenos citados tivessem duração e intensidade para ocorrerem. Usando métodos de cálculo diferencial e integral (veja nota de rodapé da pg. 20) partiu-se da premissa de que as necessidades humanas deviam ser maximizadas com um mínimo de esforço, objetivando um maior quantum (quantidade) de conforto.

Jevons também declarou segundo *Taylor* (1960, p. 45), que "a utilidade embora uma qualidade das coisas, não é uma qualidade inerente". A principal dúvida trazida por alguns teóricos do utilitarismo, era definir a diferença entre Utilidade Total e Utilidade Marginal. Para *Jevons*[4] o termo utilidade era usado para "designar a qualidade abstrata graças à qual um objeto serve aos nossos propósitos e se credencia para ser qualificado como mercadoria".

Pela diferença na literalidade dos conceitos de Utilidade Total e Marginal, *Jevons* criou o conceito de *grau de finalidade da utilidade*, que significava o quanto de uma mercadoria variava em função de uma parcela a mais da mesma, ou seja, o grau da última adição de utilidade, a última quantidade a ser consumida.

Nesta linha de pensamento também estava explicada a diferença entre utilidade total e utilidade parcial, ou seja, a utilidade total como uma soma de utilidades unidas pelo mesmo suprimento.

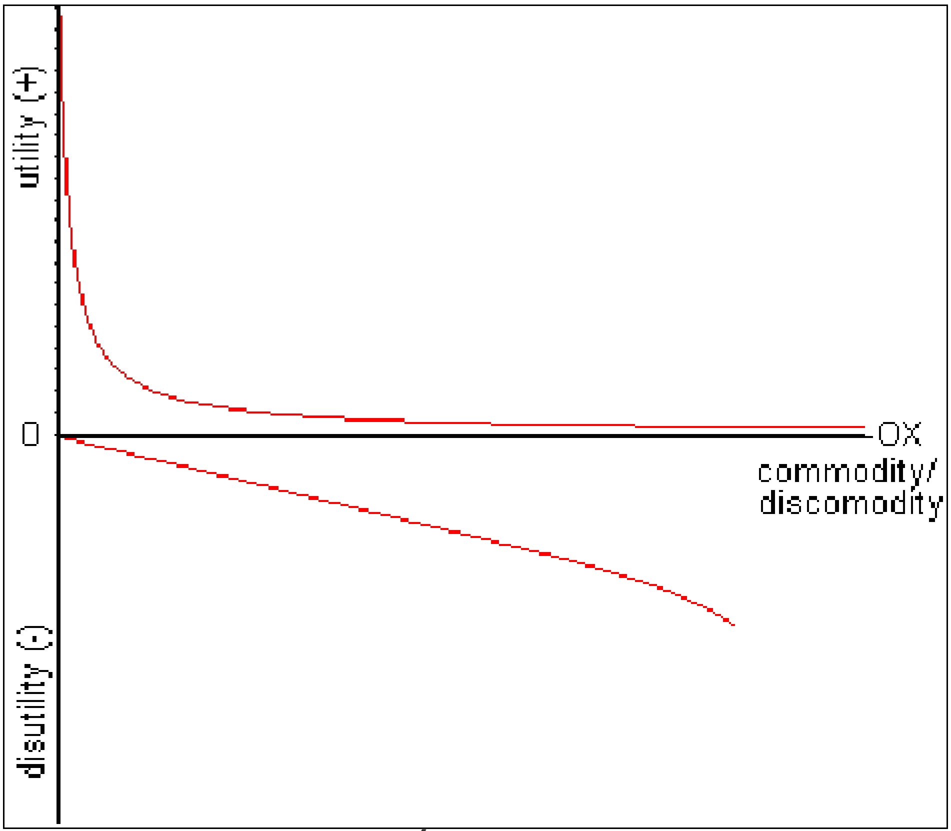


Figura 1: Utilidade Positiva e Negativa[5]
Fonte: Vaggi, Gianni e Groenewegen, P, 2003.

[4] Veja Allyn Young, Jevon's "Theory of Political Economy.", (1912) sobre a influência do pensamento de Jevons na composição das idéias de outros pensadores em Economia Política.

[5] No exemplo gráfico acima (Figura 1), a utilidade, segundo Jevons, é definidamente por uma função decrescente que maximiza a mercadoria pelo prazer que ela pode causar. A função desutilidade ou utilidade negativa (descommodity) parte da origem que significa que para a existência de zero quantidade de mercadoria implica em zero utilidade. Segundo *Vaggi* e *Groenewegen* (2003, p.205) o prazer total derivado de uma mercadoria é impossível de ser medido. Jevons, segundo os autores, elucidou as leis do prazer e dor pela elaboração de um fator de tempo envolvendo incerteza e a possibilidade de descontinuidades entre as variáveis.

Segundo as notas matemáticas de *Alfred Marshall* em seu livro intitulado Princípios de Economia (Apêndice Matemático, p. 757) *Jevons* pensou sua "Utilidade Final" através do ferramental matemático visto em seguida.

A lei da diminuição da utilidade limite pode ser definida pela suposição de que haja um elemento u determinado como utilidade total de uma quantidade x de uma mercadoria, para uma dada pessoa, num determinado tempo, então a utilidade limite é medida por $\frac{du}{dx}\delta x$, em que $\frac{du}{dx}$ exprime o grau-limite de utilidade. *Stanley Jevons*[6] em passagens de sua obra sobre o tema usa o termo "grau quase final de utilidade[7]". Segundo *Marshall*, há certo grau de dúvida de qual das expressões supramencionadas, no texto de *Jevons*, era a mais apropriada. De acordo com o texto de *Jevons*, na intenção do que este queria referir sobre o tema utilidade, *Marshall* supôs pelas condições do texto, que $\frac{d^2u}{dx^2}$ é sempre negativa.

Note–se que há um caminho teórico firmado na busca de um padrão aditivo e independente para a consepção da função utilidade. Isto seria revisto pelos teóricos da Escola de *Lausanne*. A lei da utilidade, na observação de *Bell J. F* (1961, p.362), também foi definida por *Jevons* como,

> […] A lei da Utilidade decrescente é graficamente ilustrada por meio de uma curva, convexa até ao ponto da origem e semelhante à curva da procura conforme comumente usada. A quantidade da mercadoria é indicada pelo eixo das abscissas, o grau de utilidade ou intensidade do desejo do consumidor e do efeito sobre ele é indicado no eixo das ordenadas.

Portanto, *Jevons* conseguiu responder a questão da diferença entre o aumento e diminuição no nível de utilidade[6], proposta pelo seu *grau de finalidade da utilidade*.

---

[6] Ainda em *Marshall*, baseado em seus Princípios de Economia (Apêndice Matemático, p. 757) denominou por m uma soma qualquer de dinheiro, ou de poder aquisitivo em geral, à disposição de uma pessoa por certo tempo, e u como a representação da utilidade total dela, então $\frac{d\mu}{dm}$ representa o grau-limite de utilidade do dinheiro para ela.

Se p é o preço exato que ela se dispõe a pagar por uma quantidade x de mercadoria que lhe dê um prazer total u , então,

$$\frac{d\mu}{dm}\Delta p = \Delta u \tag{1.1}$$

e

$$\frac{d\mu}{dm}\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dx} \tag{1.2}$$

Se p' é o preço que ela consente em pagar por uma quantidade x' de outra mercadoria, que possa lhe dar um prazer total u' , então,

$$\frac{d\mu}{dm}\frac{dp'}{dx'} = \frac{du'}{dx'} \tag{1.3}$$

Tomando a divisão das equações 1.2 por 1.3, temos,

$$\frac{dp}{dx} : \frac{dp'}{dx'} = \frac{du}{dx} : \frac{du'}{dx'} \tag{1.4}$$

A interpretação de *Alfred Marshall* foi que quando ocorre aumento de meios (de pagamento, renda, salário), o grau-limite de utilidade diminui para si de modo que $\frac{d^2\mu}{dm^2}$ é sempre negativa. Permanecendo a renda (ou os meios) inalterada, a utilidade limite para ela de uma quantia x de uma mercadoria, para um aumento em seu numerário aumenta $\frac{d\mu}{dx} : \frac{d\mu}{dm}$; isto é, aumenta $\frac{dp}{dx}$, ou seja, a taxa de que se está disposto a pagar por ofertas posteriores de mercadorias. Pode ser considerado $\frac{dp}{dx}$ como uma função de m, u e x , e então temos $\frac{d^2 p}{dmdx}$ sempre positiva. Naturalmente $\frac{d^2 p}{dmdx}$ é sempre negativa. A referência metodológica e analítica às equações 1.1, 1.2, e 1.3, foram, por *Marshall*, retiradas da obra *Theory of Exchange*, p. 151, de *Willian Stanley Jevons*.

Um dos principais problemas consistia que, em algumas circunstâncias o modelo da Utilidade Decrescente, se o volume de consumo aumentasse, a utilidade sobre este consumo deveria decrescer. Se uma mercadoria fosse escassa, o grau de utilidade na enésima mercadoria seria bastante alto e, portanto, o valor que acompanhasse sua escassez seria alto.

Mas se a mercadoria fosse abundante o valor seria baixo até a enésima mercadoria. De acordo com *Bell* (1961, p.362) este problema foi solucionado pelo paradoxo do diamante e da água proposto por *Adam Smith*, "o valor é, portanto, determinado pelas condições da procura com relação a uma determinada oferta".

Assim como *Jevons*, outros teóricos do pensamento econômico, seguindo a Escola Utilitarista pós-*Benthan* também deram suas contribuições. Segundo *Hunt* (1982, p.156–189), *Nassau Sênior* [7] preocupou-se com a Utilidade Social. Ele também achava que as pessoas não satisfaziam todas suas necessidades plenamente, pois a natureza da vontade das pessoas é tão variada quanto as diferenças de caráter. Quanto aos Socialistas Ricardianos[7] *William Thompson* e *Thomas Hodgskin*, o primeiro, percebeu que o capitalismo Bethaniano não era apenas a relação polarizada entre riqueza e pobreza, mas uma desigualdade de riqueza, sem limites, causada pela voraz paixão dos homens pelo dinheiro, e o segundo afirmou que as pessoas só compram com fruto de seu trabalho, sem propriedade ociosa, com toda a produção voltada para troca no mercado, sem restrições à oferta e à procura.

Não poderíamos continuar a seqüência da construção da Teoria da Utilidade sem desconsiderar as idéias de um teórico precursor do marginalismo, antes mesmo de *Benthan*. *Hermann Heinrich Gossen*[7], escreveu o livro intitulado *Entwicklung de Gesetze des menschlichen Verkhrs und der daraus fliessenden Regeln für menschliches Handeln* (*O desenvolvimento das Leis de Troca entre os Homens e das Regras Conseqüentes de Ação Humana*, 1854). *Gossen*, nas palavras de *Jevons*, "havia antecipado completamente no tocante aos princípios e métodos gerais de Economia".

[7] Nassau W Sênior (1790–1864), economista ingles, criador da Teoria da Abstinência; William Thompson (1785–1833), economista, filósofo e reformador inglês; Thomas Hodgskin (1787–1869), economista inglês; Hermann Heinrich Gossen (1810–1858), economista prussiano, criador da primeira teoria sobre sobre Utilidade Marginal.

As idéias do autor não se limitaram à construção de um puro e simples modelo, mas sim, ao aprofundamento da elaboração matemática e lógica da construção dos axiomas básicos da Utilidade. *Gossen* percebeu que medições matemáticas imprecisas estavam causando um grande problema para a correta Teoria Matemática da Utilidade. Ele demonstrou que pelo uso de Álgebra e da Geometria se poderia medir as relações entre as utilidades marginais e seus preços respectivos.

Walras (1936, p.360), definiu que

> [...] *Gossen et M. Jevons ont trouvé avant moi l'expression mathématique de l'utilité et formulaé la condition d'un maximum d'utilité dans l'échange, par un individu, d'une marchandise contre une autre; c'est une chose incontes'table. M. Jevons semble disposé à concéder à Gossen une certaine supériorité sur le premier point et à se l'attribuer à lui-même sur le second.* [8]

Na definição de *Bell* (1961, p.360), *Gossen* estabeleceu três leis básicas para a Economia Utilitarista. A primeira delas revela o princípio da utilidade marginal decrescente. A segunda lei determina que o indivíduo deva manter igual à Utilidade Marginal das mercadorias para que possa conseguir o máximo de satisfação. Por fim, a terceira lei define que o valor de uso só está ligado a uma mercadoria quando a oferta é menor do que a quantidade procurada.

1.3. A Psicologia como efeito de Valor (Utilidade) e o Pensamento de Menger, Bön-Bwerk, e Wieser.

O primeiro ícone da Escola Austríaca (ou Escola Psicológica), *Carl Menger*[9], acompanhou o raciocínio de *Jevons* quanto à explicação da Utilidade e da Utilidade Marginal, mas não usou Matemática para explicar os fenômenos que circunscreviam a Teoria da Utilidade. *Menger* se utilizou de exemplos numéricos (cardinais) para posicionar suas idéias.

[8] "*Gossen* e *M. Jevons* descobriram minha expressão matemática da utilidade e condição do máximo de utilidade de trocas, por um indivíduo, de uma mercadoria por outra; como sendo uma escolha indiscutível. *M. Jevons* pareceu disposto a conceder a *Gossen* certa superioridade sobre o primeiro ponto e a atribuir a si mesmo sobre o segundo."

[9] Carl Menger (1840–1921), economista austríaco, fundador da Escola Austríaca de Pensamento Econômico.

Menger relacionou utilidade marginal como atributo de equilíbrio maximizador. Isto significava uma evolução diante dos trabalhos de *Jevons* e *Bentham*. Ele afirmava que o equilíbrio era atingido se a utilidade marginal de qualquer mercadoria consumida fosse igual à utilidade marginal das mercadorias consumidas pelo indivíduo. O problema nesta dedução é que os preços considerados por *Menger* precisavam ser todos iguais entre si, o que na prática não era passível de ocorrer.

Na observação *Hunt* (1982, p. 289), *Menger* achava que se um indivíduo quisesse maximizar sua utilidade, deveria perceber que à medida que oferta e procura determinavam o preço, todo o conjunto seria explicado pela utilidade. Outra constatação feita pelo teórico austríaco é que à medida que o preço de um bem está alto em relação à utilidade marginal as pessoas podem aumentar sua utilidade ficando com o dinheiro em vez de comprar o bem. À proporção que o preço do bem cai, as pessoas aumentam suas Utilidades Marginais aumentando também o consumo do bem, isto faz com que o consumo aumente e a Utilidade Marginal decresça. Outros dois teóricos da Escola Austríaca que também contribuíram com idéias para a Teoria Utilitarista. Estes foram segundo *Bell* (1961, p. 384 - 392), *Eugen Von Böhn-Bawerk* [10] que afirmou que "atribuir ao capital o poder de produzir valor é mal entender completamente à natureza essencial do valor…", e *Friederich Von Wieser*[10], conhecido como o economista matemático que usou o *princípio da saciação independente*, decrescente das necessidades (*lei de Grossen*), pelo qual define que enquanto o consumidor for apresentado a quantidades extremas da mesma mercadoria (para consumo) tenderá a diminuir seu consumo até o total enjôo. Com os trabalhos de *Carl Menger*, *Eugen Von Böhn-Bawerk* e *Friederich Von Wieser* se têm o que se pode chamar de "*La escuela psicológica*", na incersão de *Capdevila* (nota de rodapé pg. 25). A Escola Psicológica ou Escola Austríaca buscou analisar, nas palavras de *Capdevila, P, L.* (1941, p.168), "…*al hombre como sujeto de la actividad económica bajo la influencia de los diferentes móbiles y preocuparse de investigar sus reacciones psicológicas ante los problemas económicos planteados*…"[11]

---

[10] Eugen Von Böhn–Bawerk (1851-1914) e Friederich Von Wieser (1851-1926) foram economistas austríacos, seguidores do pensamento de *Carl Menger* e seguidores da Escola Austriaca do Pensamento Econômico.

[11] "o homem como sujeito da atividade econômica em face de influência dos diferentes movimentos está preocupado em investigar suas reações psicológicas ante os problemas econômicos estabelecidos"

1.4. O Mecanicismo Clássico e uma nova Escola da Utilidade. A Matemática de Walras, Pareto, Edgeworth e Marshal.

A Escola Matemática da Utilidade nasceu na França. No mesmo período (século XIX), muitos estudiosos da Teoria do Pensamento Econômico estavam analisando o contexto da Teoria da Utilidade por outro viés: o matemático. Os primeiros expoentes a tratar do assunto foram *Augustin Cournot*[12], *Léon Walras*[12], *Vilfredo Pareto*[12], *Francis Ysidro Edgeworth*[12] e *Alfred Marshall*[12].

Seguindo-se a essa linha, *Marie Esprit Léon Walras* foi um dos principais teóricos da Escola Matemática da Economia. Já não havia ambiente institucional para as idéias do *laissez faire* de *Say. Walras* mudou este contexto usando a expressão em francês "*rareté*", para definir "utilidade marginal". A Utilidade Marginal seria observada como conseqüência da relação de equilíbrio entre preços e quantidades determinadas pelos mecanismos de oferta e demanda.

Segundo *Bell* (1961), o conceito de Utilidade Marginal foi um passo inicial no desenvolvimento do que se chamaria futuramente de Sistema Walrasiano do Equilíbrio Geral. Para haver a maximização da utilidade era necessário que cada indivíduo dispusesse de sua própria curva de utilidade em função de cada mercadoria ou serviços oferecidos pelo mercado. A maximização da satisfação (ou utilidade) estaria relacionada com a possibilidade da permuta entre mercadorias proporcionar um aumento indivividual na satisfação de cada indivíduo. Como a relação entre preços é proporcional às utilidades marginais das mercadorias permutadas, a procura dos bens fica sujeita à variação de preços destes bens e de todos os outros de consumo da Economia.

---

[12] Marie Esprit Léon Walras (1834–1910), economista e matemático francês, escreveu os livros Elements de Economie Appliqueé (1898), Ètudes de Economie Politique (1874), Augustin Cournot, economista e engenheiro francês, escreveu Recheches sur les Principles mathématiques de la théorie des richeces (1938); Vilfredo Pareto (1848–1923), economista, sociologo e engenheiro italiano, escreveu os livros: Trattato de sociologia (1916), Manuale de Política Economica (1909); Francis Ysidro Edgeworth (1845–1926); economista britânico, escreveu o livro Física Matematica (1881) além de outros artigos sobre economia e estatística; Alfred Marshall (1842–1924), economista britânico, escreveu: Princípios de Economia (1881) seu principal livro, A Teoria Pura do Comércio (1879), Moeda, Crédito e Comércio (1923).

Walras queria determinar uma teoria total (Utilidade Total como soma de todas as Utilidades Marginais), que envolvesse todos os preços e quantidades praticadas. Este modelo foi denominado de Equilíbrio Geral. *Walras* observava a Teoria da Utilidade como um processo metafísico; como um modelo sistemático de equilíbrio.

Tendo em vista que *Walras* tinha grande apreço pelas idéias de *Immanuel Kant* e que este último formulou sua *Crítica da Razão Pura* na plataforma (físico, metafísico), as idéias de equilíbrio se basearam fortemente em uma tentativa de equilibrar o objeto físico, (a Utilidade) e o metafísico, (um equilíbrio inalcançável de preços e quantidades). Na afirmação de *Hunt* (1982, p. 297), "o elemento mais importante no contexto sócio-econômico era, para *Walras*, constituído pelos *desejos subjetivos* das pessoas ou suas tabelas de utilidades marginais".

E *Hunt* (1982, p. 298), ainda aponta que,

> […] A ideologia conservadora incorporada à perspectiva da utilidade perde sua força se se admitir que os desejos são socialmente determinados ou então em um estado de permanente fluxo. Estas duas possibilidades levam à questão que se refere à existência de um padrão mais alto para a avaliação dos próprios desejos – uma questão que o utilitarismo nunca leva em consideração. Assim, não é de admirar que *Walras* tenha dito que "qualquer valor de troca, uma vez estabelecido, compartilha do caráter de um fenômeno natural, natural em suas origens, natural em suas manifestações e natural em sua essência". Contrastando com isso, a teoria do valor-trabalho ressalta o enfoque de que os preços são sociais.

Na própria concepção filosófica da teoria, nas palavras de *Léon Walras*, (1936, p.88),

> […] Messieurs, depuis Kant et as *Critique de la raison pure*, il est admis comme une chose démonstrée, dans la philosophie la plus avancée, que, si toutes nos sensations sont jusqu'à un certain point représentatives des objets sentis, toutes aussi sont jusqu'à un certain point affectives du sujet sentant. La sensation se saveur tient en partie à la nature du corps que nous la fait éprouver, et en partie à la disposition de notre organe du goût. Ainsi, les sensations d'étendue et en partie à la constitution de nos sens de la vue, du toucher, et de tous nos autres sens.[13]

[13] " Srs. Depois de Kant e sua Crítica da Razão Pura, esta reconhecida como um objeto demonstrável, dentro da filosofia mais avançada, que, se todas nossas sensações são até certo ponto representativas dos objetos concebidos, todas também são até certo ponto afetivas do sujeito que sente. As sensações como o gosto tem, em parte, à natureza dos corpos em que a nós o ato experimenta, e em parte à disposição de nossos órgãos dos sentidos. Assim, as sensações compreendidas são em parte à constituição do nosso senso de olhar, do toque, e de todos os outros sentidos."

Walras discutiu sua idéia de equilíbrio geral em função de um modelo chamado (*tâtonnement*) tatear. Pela figura 2 acima, na esplanação de *Vaggi* e *Groenewegen* [14](2003, p.221), a função Utilidade Marginal é mostrada abaixo.

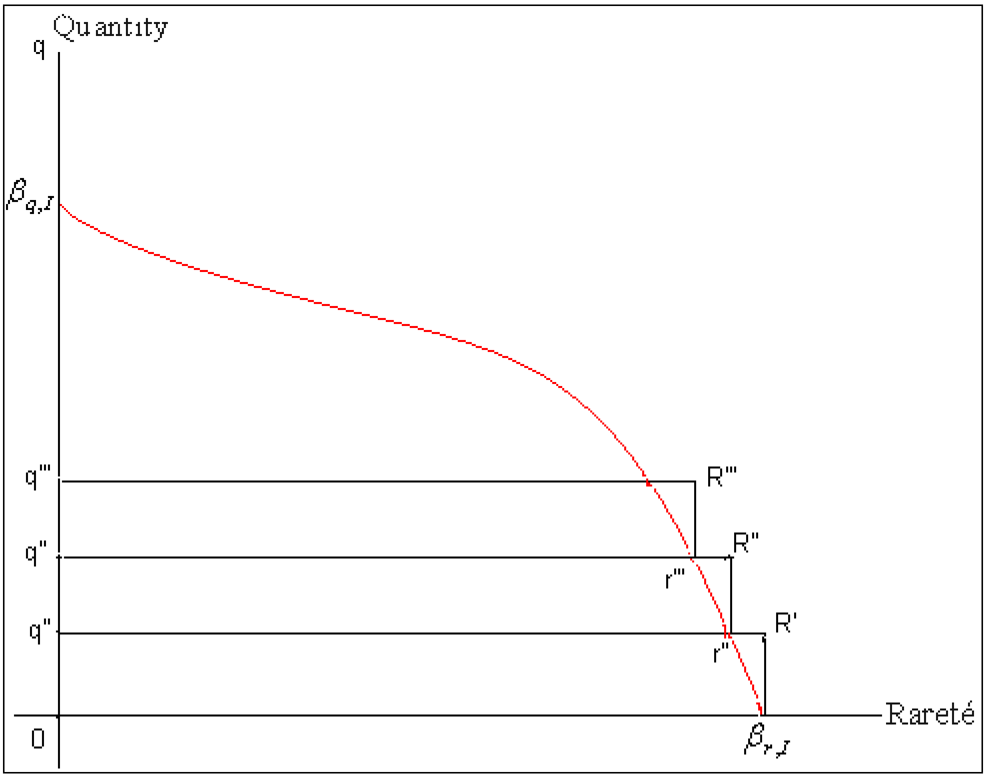


Figura 2: A Função de Utilidade Walrasiana (*rareté*)
Fonte: Vaggi, Gianni e Groenewegen, P. 2003.

[14] Baseado na obra de Vaggi, Gianni e Groenewegen, P. (2003), para demonstrarmos matematicamente a Figura 2 primeiramente estabeleceremos um sistema de duas equações.

1. $\{(\beta_{q,I} = \max(q)) \Rightarrow r = \phi'(q) \Rightarrow p = 0\} = \max(U(q))$ (1.5)
2. $\{(\beta_{r,I} = 0) \Rightarrow r = \phi'(q) \Rightarrow p = \max(p)\} = \min(U(q))$

Os pontos marcados R''', R'', R' e r''', r'', r' representam as utilidades totais e parciais (marginais) que envolvem a curva entre os pontos de quantidades q''', q'', q' de tal modo que a satisfação apoiada na construção conceitual de rareté (utilidade marginal) ocorre aos dois extremos demonstrados pelos dois sistemas de equações acima.

Continuando a interpretação da figura 2, enquanto *Walras* determinou que sua rareté fosse a expressão da utilidade marginal, a utilidade continua sendo uma medida finita, motivo pelo qual todos os indivíduos buscam estar mais satisfeitos no preço zero. A utilidade total é definida como uma função da quantidade obtida, ou seja, $u = \phi(q)$; a utilidade efetiva ou *rareté* como Utilidade Marginal é derivada da função de utilidade, isto é $r = \phi'(q)$. *Walras* demonstrou que pela troca podemos calcular a razão da utilidade de duas mercadorias (*commodities*) pela seguinte relação: $r_a r_b = p_a p_b$. O equilíbrio com a maximização da utilidade obedece a seguinte relação.

$$r_a = p_a r_b \text{ e } r_b = p_b r_a \text{ q} \tag{1.7}$$

A natureza das idéias de *Walras* foi tomada em base à Filosofia Kantiana. O equilíbrio, desenvolvido como um modelo de livre mercado permanesceria como um sistema sem solução possível para a época. Este seria o caso do modelo do Leiloeiro Walrasiano, que dotado de onisciência, concebe todos os preços e quantidades praticadas pelo mercado. Qualquer desajuste nesta equação (preço e quantidade) seria rapidamente corrigido.

Em linha distinta a *Walras*, *Vilfredo Pareto* buscou suas referências teóricas por meio das Ciências Políticas. *Pareto* também se utilizou da Matemática para seus modelos econômicos. Como bom observador, e cientista social, ele não acreditava que as pessoas pudessem apenas viver para maximizar o prazer e minimizar a dor, como propunha os primeiros teóricos da Teoria Utilitarista (*Bentham*, *Jevons* e outros). Como exemplo dos diversos termos para o enfoque, no quarto capítulo do seu *Manuel D'economie Politique*, *Pareto* define o termo "*grau final de utilidade*", o que para *Walras* era definido pelo seu "*rareza*", já para os alemães "*Greenznutzen*", e para os ingleses, "final *degree of utility*". Em seu livro, *Manuale de Política Economica* (1909), sobre Economia Política, *Pareto* aprofunda seus modelos com um grande ferramental matemático para explicar a Teoria da Escolha através de curvas de indiferença.

Pareto descreve suas curvas de indiferença, no apêndice da obra (Manual de Economia Política, p. 403–514), pela seguinte metodologia:

Suponha duas quantidades x e y de bens econômicos X e Y possuídos por um indivíduo. Suponha que não haja a necessidade de ordem de como estes bens sejam consumidos, de tal forma que $xy \equiv yx$.

Pareto quer provar que qualquer variação no nível de utilidade em uma combinação de bens, que possa mudar o grau da curva de utilidade (ou seja, mudança de nível da curva), ou o deslocamento na própria curva (pela combinação de cestas de consumo), leva ao equilíbrio do modelo proposto pelo autor, por isso das curvas de indiferença ser de diferentes valores de I (indiferença).

Na próxima página apresentamos uma referência do modelo de curvas de indiferença baseados na obra do autor.

Pareto antes de definir o seu ótimo delimitou as bases da Teoria da Utilidade Marginal Decrescente[15]. Primeiro afirmou que a utilidade, como medida de quantidade para o indivíduo, é sempre positiva. A segunda característica é quanto à dependência da utilidade (como quantidade) por ela própria, o que ele chamou de utilidade elementar, que decresce quando aumenta a quantidade consumida.

Na versão em Espanhol da obra, há uma referência sobre a escolha do consumidor. Nas palavras de *Pareto*,

---

[15] Baseado na obra *Manuale de Política Economica* (1909); podemos determinar aquilo que *Vilfredo Pareto* estava querendo apresentar. Assim temos: escolhendo uma cesta qualquer (x, y) podemos buscar todas as outras combinações de cestas. Aquelas combinações que para o indivíduo são equivalentes são escolhidas desde que sejam diferentes. Interpolando, podemos obter uma equação: Primeiramente, uma função alocativa de duas cestas quaisquer, mantidas em equilíbrio.

$$f_1(x, y) = 0 \tag{1.8}$$

Tal que se dão a x valores $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ (1.9)

Obtém-se para y os valores de

$$y_1, y_2, y_3, \ldots \qquad 1.10)$$

A equação 1.8 pertence a uma curva de indiferença

Partindo de outra combinação $x_1^{'}, y_1^{'}$, que não esteja compreendida entre a combinação anterior, podemos então encontrar outra curva de indiferença, sendo que,

$$x_1^0, y_1^0 = I_0;\ x_1^1, y_1^1 = I_1;\ x_1^2, y_1^2 = I_2;\ x_1^{n-1}, y_1^{n-1} = I_{n-1};\ \cdots; x_1^n, y_1^n = I_n \tag{1.11}$$

Assim, aos índices determinados $(I_0; I_1; I_2)$, correspondem às funções $(f_1; f_2; f_3)$.

Pareto vai além, na metodologia das curvas de indiferença, e parte da definição de f como reprodução das funções $(f_1; f_2; f_3)$, para diferentes valores de I. A equação

$$f(x, y, I) = 0\,, \tag{1.12}$$

Já atribuindo diferentes valores para I, todas as possíveis curvas de indiferença.

A equação 1.8 é a equação de uma superfície, na projeção do plano xy das curvas (o autor define como linhas) de nível que serão então determinadas como curvas de indiferença. *Pareto* define sua função como “uma superfície em parte arbitrária”. Posto que a suposição de I é também arbitrária, qualquer das superfícies tem por projeção de suas linhas de nível as curvas de indiferença dadas pelas equações abaixo.

$$f_1 = 0\,; f_2 = 0 \tag{1.13}$$

e aquelas curvas intermediárias à estas funções.

Por fim, *Pareto* constrói uma equação geral para simplificar a equação 1.8. Esta equação é definida pelo modelo.

$$\mathrm{I} = \Psi(x, y) \tag{1.14}$$

I, é definido como um valor constante, e, portanto, como uma linha de indiferença. Para um conjunto infinito de bens, o economista define.

$$\mathrm{I} = \Psi(x, y, z, \ldots) \tag{1.15}$$

Quando ocorrer a possibilidade se ter um sistema do tipo das equações 1.11 ou 1.12, podemos então escrever uma equação pela forma.

$\mathrm{I} = F(\Psi)$, aqui F é uma função arbitrária. (1.16)

> [...] *El hombre puede saber si el placer que le procura cierta combinación I de mercadería es igual al placer que saca de otra combinación II, o si es mayor o menor" e "Además, el hombre puede saber, poco más o menos, si pasando de la combinación I a la combinación II siente mayor placer que pasando de la combinación II a otra combinación III. Si ese juicio pudiera ser de una precisión suficiente, podríamos, en el límite, saber si, pasando de I a II, este hombre siente un placer igual al que siente pasando de II a III; y en consecuencia pasando de I a III sentiría un placer doble del que siente pasando de I a II. Esto bastaría para permitirnos considerar el placer o la ophelimite (*definido por *Pareto*, edição em Espanhol, como *grado final de utilidad) como una cantidad.*[16]

Pelo próprio *Pareto* (1945, p. 201) "*En fin, es un hecho muy general que cuanto más tenemos de una cosa, menos preciosa nos es cada una de sus unidades. Hay excepciones*"[17]. As exceções a que *Pareto* se referiu eram as relações de dependência e independência dos fenômenos individuais, o que se define como modelo de trajetória dependente (*path dependence*, trajetória dependente do caminho percorrido), ou de trajetória independente (*path independence*, trajetória independente do caminho percorrido).

As expressões, "dependência" e "independência" de trajetória[18] são conseqüências de fatores ergódicos: que significa a possilidade das expectativas dos agentes poderem ser realizáveis, com mínimos desequilíbrios.

Ele formulou dois exemplos: o primeiro foi um exemplo de fenômeno de independência de trajetória, no qual dizia que os campesinos desejavam aumentar suas propriedades independentemente da produção, até certo limite; após, então, a utilidade da riqueza declinaria.

---

[16] "O homem pode saber se o prazer que procura em certa combinação I de mercadorias é igual ao prazer que obtém de outra combinação II, ou se é maior ou menor e "ademais, o homem pode saber, pouco mais ou menos, se passando da combinação I para a combinação II sente maior prazer do que passando da combinação II para outra combinação III". Se juízo pode ser de uma precisão suficiente poderíamos, no limite, saber se, passando de I para II, este homem sente um prazer igual ao que sente passando de I para II. Isto bastaria para se permitir considerar o prazer da *ophemelite* como uma quantidade".

[17] "enfim, é uma causa muito geral que quanto mais temos uma coisa, menos preciosa nos é cada uma de suas unidades. Há exceções".

[18] Veja o artigo de *Allain Herscovici*, Revista Estudos Econômicos, São Paulo, sob o título a "Irreversibilidade, Incerteza e Teoria Econômica. Reflexões a Respeito do Indeterminismo Metodológico e de suas Aplicações na Ciência Econômica" O autor aponta a dicotomia entre o modelo racional "ou modelo *mainstream*"e alguns modelos heterodoxos de compreensão da instabilidade nas decisões. Aqui cabe ressaltar a diferença entre os modelos de path dependence versus path independence.

O segundo já apresentaria um exemplo de fenômeno dependente da trajetória, como o das camisas que quando perdem um botão, o botão passa a ter mais utilidade do que o conjunto (camisa mais botões remanescentes). E por fim, nas palavras de *Pareto* (1945, p. 201), "*No se venden las camisas con un botón de menos; el caso abstracto de que acabamos de hablar no se encuentra en la práctica*."[19]

Pareto seguiu *Edgeworth*, no que se refere aos modelos de Linhas de Indiferença, figuras 3 e 4, hoje convencionados de Curvas de Indiferença, sem conotação com a Utilidade, pelo ponto de vista da visão utilitarista. Graças a este instrumento matemático, haveria a possibilidade de se calcular as combinações de quantidades de bens (ou também determinado por trocas entre bens) para o indivíduo.

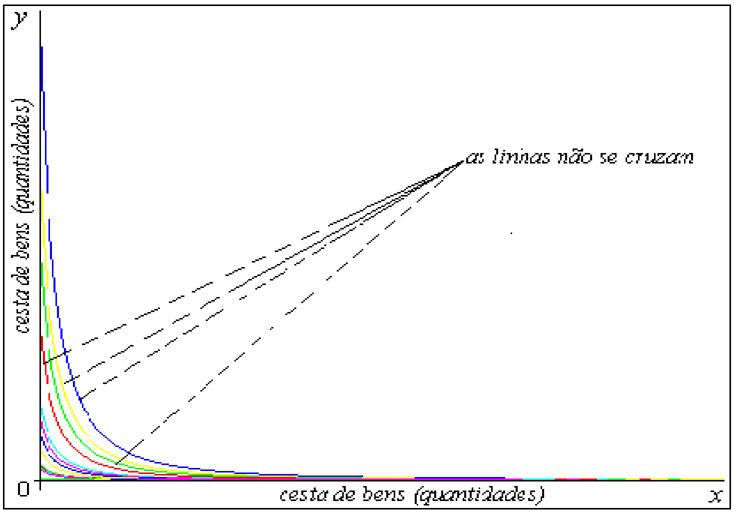


Figura 3: Espaço de Curvas de Indiferença
Fonte: o autor

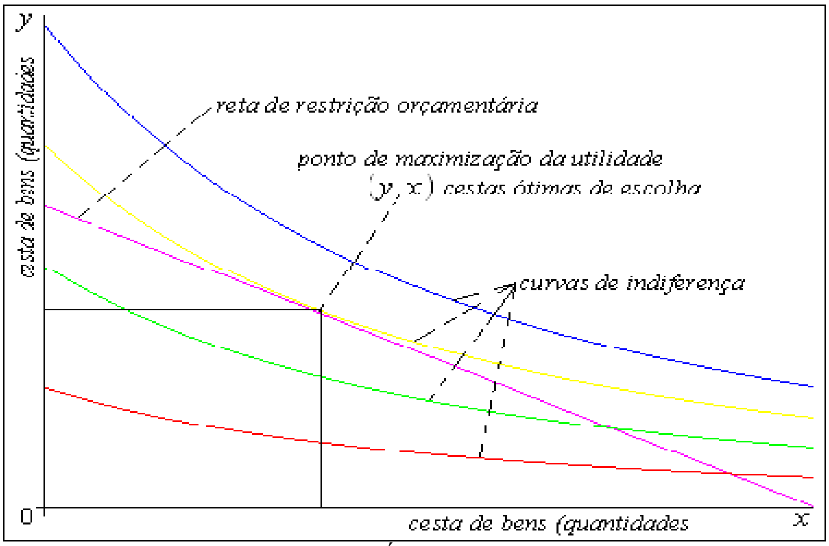


Figura 4: Superfície de Orçamento Ótimo em Curvas de Indiferença
Fonte: o autor

Na inferência de *Pareto,* (1945, p. 124) "*sen hacer intervenir ninguna entidad metafísica*". Este argumento está claramente em oposição ao ideal metafísico dos modelos de equilíbrio total de *Walras*.

Edgeworth condiz muito mais com a Estatística "e seus números índices" do que com o modelo utilitarista. Como analista atento aos modelos e métodos matemáticos em Economia, *Edgeworth* contribuiu com a Economia-Matemática das Curvas de Indiferença, Lei de Rendimentos Decrescentes, Curva de Contrato, Equilíbrio Geral e outros problemas de relevância econômica.

Francis Ysidro Edgeworth[23] na observação de *Shumpeter* (1964, p. 103),

> [...] *Em primeiro lugar, mencionarei seu utilitarismo (New and Old Methods of Ethics, 1877) que, desde o início, se afirmou com tanta força e que parece tão incongruente em uma mente tão cultivada, fez muito para manter viva, desnecessariamente, a aliança entre a economia e a filosofia de Bentham, aliança sobre a qual tenho feitos comentários repetidos.*

Edgeworth, em referência a *Gossen*, compara sua Teoria da Utilidade aos modelos da Física Clássica Newtoniana, mais precisamente ao movimento gravitacional Newtoniano. Na observação atenta de *Edgeworth* (*Mathematical Psychics*, 1881, p. 280) "*When Gossen, the predecessor of Jevons as exponent of the law of final utility, compares that principle to the law of gravitation, and the character of or science to that of astronomy, he betrays a parental partiality*."[20]

Alfred Marshall em seu "*Principles of Economics*" continuou aperfeiçoando o modelo utilitarista, mas completamente contrário ao receituário Benthaniano de que o prazer e a dor eram matematizáveis. Nas palavras de *Marshall* (1946, p. 30).

> [...] É de se observar, entretanto, que alguns discípulos de *Bentham* (embora não talvez ele próprio), fizeram esse largo uso de "prazer e dor" servir de ponte para passar do Hedonismo individualístico a um credo ético completo, sem reconhecer a necessidade de introduzir uma premissa maior independente; pareceria absoluta a necessidade de tal premissa, muito embora diferissem de opiniões sobre a sua forma.

---

[19] "não se vendem às camisas com um botão a menos; o caso abstrato que acabamos de apresentar não se encontra na pratica".

[20] Veja de *Francis Edgeworth*, "*The Edonical Calculus*" sobre a sutil construção entre prazer e utilidade, e também "The Mathematical Theory of Political Economy: Review of *Léon Walras*, *Éléments d'économie politique pure*", que aborda a uma analise crítica das obras de *Léon Walras*.

"quando *Gossen*, o predecessor de *Jevons* como expoente da lei da utilidade final, comparar que o princípio da lei da gravitação, e o caráter de quanto não ciência para aquilo que é a astronomia, ele revelou uma parental parcialidade".

Que também afirma; *Marshall* (1946, p. 38).

> […] Em tudo isso, consideram o homem tal como ele é: não um homem abstrato ou "econômico", mas um homem de carne e sangue, fortemente influenciado por motivos egoístas em sua vida profissional, mas sem estar ao abrigo da vaidade e da displicência nem ser insensível ao prazer de sacrificar-se pela sua família, pelos vizinhos ou pelo seu País, nem ser incapaz de amar, por ideal, uma vida virtuosa.

Marshall, segundo *Schumpeter*[21] (1944), criticou a aliança utilitarista de *Bentham* com o hedonismo e vinculou a *Jevons,* a idéia de matematizar o prazer e a dor como "um cálculo hedônico". *Marshall* estava mais interessado nos modelos de equilíbrio parcial da Economia, diferenciando-os do modelo de Equilíbrio Geral construído por *Walras*.

Marshall usou o mesmo modelo de utilidade marginal e demonstrou que ela permanece constante para o indivíduo, porque as pessoas não mudam gostos, atitudes e caráter em curtos espaços de tempo. Outro estudo foi em função da utilidade marginal do dinheiro que também era fixa para o indivíduo. Desta forma, foi estabelecido um elo entre os mecanismos de utilidade e preço. Segundo *Ribeiro*, (2007), *Marshall* definiu primeiro que o agente (o primeiro teorema do valor) deve escolher a alternativa com o maior benefício líquido, ou seja, com maior benefício e menor custo. Assim, a escolha ótima seria aquela que em um conjunto de possibilidades de escolha trouxesse os melhores benefícios com poucos custos (como os custos de transação, os custos de cardápio (*menu*), e os custos de sola de sapato, vistos principalmente em Macroeconomia). O segundo teorema do valor leva a condicionar a escolha racional (beneficio marginal) ao custo marginal. A cada unidade escolhida devemos perceber se pelo menos compensa o custo unitário para a possuirmos. Por fim, devemos consumir uma quantidade de cada um dos bens disponíveis para que o benefício marginal da última unidade do recurso gasto em cada um deles seja igual em todos eles. Isto significa que, dependendo do nível de recursos existentes, devemos escolher a melhor alocação de preferências de modo a podermos maximizar a satisfação de aproveitar o último elemento de nossa escolha como se fosse a soma de todas as satisfações individuais de cada um dos elementos consumidos. O principal elo buscado pelo teórico era a relação entre a função utilidade e a teoria da procura individual.

---

[21] Josef Shumpetter (1883-1950), economista Tcheco. Suas principais obras foram: Teoria do Ciclo Econômico (1914); Ciclos Econômicos (1939) e História da Análise Econômica (1954).

Ele, diferentemente de *Walras*, mesmo explicando as condições de Equilíbrio Geral, acabou demonstrando satisfatoriamente muitas relações de Equilíbrio Parcial, utilizando-se de um exemplo de mercado de dois bens, sem considerar a relação destes com outros mercados e outras mercadorias.

Nas palavras de *Marshall* (1946, p.95), a utilidade,

> [...] *é tida como correspondente a desejo ou necessidade. Já foi observado que os desejos não podem ser medidos diretamente, mas só indiretamente por intermédio do fenômeno aparente a que dá nascimento: e que nos casos que interessam principalmente à Economia, a medida se encontra no preço que uma pessoa de dispõe a pagar pelo cumprimento ou satisfação do seu desejo. Ela pode ter desejos e aspirações que conscientemente não provocam nenhuma satisfação; mas no momento nos preocupamos principalmente com os que realizam este fim, e pressupomos que a satisfação resultante corresponde em geral perfeitamente bem à que foi prevista quando a compra foi feita*."

Deste modo, os Economistas-Matemáticos assumiram o papel de conduzir a condição de preferência e utilidade, como atributo de um tipo de racionalidade axiomática organizada na condição lógica de decisão. Diferentemente dos primeiros pensadores em Economia, já não havia possibilidade de se manter o mesmo campo de Pensamento Econômico da escola Clássica.

1.5 A Contribuição da Matemática para o desenvolvimento da Teoria da Utilidade.

Em parte da História do Pensamento Econômico (séculos dezessete e dezoito), Matemática e Economia construiriam um forte elo estrutural. A razão, ou racionalidade, transformou o pensamento social em estrutura analítica. Para isso, a Teoria dos Conjuntos de *Frege*, *Cantor*, *Zermello*[22] necessária para a congregação de um sistema ordenado (Utilidade Ordinal) no desenvolvimento da axiomática.

Os primeiros modelos de loterias, pesquisados na íntegra por muitos matemáticos como *Daniel Bernoulli*[22], foram trazidos para a Teoria da Utilidade Esperada e direcionados aos modelos de preferência do consumidor, apontando então para o enfoque da Teoria da Escolha e Preferência.

---

[22] Georg Ferdinand Frege, matemático, lógico e filósofo alemão, Phillipp Ludwig Cantor (1865–1918), matemático sueco, elaboraborador da moderna Teoria dos Conjuntos; Daniel Bernoulli (1700–1782), matemático e físico holandês.

Como na observação atenta de *Cusinato R* (2003, p.28).

> […] segundo a interpretação moderna a utilidade não é a causa das preferências, mas uma descrição delas. Os indivíduos não escolhem baseando-se em uma função utilidade; eles simplesmente escolhem o que preferem. Sejam quais forem os processos mentais que os indivíduos utilizem para efetuar suas escolhas, utilizar é apenas uma indexação matemática para descrever o que eles preferem. Não é o individuo que deve se comportar segundo sua função utilidade, mas é a função de utilidade que deve emular o comportamento de escolhas do indivíduo, Prazer, felicidade, bem-estar e satisfação tornaram-se irrelevantes para a abordagem moderna da teoria da utilidade.

Em determinado momento da História do Pensamento Econômico (já no século dezenove) a utilidade, como medida de preferência, precisou definir a forma (Cardinal ou Ordinal). Uma vez que os indivíduos poderiam manifestar satisfação fazendo escolhas, e tendo como reflexo a possibilidade de medir-se o ato por axiomas determinadores da manifestação do ato racional. O processo de escolha era caracterizado por um sistema determinístico, em utilidade marginal. À medida que se necessitava de uma maior gama interpretações para definição de risco e incerteza, os modelos de utilidade marginal não traziam soluções satisfatórias.

Assim como os teóricos da utilidade, os matemáticos de 1700 também buscaram na Filosofia (e também na religião) o sustento para suas teorias e aflições. *Pascal, Fermat, Descartes*[23] e muitos outros matemáticos daquela época, buscavam respostas a perguntas que inquietavam suas mentes. À medida que estas perguntas eram respondidas, muitas descobertas no ramo da Probabilidade, da Teoria dos Conjuntos, na Geometria Analítica e Espacial entre outros ramos da Matemática, acabaram sendo transportadas para as Ciências Econômicas gerando novos ramos de pesquisa e conhecimento.

Blaise Pascal em conjunto com *Pierre de Fermat* lançaram mão da Teoria das Probabilidades. Alguns matemáticos italianos tentaram explicar as estratégias de jogos de azar e foi desenvolvido por *Giordano Cardano*[23] um manual chamado "manual do jogador".

[23] René Descartes (1596 – 1650), filósofo, fisico e matemático sueco, criador da Geometria Analítica, *Pierre de Fermat*, matemático e cientista frances, *Blaise Pascal*, físico, matemático e filósofo francês; Giordano Cardano (1501 – 1576), matemático e filósofo italiano.

O mais importante estudo inicial em Ciências de Probabilidade está representado no livro intitulado "*o problema dos pontos*". *Lucca Pacioli*[24] em sua "*Suma* (1494)" foi pioneiro no trabalho com probabilidade, mas um avanço mais efetivo foi feito por *Chevalier de Meré*[24] que, apesar de hábil jogador, não era bom observador dos fenômenos de probabilidade. Foi *Blaise Pascal* quem resolveu grande parte dos problemas propostos por *Chevalier*

Pierre de Fermat também contribuiu em conjunto com *Pascal* para a análise do problema dos pontos. *Fermat* dedicou-se, contudo, aos problemas da Aritmética e sua contribuição no campo da probabilidade. Deve-se aos trabalhos conjuntos com *Pascal*. No problema dos pontos (o que fundaria a ciência da probabilidade) pede-se para se determinar as apostas de um jogo de azar entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecido o marcador no momento da interrupção e o número de pontos necessários para ganhar o jogo. *Pascal* resolveu o jogo utilizando-se do triângulo aritmético em um número de combinações simples. Os dois matemáticos também expandiram este problema para outras bases com novas situações (como a de jogadores com habilidades distintas). Pela observação *E. T. Bell* (1949, p. 144)

> […] la obra de Pascal y Fermat em 1645 sobre probabilidades elevó al análisis combinatorio del dominio de las distracciones matemáticas, al de la matemática completamente, práctica; y sólo transcurrieron cincuenta años entre la creación de la teoría matemática de probabilidades y el cálculo de las tablas de mortalidad valiéndose de la misma.[25]

Depois *Christiaan Huygens*[26] escreveria o primeiro Tratado de Probabilidade tomando por base as correspondências entre *Pascal* e *Fermat*. Em 1713 *Jakob Bernoulli* escreveria o primeiro clássico da ciência das probabilidades intitulado *Ars Conjectandi.* Outros matemáticos como *Abraham de Moivre*[26], *Daniel Bernoulli*, *Joseph Louis Lagrange*, *Pierre–Simon Laplace*, dentre outros, contribuiriam significativamente para o progresso e avanço das Teorias da Probabilidade.

---

[24] Lucca Bartolomeo de Pacioli (1445–1517), matemático itailiano; Antonie Gomboud – "Chevalier de Meré" (1607–1684), escritor francês e jogador, contribuinte de alguns dos problemas que envolveram probabilidades de jogos; Blaise Pascal (1623-1662), físico, matemático e filósofo francês.

[25] "A obra de *Pascal* e *Fermat* em 1645 sobre probabilidades elevou a análise combinatória do domínio das distrações matemáticas, ao da análise matemática completamente, prática, e assim transcorreram 50 anos entre a criação da teoria matemática de probabilidade e o cálculo das tábuas de mortalidade valendo–se dela mesma".

[26] Christiaan Huygens (1629–1695), matemático, astrônomo e físico neerlandês, principal obra: *LIBELLUS DE RATIOCINIIS IN LUDO ALAE* (1714), Jakob Bernoulli, matemático suíço; Abraham de Moivre (1667–1754), matemático francês, Joseph–Louis Lagrange (1736–1813), matemático francês, Piere–Simon Laplace (1667–1754), matemático, astrônomo e físico francês.

A contribuição de *Christiaan Huygens* para a Probabilidade, se apresenta na forma do primeiro tratado sobre o conceito de "esperança matemática". *Huygens* baseando-se nas cartas entre *Fermat* e *Pascal*, provou que se a probabilidade de uma pessoa ganhar uma quantia B, sendo p a probabilidade de ganhar uma soma a e q é a probabilidade de ganhar uma soma B temos então o seu ganho esperado na forma de $B = pa + qb$.

Muito semelhante ao que Pascal acreditava, *Huygens* demonstrou através da obra "*Pensamentos*" que a felicidade levava ao infinito. Então, mesmo que a probabilidade de uma vida religiosa proporcionar felicidade fosse muito pequena, ainda assim, se utilizando do mecanismo da esperança matemática, valia a pena fazê-lo (ser religioso).

Segundo A família *Bernoulli* foi para a Matemática, o que a família *Bach* foi para a Música. *Daniel Bernoulli* era filho de *Jakob Bernoulli* e irmão de *Johann Bernoulli* e *Nicolaus Bernoulli*. Foi de *Nicolaus* o problema chamado *Paradoxo de São Petersburgo*. O enunciado é "*se A recebe uma moeda quando ocorre cara no primeiro lançamento de uma moeda, duas moedas quando ocorre cara no segundo lançamento, quatro moedas quando ocorre cara pela primeira vez no terceiro lançamento e assim por diante, qual é a esperança matemática de A*?" (Eves, H, 1990, p. 464). A resposta é definida por uma esperança infinita, o que é paradoxal. Para representarmos a questão em forma de modelo matemático buscamos em *Castro* e *Faro* (2007), a descrição, comforme o modelo abaixo.

Um jogo propõe a seguinte aposta: joga–se a moeda até que se obtenha face cara, em que a chance de se obter cara é igual a $p \in (0,1)$ em cada lançamento. Se a face cair no j-ésimo lançamento o jogo paga 2^j unidades monetárias, (deve-se perceber que a base $\{2\}$ se refere a uma moeda de duas faces, como dado na equação de *Bernoulli*, abaixo). Logo o valor esperado do jogo, $VEJ_{(p)}$ é igual a:

$$VEJ_{(p)} = \sum_{j=1}^{\infty} 2^j p(1-p)^{j-1} \text{, se a moeda for honesta, } p = 1/2\text{, } VEJ_{(1/2)} = \infty \qquad (1.17)$$

O que pode ser deduzido deste resultado é que não há um comportamento no mundo real que justifique este modelo e que, dependendo da base (2^j para $v(2^j) = j\log(2)$), pode-se calcular a esperança matemática. Podemos então estabelecer um limite superior, o que solucionaria o paradoxo. Esta mudança é importante para a resolução do problema.

Daniel Bernoulli foi o primeiro matemático a demonstrar o modelo de expectativa. Primeiramente ele afirma:

> [...] if the utility of each possible profit expectation is multiplied by the number of ways in which it can occur, and we then divide the sum of these products by the total number of possible cases, a mean utility [moral expectation] will be obtained, and the profit which corresponds to this utility will equal the value of the risk in question. (Bernoulli D, 1954, p.24). [27]

Bernoulli afirmaria neste parágrafo que a esperança matemática da utilidade, com expectativas, era função dos possíveis casos e o risco correspondente. Note-se que a tênue junção entre Filosofia e Economia se traduz na possibilidade de se supor a probabilidade dos eventos e poder medir então o peso do valor e do que discutiremos a seguir, a incerteza.

1.6. Considerações Finais do Capítulo.

Até a Teoria do Valor (Trabalho e Utilidade) a Economia buscou responder às dúvidas sobre o ato da escolha. Primeiro com a interpretação marginal da preferência (com *Smith* não aceitando o termo Utilidade). Após, com o ingresso da Matemática de *Jevons* e *Benthan*, da Lógica, do hedonismo, e, por que não, de um pouco de Psicologia Social também.

A justificativa da maximização como critério de recompensa pelo custo da busca do prazer construiu um ato de escolha objetivista e normativo na ordenação das preferências e lógico em suas intenções. O indivído é apresentado sob a ótica de um homem–máquina, homem–econômico, sob a égide da construção de paradigmas com o objetivo de esplicar um comportamento inconstante. A "perda da inocência", após *Smith* transmuta-se um aspecto objetivo da busca pelo contexto social teorizável, reflexo de uma sociedade em ascendente desenvolvimento industrial e com seus conflitos.

[27] "se a utilidade de cada possível expectativa de ganho é multiplicada pelo número de caminhos em que ela pode ocorrer, e então dividimos a soma destes produtos pelo número total de casos possíveis, um significado de utilidade [expectativa moral] será obtido, e a expectativa que corresponde a esta utilidade desejada igual ao valor do risco em questão".

A partir de então, a divisão entre humanismo e cientificismo passou a ser mais acentuada, como nas obras de *Walras* e *Edgeworth*. Walras como profeta do "*equilibrium*" metafísico, condicionado ao abstracionismo matemático, e *Edgeworth*, como um dos portavozes da Matemática como reflexo do humano. Neste momento, a contrução de um conceito de felicidade já se incorpora ao movimento da matemática como elemento condicionante de uma maximização, ou seja, como se a felicidade humana fosse maximizável. Deste modo a utilidade, e assim por dizer, a escolha e a preferência, constroem um efeito diretamente relacionado com felicidade, só que a mensurando. Conjuntamente, por outro lado, a lógica define o grau de escolha do indivíduo de forma a haver um "um grau de felicidade de maximização da utilidade".

Seguidamente a *Walras* e *Edgeworth*, mas já por um contexto mais distinto, *Marshall*, *Pareto* e *Menger* como críticos. O primeiro e o segundo, da Escola do Equilíbrio Geral, e o terceiro da Escola da Utilidade pelo viés da maximização da felicidade.

Por fim, ainda falta discutirmos o papel dos matemáticos no processo de construção da utilidade e seus conceitos. O ingresso destes matemáticos, como *Frege*, *Cantor*, *Zermello* (teoria dos conjuntos), *Pascal, Fermat, Descartes* (probabilidade e geometria); *Moivre*, *Bernoulli*, *Lagrange*, *Laplace*, *Pacioli*, *Huygens*, *Cardano*, (teoria da probabilidade e matemática) influenciaram com o estudo sistemático de teorias de risco em situações de estolha. Estes estudos acabariam sendo absorvidos pela Teoria Econômica da sua época nos modelos que buscavam uma maior e sistemática resposta para o risco associado ao bem-estar dos indivíduos. Aqui, cabe ressaltar que o sentido de bem-estar está diretamente relacionado ao objetivo dos economistas neoclássicos: a felicidade. A felicidade matematizável, e nem por isto ingênua, poderia em suas nuances ser apresentada como uma função de utilidade, que por sua vez também poderia ser construída em uma base de escolhas. Estas escolhas poderiam envolver certo grau de risco assumido ou não pelos indivíduos envolvidos.

Para estudarmos a lógica que envolve os conceitos de escolha, utilidade e preferência necessitam avançar no aspecto matemático do contexto. Assim o segundo capítulo será um retrospecto de todos os conceitos já consagrados da literatura de Economia-Matemática. Ela servirá de base para comparar teorias e responder a velhos dilemas que os primeiros teoristas clássicos não puderam resolver.

2. UTILIDADE COMO UM SISTEMA MATEMÁTICO

Para uma melhor compreensão deste capítulo, este deve ser visto como um capítulo técnico. Isto deve ser feito para uma posterior compreensão sobre os métodos e utilização da Matemática da Teoria da Utilidade. Desta forma, os modelos apresentados mantêm, no aspecto da escolha e da preferência, um aspecto de pura conotação racional, isto sem qualquer vinculação às idéias de *Simon* e a Racionalidade Limitada. Assim, apresentaremos a estrutura teórica do modelo de escolha vinculada à Matemática da Teoria dos Conjuntos, com uma Topologia como forma ou medida do conjunto mantendo inalteráveis os conceitos e axiomas da racionalidade objetiva (normativa) clássica. Nesta parte seguiremos o receituário dos modelos neoclássicos do *mainstream* naquilo que se refere à forma do conceito de preferência e utilidade.

Na seção 2.1, será apresentada construção matemática elementar por utilização da teoria dos conjuntos aplicada a modelos básicos de medida e geometria (Bola Aberta). Apresentaremos o conceito topológico de Bola Aberta como sistema integrado em um espaço definido. Por fim, definiremos invocando a Teoria dos Conjuntos, a relação do processo de escolha com os axiomas de *Zermello* analisando sua relação com os modelos de utilidade e preferência tradicionais.

Na seção 2.2 serão apresentados os axiomas da transitividade, completeza e reflexibilidade, que definem a racionalidade clássica, além de outros axiomas que garantem suporte estrutural ao conceito de utilidade e suas variantes (como utilidade esperada e utilidade marginal). Alguns axiomas como, aditividade, independência, escolha, serão analisados detalhadamente. A representação destes axiomas por exemplos será feita por via de teoremas matemáticos. Apresentaremos também outras características matemáticas que definem preferência tais como: monotonocidade forte e fraca, a convexidade, e a propriedade arquimediana de continuidade. Em anexo compararemos à relação existente entre o axioma da preferência revelada e as propriedades alfa e beta de *Sen*.

Na seção 2.3 serão apresentados aqueles conceitos e axiomas diretamente envolvidos com a definição de preferência, tais como: monotonicidade forte e fraca, o axioma da aditividade, topologias forte e fraca, e não saciedade local.

2.1. A Definição de Utilidade, Preferência e Axiomática.

A união entre a Teoria Econômica e as Ciências Exatas foi responsável por um longo e produtivo desenvolvimento na construção de axiomas, modelos e hipóteses em Economia. O desenvolvimento da Teoria Econômica fez com que muitos problemas até antes intratáveis (como o paradoxo da água e do diamante), tratado no primeiro capítulo, apresentasse uma solução simples e aplicável.

Tomando como base que a teoria define um agente racional como um ser dotado de informação perfeita, e que visa sempre o domínio da maximização da utilidade, podemos entender como a Teoria Econômica desenvolveu vários modelos de escolha tentando entender determinados processos realizados por indivíduos.

Pelo conceito de racionalismo (notadamente o termo racional em História do Pensamento Econômico foi apresentado através das teorias de *Benthan* e *Jevons*, incluindo também a Escola Matemática de *Pareto* e *Walras*) podemos definir ex ante (objetiva ou normativamente) o conceito de racionalidade. Supondo que os agentes sejam parte de um sistema puramente racional, na qual as preferências (racionais) expliquem a função utilidade, no qual o indivíduo obtenha satisfação no momento em que manifestar sua escolha através de um conjunto de preferências, podemos por esta lógica escrever uma expressão do que classicamente se denomina satisfação ou maximização da utilidade.

A partir da afirmação anterior precisamos desenvolver algumas idéias básicas da estrutura formal, isto é, uma definição de conjunto. A relação dos conjuntos na conceituação de utilidade, com seus axiomas básicos, determina como a preferência se configura como indicador de utilidade.

À medida que o termo "conjunto de elementos" toma forma na teoria, torna-se necessário avançar em Matemática. Desta forma devemos construir um conceito que agrupe conceitos dos conjuntos e, principalmente, defina um sistema de medidas. Este sistema fornece suporte para a compreensão do processo de escolha racional.

Posteriormente, para definirmos uma medida de espaço precisamos abstrair para um sistema geométrico de duas ou mais dimensões, de modo que possa existir um conjunto que circunscrevam alguns destes elementos em um sistema: seja ele fechado ou aberto.

A configuração de um sistema, fechado ou aberto, em relação a um conjunto definível é uma convenção matemática. Neste ponto, se faz necessário observar a existência de um conjunto de elementos, que esteja contido ou não, neste espaço. Podemos considerar como espaço, um ponto, plano geométrico, uma esfera ou geodésica perfeita, ou outro sistema não geométrico.

2.2. Axiomática da teoria dos conjuntos

Em Economia Clássica, os termos racionalidade, razão, ou "ser racional" (definido por *Jevons*, *Benthan* e *Mill*), diferentemente do que entende *Herbert Simon* (em seu termo "racionalidade limitada") é a conjunção de três axiomas: transitividade, reflexibilidade e completeza[28].

É necessário cuidado na análise destes axiomas e do conceito de preferência. Pelo fato de os axiomas representarem sentenças que definem o procedimento de uma hipótese, como todo axioma, não é passível de prova. Eles são objetos imutáveis da Matemática dos Conjuntos.

Deste modo, todo cuidado é pouco quando se delimita uma fronteira entre preferência e axiomática. Principalmente quando citarmos os mesmos axiomas da estrutura de ordem como tipos básicos de preferências.

Em Teoria dos Conjuntos aplicada a Economia, definimos o intervalo entre o antes e o depois de *E. Zermello.* Ele foi fundamental para o desenvolvimento de um campo especifico da Teoria da Utilidade Esperada. Uma de suas principais descobertas foi o axioma da escolha que é, até hoje, uma das principais ferramentas lógicas utilizada para se entender o ordenamento de preferências.

Nas consepções de *Marques de Sá* (2004) e *F. Miraglia* (1992), o termo axioma é uma afirmação que guarda relação de propósito ao objeto da Matemática. Já axiomática, como o subtítulo acima, é o conjunto de axiomas.

Os Axiomas Lógicos básicos (como vistos em *Peano*, *Frege* e *Zermello*) abrigam um sistema parcialmente ordenado (chamado de estrutura de ordem[29]). Os principais axiomas básicos para este trabalho são.

2.2.1. Completeza

$$\forall x, y \in X, x \succsim y \text{ ou } y \succsim x \tag{2.1}$$

Quaisquer que sejam x e y pertencentes a X, o bem $x \succsim y$ ou $y \succsim x$.

2.2.2. Reflexividade[30]

$$\forall x, y \in X, (x, y) \succsim (y, x) \tag{2.2}$$

Quaisquer que sejam x e y pertencentes a X, o conjunto de bens $(x \;\; y) \succsim (y, x)$.

2.2.3. Transitividade[31]

$$\forall x, y, z \in X, x \succsim y \text{ e } y \succsim z \Rightarrow x \succsim z \tag{2.3}$$

Quaisquer que sejam x, y e z pertencentes a X, se $x \succsim y$ e $y \succsim z$ então $x \succsim z$.

2.2.4. Continuidade

$$\forall y \in X, \{x \in X; x \succsim y\} \text{ e } \{x \in X; x \succsim y\} \text{ são fechados} \tag{2.4}$$

Qualquer que seja y pertencente a X, os conjuntos $\{x \in X; x \succsim y\}$ e $\{x \in X; x \succsim y\}$ são conjuntos fechados.

---

[28] veja artigo de *David Easley* e *Aldo Rustichini* "Choice Without Beliefs", econometrica, 1999. Os autores ainda mantem os mesmos mecanismos axiomáticos da *EU* (expected utility), mas desenvolvendo um pouco das idéias de Savage da probabilidade em consqüência das condições psicológicas dos atores, já com os problemas axiomáticos envolvendo a escolha.

[29] Veja o artigo de A. Oliveira, "A Herança de cantor e a Hipótese do Contínuo", que destaca o papel do axioma da escolha ser um conjunto ordinal bem ordenável, e também os todos os conjuntos ordenáveis obedecem a um mesmo tamanho de medida.

[30] Veja Mello Ferreira, em Informações Econômicas e Ilusão, Àgora, RJ. Segundo o autor, pela psicologia econômica a tentativa de previsão em longo prazo ficaria inviabilizada pelo princípio da reflexibilidade, que postula que a própria observação dos fenômenos econômicos já os modifica. '

[31] as preferências transitivas, em uma escala de escolhas preferíveis como $x \succsim y \succsim z$ são mutuamente exclusivos, isto é, $x \cap y \cap z = \phi$. Eles conjuntos disjuntos ente si refletindo então o ordenamento de preferências estabelecido. *Sen* discute a relação matemática $xR^{(\alpha\alpha;\sigma\sigma;\alpha\sigma;\sigma\alpha)}y$, ou seja, $\alpha\alpha$ como a transitividade de preferência estrita ou quase – transitividade, $\sigma\sigma$ como a transitividade da indiferença, R como uma relação de preferência transitiva e ordinal e $(\alpha\sigma;\sigma\alpha)$ como transitividade. As quatro propriedades de preferências de *Sen* são:

1. $\alpha\alpha$ - transitividade: $yR^{\alpha}x$ e $xR^{\alpha}z$ implicam em $yR^{\alpha}z$
2. $\sigma\sigma$ - transitividade: $yR^{\sigma}x$ e $xR^{\sigma}z$ implicam em $yR^{\sigma}z$
3. $\alpha\sigma$ - transitividade: $yR^{\alpha}x$ e $xR^{\sigma}z$ implicam em $yR^{\sigma}z$
4. $\sigma\alpha$ - transitividade: $yR^{\sigma}x$ e $xR^{\alpha}z$ implicam em $yR^{\alpha}z$

Supondo que em um ordenamento de preferências tenhamos preferências completas, ou seja, yRx ou xRy então a relação de equivalência de $\alpha\sigma \Leftrightarrow \sigma\alpha$ transitividade indicará uma forte $\sigma\sigma$ transitividade (transitividade da indiferença). Uma relação de preferência é fraca R é σ transitiva se sempre que alternativas indiferentes têm idênticas formas de conjuntos superiores e inferiores. À frente será discutido com mais propriedade a contribuição de *Sen* para o axioma fraco da preferência revelada de *Samuelson*, e também o axioma forte da preferência revelada de *Houthakker*, ambos a luz da transitividade, da completeza e da reflexividade.

2.2.5. Independência

O axioma da Independência foi criado por *Von-Neumann* e *Morgnstern*[32]. O principal atributo deste axioma foi preencher uma lacuna na definição de racionalidade e ordenamento. Isto quer dizer que se mantidas as condições de racionalidade, já definidas acima, e supondo o ordenamento, bem comportado, entre dois elementos o acréscimo de um terceiro não modifica o conjunto, temos então a descrição matemática do modelo do axioma da independência.

Primeiramente citamos os axiomas da transitividade, completeza e continuidade. Agora supomos que a existência de um conjunto de elementos $x, y, z \in X$, e $\alpha \in (0,1)$, permite a relação ordenada abaixo.

$$x \succsim y \Leftrightarrow \alpha x + (1-\alpha)z \succsim \alpha y + (1-\alpha)z \tag{2.5}$$

Na representação de *Faro* e *de Castro* (2004), e *Mas–colell, Whinston e Green* (2005), o teorema – axioma se apresenta pelo seguinte sistema.

1. (vN–M1) - $\succsim$ é completa e transitiva.
2. (vN–M2) - $\succsim$ satisfaz a seguinte condição de continuidade para todo $x, y, z \in X$:

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha x + (1-\alpha)y \succsim z\} \tag{2.6}$$

$$\{\alpha \in [0,1] : z \succsim \alpha x + (1-\alpha)y\} \tag{2.7}$$

São subconjuntos fechados de $[0,1]$.

3. (vN–M3) - $\succsim$ satisfaz a independência. Prova do axioma já demonstrado.

Em Teoria da Utilidade, no que tange aos "modelos de loterias", o axioma da Independência é fundamental na configuração do modelo de Utilidade Esperada e também na composição de modelos que expliquem as escolhas racionais. Este axioma também é o ponto de controvércia de grande parte dos intelectuais do pensamento econômico, principalmente aqueles que defendem modificações no conceito de independência.

[32] John Von - Neumann (1903–1957), matemático hungaro; Oskar Morgenstern (1902–1977), economista austríaco. Os dois cientistas foram os pais da Teoria dos Jogos.

Mantendo a linha lógica do axioma supracitado, é necessário definir um princípio que norteará toda a Teoria dos Conjuntos aplicada aos modelos de utilidade esperada.

2.2.6. Axioma da Escolha

Primeiramente vamos definir o Axioma da Escolha pela exposição do modelo. Após, discutiremos suas atribuições e significados. Assim, definimos o axioma da escolha segundo *Zermelo* e *Fraenkel* pelo seguinte modelo matemático[33] abaixo.

$$(\forall x)(x \in z \to x \neq 0) \wedge (\forall x)(\forall y)(((x, y \in z) \wedge (x \neq y)) \to x \cap y = \phi)$$

$$\to (\exists u)(\forall x)(\exists v)(x \in z \to u \cap x = \{v\}) \qquad (2.8)$$

Para uma melhor interpretação do teorema particionaremos seu enunciado de modo que este fique mais simples de compreensão. O teorema nos diz que, dado um conjunto z cujos elementos $(x, y \in z)$ são não vazios $x \cap y = \phi$ dois a dois disjuntos $\underbrace{(\forall x)(\forall y)}_{\to}\left(\left((x, y \in z) \wedge \underbrace{(x \neq y)}_{\uparrow}\right)\right)$. Assim, existe um conjunto de escolhas u que tem exatamente um membro em comum com cada elemento de z.

Temos então:

$$\underbrace{(\exists u)}_{\{conjunto\ .u\}}\underbrace{(\forall x)}_{\{elemento\ .do\ .conjunto\ .z\}}\underbrace{(\exists v)}_{[elementodo\ \ conjunto\ .u]}\underbrace{(x \in z \to u \cap x = \{v\})}_{escolha} \qquad 2.9)$$

---

[33] Para a definição do axioma da escolha precisamos apresentar um grupo de outros axiomas antecedentes que garantam suporte ao primeiro. De maneira suscinta, por não ser objetivo desta dissertação, serão apenas expostos àquelas mais relevantes para o Axioma da Escolha de *Zermello*. Assim temos os axiomas da:,.

da Extencionalidade: existência de um único conjunto vazio

do Vazio

da Separação: não existência de conjunto de todos os conjuntos

da Substituição: existência de certos ordinais infinitos e de cardinais

da Regularidade: combater níveis hierárquicos cumulativos e circularidades

Seguindo à apresentação do axioma da escolha, não seria possível deixar de lado o Princípio da Tricotomia que afirma que dados dois números p e q, mantida a relação de ordem entre eles, só poderemos ter três soluções de ordenação definido por, ou $p < q$, ou $p > q$, ou $p = q$. Note que isto induz a pensarmos em termos de sucessão de elementos, ou seja, existe sempre um sucessor de um elemento.

O próximo assunto será definido como o processo de escolha se manifesta pela ordem de preferência. Será necessário então buscar subsídios na Teoria dos Conjuntos e na ordenação de corpo dos conjuntos para definir a sucessão de escolhas, ou seja, de como uma escolha será mais fraca que outra. Assim, a propriedade Arquimediana será determinante para dar continuidade à explicação da Teoria dos Conjuntos (em um corpo de elementos) e as propriedades definidas por *Sen* (observe o Anexo B).

2.2.8 Axiomas Fraco e Forte da Preferência Revelada

Para uma perfeita apresentação dos axiomas de *Paul Samuelson*, utilizaremos os modelos apresentados por *Varian* (2007) em seu ensaio "preferência revelada[34]". Para o autor, preferência revelada é o conjunto de preços e escolhas do consumidor.

> […] On the hand, menu – dependence of preference is precisely what is ruled out by such assumptions as the weak axiom of revealed preference (WARP) proposed by Paul Samuelson (1938), not to mention *Houthakker's* (1950) strong axiom of revealed preference (SARP). Indeed, even weaker conditions than WARP, such as Properties α and τ (basic contractions and expansion consistency), which are necessary and sufficient for binariness of choice functions over finite sets, much used in general choice theory as well as social choice theory, are violated by such choices. [35]

[34] *Paul Samuelson* (1915, -), *Hendrik Samuel Houthakker* (1924–2008). Veja de *Paul Samuelson*, (1952) a obra "Probablilty Utility, and Independence Axiom", em que o autor apresenta um texto clássico sobre o axioma da Independecia e suas aplicações.
Veja de *Amartha Sen* (1993) "Internal Consistency of Choice". Uma crítica do autor ao modelo de preferencia revelada (por Samuelson), em que exige muitas condições a priori sem levar em conta à possibilidade dos agentes não agirem como os clássicos definem um comportamento racional (em um equilibrio não paretiano).

[35] "Por outro modo, a preferência de cardápio – dependente é precisamente o que está excluída por esta suposição como o axioma fraco da preferência revelada (WARP) proposto por *Paul Samuelson* (1938), sem a menção de *Houthakkes* (1950) e o axioma forte da preferência revelada (SARP). De fato, até mesmo as condições fracas de WARP, tais como as propriedades α e τ (denominada neste trabalho como β), (contrações básicas e expansões consistentes), que são necessárias e suficientes para funções de escolha binárias sobre conjuntos finitos, muito usadas em teoria geral da escolha bem como teoria social da escolha são violadas por escolhas semelhantes."

Matematicamente, preferência revelada é:

> Dada soma de vetores de preços e cestas de escolhas (p^t, x^t) para $t = 1,\ldots,T$, dizemos que x^t é diretamente revelada como preferida à cesta x (escrevendo $x^t R_D x$) se $p^t x^t \geq p^t x$. Dizemos que x^t é revelada como preferida a x (escrevendo $x^t Rx$) se existe alguma seqüência $r, s, t, \ldots, u, v$ desde que, $p^r x^r \geq p^r x^s, p^s x^s \geq p^s x^t, \ldots, p^u x^u \geq p^u x$. Neste caso, supomos que a relação R é uma relação transitivamente fechada em R_D.

O axioma fraco da preferência revelada é determinado pelo seguinte enunciado.

> Se $x^t R_D x^s$ nesse caso este não é o caso de $x^s R_D x^t$. Algebricamente $p^t x^t \geq p^t x^s$ implica em $p^s x^s < p^s x^t$.

O axioma forte[46] da preferência revelada determina que,

> Sendo $x^t Rx^s$ este não é o caso se $x^s Rx^t$, algebricamente *AFoPR* quer dizer que $x^t Rx^s$ implica em $p^s x^s < p^s x^t$.

O axioma generalizado da preferência revelada afirma que,

> Dados (p^t, x^t) satisfazem o Axioma Generalizado da Preferência Revelada se $x^t Rx^s$ implicar em $p^s x^s \leq p^s x^t$.

2.3. Elementos Integrantes da Preferência

Agora passaremos da extensão do conceito de conjunto para as relações de preferência que se seguirão aos modelos de utilidade. Para isso, iniciaremos determinando o conceito de preferência e logo após todos os elementos que agregam valor à estrutura do conceito.

Preferência é uma maneira de escrevermos utilidade, segundo *Varian* (2007). As preferências podem ser ordinais (obedecem ao axioma da boa ordem) ou cardinais são expressas por conjuntos de números.

As preferências ordinais são representadas pelos símbolos $\prec, \succ$ que significam “é preferido”. Os sentidos diferentes significam as preferências podem ser ordenadas. A preferência ordinal necessita como condição necessária e suficiente de um espaço métrico para existir, ou obedecendo à seqüência $[(x_n);(y_n)]$ com $[(x_n)\to x;(y_n)\to y]$ tal que tenhamos a relação $[x_n \succsim y_n\ \forall n]\Rightarrow x \succsim y$. Quando temos o símbolo $\succsim$ temos uma ordem fraca, analisada nas duas seções anteriores. Agora verificaremos a cardinalidade como atributo da preferência.

Em teoria dos conjuntos, definimos cardinalidade em função do conceito de *Frege* e *Russell.* Para os dois matemáticos o tamanho dos conjuntos representa ter dois conjuntos x e y com mesmo comprimento, ou seja, haja a relação do tipo $\text{Card}(x)\text{=Card}(y)$. Desta forma, existe uma bijeção entre eles, e uma relação de eqüipolência.

2.3.1. Aditividade

Uma medida é aditiva quando temos uma soma disjunta de conjuntos[36]. Para uma exemplificação apresentaremos o modelo matemático a seguir.

---

[36] O termo eqüipolência significa que se existe uma bijeção entre dois conjuntos, eles têm o mesmo cardinal. Segundo *Elon* (2004), o termo bijetivo se refere à função bijetiva ou correspondência biunívoca. Quando uma bijeção existe, ela é também uma injeção e sobrejeção, simultaneamente. Em termos matemáticos temos:

$$\underbrace{f}_{função.\{f\}} : \underbrace{\overbrace{A}^{Domínio.da.função\{f\}}}_{conjunto.A} \to \underbrace{\overbrace{\overbrace{B}^{\text{Im}\,agem.da.função\{f\}}}^{Contradomínio.de.\{f\}}}_{conjunto.B} \tag{2.10}$$

$f : A \to B$ Bijeção, quando uma função obedece a sobrejeção e a injeção.

$f : A \to B$ Sobrejeção, se necessário e suficiente que, $f(A)=B$, $f(A)$ é a imagem da função f.

$f : A \to B$ Injeção, mas é preciso supor que exista $f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y)$ para quaisquer X, Y contidos em A, sendo assim necessário e suficiente.

$$u(A+B)=u(A)+u(B) \tag{2.11}$$

O Axioma da Aditividade também deve ser visto como uma medida. Por se tratar de conjuntos, a medida aditiva pode ser escrita como uma σ-algebra. Uma σ-álgebra de *Borel* (σ-álgebra), na definição de *Feller* e *Arrow*, é um conjunto contável (álgebra) e também uma álgebra de *Borel*, $\sigma-$álgebra. O ordenamento da estrutura de preferências é definido como um triplo (Ω, $\mathcal{A}$, $\succsim$), formado pelo universo Ω, uma álgebra de subconjuntos Ω ($\mathcal{A}$), e uma relação de preferência $\succsim$.

Segundo *Tenreiro* (2000) uma função de conjunto u se diz aditiva se para todo $A, B \in C$, com $A \cup B \in C$, e $A \cap B = \phi$, a soma $u(A) + u(B)$ está bem definida.

2.3.2. Monotonicidade Forte

Para algum $x \gtrsim y$ isto é $x_i \gtrsim y_i, i = 1, \ldots, n$ temos $x \neq y \Rightarrow x \succ y$ (2.12)

2.3.3 - Monotonicidadade Fraca

Para algum $x \geq y$ temos então $x \gtrsim y$ (2.13)

2.3.4. Não saciação local

Dado algum x em X e algum $\in$ >0, então há somente uma cesta y em X em que $\|x - y\| < \in$,desde que $y \succ x$ (2.14)

2.3.5. Convexidade [37]

Dados x, y e z em X desde que $x \gtrsim z$ e $y \gtrsim z$, assim mostra-se que $tx - (1-t)y \gtrsim z$ para todo $0 \leq t \leq 1$. (2.15)

2.3.6. Convexidade Estrita

Dados $x \neq y$ e $z \gtrsim y$ em X, se $x \gtrsim z$ e y, então $tx - (1-t)y \succ z$ para todo $0 \leq t \leq 1$. (2.16)

---

[37] Definimos C, como uma classe de subconjuntos de X (conjunto arbitrário, não vazio) com valores em $\Re = \Re \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. $\Re$ é a relação de ordem óbvia com $-\infty$ e $+\infty$, e os elementos mínimo e máximo.

Dentro da Monotonicidade Forte existe o atributo matemático da probabilidade na situação em que ocorre correlação entre duas variáveis. Em *NEU* (Utilidade não Esperada), e também na *EU* (Utilidade eperada), ambas vistas nos capítulos três e quatro deste trabalho, ocorre, em algumas situações, o instituto da comonotonicidade. Na possibilidade de haver duas funções do tipo $H(x, y)$, tal que corr $H(x, y) = 1$, há comonotonicidade forte, ou seja, com correlação máxima positiva. Havendo a situação corr $H(x, y) = -1$, ocorre a contramonotonicidade, ou seja, a correlação máxima negativa entre duas variáveis.

Conjuntos convexos são definíveis por pontos x e y em um segmento de reta que os une de tal forma que um conjunto qualquer D contém os pontos (x, y). Podemos também definir convexidade pela expressão: $D \subset \Re^n$ como um convexo tal que $\forall \; x, y \in D, \alpha x + (1-\alpha)y \in D$. A função convexa é definida por $f: D \to \Re, D \subset \Re^n$, D é convexo se $x, y \in D, 0 \leq a \leq 1$, $f(ax + (1-a)y) \leq af(x) + (1-a)f(y)$. Para o conjunto côncavo não há definição matemática. O termo Função Côncava pode ser demonstrado pela relação, $f: D \to \Re, D \subset \Re^n$, D é côncavo se $x, y \in D, 0 \leq a \leq 1$, $f(ax + (1-a)y) \geq af(x) + (1-a)f(y)$. A Quase concavidade é definida por uma função $f: D \to \Re$, sendo que D é um conjunto convexo em $\Re^n$, define–se quase concavidade se um dado número real a qualquer, existe um conjunto $C = \{x \in D; f(x) \geq a\}$ sendo este convexo. A quase convexidade e a quase concavidade são facilmente demonstradas pela utilização de matrizes Hessiano Orladas. Para uma melhor entendimento do assunto veja os autores, Vasconcellos, M e Oliveira, R, Manual de Microeconomia, 2 ed, 2000; Carrera-Fernandez, J. Curso Básico de Microeconomia, EDUFBA, 2001; Simon, C e Blume, L, Mathematics for Economist, W.W. Norton &Conpany, 1994. Todos os autores apresentam o tema de forma bastante didática

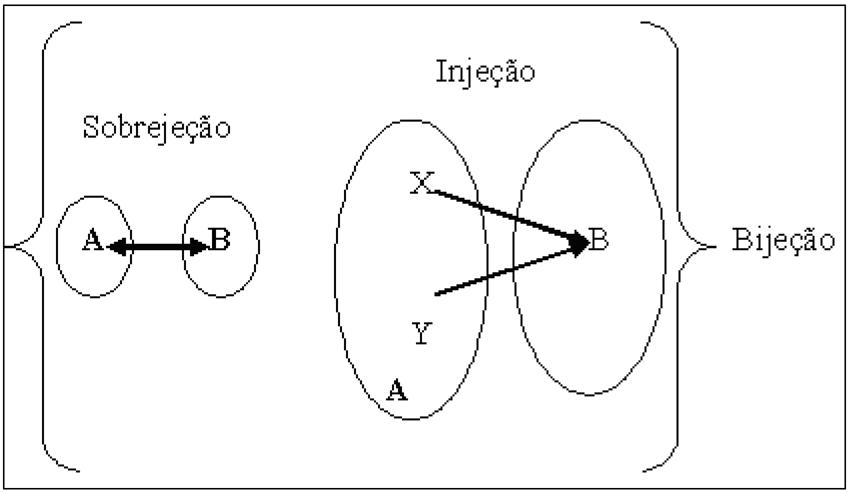


Figura 5: Correspondência entre Conjuntos Sobrejetores, Bijetores e Injetores.

Fonte: Elon L. Lima Curso de Análise, vol 1, 11. ed . Rio de Janeiro, IMPA, 2004.

Para continuarmos, é necessário definir duas topologias que serão de grande importância na construção dos modelos de loterias no quarto capítul: as topologias, Fraca e Forte.

2.3.7. Topologias Fraca e Forte

Topologia vem do grego (*topos* "lugar" e *logos* "estudo") e em virtude de seus ramos, tais como Topologia Geral (que estuda os espaços gerais como as conexidades por caminhos e continuidade), Topologia Algébrica (que estuda a deformação de um espaço e a seqüência de grupos de um espaço) e Teoria das Variedades (que estuda as variedades tais como a Topologia Diferencial), a Topologia está muito relacionada à Teoria dos Conjuntos e por isso será apenas uma pequena referência neste trabalho. Ela será apresentada aqui mais como complemento para o estudo do risco e incerteza. Para o objeto deste trabalho será visto apenas uma pequena parte das Variedades Topológicas. Assim, para nosso trabalho, analisaremos a influência da Topologia Geral em medida e escolha.

Na apresentação de *Faro* e *Castro* (2004), tendo-se duas topologias τ_1 e τ_2 sobre X, dizemos que a topologia τ_1 é mais fraca que τ_2 se $\tau_1 \subseteq \tau_2$, isto é, a topologia τ_1 deve conter menos abertos do que τ_2.

Em *Elon* (2003) define–se conjunto aberto[38], ou aberto, como uma bola aberta, mas o enunciado se refere a um tipo específico de Topologia, ou seja, um espaço topológico. Neste caso redefine–se aberto como uma topologia num conjunto X de uma coleção $\mathcal{F}$ de partes de X.

Assim temos:

1) ϕ e X pertencem a $\mathcal{T}$;

2) Se $A_1, \ldots, A_n \in \backslash$ então $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{T}$;

3) Dada uma família arbitrária $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ com $A_\lambda \in \mathcal{T}$ para cada $\lambda \in L$, tem–se $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{T}$.

Todo cuidado é necessário, na comparação do espaço topológico, ou $(X, \mathcal{T})$, onde X é um conjunto e $\mathcal{T}$ é uma topologia em X, e espaço métrico M, pode ser considerado um espaço topológico. O termo $\mathcal{T}$ é considerado no espaço métrico como subconjunto de abertos de M, ou seja, como Bolas Abertas.

2.4 Considerações Finais do Capítulo

O segundo capítulo foi o instrumento chave na construção dos pilares da Teoria da Utilidade Esperada. Por sua apresentação puramente técnica, podemos concluir que primeiramente o objeto da racionalidade é uma construção fundada em elementos puramente lógicos da teoria dos conjuntos básica. Parece pouco nítida a forma como o objeto da escolha se constroe no conciente dos indivíduos, mas sua abordagem foi buscada como referencia da teoria neoclássica.

As definições de bola aberta (apresentada no Anexo B) e os outros axiomas que transportam suporte ao modelo geral de racionalidade apenas definem, de maneira abstrata, como deve ser visto um conjunto. O termo conjunto em Economia, deve ser visto como um grupamento de elementos contidos em um universo definível. Como exemplo, referindo-se ao tema escolha, pode-se determinar um indivíduo precisa escolher entre várias peças de roupa sendo que possui apenas um determinado valor de renda para gastar. Assim sabemos que temos um conjunto universo chamado todas as roupas possíveis de se comprar e um elemento de restrição chamado renda disponível. Por esta forma bastante simples temos um modelo clássico de conjuntos.

---

[38] Ao contrário de conjuntos Abertos, conjuntos fechados são ditos aderentes se um ponto a é aderente a um conjunto $X \in \Re^n$ quanto toda a bola aberta de centro a contém algum ponto de X ou existe uma seqüência de pontos em X que converge para a. A coleção de todos estes pontos é determinada como Fecho de X e é escrita por $\overline{X}$. Conjuntos Conexos são conjuntos que não podem ser representados como união de dois conjuntos separados ambos não vazios, ou seja, $A \cap B = \phi$. Também pode ser escrita na forma de $(A \cap \overline{B}) = \phi$ e $(\overline{A} \cap B) = \phi$, $(\overline{A}, \overline{B})$ são Fechos dos conjuntos A e B. Por fim, conjuntos compactos são conjuntos limitados e fechados.

Pela comparação de duas teorias, (Modelo de Preferência Revelada de *Paul Samuelson* e do Modelo α e β de *Amartya Sen*) pode-se perceber como ocorrem paradigmas no objeto da escolha determinada pelos indivíduos. Neste momento temos uma ruptura do conceito clássico de escolha, vista pelo enfoque do modelo de preferência revelada e a definição de *Sen* (apresentados no anexo B), de que a manifestação da preferência decorre muito mais de características excludentes do *mainstream*, ou seja, considerando os aspectos próprios de cada agente.

E, portanto, apresentamos os coajuvantes da estrutura da preferência. Como abordagens técnicas, foram vistos os elementos teóricos que servem de suporte para a construção dos modelos de utilidade. Todo o modelo de utilidade baseia-se em técnicas matemáticas e condições racionais para ser calculado. Como será visto no terceiro capítulo, a Escola de Teoria Economia determinada como Escola da Utilidade Esperada, necessita de um complexo arcabouço matemático para poder propor seu sistema de resultados. Esta esplanação parte da idéia de que o indivíduo separa suas escolhas por sistemas de conjuntos, além de também delimitar um grau de risco que pode assumir a estas. Para poder quantificar o "ganho" ou a "perda" ele precisa assumir uma lógica determinística a priori. Com base em todos estes elementos ele então consegue medir o simbólico, ou seja, pode dar valores ou restringir os efeitos de felicidade, satisfação, medo, prazer, ou qualquer outro símbolo que interferisse em seu grau de satisfação, como determinaram os primeiros clássicos da Teoria Econômica.

No próximo capítulo mudaremos o rumo deste trabalho com outro enfoque. A Teoria da Utilidade Esperada buscará nos elementos apresentados no segundo capítulo suporte para existir como modelo e teoria.

3. A TEORIA DA UTILIDADE ESPERADA

A Teoria da Utilidade Esperada é primordial na compreensão dos processos de escolha sob risco e incerteza. Ela é o suporte Neoclássico para a compreensão de muitos fenômenos que atigem os indivíduos. Por isto definimos o terceiro capítulo em oito seções que são apresentadas do seguinte modo.

Na seção 3.1 apresentamos uma pequena introdução sobre a Utilidade Esperada em seu aspecto. Retomamos como grau comparativo, a Utilidade Marginal e a comparação com a Utilidade Esperada em função de uma medida de risco.

Na seção 3.2 mantemos o mesmo sentido, mas agora tratando do tema Utilidade Esperada de forma mais técnica. Versaremos a respeito do papel dos matemáticos no desenvolvimento dos modelos de utilidade esperada e, principalmente, sobre como a lógica-matemática foi determinante para a delimitação entre Utilidade Esperada em um ambiente de incerteza. Assim discorreremos sobre a visão clássica da utilidade apresentadas na visão abstrata de um conjunto de cestas de bens o consumo, organizadas nos moldes dos conceitos de escolha e preferência.

Na seção 3.3 apresentamos uma simples introdução às bases que formam a utilidade esperada, utilizando como referência inicial o modelo simples de loteria de *Von–Neumann* e *Morgensrternn*. Desse modo possibilita-se fazer um comparativo entre a Teoria de Risco Clássica (de *Bernoulli*) e a Teoria de *vN-M*.

Na seção 3.4 trataremos de alguns modelos de risco, como o modelo de probabilidade subjetiva de *Savage* e suas conseqüências para o reestabelecimento da Teoria *EU* (Utilidade Esperada).

Na seção 3.5, 3.6 e 3.7 analisamos e demonstramos os modelos contrários a Teoria da Utilidade Esperada *EU*. Por grau comparativo poderemos peceber como os indivídos podem fazer suas escolhas indentificando-se com as garantias e os problemas da teoria em questão

Por fim, na seção 3.8 apresentamos o modelo clássico de risco de *Bernoulli* com seus aspectos favoráveis e problemáticos para a utilidade esperada. Em função disso discutiremos a Teoria da Utilidade Esperada de acordo com a tomada de decisão contendo risco.

3.1 Utilidade Esperada como Medida de Probabilidade

No início da História do Pensamento Econômico (final século dezenove) o termo preferência foi um substituto da expressão utilidade. A construção epistemológica da palavra Utilidade e suas derivações em Utilidade Marginal e Utilidade Esperada foi desenvolvida como traço do contexto de valor. O contexto do significado de Utilidade Marginal, não teve nenhum tipo de vinculação à conotação de incerteza e risco. O objetivo inicial dos primeiros teóricos do pensamento econômico de definir a diferença entre valor de uso e valor de troca. Por um lado, o valor de uso acabou tomando o rumo do que se definiria como utilidade, o valor de troca seguiria outro caminho, diferente do que pregava a Escola da Utilidade Marginal.

Já o termo utilidade, denominada como preferência pelos primeiros utilitaristas, tomaria nova configuração. A Teoria da Utilidade precisaria passar por novo paradigma (utilidade marginal para a utilidade esperada) de tal forma que se pudessem compreender os processos de incerteza e risco em situações de escolha (escolha sob incerteza). Também haveria a necessidade de se definir o processo de escolha intertemporal, a partir da separação entre Teoria do Valor e Teoria da Utilidade. Assim, seria necessária uma metodologia que apresentasse uma medida de risco.

Segundo *Varian* (2007) podemos definir a utilidade esperada como uma função continua $\{u\}$ que descreve as preferências do consumidor. Aqui cabe ressaltar o papel da economia moderna em diferenciar preferência de utilidade. Para *Varian*, as preferências são axiomáticas e são divididas entre tipos de preferências e padrões lógicos. Os padrões lógicos de preferências são ordenações norteadas pelos tipos: fracamente preferível indiferente e fortemente preferível. Assim *Varian* (2007) afirma que as preferências dos consumidores podem descrever a função utilidade através de uma combinação convexa do tipo,

$$p \times x + (1-p) \times y \succ q \times w + (1-q) \times z \tag{3.1}$$

Se e somente se,

$$u(p \times x + (1-p) \times y) > u(q \times w + (1-q) \times z) \tag{3.2}$$

Este não é um único tipo de função utilidade, pois alguma transformação monotônica será mais eficaz para definir na equação 3.2, a aversão ao risco. Podemos encontrar uma transformação monotônica particular que tem uma propriedade muito conveniente: a propriedade da utilidade esperada.

$$u(x, y) = pu(x) + (1 - p)u(y) \tag{3.3}$$

Devemos lembrar que a construção dos modelos de Utilidade Esperada foi para o estudo das loterias, o que foi a Utilidade Marginal para a escolha racional. Ainda em relação ao modelo acima, *Varian* (2007) determina que "a propriedade da Utilidade Esperada diz que a utilidade de uma loteria é uma expectativa da utilidade dos preços". A utilidade é aditivamente separável e isto é um fator muito importante para a definição da intransitividade.

Processos como o da Utilidade Marginal Decrescente e o da Utilidade Esperada, seguiram paralelamente em contextos diferentes. Porém, era de se perceber que o conceito de Utilidade Esperada partiu do significado de risco, ou seja, como resultado da multiplicação da probabilidade de um evento por um conjunto ou cesta de elementos. Já a Utilidade Marginal apenas apontava a preferência dos indivíduos por determinadas mercadorias e serviços sem risco, ou seja, sem que a escolha envolvesse risco.

Desde a dúvida de *Smith* que originou no paradoxo da água e do diamante, resolvido pelos utilitaristas, (no caso, *Jevons*), a Teoria Econômica que envolveu o estudo da utilidade veio ganhando *status* de ciência, sendo estudada nos campos da Psicologia, da Filosofia, da Matemática e da própria Economia. A Matemática se encarregou de por à utilidade um aspecto mais técnico e menos metafísico, que a funcionalizasse de modo a ser possível determinar os principais aspectos de preferência e escolha das pessoas. À medida que a Escola da Utilidade Esperada se desenvolveu (principalmente por matemáticos e físicos), notou-se a distância que se fez presente à linha de pensamento hedonista.

Os matemáticos que contribuíram com os princípios da Utilidade Esperada não buscaram na Filosofia grega inspiração para a construção de seus modelos em Economia–Matemática. Diferentemente dos atores da Escola Marginalista, a construção dos modelos de Utilidade Esperada, foi muito mais uma conseqüência dos problemas corriqueiros das situações que intrigaram a muitos deles, tais como os jogos de azar, os problemas de seguros marítimos, as catástrofes, e muitos outros que indicassem a possibilidade de medida do risco. Os economistas beberam da fonte de *Hedon*[39], que polarizava a vida dos seres mortais entre dor e prazer. Até então, uma união entre economistas da Escola da Utilidade e matemáticos não era algo previsível.

Porém houve algo em comum entre as duas escolas do pensamento econômico. Seus teóricos (da Escola da Utilidade Marginal e da Utilidade Esperada) buscaram certa proximidade com os princípios da Física Clássica, até pelo fato de que muitas dúvidas sobre o comportamento humano podiam ser mais bem explicadas se comparadas com fenômenos físicos naturais.

Outro exemplo é referido ao significado das curvas de indiferença. Pelo significado destas não poder-se cruzar se torna nítida a referência direta às curvas de campo, ou linhas de campo do eletromagnetismo.

A principal diferença entre Valor e Utilidade é o atributo de uma medida de risco aos modelos econômicos. A Teoria do Valor que originou a Teoria da Utilidade não tinha como enfoque a probabilidade de algum evento esperado, pois era definida pelas atitudes dos agentes num determinado instante; praticamente um ambiente estático. A análise do processo de escolha, dos princípios axiomáticos da lógica, e do risco, como condicionantes da preferência do consumidor, na criação da função de utilidade esperada, foi o começo da construção de modelos que puderam capturar e transportar as necessidades individuais para funções analíticas.

Um primeiro apontamento a ser considerado é a eficácia do pensamento racional. Tanto no modelo de utilidade marginal decrescente como no modelo de utilidade marginal esperada, o processo racional é visto como um aporte para a maximização das utilidades. Como devemos obedecer a cada um dos casos como particularidade, no que se refere à utilidade marginal a maximização racional está vinculada ao processo sistematizado por preferência, após escolha, construindo então a utilidade. No caso da utilidade esperada temos a imposição do termo chamado “expectativa” (ou esperança matemática). Nesse caso, a probabilidade está integrada ao risco da soma das escolhas serem bem ou mal feitas pelo indivíduo.

---

[39] o termo Fonte de *Hedon* vem do Grego Antigo, que significa: busca pelo prazer.

A característica da racionalidade refere-se a uma medida de risco para a utilidade esperada, e um comportamento maximizador do prazer para a utilidade marginal. Os modelos de preferência terão como base além da teoria axiomática, os modelos de Teoria dos Conjuntos, de modo a permitir-se que seja possível medir conjuntos de elementos que interfiram de algum modo no processo de escolha dos indivíduos.

Na Economia Utilitarista de *Bentham* e *Jevons*, preferência e utilidade se confundiam, até porque qualificar a utilidade era bastante complexo para os teóricos da época. Mas com a contribuição dos matemáticos para a Economia, através dos estudos da Teoria da Probabilidade, por *Pascal* e *Fermat*, a utilidade obteve uma Teoria da Medida (Cardinal ou Ordinal) e a preferência passou a ser vista como o funcional matemático da utilidade.

A moderna Teoria dos Conjuntos necessita que cada hipótese deva ser definida por um conjunto mínimo, mas consistente de axiomas, seja este o modelo que for e o que se proponha a explicar. Muitos postulados da Teoria Clássica dos Conjuntos foram trazidos para as Ciências Econômicas pelas mãos de economistas utilitaristas, que, em virtude de poder estabelecer melhor uma hipótese, propuseram-se então adaptar o comportamento humano em função da lógica e dos métodos cartesianos.

Isto é, o processo de escolha buscava um efetivo condicionante racionalmente discutível denominado maximização da utilidade e, como estrutura de ligação, uma forma analítica de expressão teórica (um funcional matemático). Como árbitros deste arcabouço todo, os princípios axiomáticos formaram elos da Teoria Econômica e do ferramental matemático. Afora isto, nada que estivesse fora da maximização, para a corrente neoclássica, seria considerado racional.

3.2. A Utilidade como Medida de Escolha sob Incerteza: um Espaço de Loterias.

A teoria da utilidade esperada invocou para si a continuação da razão objetiva e normativa, do cardinalismo como ferramenta de interpretação das preferências, das suposições exógenas dos fatores, dos modelos de probabilidade lineares, e da incerteza. A certeza seria um atributo apenas da utilidade marginal. Em um primeiro momento foi mais simples destacar o *modus operandi* dos modelos de decisão através do instituto da loteria.

A definição "loterias" não se refere apenas ao modelo de jogos (cartas, pôquer ou outro jogo), mesmo em Teoria dos Jogos. Loteria, segundo *Varian* (2007) significa imaginar um conjunto de escolhas frente ao consumidor, ou seja, que apresentem em seu corpo estrutural um conjunto de preços e um outro de probabilidades.

Uma loteria pode ser escrita pela forma $\{p\times x+(1-p)\times y\}$, e significa que o consumidor recebe o preço x com probabilidade p e o preço y com probabilidade $\{(1-p)\}$. Os "preços" podem ser dimensionados como dinheiro, bens ou loterias entre outros elementos. Loterias podem se equipar aos outros preços, pois é possível tratar o comportamento do consumidor como uma estrutura de delas. Podemos definir modelos de loterias em três sistemas que definem a percepção do consumidor.

1. Ganho de preços com probabilidade $\{1\}$ é o mesmo que ganhar o preço por certo,

$$\left\{1\times x+\underbrace{(1-1)}_{p=1}\times y\right\}\sim\{x\} \tag{3.5}$$

2. Existe indiferença na ordem em que a loteria é descrita,

$$p\times x+(1-p)\times y\sim(1-p)\times y+p\times x \tag{3.6}$$

3. A percepção do consumidor de uma loteria depende somente da probabilidade líquida da recepção de vários preços.

$$\{q\circ(p\times x+(1-p)\times y)+(1-q)\circ y\}\sim\{(qp)\times x+(1-qp)\times y\} \tag{3.7}$$

Para entendermos melhor a constituição dos modelos de loterias devemos dividi-las em dois sistemas, contendo dois tipos de espaços. O primeiro espaço é formado por loterias sem que suas probabilidades se definam em uma seqüência de eventos. Após, temos uma construção de loteria quando há um espaço em seqüências de probabilidades.

Uma das razões que indicam a importância de muitas demonstrações de loterias está no simples fato de que elas obedecem aos preceitos clássicos, ou seja, não subestimam qualquer evento que não seja matematicamente lógico em qualquer modelo de decisão. Outra das muitas razões é que, em Teoria da Escolha, o universo de conjuntos necessita de uma medida que atribua ordenação às decisões, de modo que a utilidade possa ser constituída. Uma loteria é uma forma bem comportada da distribuição de uma quantidade por uma medida de risco e, desse modo, obedece uniformemente aos axiomas clássicos.

Assim, o primeiro conceito de loterias é descrito como sendo formado por um conjunto Z como um sistema de n elementos de $\{z_i\}$. O espaço X de probabilidades $\{x\}$ pode ser escrito como um simplex n-dimensional, da forma Δ^{n-1}.

$$\Delta^{n-1} = \left\{ p \in \Re_+^n : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}, \text{ onde } p_i = x(z_i) \qquad (3.8)$$

Podemos perceber que a probabilidade de todos os eventos é igual a $\{1\}$.

O segundo modelo segue como suposição de loteria sendo uma seqüência de modo que tenhamos em $\{x_k\}_{k=1}^{K} \subset X$ um conjunto com K loterias e um elemento $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ pertencente ao simplex K-dimensional Δ^{K-1}. Definimos a mistura das K loterias $\{x_k\}_{k=1}^{K}$ a partir de α como sendo a loteria, $y \in X$, tal que $y(z_i) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k x(z_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, o simplex n–dimensional é um conjunto convexo. O processo chamado de "mistura de loterias" será de grande valia na demonstração de problemas relacionados com os axiomas clássicos daqui em diante.

O modelo matemático descrito acima é definidor por.

$$\Delta^{k-1} = \left\{ p \in \Re_+^k : y(z_i) \sum_{k=1}^{K} \alpha_k x(z_i) = 1 \right\}, \text{ onde } \{x_k\}_{k=1}^{K} = x; p_i = y(z_i) \qquad (3.9)$$

John Von–Neumann e *Oskar Morgenstern* também influenciaram na continuidade do modelo racional, na dinâmica do consumidor. Alguns conceitos como a definição de Preferência Racional, o Axioma da Independência, o Axioma da Aditividade, o Axioma da Continuidade Arquimediana formaram algumas das condições para que os modelos de loterias pudessem ser desenvolvidos.

Os modelos de loterias são, em primeiro lugar, sistemas simples para interpretação do comportamento dos agentes em tomadas de decisão. As loterias são divididas entre simples e compostas. Uma loteria simples determinada por L é uma lista $L = (p_1, \ldots, p_n)$ em que $p_n \geq 0$ para algum n e $\sum_n p_n = 1$, onde p_n é interpretado como a probabilidade do resultado n vir a ocorrer.

Imaginemos um modelo de loteria do tipo $n = 3$. Suponha-se que possamos determinar que cada um destes pontos esteja inscrito em um triângulo eqüilátero[40].

Cada um destes pontos representa uma probabilidade e a soma de todas as probabilidades resulta $\sum_{3} p_n = 1$. Representado na figura 6, mais à frente, temos um *simplex* de loteria que apresenta probabilidade de ocorrência de três eventos distribuídos em seus vértices nas formas (1,0,0); (0,1,0) e (0,0,1). A distribuição das probabilidades pode ser chamada também de forma canônica.

Como é possível de se perceber, o *simplex* bidimensional (resultado da projeção do modelo tridimensional em bi-dimensão) pode ser determinado como uma representação vetorial: três vetores canônicos.

Para uma melhor compreensão basta vermos a figura nove como projeção de dois eixos da figura oito. Percebemos a mesma figura numa projeção bi-dimensional.

Temos apenas dois pontos da loteria e o terceiro ponto é uma combinação dos outros dois. A figura 6 então acumula os três pontos, mas apenas dois destes são "vistos".

[40] Para definirmos o resultado do conjunto, partimos da propriedade dos triângulos equiláteros da qual a soma da mediatriz do triângulo até sua altura máxima é igual à soma da mediatriz de cada um dos seus lados até a metade deste.

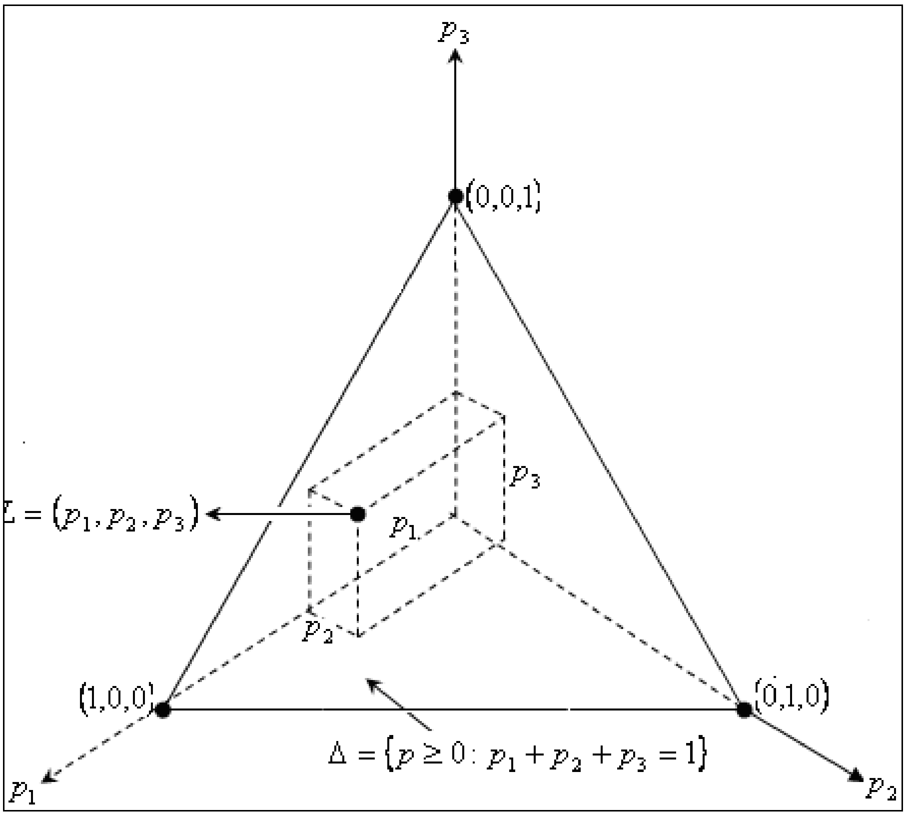


Figura 6: Simplex Poligonal Eqüilátero de Loteria com três Probabilidades
Fonte: Mas-Colell, A. Whinston, Michel D, Green, Jerry R.
Microeconomic Theory, Oxford University Press, 2005.

Veja a projeção da figura 8, ponto $L = (p_1, p_2, p_3)$, para a figura nove.

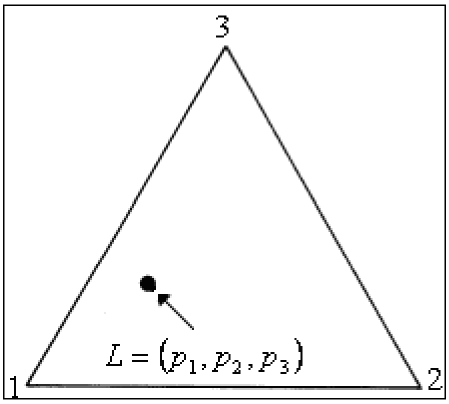


Figura 7: Posição de uma Loteria em um Triângulo de Marshack-Machina
Fonte: Mas-Colell, A. Whinston, Michel D, Green, Jerry R.
Microeconomic Theory, Oxford University Press, 2005.

Esta propriedade será de grande utilidade na explicação da distribuição das utilidades esperadas, conforme adiante se verá.

Agora suponhamos outro cenário, baseado em *Mas-Colell*, *Winston* e *Green* (2005), e no que já foi exposto sobre loterias de modo que temos o seguinte ensaio.

Havendo um número K de loterias simples do tipo $L_K = \left(p_1^K, \ldots, p_N^K\right)$ sendo definido como uma cesta p_N^K de loterias, e $k = 1, \ldots, K$ como um conjunto K de probabilidades $\alpha_K \geq 0$, sendo que o somatório $\sum_K \alpha_K = 1$. O cupom de loteria $\left(L_1, \ldots, L_K; \alpha_1, \ldots, \alpha_K\right)$ é a mais arriscada alternativa que produz a simples loteria L_K com probabilidade α_K para $k = 1, \ldots, K$.

Se tivermos um conjunto de loterias com suas probabilidades determinadas, podemos reduzir o conjunto de probabilidades e cupons de loterias através da equação abaixo:

$$p_n = \alpha_1 p_n^1 + \cdots + \alpha_K p_n^K \tag{3.10}$$

Uma loteria pode ser reduzida a um espaço de loterias, de tal forma a termos a probabilidade de cada evento e o espaço de cada loteria multiplicada como no modelo a seguir:

$$L = \alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_K L_K \in \Delta\,(simplex) \tag{3.11}$$

Para um exemplo explicativo, suponha-se que temos as duas seções de loterias, L_1, L_2, L_3 e L_4, L_5, e suponha-se que $\alpha_{K=3} = \frac{1}{3}$ e $\alpha_{K=2} = \frac{1}{2}$. Temos dois tipos de distribuições, de tal forma a demonstrarmos que podemos transformar dois conjuntos de loterias compostas em um sistema de loteria simples. Esta técnica pode definir como estes conjuntos podem ser distribuídos.

$$\alpha_{k=3} = \frac{1}{3}\begin{cases} L_1 = (1,0,0) \\ L_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) \\ L_3 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) \end{cases} \qquad \alpha_{k=2} = \frac{1}{2}\begin{cases} L_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \\ L_5 = \left(\frac{1}{2}, 0\ \frac{1}{2}\right) \end{cases} \tag{3.12}$$

Multiplicando $(\alpha_{K=3})[L_1, L_2, L_3]$, temos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, o que em termos práticos seria utilizar o modelo $L_{K=3} = \alpha_{K=3} L_1 + \alpha_{K=3} L_2 + \alpha_{K=3} L_3 \in \Delta$, e para $(\alpha_{K=2})[L_4, L_5]$, o resultado será $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Agora mudando o mesmo modelo para $L_{K=2} = \alpha_{k=2} L_4 + \alpha_{K=2} L_5 \in \Delta$, o que se quer demonstrar, é que $\sum_K \alpha_K = 1$, para $(k = 3; K = 2)$, e também $\sum_n p_n = 1$.

Note-se que um sistema com várias loterias e várias probabilidades pode ser interpretado como uma combinação convexa de todas as loterias envolvidas, em um sistema linear (esta será a regra de ouro do modelo *vN-M*, analisado mais adiante). O que o ilustrativo exemplo de *Mas-Colell*, *Whinston*, e *Green* (2005) apresenta é a determinação de uma cesta de loterias com suas probabilidades, sabendo-se que *ex ante* estas probabilidades tem soma inteira, então reduzindo o espaço em uma combinação de apenas duas cestas e sucessivamente. Mantendo a condição de equilíbrio há a combinação de duas cestas finais.

Podemos estabelecer um comparativo para melhor compreensão do que necessariamente significa a redução de loterias. Para isto basta supor que cada uma das loterias acima reduzidas possa ser decomposta em outras duas denominadas L_1 e L_2. Cada uma delas têm como resultado os valores $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. No triângulo abaixo vemos uma representação de como o conjunto de loterias se comportaria num espaço de n loterias. Se for aplicável a fórmula $L = \alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_K L_K \in \Delta$ teríamos como resultado os mesmos pontos já calculados acima. Isto é possível em virtude da probabilidade dos dois eventos serem iguais, ou seja, $\alpha = \frac{1}{2}$. Veja a combinação de loterias da figura 8.

Na linha do conceito de preferência, é possível agora determinar como o axioma da independência pode ser um divisor de águas na definição de um espaço de eventos independentes. Para isso, será necessário rever o conceito de racionalidade clássica.

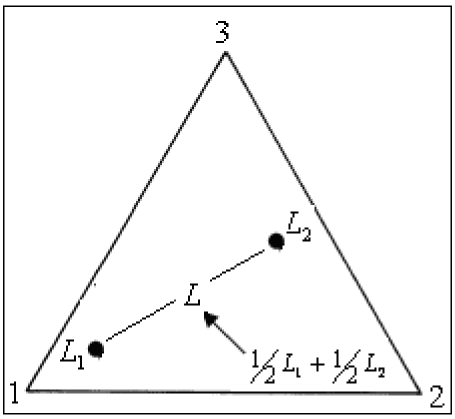


Figura 8: Decomposição de um Conjunto de Loterias
Fonte: Mas-Colell, A. Whinston, Michel D, Green, Jerry R. Microeconomic Theory, Oxford University Press, 2005.

Um tomador de decisão se utiliza de preceitos racionais (ainda não analisaremos os efeitos da racionalidade) para escolher. Assim sua decisão (na forma clássica) obedece necessariamente a dois axiomas: transitividade e completeza. O tomador de decisão também precisa de uma ordenação de preferências $\succsim$ e um conjunto de alternativas $\mathcal{L}$.

Suponha-se que tenhamos uma relação de preferência $\succsim$ num espaço simples de loterias $\mathcal{L}$, que é contínuo se para algumas loterias do tipo $L, L', L'' \in \mathcal{L}$. Veja os dois conjuntos na ótica de *Mas-Colell*, *Whinston*, e *Green* (2005).

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \succsim L''\} \subset [0,1] \tag{3.13}$$

e

$$\{\alpha \in [0,1] : L'' \succsim \alpha L + (1-\alpha)L'\} \subset [0,1] \tag{3.14}$$

são fechados.

Para explicar estes dois modelos suponha-se, como exemplo, que uma pessoa precise decidir entre dois eventos: viajar de carro ou ficar em casa. Determina-se um espaço de loterias em que L'' significa viajar de carro e L' ficar em casa. Nota-se que $\alpha \in (0,1)$ pode ser entendido como uma medida do espaço de loterias.

Assim temos os payoffs:

L' = I ficar em casa

L'' = II viajar de carro

Para haver independência entre dois ou mais eventos é preciso ordem na continuidade. Assim, voltando ao problema, suponha-se que haja um terceiro evento do tipo L''' =III "morte por acidente de carro". Suponha também que neste modelo não haja a desenvolvimento de expectativas entre as variáveis, apenas ordenações.

Assim, se a ordenação acima "viajar de carro" e "ficar em casa", supuser-mos que passeio de carro é preferido a ficar em casa $II \succ I$, temos uma ordem estabelecida $L'' \succ L'$. Agora se outro evento ocorrer L''' "morte por acidente de carro" podemos ou não ter um evento independente, ou seja, $L'' \succ L'''$.

Payoffs:

Cenário I

$L'' \succ L'$ implica em viajar de carro $\succ$ ficar em casa

Cenário II

$L'' \succ L'''$ implica em viajar de carro $\succ$ morte por acidente de carro.

$L' \succ L'''$ implica em ficar em casa $\succ$ morte por acidente de carro.

Assim temos

$L'' - L''' \succ L' - L'''$ pelo modelo de *vN-M* a variável L''' não interfere. Assim:

$L'' \succ L'$. Ou seja, temos a mesma relação de ordem.

Na situação acima "passeio de carro" ainda é preferido a "ficar em casa". Diferente do modelo de preferências lexicográficas[41], a ordem ainda se mantém, o que pode à primeira vista parecer ilógico, pois de certo algumas pessoas, senão a maioria indicaria a loteria "ficar em casa" em exposto ao evento "morte por acidente de carro". Neste instante haverá problemas com o axioma da Independência. Desta forma, um terceiro evento, mesmo que seja significativamente impactante para uma cesta de decisões não necessariamente interfere na ordem dos fatores, pois na doutrina clássica a ordem sempre se preserva.

Usando a suposição de que duas loterias com três unidades, determinadas por, $L' = (p_1, p_2, p_3)$ e $L'' = (p_1, p_2, p_3)$ são misturadas para formar uma terceira $L''' = (p_1, p_2, p_3)$, temos como resultante a combinação $L'' = \alpha L' + (1-\alpha)L'''$. O resultado da relação não depende de uma particular terceira loteria L'''. Podemos então escrever matematicamente a exposição de *Mas-Colell*, *Whinston*, e *Green* (2005) abaixo.

A relação de preferência $\gtrsim$ no espaço de loterias simples $\mathcal{L}$ satisfaz o axioma da Independência se para todos $L', L'', L''' \in \mathcal{L}$ e $\alpha \in (0,1)$ sendo que.

$$L'' \gtrsim L' \text{ se e somente se } \alpha L'' + (1-\alpha)L''' \gtrsim \alpha L'' + (1-\alpha)L''' \qquad (3.15)$$

41 segundo *Fernando de H. Barbosa*, "Microeconomia: teoria, Modelos Econométricos e Aplicações a Economia Brasileira, IPEA, 1985, p 8, "este tipo de preferência lembra o processo de elaborar um dicionario, e daí o seu nome. No dicionário as palavras são citadas de acordo com a primeira letra no caso de palavras com a mesma letra inicial, a posição da palavra será dada pela segunda letra; quando duas letras coincidem, a posição será dada pela terceira letra, e assim por diante."

Note-se que a combinação $\alpha L'' + (1-\alpha)L'''$ é fortemente preferível à combinação $\alpha L' + (1-\alpha)L'''$. Isto demonstra que na verdade temos $\alpha L''$ fortemente preferível à $\alpha L'$. Voltando ao exemplo do motorista L''' que representa "morte por acidente de carro" não interferindo na possibilidade de arranjo da relação L', L''.

Como suporte do trabalho, é necessário definir as principais propriedades fundamentais do modelo de Utilidade Esperada. Para isto, nos socorremos dos trabalhos de *Cusinato* (2003) e *Mas-Colell*, *Whinston*, e *Green* (2005) em virtude de melhor explanação didática sobre o assunto.

Cusinato (2003) apresenta quatro principais propriedades que atingem diretamente os modelos de utilidade esperada. Mesmo na contramão da utilidade subjetiva (de *Friedmann* e *Savage*[42]) novas teorias como a *NEU*, (Utilidade não Esperada) ainda não conseguem estabelecer uma metodologia agregadora para o processo de escolha, de forma que se possa desprender totalmente dos axiomas básicos que definem a racionalidade.

Como veremos na Teoria da Utilidade não Esperada, na Neuroeconomia e em qualquer outra teoria que estude comportamentos cognitivos, ainda se conseguiu explicar, de maneira satisfatória, o processo da escolha de forma consolidada.

Mantendo a linha de raciocínio temos as seguintes propriedades que interferem na Função de Utilidade Clássica.

a) da linearidade nas probabilidades
b) da separabilidade aditiva
c) da razão comum
d) da conseqüência comum.

Segundo *Cusinato* (2003), há uma relação de efeito circular entre cada uma destas propriedades, de tal modo que a da linearidade nas probabilidades leva a separabilidade aditiva, que consequentemente leva a razão comum, e assim por diante.

---

[42] Milton Friedman (1912–2006), economista americano, um dos responsáveis pela Teoria Monetarista; Leonard Jimmie Savage (1917–1971), estatístico e matemático americano.

3.2.1. Linearidade nas Probabilidades

Em primeiro lugar, devemos perceber que todas as explicações sobre loteria precisam de padrão geométrico na possibilidade de construir um modelo matemático consistente. Observando a figura 9, e ao teorema do triangulo eqüilátero $p = \sum_{i=1}^{3} p_i = 1$, podemos chegar a muitas suposições interessantes. Usando o modelo $U = \sum u_n p_n$ de *vN–M* adaptado a uma função de utilidade podemos escrevê-la como $U = u_1 p_1 + \cdots + u_N p_N$.

Agora, seguindo a propriedade do triângulo eqüilátero (relembrada como $p = \sum_{i=1}^{3} p_i = 1$), tal que podemos incorporá-la à função de utilidade de modo que tenhamos a utilidade parcial e sua função coligada pelo sistema $u_1 = u(x_1), u_2 = u(x_2), u_3 = u(x_3)$. Por fim, escrevemos nosso modelo de utilidade esperada pela função $U = u(x_1)p_1 + u(x_2)p_2 + u(x_3)p_3$.

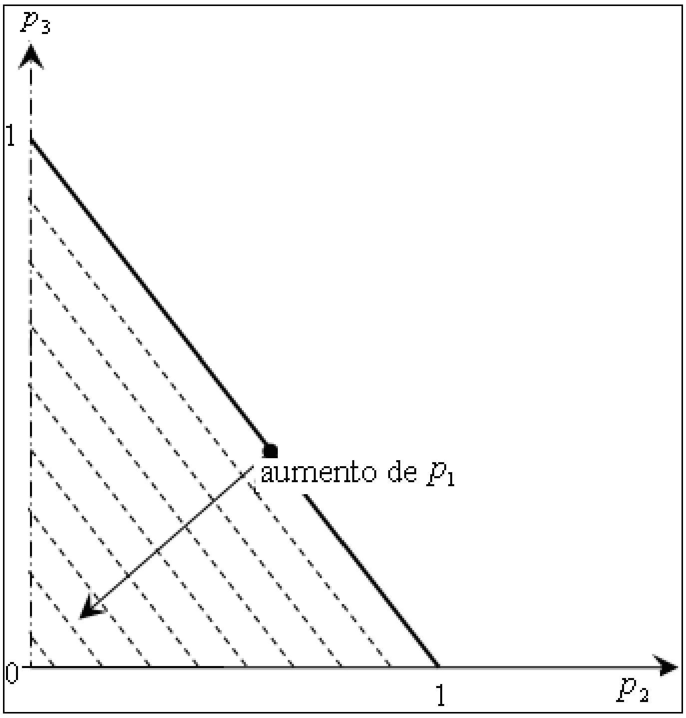


Figura 9: Direção do aumento de p_1
Fonte: Cusinato, R. Tiecher. Teoria da Decisão sob Incerteza e a Hipótese da Utilidade Esperada: Conceitos Analíticos e Paradoxos. UFRGS, Dissertação de Mestrado em Economia, 2003.

Assim, se o sistema como um todo é linear em probabilidades (como é a tônica do modelo da Utilidade Esperada), sua função utilidade expansivamente deverá sê-lo.

Partindo das figuras 10 e 11 ilustrativas são possíveis de se perceber, primeiramente, uma representação do triângulo de *Marschak-Machina* e posteriormente, curvas de preferência e de utilidade.

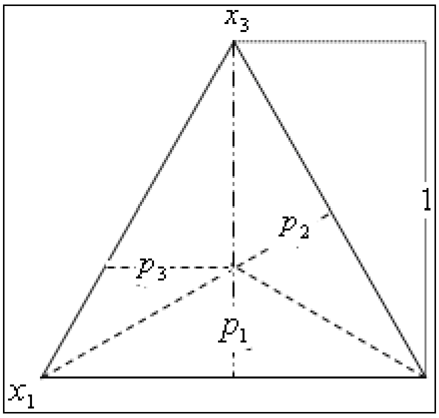


Figura 10: Triangulo de Marschak-Machina
Fonte: Cusinato, R. Tiecher. Teoria da Decisão sob Incerteza e a Hipótese da Utilidade Esperada: Conceitos Analíticos e Paradoxos. UFRGS, Dissertação de Mestrado em Economia, 2003.

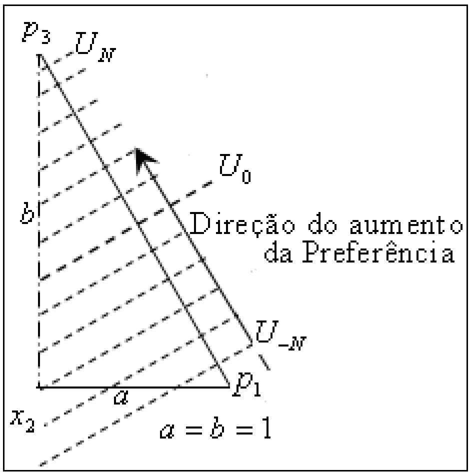


Figura 11: Curvas de Indiferença
Fonte: Cusinato, R. Tiecher. Teoria da Decisão sob Incerteza e a Hipótese da Utilidade Esperada: Conceitos Analíticos e Paradoxos. UFRGS, Dissertação de Mestrado em Economia, 2003.

Obedecendo a relação $p = \sum_{i=1}^{3} p_i = 1$, podemos isolar p_2 (veja Figura 11) e defini–lo como $1 - (p_1 + p_3) = p_2$. Substituindo a expressão na fórmula acima e resolvendo para p_2 (como variável independente) a função utilidade se transforma em $U = u(x_1)p_1 + u(x_2)(1 - p_1 - p_3) + u(x_3)p_3$.

Para um desenvolvimento mais simplificado, o resultado acima deve ser pensado como um modelo de função afim do tipo $y - y_o = a(x - x_0)$. Para isso devemos isolar a função que representa $\{y - y_o\}$. Deste modo, usando a variável p_3 podemos reescrever a equação no modelo abaixo. Para uma perfeita construção do que queremos demonstrar, é se utilidade e probabilidade se mantêm lineares. Assim:

$$p_3 = \left[\frac{u(x_2) - u(x_1)}{u(x_3) - u(x_2)}\right] p_1 + \frac{U - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)}, \tag{3.16}$$

Pela equação acima, é possível deve-se perceber que quando $\{a\}$ (conforme $y - y_o = a(x - x_0)$) aumenta, existe uma inclinação entre p_3 e p_1. Note-se que, ao usarmos o instituto da derivada total na equação 3.16, chegamos aos mesmos moldes da Taxa Marginal de Substituição, o que resulta em.

$$dp_3 = \left[\frac{u(x_2) - u(x_1)}{u(x_3) - u(x_2)}\right] dp_1 + d\left\{\frac{U - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)}\right\};\ \frac{dp_3}{dp_1} = \left[\frac{u(x_2) - u(x_1)}{u(x_3) - u(x_2)}\right] \tag{3.17}$$

Agora podemos supor que as cestas de funções de utilidade parciais (apresentadas no início desta seção) podem variar entre si como se cada utilidade assumisse um comportamento aditivo e independente (comportamentos apresentados no segundo capítulo deste trabalho). Para uma perfeita inferência faremos duas suposições.

Alternativa 1 - se $u(x_3) < u(x_1)$, $a < 0$.

Alternativa 2 - se $u(x_3) > u(x_1)$, $a > 0$

Tomando como referência o axioma da independência e seguindo o ordenamento monotônico $x_3 > x_2 > x_1$ é certo que o resultado que importará será o da alternativa dois, pois é evidente que teremos mais utilidade em $u(x_3)$ do que em $u(x_1)$. Em vista disto, podemos transferir o resultado de p_3 em p_2 como se verá a seguir. Assim, temos a primeira vista a relação triangular, já determinada pela figura 12, escrita na forma. Suponha também que podemos fazer a transformação $U = U_{0 \ldots N}$,veja a figura 10. Esta transformação é uma extensão da função geral de utilidade de zero a um valor {N} qualquer, mantendo as mesmas cestas de utilidade parciais. Agora, apresentamos a relação de probabilidades.

$$1-(p_1+p_3)=p_2 \text{ e} \tag{3.18}$$

Pelo exemplo da equação 3.16 podemos analisar p_3 como condição da variação dos elementos que compõe a utilidade geral U, agora $U_{0...N}$. Note-se que as probabilidades são lineares.

$$p_3=\left[\frac{u(x_2)-u(x_1)}{u(x_3)-u(x_2)}\right]p_1+\frac{U_{0...N}-u(x_2)}{u(x_3)-u(x_2)} \tag{3.19}$$

Para parecer mais fácil entender, suponha que temos um espaço de utilidades gerais onde variam de posição em um triângulo, conforme alocamos as cestas de utilidade parciais e as probabilidades correspondentes.

Susbtituindo p_3 em p_2, através das equações 3.18 e 3.19, pode-se obter a equação 3.20, como mostra o modelo abaixo. Toda vez que transformamos uma das probabilidades como elemento independente, tomamos as demais como funções correspondentes, como $p_3 = vi$ (variável independente) e $p_2 = +1-K-p_2(p_1)$.

$$p_2=1-p_1+\frac{U_{0...N}-u(x_1)p_1-u(x_2)+u(x_2)p_1}{u(x_2)-u(x_3)} \tag{3.20}$$

Podemos estabelecer em nosso modelo que há, agora, uma outra variável independente. Isto quer dizer que se p_1 for independente, p_2 dependeria necessariamente da alocação das cestas de utilidade parciais. Para uma exemplificação melhor suponha que $U_{0...N}=0$. Nossa equação se reduziria a

$$p_2=1-p_1+\frac{(u(x_1)+u(x_2))p_1-u(x_2)}{u(x_2)-u(x_3)}=\left(\underbrace{\frac{u(x_1)+u(x_2)}{u(x_2)-u(x_3)}}_{L}-1\right)p_1+\left(1-\frac{u(x_2)}{u(x_2)-u(x_3)}\right)$$

Note-se que $0 \le L \le 1$ define de que forma o comportamento de p_2 se dará, isto é, existem regiões proibidas de probabilidade que L não assume, pois as mesmas probabilidades, pois existe uma relação de equivalência. Assim, se a cesta $u(x_2)$ for muito menos preferida a $u(x_1)$ e $u(x_3)$, ou $u(x_2)$ próxima à zero, a termos $\left(1-\frac{u(x_1)}{-u(x_3)}\right)$, e as remanescentes se apresentarem como $u(x_1)\sim u(x_3)$,(note-se que $u(x_3) \neq 0$), a indiferença, ou $u(x_1) = u(x_3)$ produz a situação de $L = 1$, o que limita $p_2 \cong 1$. A influência da probabilidade p_1 é nula. Tudo dependeria apenas da alocação da escolhas das cestas.

Continuando, três equações (3.18; 3.19 e 3.20) serão muito úteis para estudarmos o comportamento das probabilidades na alocação das cestas de Utilidade Parciais.

Agora supondo que p_1, p_2, p_3 e se comportam como em um sistema binário de probabilidades $(0,1)$. O que queremos ver é a ótica da distribuição de probabilidades pela alocação de escolha das cestas.

Se p_1=0, obedecendo ao triângulo de *Marschak-Machina* ($1 = p_1 + p_2 + p_3$), temos.

$p_1 = 0; 1 = 0 + p_2 + p_3$ (veja figura 9).

$$\text{Se } p_1 = 0, p_2 = 1 - \left(\frac{U_{0...N} - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)} \right), p_3 = \frac{U_{0...N} - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)} \tag{3.21}$$

A alocação das probabilidades se distribui entre p_2, p_3, assim:

$$1 = \left(p_2 = \left(1 - \frac{U_{0...N} - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)} \right) \right) + \left(p_3 = \frac{U_{0...N} - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)} \right)$$

Se $p_1 = 1$, $1 = 1 + (p_2 + p_3) = 0$ (veja figura 8).

$$\left[\frac{u(x_2) - u(x_1)}{u(x_3) - u(x_2)} \right] p_1 = \frac{u(x_2) - U_{0...N}}{u(x_3) - u(x_2)}; \ p_1 = \frac{u(x_2) - U_{0...N}}{u(x_2) - u(x_1)} \tag{3.22}$$

e

$$p_2 = 1 - \frac{U_{0...N} - u(x_1)}{u(x_2) - u(x_3)}, p_3 = \frac{U_{0...N} - u(x_1)}{u(x_3) - u(x_2)} \tag{3.23}$$

O que pela prova real é $\left(p_2 = 1 - \frac{U_{0...N} - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)} \right) + \left(p_3 = \frac{U_{0...N} - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)} \right) = 0$, o que resultaria em uma solução do tipo $1 = 0$? Isto ocorre porque as probabilidades associadas às cestas se correspondem na forma de um simplex tridimensional, ou seja, as mesmas probabilidades são combinações convexas aditivas, como mostram as figuras 8 e 12. Logo economicamente isto significa que toda cesta $u(x_2)$ é preferida às demais. Se voltarmos à equação 3.22 e fizermos alguns ajustes teremos.

$\left[\dfrac{u(x_2)-u(x_1)}{u(x_3)-u(x_2)}\right]p_1 = \dfrac{u(x_2)-U_{0\ldots N}}{u(x_3)-u(x_2)}; U_{0\ldots N} = 0 \Rightarrow \left[\dfrac{u(x_2)-u(x_1)}{u(x_3)-u(x_2)}\right]p_1 = \dfrac{u(x_2)}{u(x_3)-u(x_2)}$. Sendo $u(x_2)$ preferida às demais temos: $(u(x_2)-u(x_1))p_1 = u(x_2)$. Como $u(x_2) >>> u(x_1)$ resulta em nosso modelo que $p_1 \cong 1$, ou seja, se aproxima de $\{1\}$, à medida que uma das cestas é bastante preferida às demais. Isto causa um problema na alocação das probabilidades p_2 e p_3, veja a figura 11.

Agora passamos para outro problema determinante da alocação das cestas. Pela construção da equação 3.23, é possível notar que p_2 e p_3 apresentam "denominadores problemáticos". Estes denominadores responsáveis por alguns problemas no processo de escolha.

Para começarmos primeiramente devemos delimitar nosso campo de trabalho a funções que representem um sistema linear e possa ser analisável em um espectro econômico. Assim, podemos reescrever as equações que envolvem probabilidades como funções Afins, dadas pelo modelo geral, $y = a_i x + b_i, -k \leq i \leq k, k \in \Re$.

Note-se que podemos agora considerar os coeficientes da equação afim equivalentes aos coeficientes da equação p_3. Neste caso, a equação fica "separável", como mostra o modelo abaixo.

$$\underbrace{a_i = \frac{u(x_2)-u(x_1)}{u(x_3)-u(x_2)}}_{coef.angular}; \underbrace{b_i = \frac{U_{0\ldots N}-u(x_2)}{u(x_3)-u(x_2)}}_{coef.linear} \tag{3.24}$$

Lembre-se de que esta função proveio da equação p_3.

Como já demonstramos que as probabilidades são conjunturalmente associadas às alocações das cestas, ou o "efeito arraste" destas. O termo "efeito arraste" faz-se alusão a Física, pois as probabilidades "levam consigo" as cestas associadas de utilidade parcial.

Lembramos que ainda falta demonstrar o efeito das variações de utilidade geral num espaço qualquer. Isto quer dizer que medida que as cestas são escolhidas o efeito da utilidade muda em um plano, mas mesmo assim se mantém linear. Agora trataremos deste assunto. Antes disss, suponha que tenhamos uma família de utilidades gerais do tipo $U_{0\ldots N}$, nos mesmos moldes do que já foi proposto.

Primeiramente devemos manter nosso conjunto enésimo de retas do tipo $y = a_i x + b_i$ .Elas serão de grande utilidade na definição de uma família de retas de utilidade geral. Deve ser notado através das figuras 9 e 11 que o coeficiente linear desta família de retas deva obedecer a uma seqüência de coeficientes lineares distribuídos na forma de $\{b_{-n}, b_{-n+i}, \cdots, b_{-i}, \cdots, b_{-1}, b_0, b_1, \cdots, b_i, \cdots, b_{n-i} b_n\}$.

Em nosso exemplo, os coeficientes lineares não assumem forma negativa, ou seja, a família de coefiencientes usda será $\{b_0, b_1, \cdots, b_i, \cdots, b_{n-i} b_n\}$. Relembrando que a linearidade nas probabilidades é característica da funcao de Utilidade Esperada, devemos perceber que há uma forte relação de independência do tipo $x_3 > x_2 > x_1$. Uma primeira conclusão a tirar é que para termos $b_0 = 0$ (veja equação 3.24) implica que teremos $U = u(x_2)$ no equilíbrio. Isto é, toda a utilidade geral se concentrará na cesta $u(x_2)$ e em decorrência disso, com probabilidade $p_2 = 1$.

Agora, voltando ao que seria o coeficiente linear negativo, ou seja, os elementos da seqüência de coeficientes lineares $\{b_i\}$<0, também escritos na forma de $\{b_{-n}, b_{-n+i}, \cdots, b_{-i}, \cdots, b_{-1},\}$ traduzem a suposição de que para $b_0 < 0 \Rightarrow (U_{0\ldots N} < u(x_2))$. Supondo que o nível de escolhas entre as cestas $u(x_2),(x_3)$ mantenha uma ordenação bem comportada, como crescente, para o nosso "coeficiente linear" ser negativo, a única possibilidade seria a de que a seqüência de utilidades, como o exemplo de $U_{0\ldots N} = U_0$, serem, menor do que a cesta de utilidade parcial $u(x_2)$. Mas até certo ponto isto seria ilógico em nosso modelo. Como a distribuição de probabilidades não assume característica negativa, mas a alocação das cestas sim. Um exemplo rasoável de utilidade negativa, neste caso, seria o "O Problema da Tragédia dos Comuns". No quarto capítulo a situação de utilidade negativa será mais bem demonstrada.

Agora, escrevendo $\{b_i\}$>0, ou pela seqüência $\{b_1, \cdots, b_i, \cdots, b_{n-i} b_n\}$ voltaremos à situação em que temos relação linear $b_0 > 0 \Rightarrow (U_{0\ldots N} > u(x_2))$. Suponha a equação geral (considerando $U_{0\ldots N} = U$), $U_{0\ldots N} = u(x_1)p_1 + u(x_2)(1 - p_1 - p_3) + u(x_3)p_3$. Uma primeira consideração é a da figura 8, em que devemos sempre considerar a relação

$1 = p_1 + p_2 + p_3$. Para a questão da Utilidade Geral, $U = u(x_1)p_1 + u(x_2)p_2 + u(x_3)p_3$, temos, *a priori*, em três soluções de canto, $U = u(x_1); u(x_2); u(x_3)$.

Suponha a construção de $U_{0...N} = U$ como função da equação 3.19. Vamos demonstrar que a linearidade de U se mantém, não importando a alocação das cestas. Assim, buscando a equação 3.19, abaixo. Temos.

$$p_3 = \left[\frac{u(x_2) - u(x_1)}{u(x_3) - u(x_2)}\right] p_1 + \frac{U_{0...N} - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)} \tag{3.25}$$

Agora substituindo a equação 3.25 em $U_{0...N}$ montamos a equação geral.

$$U_{0...N} = \underbrace{u(x_1)}_{T_1} p_1 + u(x_2)p_2 + \underbrace{u(x_3)\left[\frac{u(x_2) - u(x_1)}{u(x_3) - u(x_2)}\right]}_{T_2} p_1 + \frac{U_{0...N} - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)} u(x_3) \tag{3.26}$$

Note-se que temos as duas primeiras cestas de utilidades parciais e suas devidas probabilidades associadas. Uma das probabilidades é “livre”, sendo p_3. Ocorre que p_1 está influindo no conjunto de cestas determinados por T_1 e T_2. À medida que aumenta a probabilidade de p_1, associada a isso, a relação $1 - p_3 = p_1 + p_2$. Se a variável livre p_3 for máxima, isto é, $\{1\}$, $U_{0...N}$ se restringe ao conjunto de cestas $\frac{U_{0...N} - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)} u(x_3)$.

Assim, $U_{0...N} = \frac{U_{0...N} - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)} u(x_3) = U_{0...N}\left(1 - \frac{u(x_3)}{u(x_3) - u(x_2)}\right) = \frac{-u(x_2)u(x_3)}{u(x_3) - u(x_2)}$,

ou, $$U_{0...N}\left(\frac{-u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)}\right) = \frac{-u(x_2)u(x_3)}{u(x_3) - u(x_2)} \Rightarrow u(x_3) \tag{3.27}$$

Quando p_3 aumenta, para a manutenção do modelo, ele “carrega” consigo a cesta de utilidade esperada $u(x_3)$. Quanto maior a relação entre $u(x_3)$ e $u(x_2)$, ou seja, $u(x_2) <<< u(x_3)$, e assim temos $U_{0...N} = u(x_3)$.

Para $p_2 = 1$ e $p_1 = 0$, ou seja, agora temos p_2 como variável independente, fica bastante fácil de determinar $U_{0...N}$. Basta substituir os valores na equação 3.26 e temos.

$$U_{0..N} = u(x_2)p_2 + \frac{U_{0..N} - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)}u(x_3),\ U_{0..N}\left(1 - \frac{u(x_3)}{u(x_3) - u(x_2)}\right) = u(x_2)\left(p_2 - \frac{u(x_3)}{u(x_3) - u(x_2)}\right), \quad (3.28)$$

Como é fácil de perceber, novamente, se $p_2 = 1$, $U_{0...N} = u(x_2)$.

Para $p_1 = 1$, temos.

$U_{0...N} = u(x_1) + u(x_3)\left(\frac{u(x_2) - u(x_1)}{u(x_3) - u(x_2)}\right) + \frac{U_{0...N} - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)}u(x_3)$, que,

$$U_{0..N}\left(1 - \frac{u(x_3)}{u(x_3) - u(x_2)}\right) = u(x_1) - \frac{u(x_3)u(x_1)}{u(x_3) - u(x_2)}\ U_{0..N}\left(1 - \frac{u(x_3)}{u(x_3) - u(x_2)}\right) = u(x_1)\left(1 - \frac{u(x_3)}{u(x_3) - u(x_2)}\right), \quad (3.29)$$

logo, $U_{0...N} = u(x_1)$.

Para todos os cálculos de $U_{0...N}$ deve ser observado que existe uma ordenação das cestas. Faz-se necessário perceber que $(u(x_3) > u(x_2))$, ou seja, havendo duas cestas indiferentes $(u(x_3) \sim u(x_2))$, ocorrerá um problema bastante grave que discutiremos mais adiante.

Agora, então, faremos algumas manipulações algébricas com as equações 3.37, 3,28 e 3.29 de modo a demonstrarmos como é possível $U_{0...N}$ variar quando as relações entre as escolhas das cestas não obedecem a um ordenamento comportado.

Para a explicação ficar mais simples será utilizado apenas uma equação 3.28, pois o exemplo vale para as demais. Assim temos.

$$U_{0...N}\left(1 - \frac{1}{u(x_3) - u(x_2)}\right) = u(x_2)\left(p_2 - \frac{1}{u(x_3) - u(x_2)}\right)$$

Usando parte da equação 3.28, determinaremos algumas suposições. Havendo, a possibilidade da cesta $u(x_3) >>> u(x_2) \Rightarrow \left(\frac{1}{u(x_3) - u(x_2)}\right) \to 0^+$ ela será positiva a direita, agora, se a cesta $u(x_3) <<< u(x_2) \Rightarrow \left(\frac{1}{u(x_3) - u(x_2)}\right) \to 0^-$ ela será negativa à esquerda. Esta relação reflete o limite de duas cestas distantes o bastante para mudar o sinal do denominador da equação 3.28.

Obedecida à ordenação, o que percebemos é que em um conjunto de cestas próximas, o estudo do sinal "à direita" ou "à esquerda", deve ser observado, o que obrigatoriamente resulta em $U_{0\ldots N}\left(1-\left(0^{+},0^{-}\right)\right)\rightarrow U_{0\ldots N}$, isto é, a função Utilidade Geral passa de um valor positivo para outro, negativo. Agora se $u(x_3)\sim u(x_2)$ poderemos ter um problema bastante complicado, pois a função tende ao resultado $U_{0\ldots N}\times\left(\infty^{-}\right)$, ou seja, nenhum pouco aceitável em Economia.

Podemos por fim, demonstrar que modificando qualquer das equações apresentadas fica bastante simples de tornar uma função de Utilidade Geral em uma família de retas paralelas.

Para demonstrar isso, primeiramente podemos usar a equação 3.28 $U_{0\ldots N}\left(1-\frac{1}{u(x_3)-u(x_2)}\right)=u(x_2)\left(p_2-\frac{1}{u(x_3)-u(x_2)}\right)$. Partindo do pressuposto que temos uma função afim do tipo $y=a_i x+b_i$, e que podemos usar a transformação: $y=U_{0\ldots N}$, $a_N=\left(1-\frac{1}{u(x_3)-u(x_2)}\right)$. Note-se que também podemos por simples manipulação algébrica escrever uma equação do tipo Afim. Deste modo, temos:

$U_{0\ldots N}a_N=u(x_2)p_2+u(x_2)\underbrace{\left(\frac{-1}{u(x_3)-u(x_2)}\right)}_{a_N-1}$, $U_{0\ldots N}a_N=u(x_2)p_2+u(x_2)(a_N-1)$ e por fim, $U_{0\ldots N}=\frac{1}{a_N}u(x_2)p_2+u(x_2)\left(a_N-\frac{1}{a_N}\right)$. A função apresentada é totalmente linear. Note que para $p_2=1$ temos $U_{0\ldots N}=u(x_2)(a_N)$, desde que obedecida as relações de escolha e ordenação das cestas $u(x_3)$ e $u(x_2)$.

Ressaltando o que já apresentamos, o modelo de uma família de funções de utilidade afins pode agora ser escrito para $U=U_{0\ldots N}$ como $\{U_{-n},U_{-n+i},\cdots,U_{-i},\cdots,U_{-1},U_0,U_1,\cdots,U_i,\cdots,U_{n-i}\}$, ou seja, temos agora diversas funções de U de $U_{0\ldots N}a_N=u(x_2)p_2+u(x_2)(a_N-1), N\in Z$.

Ainda falta determinarmos a situação de cestas similares, e o que elas podem acarretar em um processo de escolha. Assim, partindo da equação 3.24, podemos, a partir da dedução de a_i (lembre-se que usamos a equação de p_3 para determinarmos as coordenadas). Esta equação será a base para demonstarmos o comportamento das cestas de utilidades. Supomos então:

$$a_i = \frac{u(x_2)-u(x_1)}{u(x_3)-u(x_2)} = u(x_2)-u(x_1) = a_i(u(x_3)-u(x_2)) = (1-a_i)u(x_2) = a_i u(x_3) + u(x_1) \qquad (3.30)$$

Como condição da equação 3.31, é possível supor a_i como o limite de uma função e, assim, obter hipóteses *a priori*. Esta hipótese é a definição das soluções extremas do processo de escolha das cestas. Deste modo temos.

$$\underset{[u(x_3)-u(x_2)]\to 0}{Lim(a_i)} = \frac{u(x_2)-u(x_1)}{u(x_3)-u(x_2)},\ a_i \to \infty \text{ e } \underset{[u(x_2)-u(x_1)]\to 0}{Lim(a_i)} = \frac{u(x_2)-u(x_1)}{u(x_3)-u(x_2)},\ a_i \to 0 \qquad (3.31)$$

O primeiro limite será a referência à figura 13A, pois exemplica a possibilidade de haver indiferença (inelasticidade) entre duas cestas em um processo de escolha, já o segundo limite será referencia a figura 13B em que ocorre ordenamento de escolhas de duas cestas $u(x_3) > u(x_2)$, mas indiferença entre outras duas $u(x_2) \sim u(x_1)$.

Agora, supondo todas as possibilidades algébricas de a_i temos.

$$a_i \begin{cases} 1^\circ \to u(x_2) - u(x_1) = 0 \\ 2^\circ \to u(x_3) - u(x_2) = 0 \\ 3^\circ \to u(x_2) \neq u(x_1) \\ 4^\circ \to u(x_3) \neq u(x_2) \end{cases} \qquad (3.32)$$

A primeira hipótese é definida pelo modelo de ordenamento de preferências tal que $u(x_2) - u(x_1) = 0$ ou $u(x_2) \sim u(x_1)$. Um indivíduo é indiferente entre escolher entre estas duas cestas. A equação 3.24, { $a_i = 0$ } reduzirá a função afim ao termo $y = b_i$.Como o termo { b_i } depende exclusivamente da relação $(u(x_3), u(x_2))$, ainda precisamos de uma análise mais detalhada através da próxima hipótese.

A segunda hipótese de 3.38 nos remete a situação em que $u(x_3)-u(x_2)=0$, ou $u(x_3)\sim u(x_2)$. O que acontece aqui é novamente a indiferença de escolha de cestas para um indivíduo. Os axiomas da independência e da monotonicidade das preferências não são obedecidos (veja figura 12 e linha pontilhada) e, nesta situação, isto pode acarretar sério problema na função geral de utilidade. Para uma melhor compreensão do problema usamos a equação 3.25 adaptada para exemplificar. Mais adiante constataremos que isto é resuldado das preferências serem lineares e a escolha no horizonte de eventos da linha pontilhada não ser satisfeita como ordenamento. Veja a figura 13, abaixo.

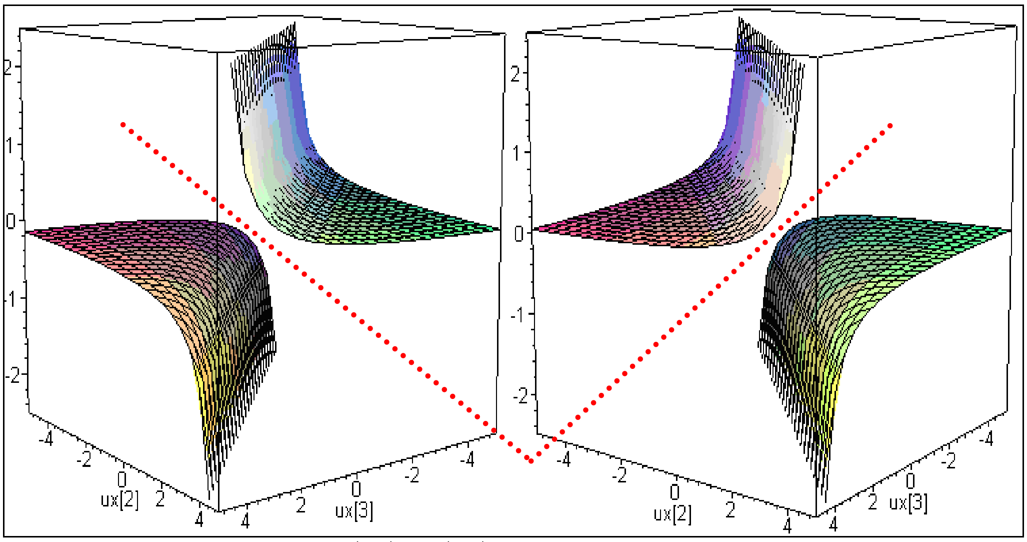


Figura 12: Utilidades Parciais $u(x_3)\sim u(x_2)$ e a Quebra de Simetria
Fonte: o autor

Veja-se que as duas equações apresentam problemas assintóticos quando surge a possibilidade de duas cestas $(u(x_3)\sim u(x_2))$ serem indiferentes. As linhas pontilhadas representam os "lugares proibidos" em que as escolhas apresentam inconsistências.

$$p_3=-\frac{\gamma.p_1}{u(x_3)-u(x_2)} \qquad\qquad p_3=\frac{\gamma.p_1}{u(x_3)-u(x_2)} \tag{3.33}$$

$$\begin{array}{ll} \gamma=u(x_2)-u(x_1) & \gamma=u(x_2)-u(x_1) \\ u(x_1)<u(x_2) & u(x_2)<u(x_1) \\ \gamma<0 & \gamma>0 \end{array} \tag{3.34}$$

A terceira e a quarta hipóteses nos remetem a $u(x_2)-u(x_1)=0$ ou $u(x_2)\neq u(x_1)$ e $u(x_3)-u(x_2)=0$, ou $u(x_3)\neq u(x_2)$. A hipótese da monotonicidade das preferências e ao axioma da independência, mantendo a estrutura linear.

O último caso a ser estudado podemos definir que há uma combinação convexa (muito parecida com que ocorre na figura 10) de segmentos de curvas tal que existe a hipótese de haver um feixe horizontal quando $a_i \to 0$ e $b_i \neq 0$, ou quando temos feixes verticais, em $a_i \to \infty$. A interpretação provém de duas suposições: a primeira Econômica; a segunda Matemática. Para a primeira interpretação invocamos novamente o instituto do axioma da independência que diz que uma cesta mantém a boa ordem quando for preferida, independente de outra cesta adicional.

Para a segunda suposição temos a seqüência monotônica $x_3 > x_2 > x_1$. Daqui, partimos então da suposição teórica de que quando temos uma seqüência monotônica em duas cestas indiferetes entre, mas diferentes a outra cesta, $x_3 \geq x_2 > x_1$, podemos ter problemas no processo de escolhas. Antecipadamente supomos que o coeficiente linear aqui seja dado por $b_i = 0$.

Usando a equação 3.25 podemos inferir que p_3 tende a manter linhas de indiferença verticais, desta forma, condicionando o status da curva de preferência para direção de p_3. Assim.

$$p_3 = \underbrace{\left[\frac{u(x_2)-u(x_1)}{u(x_3)-u(x_2)}\right]}_{a_i} p_1 + \underbrace{\frac{U_{0\ldots N}-u(x_2)}{u(x_3)-u(x_2)}}_{b_i=0} \tag{3.35}$$

A trilha levemente pontilhada indica a região em que as duas cestas $u(x_3)$ e $u(x_2)$ são indiferentes, o que ocasiona um espaço vertical de retas paralelas seguindo p_3. Percebe-se tal situação mais facilmente na figura 13A.

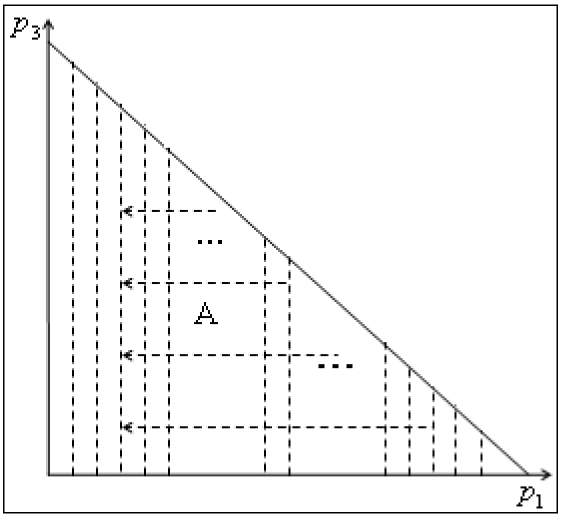


Figura 13A: Curvas de Indiferença Verticais
Fonte: Cusinato, R. Tiecher. Teoria da Decisão sob Incerteza e a Hipótese da Utilidade Esperada: Conceitos Analíticos e Paradoxos. UFRGS, Dissertação de Mestrado em Economia, 2003.

O primeiro triangulo retângulo da figura 13A é conseqüência da relação entre as cestas x_3 e x_1. Pela suposição de que as duas cestas são indiferentes, $a_i \to \infty$, descumprindo o axioma da independência, temos curvas de indiferença verticais, que expressarão o modo como os agentes decidirão por suas opções de escolha e neste caso, o efeito determinante compensatório tenderá para a cesta $u(x_3)$ porque um aumento da utilidade de $u(x_2)$ é insuficiente para compensar a perda de $u(x_3)$.

O segundo triângulo (veja figura 13B) apresenta curvas de indiferença horizontais, ou seja, quando temos $a_i \to 0$ e resta apenas o termo b_i.

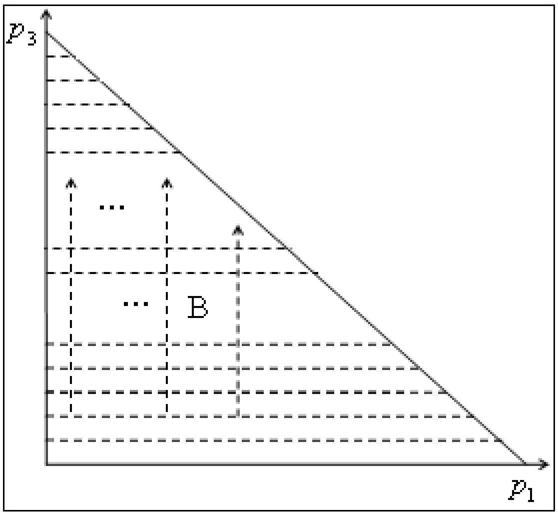


Figura 15B: Curvas de Indiferença Horizontais
Fonte: Cusinato, R. Tiecher. Teoria da Decisão sob Incerteza e a Hipótese da Utilidade Esperada: Conceitos Analíticos e Paradoxos. UFRGS, Dissertação de Mestrado em Economia, 2003.

Deve-se compreeder, *ex ante*, que se p_3 e p_1 aumentam, necessariamente causam um efeito de queda da utilidade total U. No modelo proposto, a utilidade total é uma medida de compensação em p_2. Os dois triângulos representam as variações diretas entre p_3 e p_1.

Para complementar esta primeira parte, sobre linearidade das probabilidades, necessitamos também apresentar outro tópico, que complementa a estrutura do ordenamento, necessária na Utilidade Esperada.

3.2.2. Separabilidade aditiva

Quanto um prêmio não interfere na soma de outros prêmios em uma loteria, em vista de todos serem independente (veja a seção 2.3.1), ocorre a conservação da integridade entre as probabilidades e as loterias. Pressupoe-se, então, o instituto da Separabilidade Aditiva. Isto quer dizer que

Se tivermos $P\left[\bigcup_{i=1}^{K} U_i\right] = \sum_{i=1}^{K} P(U_i) \therefore i = 1,\ldots,n$ cada utilidade é uma medida única de probabilidade de tal forma a preservar independentemente a soma de suas partes aditivas. Deste modo, não haverá a hipótese de $u_i \cap u_j \neq 0$.

Um exemplo elementar de separabilidade aditiva em probabilidade é uma loteria $L = (p_1, p_2, p_3)$ com elementos x_1, x_2, x_3. Obedecendo ao Triângulo de *Marschak–Machina* $\{1 = p_1 + p_2 + p_3\}$, podemos escrever x_1 com probabilidade p_1, x_2 com probabilidade p_2, e x_3 com probabilidade p_3. No quarto capítulo será demonstrado que a probabilidade para o modelo de Utilidade Não Esperada obedecerá a outro critério, definido por $P\left[\bigcup_{i=1}^{K} U_i\right] \neq \sum_{i=1}^{K} P(U_i) \therefore i = 1,\ldots,n$.

Marschak (1950) adverte que boa parte dos indivíduos não é racional todo o tempo. O autor define um vetor de conjuntos de eventos mutuamente exclusivos, como o conjunto de prospects (perspectivas) iguais a um. Mantendo um conjunto de elementos mutuamente exclusivos em um espaço euclidiano ocorre que cada evento contribui com uma parcela de todo o conjunto. O autor também faz uma crítica contundente à obra de *Von-Neumann*, em que apresenta o subtítulo "*VIII. Love of Danger Incompatible with the four Postulates*", no "VII Amor do Perigo Incompatível com os quatro postulados" tornando complicado afirmar e defender a simbólica idéia de "bem" e "mal" como uma suposição monótona e puramente racional.

Assim sendo, na próxima seção aprofundaremos um pouco mais a questão da utilidade esperada, mantendo a continuidade da linha de pensamento.

3.2.3. A Propriedade da Razão Comum

O fenômeno da Razão Comum ocorre quando, derivado do Paradoxo de *Allais*, temos pares de prospectos (misturas de pobabilidadedes). Isto é, quando temos o efeito certeza de *Allais*. Também podemos ver esta propriedade como a possibilidade de que em um sistema de escolhas não mais tenhamos um comportamento racional. Para ilustrarmos de maneira satisfatória esta propriedade nos reportaremos aos exemplos esclarecedores de dois autores de Economia, *Mark Machina* (2005) e *Schweinzer* (2000).

Para termos um efeito prático desta propriedade, suponha-se o modelo da equação 3.36 e a figura 14 como complemento, nos moldes do exemplo de *Schweinzer* (2000).

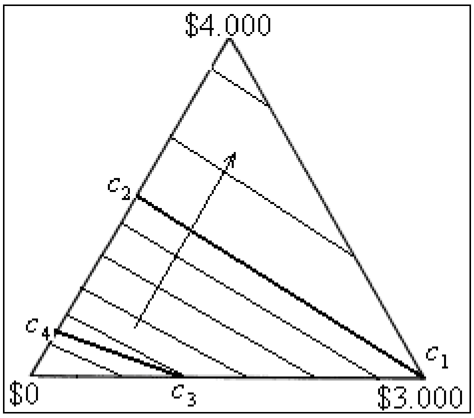


Figura 14: Preferências permitidas para o Efeito Certeza de *Allais*
Fonte: Schweizer, P. Expected Utility Theory and some Extensions, 2004.

Temos quatro possibilidades de escolhas duas a duas. Se $r = 1$, temos o mesmo modelo de *Allais.* O que se quer provar é quanto r varia em um comportamento racional em virtude de misturas de loterias em que as escolhas oferecidas sejam as mais próximas possíveis. Os indivíduos acabam indiretamente determinando o valor de r para suas escolhas. Assim temos o modelo em forma matemática:

$$\begin{aligned} d_1 &= \{X : p, 0 : 1-p\} \therefore d_2 = \{Y : q, 0 : 1-q\} \\ d_3 &= \{X : rp, 0 : 1-rp\} \therefore d_4 = \{Y : rq, 0 : 1-rq\} \end{aligned} \tag{3.36}$$

Temos então, $p > q, r \in (0,1)$ e $0 < X < Y$.

Agora supondo $p = 1, r = .25$, temos.

$$\begin{aligned} c_1 &= \{\$3.000 : 1, \$0 : 0\} \therefore c_2 = \{\$4.000 : .8, \$0 : .2\} \\ c_3 &= \{\$3.000 : .25, \$0 : .75\} \therefore c_4 = \{\$4.000 : .2, \$0 : .8\} \end{aligned} \tag{3.37}$$

O efeito certeza (de *Allais*) determina que os agentes escolham $c_1 \succ c_2$, e $c_3 \succ c_4$.

Nota-se, deste modo, que a ocorrência de desvios nas curvas de indiferença, no Triângulo de *Marchack–Machina*, caracteriza outro evento chamado de probabilidade por efeito de *fanning-out*, o que demonstraria o viés axiomático do Paradoxo da Independência. Para *Machina*, dependendo da alocação dos *prospects* (perspectiva ou expectativa) pode-se ter um efeito da razão comum negativo, com ou sem *fan-out*. O autor afirma que, à medida que os indivíduos apresentam aversão ao risco, passam a ter medo do resultado do "lançamento da moeda" e passam a querer mais garantias de resultado eficaz. Como se pode perceber na Teoria da Probabilidade Subjetiva de *Savage*, um experimento realizado por *Allais* em 1953 acabou provando que grande parte dos indivíduos comuns busca "o equivalente certeza", na hora em que são desafiados a escolher, mesmo que o prêmio de risco seja maior.

O Efeito da Razão Comum acabou levando a uma nova corrente de pensamento acerca do papel dos indivíduos sobre suas escolhas assim possibilitando separar eventos que produzissem reflexões (como se fossem espelhos), com resultados positivos ou negativos na ordem de preferências e de suas probabilidades de escolha.

Machina, *MacCrimmon* (1968), *Twerky* (1975), *MacCrimmon* e *Larsson* (1979), *Kahnemann* e *Tversky* (1979), *Hagen* (1979), *Chew* e *Waller* (1986) e outros encontraram uma tendência sistemática de escolhas partindo das suposições de *Allais*. O Efeito Reflexão foi estudado e testado por *Kahnemann* e *Tversky* (1979), de tal modo que os autores definiram duas divisões de escolhas: escolhas que envolvessem ganhos e escolhas que envolvessem perdas. Analisaremos este tema no próximo capítulo.

3.2.4. O Efeito da Conseqüência Comum

Para uma análise sucinta do efeito da conseqüência comum nos reportaremos ao exemplo de *Allais*, mas agora com uma extensão do seu modelo de escolhas. Baseando-se no modelo de *Allais*, que será visto na seção 3.5, temos as suposições abaixo. O símbolo $ representa no exemplo, valor monetário qualquer.

$$
\begin{array}{l}
a_1 = \{\$1.000.000:1,\$0:.0\} \therefore a_2 = \begin{Bmatrix} \$5.000.000:.10 \\ \$1.000.000:.89 \\ \$0:.01 \end{Bmatrix} \\
a_3 = \begin{Bmatrix} \$5.000000:.10 \\ \$0:.90 \end{Bmatrix} \therefore \therefore \therefore a_4 = \begin{Bmatrix} \$1.000.000:.11 \\ \$0:.89 \end{Bmatrix}
\end{array}
\tag{3.38}
$$

Fazendo uma descrição do modelo 3.38, a_1 significa que em uma escolha simples o indivíduo ganhará uma quantia certa com probabilidade zero. Para a_2 há três divisões de prêmios com probabilidades distintas. As suposições a_3 e a_4 decorrem da mesma explicação. *Allais* separou como veremos na seção 3.5, os prêmios em dois grupos de escolha, de modo que cada um dos grupos exprimiria um resultado a ser analisado diferentemente. No Efeito da Conseqüência Comum é necessário usar o processo de misturas de loterias de tal forma a podermos extrair do modelo de *Allais* mais elementos.

Agora, usando o efeito da probabilidade das misturas reescrevemos 3.38 por.

$$
\begin{array}{l}
b_1 = \alpha\delta_x + (1-\alpha)P^{**} \therefore b_2 = \alpha P + (1-\alpha)P^{**} \\
b_3 = \alpha\delta_x + (1-\alpha)P^{*} \therefore b_4 = \alpha P + (1-\alpha)P^{*}
\end{array}
\tag{3.39}
$$

Agora é necessário fazer alguns ajustes de tal forma a conservar o modelo original sem perda de generalidade.

1º $(a_1, a_2, a_3, a_4) \to (b_1, b_2, b_3, b_4)$

2º $\alpha = .11, x = \$1.000.000$

3º $P = (\$5.000.000 : .11, \$0 : .01)$

4º $P^* = \$0$

5º $P^{**} = \$1.000.000$

Note que é mantido o equivalente certeza nas duas equações, 3.38 e 3.39, ou seja, $\alpha\delta_x = a_1$. Outra observação importante é que ocorre dominância estocástica de primeira ordem de $P^{**} \Rightarrow P^*$, que será visto com mais detalhes na seção 3.42. Note-se que, geralmente, alguns indivíduos que são avessos a risco, acabam, como no exemplo exposto, não tendo muita confiança no resultado do lançamento de uma moeda como exemplos, desde o primeiro lançamento.

Podemos reescrever a equação 3.38 em termos da equação 3.39 e obter o resultado da equação 3.40, como a seguir.

$$
\begin{aligned}
&[b_1 = (.11 \cdot \delta_{\$1.000000} + .89 \cdot \$1.000000)] \succ\!\!\!/\!\!\prec [b_2 = (\{.11 \cdot \$5.000000, .01 \cdot \$0\} + .89 \cdot \$1.000000)] \\
&[b_3 = (.11 \cdot \delta_{\$1.000000} + .89 \cdot \$0)] \succ\!\!\!/\!\!\prec [b_4 = (\{.11 \cdot \$5.000000, .01 \cdot \$0\} + .89 \cdot \$0)]
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Pesquisadores têm encontrado escolhas dentre b_1 e b_3 se $\delta_x \succ P$, e b_2 e b_4 se $\delta_x \prec P$, o que confirma o resultado do paradoxo de *Allais*, que será apresentado mais adiante. Outro exemplo de como violação do Efeito da Conseqüência Comum é o Paradoxo de *Bergen*, desenvolvido por desenvolvido por *O. Hagen*, mas que não será visto neste trabalho.

3.3. O Modelo de Utilidade de Von-Neumann e Morgenstern

Os modelos lineares de probabilidades foram mantidos na obra *Theory of Games and Economic Behavior*, do matemático *John Von–Neumann* e do economista *Oskar Morgenstern* escrito em 1944. Assim como em *Adam Smith*, com a sua Riqueza das Nações, a Utilidade Esperada foi um marco para a compreensão do comportamento competitivo na perspectiva de construção de um modelo de equilíbrio. Os autores acercaram-se de cuidados na exposição de exemplos e possibilidades de casos aplicáveis, tomando em conta que o comportamento humano é um intrincado sistema com muitos fenômenos atuando simultaneamente.

O livro também apresenta a questão da intransitividade que é apontada como algo sem respaldo ou [43] "*Let us return to a more primitive consept of the solution wich we know already must be abandoned*". Segundo *Baumol* (1951) p.61-62, " *the impression is conveyed that a more or less unique numerical index of utility (i.e true measure) cam be deduced from a sufficient amount of informational obtainable from the observed behavior of an individual*". *Von–Neumann* apresentou seu axioma da independência como condição para que os preceitos de utilidade esperada com risco fossem possíveis.

Assim, a construção dos modelos de Utilidade Esperada é similar aos de loterias. Pela objetividade as três proposições retiradas de *Mas–Colell, Whinston e Green* (2005) são de grande importância para melhor explicar o assunto.

A função utilidade $U : \mathcal{L} \to \Re$ tem a forma de Utilidade Esperada se há uma exposição de números $(u_1, \ldots, u_N)$ por N resultados tal que para todas as loterias simples $L = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathcal{L}$ temos:

$$U(L) = u_1 p_1 + \cdots + u_N p_N \tag{3.41}$$

Uma função utilidade $U : \mathcal{L} \to \Re$ na forma de Utilidade Esperada é chamada função de Utilidade Esperada de *Von–Neumann* e *Morgenstern*.

Outra característica da função utilidade é a forma linear. Pela primeira proposição de *Mas–Colell*, a função utilidade $U : \mathcal{L} \to \Re$ tem a forma de Função de Utilidade Esperada se e somente se esta é linear, isto é, se e somente satisfaz à propriedade da qual:

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k) \tag{3.42}$$

---

[43] "Devemos retornar ao mais primitivo conceito de solução, o que já conhecemos deve ser abandonado".
"a impressão transmitida é de que mais ou menos um único índice numérico de probabilidade (isto é, uma medida verdadeira) pode ser deduzida de um montante suficiente de informação obtida do comportamento observável dos indivídudos."

Para alguma K loteria $L_k \in \mathcal{L}$, $k = 1,\ldots,K$, com propriedades $(\alpha_1,\ldots,\alpha_K) \geq 0$ temos uma seqüência do tipo $\sum_k \alpha_k = 1$. Note-se que a soma de todas as parcelas da seqüência sempre soma um. Pode-se perceber que temos uma soma de partes aditivamente forte, onde cada parcela é individual a sua próxima. Assim, *Mas–Colell, Whinston e Green* (2005) definem com mais consistência a idéia de *Bernoulli* se utilizando do modelo de *v.N-M*.

> […] the utility function *U*: $\mathcal{L} \to \mathbb{R}$ has an expected utility form if there is an assignment of numbers $(u_1,.....,u_n)$ to the *N* outcomes such that for every simple lottery $L = (p_1,.....,p_n)$ є $\mathcal{L}$ we have. [44]

$$U(L) = u_1 p_1 + ... + u_n p_n$$

Mantendo a linha da discussão, agora apresentaremos o divisor de águas entre a Utilidade Esperada e a Utilidade Não Esperada. Em função disso vamos tratar primeiramente do modelo de Probabilidade Subjetiva de Savage, a Teoria de Aversão ao Risco de *Arrow-Pratt*, e após os paradoxos de *Allais* (da quebra do axioma da transitividade), *Helsberg* (da quebra da subjetividade) e *Machina* (do desapontamento antecipado).

3.4. Principais Modelos de Risco

Houve progresso importante no campo da interpretação do risco. Da Utilidade Marginal à Utilidade Esperada, novos conceitos de escolha e preferência foram agregados a Teoria Econômica.

Por longo tempo a estrutura de suporte da Utilidade Esperada funcionou adequadamente. A estrutura de suporte refere–se aos axiomas e propriedades já discutidas no segundo capítulo do trabalho. Ocorre que, com a contribuição de outras ciências ao campo da Economia, parte daquelas estruturas passou a não mais garantir o suporte necessário ao mantenimento de premissas da Utilidade Esperada.

[44] "A função utilidade *U*: $\mathcal{L} \to \mathbb{R}$ tem uma forma de utilidade esperada se há uma exposição de números $(u_1,.....,u_n)$ para *N* resultados para cada loteria simples $L = (p_1,.....,p_n)$ є $\mathcal{L}$ temos $U(L) = u_1 p_1 + ... + u_n p_n$".

Hà muito tempo alguns axiomas vem sendo motivo para rígidas discussões acadêmicas. Isto tem sido visto quando da discussão da eficácia de alguns deles, como, transitividade, aditividade, independência, reflexibilidade, e completeza.

Em função ocorrer isso, é que existem duas fortes linhas teóricas de pensamento econômico *NEU* (Utilidade Não Esperada), e *EU* (Utilidade Esperada). Antes das teorias modernas se firmarem como modelo que apontaram falhas no *mainstream*, ainda sim, deve ser apresentada a construção clássica dos modelos de risco e incerteza. A idealização de teorias de risco que trouxe por muito tempo o suporte necessário para o estudo do comportamento humano.

O modelo básico de decisão sobre risco de *Bernoulli* foi estudado primeiramente Por *Daniel Bernoulli* e aparelhado por muitos outros cientistas interessados em prever ex ante como os indivíduos se comportariam frente a situações que ofertassem pouca informação.

Outro modelo mais moderno, derivado das suposições de *Bernoulli*, foi o modelo de *Arrow* e *Pratt* de medida de risco. Para isto primeiramente precisamos definir de forma gráfica três modelos de risco, ou seja, (de medida de risco).

3.4.1. Modelo de Bernoulli

Para compreender o comportamento humano simples, *Von-Neumann* e *Morgenstern* aperfeiçoaram o modelo de *Bernoulli* utilizando o exemplo de funções de utilidade.

Aqui definiremos os termos clássicos de risco para o comportamento individual e também para o comparativo com loterias.

O comportamento perante o risco é dividido em três suposições.

1. Aversão ao risco
2. Propensão ao risco
3. Indiferença ao risco

Aversão ao Risco – existe um agente avesso ao risco se existe uma loteria degenerada que forneça o mesmo padrão de risco (valor esperado), ou seja, em que $E(L_D)$ (esperança matemática da loteria degenerada) seja igual a L (um modelo de loteria qualquer). Assim $E(L_D) = L_D \succsim L$. A aversão estrita ao risco é definida pela mesma equação, mas de modo que tenhamos $E(L_D) = L_D \succ L$.

Propensão ao Risco – existe um agente propenso ao risco se ocorrer a situação determinada na loteria degenerada $E(L_D) = L_D \precsim L$, ou seja, fornecendo o mesmo valor esperado. A propensão estrita ao risco se constitui na equação $E(L_D) = L_D \prec L$.

Neutralidade ao Risco – existe um agente avesso ao risco se existe uma loteria degenerada de tal modo que $E(L_D) = L_D \sim L$, ou seja, há uma relação de indiferença entre o sistema degenerado e a loteria em si.

Outra maneira de percebermos estas três possibilidades é observar a figura 15.

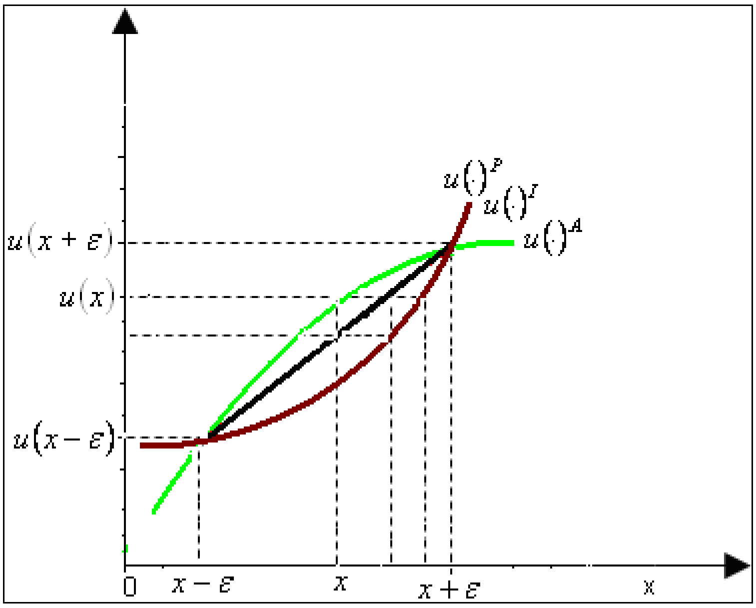


Figura 15: Funções de Risco de Bernolli: aversão, propensão e indiferença ao risco.
Fonte: VARIAN, Hall. A. (1998). Análisis Microeconómico

Para uma perfeita interpretação da figura 15 precisamos estabelecer a concepção de utilidade diferenciável e contínua[45], de tal forma a ser possível definir sua geometria, ou seja, a concavidade (como medida de aversão ao risco), a convexidade (como medida de propensão ao risco) e a indiferença (como uma função afim).

[45] A idéia de continuidade segundo a observação de *Cusinato* mostra que se a função utilidade é continua sua relação de preferência (/) é contínua na topologia fraca e ao mesmo tempo se faz como condição forte para a continuidade arquimediana. Pela relação do autor teríamos: Continuidade na topologia fraca como indicador da continuidade arquimediana, mas em compensação a continuidade arquimediana não implicaria em continuidade na topologia fraca, ou seja, o sistema não seria comutativo.

Na figura 15 é possível observar o aspecto de continuidade e diferenciabilidade das funções de utilidade apresentadas. Basta ver o aspecto de continuidade de cada função e perceber (por um cálculo mental) que estas funções apresentam diferenciabilidade definida.

Para exemplificar, podemos nos referir às utilidades $u^P(x); u^I(x); u^A(x)$ como propensão ao risco; neutralidade ao risco e aversão ao risco. Os exemplos acima citados não perdem sua generalidade.

Assim temos:

A aversão ao risco $u''(x) \leq 0$ - também determinada como utilidade marginal decrescente – função $u(x)$ é convexa.

A neutralidade ao risco $u''(x) = 0$ - utilidade marginal constante da função $u(x)$ é linear.

A propensão ao risco $u''(x) \geq 0$ - utilidade marginal constante – função $u(x)$ é côncava.

Nesta linha podemos agora definir o coeficiente global de aversão ao risco usando o modelo de aversão ao risco de *Arrow* e *Pratt*.

Para *Mas-Colell*, *Whinston* e *Green* (2005) o coeficiente de aversão ao risco de *Arrow* e *Pratt* é definido como uma função duas vezes diferenciável de *Bernoulli*. Para isto o coeficiente de aversão absoluta ao risco é definido por.

$$r_{A-P}(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Note-se que $u(\cdot)$ é linear se $u''(x) = 0$ para todo x. Também é definida a forma da função pela curvatura de $u(\cdot)$. Podemos compreender valendo-nos de um calculo básico, que se para o coeficiente $u''(x) < 0$ a função $u(\cdot)$ apresenta um máximo, ou máximos (aqui não vem ao caso se os limites da função são locais ou globais) e mantendo $u'(x) > 0$, $r_{A-P}(x) > 0$, ou seja, existe uma aversão ao risco. Se $u(\cdot)$ apresenta um mínimo, ou seja, $u''(x) < 0$, existe propensão ao risco, também mantendo $u'(x) > 0$.

3.4.2. Modelo de Savage de Utilidade Subjetiva

Como primeiro tópico, descreveremos a estrutura da Teoria da Probabilidade Subjetiva de *Savage* para posteriormente apontarmos em outros três paradoxos as falhas da Utilidade Esperada.

Para compreendermos a Teoria da Probabilidade Subjetiva devemos retomar o contexto normativo de probabilidade presente na teoria de *vN-M*. Para esta teoria os axiomas básicos são claros na formalização dos modelos de escolha, preferência e utilidade, e, portanto, não há uma maneira subjetiva de probabilidade, ou seja, os agentes, sendo racionais, farão as melhores escolhas dentro (do arcabouço teórico desenvolvido pela utilidade esperada).

Savage estabelece algumas diferenciações, mesmo mantendo a mesma estrutura do modelo de *vN-M*, com algumas modificações no modelo original. Para *Savage*, os indivíduos escolhem de forma subjetiva, mas isto não seria capturado pelo modelo de *vN-M*. Isto estaria, entretanto, quase implícito no universo de escolhas tomadas. Assim, haveria a possibilidade de desenvolvimento de um índice de utilidade que capturasse os gostos e crenças dos indivíduos em suas escolhas.

Para *Zaneti* (2008), *Savage* contribuiu com sua Utilidade Subjetiva em função de duas falhas no modelo *vN-M*. A primeira falha é a de que não existem abundâncias de loterias formais pois as probabilidades são subjetivas, construídas no dia-a-dia das pessoas, que percebem os eventos ocorridos em um intervalo de tempo. A segunda falha é referente ao fato de que as pessoas não passam o tempo todo calculando suas probabilidades para tomar suas decisões. Elas não são "estatísticos de alta capacidade" como afirma *Arrow*.

No entender de *Steidentfeld*, *Schervish* e *Kadane* (1995), *Savage* reaxiomatizou a teoria da preferência usando uma relação binária. Um exemplo disso é o ato $x \,.\, y$ onde temos uma relação de ordenação, porém interpreta este ato como se (um ato x não fosse preferido a y). Ele demonstrou que . é representado por uma única probabilidade pessoal chamada (estado independente), onde simultaneamente têm-se pares de elementos que se interrelacionam ou não dependendo da ordenação.

Outra comparação entre o modelo de *vN-M* e de *Savage* é a construção de uma teoria determinada por Loteria das Corridas de Cavalos "*horse lottery*", contra a

Loteria de Roletas "*roullete lotery*". *Ascombe* e *Aumann* (1962) diferenciam as relações de preferência entre estas duas loterias (pois os autores foram os definidores destas diferentes formas associativas de escolhas). Em termos econômicos *Horse Lottery* seria definida como uma finita partição de estados. Nota-se no artigo de *Ellsberg* (1961) que o modelo de Savage apresenta falhas concretas quando ainda se insiste em manter a mesma estrutura teórica do modelo clássico, com adaptações. O autor em seu ensaio "*Risk, Ambiguity, and the Savage Axiom" de 1961, refere-se a um teste em que duas urnas contendo bolas de duas cores distintas nas quais os indivíduos são forçados a escolher entre saber que há uma medida certa de bolas das duas cores em uma das urnas, mas não saber a razão do número de bolas na noutra.*

Ellsberg quer demonstrar com isso que os indivíduos precisam escolher entre continuar se mantendo racionais e assim obedecer aos axiomas da escolha racional, ou serem indiferentes a racionalidade provando que os Axiomas da Independência e da Aditividade Subjetiva não funcionam. Entretanto, para *Ascombe* e *Aumann* existe um domínio da relação de preferência num espaço de escolhas. Assim, o modelo *vN-M* seria apenas uma simples distribuição de probabilidades, o que difere de uma loteria discreta em vista desta ser probabilidade contavelmente aditiva.

Agora nos utilizaremos da exemplificação de *Machina*, *Whinston* e *Green* (2005), sobre teorema da probabilidade subjetiva. Assim sendo, considere um conjunto de "atos" f e g denominados estados da natureza. Formalmente definimos um conjunto de *Savage* como.

$\mathscr{S} = \{\ldots, s, \ldots\}$ um conjunto de estados

$\mathscr{E} = 2^{\mathscr{S}} = \{\ldots, A, B, E \ldots\}$ o conjunto de todos os eventos (isto é, todo subconjunto de $\mathscr{S}$)

$\mathscr{X} = \{\ldots, x, \ldots\}$ um conjunto de resultados ou conseqüências, e

$\mathscr{A} = \{\ldots, f(\cdot), g(\cdot), \ldots\}$ o conjunto de resultados-finitos de atos em $\mathscr{S}$

Como já determinado acima, existe um evento E, que se caracteriza como nulo se algum par de atos que diferem somente em E seja indiferente. Também se escreve $y \succsim z$ se o ato y cede a todo $s \in \mathscr{S}$ e é fracamente preferido ao ato constante cedente z (que está relacionado à relação de indução $\mathscr{X}$ determinada pelo símbolo $\succsim$). Para uma melhor compreensão do modelo veja a demonstração teórica de *Savage* no anexo C.

Na observação de *Castro* e *Faro* (2007) *Savage* determinou seu modelo por.

a) um conjunto de estados da natureza S

b) um conjunto de conseqüências X

c) um conjunto de atos $\mathscr{A}$ consistindo todas funções de S em X.

A priori, se tivermos um elemento $s \in S$ não conhecido, a preferência do indivíduo sobre os atos dependerá das conseqüências destes e das crenças envolvidas. *Savage* determina que deva haver um estado que estabeleça uma medida finitamente aditiva sobre um espaço infinitamente divisível. Para isto ele supôs um espaço infinitamente divisível de probabilidade μ sobre uma família de subconjuntos de S. Após estabeleceu um índice de utilidade u sobre as conseqüências de um ato f, fracamente preferível ao ato g. Esta seqüência de eventos só seria possível se o valor esperado de $u \circ f$ (ato u composto do ato f) para u fosse maior ou igual ao valor esperado $u \circ g$ (ato u composto do ato g) para μ.

A probabilidade subjetiva carrega a suposição da aditividade finita. *Savage* supôs que a contagem de elementos obedecesse a um padrão disjunto (ou união de elementos disjuntos) de modo que a partição em sistemas atômicos de eventos mutuamente exclusivos fosse aplicável em eventos com elementos de subjetividade. Para que esta tarefa teórica fosse possível se faziam necessários três axiomas, já apresentados no capítulo dois, mas que serão sucintamente relembrados aqui. Os três axiomas arquimedianos, no exemplo de *Fishburn*[46] (1986) são responsáveis pela ordem e pela contagem de elementos. O termo (Arquimediano) é usado em Economia pelo fato de que necessitamos difereciar o conjunto vazio dos outros conjuntos possíveis e enumeráveis.

O primeiro Axioma Arquimediano, encontrado nas obras de *Cantor*, em 1895, afirma que o trabalho com números transfinitos é necessário e suficiente, em conjunto com a ordem fraca, para a determinação da existência de uma função de valor real, ou seja, que existe de um conjunto, subconjuntos de eventos, em ordem contável e finita.

[46] Peter C. Fishburn, "*The Axioms of Subjective Probabiliy*", Statitistical Science (1986). O autor apresenta as contribuições de Savage para a Teoria da Probabilidade Subjetiva em função de um sistema aditivo.

O segundo axioma permite a construção de eventos $A \succ \phi$ sendo assim finitos. Por fim, o terceiro axioma, determinando forte aditividade, significa que para $m \geq 2$ e tendo uma seqüência do tipo $A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_m$, se tivermos $A_1 \succ B_1$, então há um integrador positivo N visto que, sempre que $(k\phi, nA_1,\ldots,A_x,\ldots,A_m)=(kS, nB_1, B_2,\ldots,B_m)$ com $k \geq 0, n \geq 1$ para todo $j \geq 2$, então $k/n > 1/n$.

Para *Mas-Colell*, *Whinston* e *Green* (2005) a probabilidade subjetiva também apresenta problemas. A Subjetividade não pode ser completamente dissociado da realidade objetiva e da complexidade, pois envolve uma decisão que os indivíduos fazem em diversas situações.

Quando temos a possibilidade de risco racional temos um exemplo de dominância estocástica.

Na próxima seção veremos as conseqüências de uma medida de risco associada às condições dos axiomas de *Savage*. Isto implicará numa questão controversa. A possibilidade ou não de haver ordenação em processos de escolha que envolva riscos por estapas.

3.4.3. Modelos de Dominância Estocástica

O termo Dominância Estocástica de Primeira Ordem, ou *FDS* (*First Degree Stochastic Dominance*) provado por *Quirk* e *Saposnik* (1962), *Fisburn* (1964), *Hanoch* e *Levy* (1969), Dominância Estocástica de Segunda Ordem, ou *SSD* (*Second* (1969), *Hanoch* e *Levy* (1969) e *Rothchild* e *Stiglitz* (1970), e Dominância Estocástica de Terceira Ordem, ou *TSD* (*Third Degree Stochastic Dominance*) provado por *Whitmore* em (1970), são uma nova forma de se analisar um portfólio com carteiras de risco. Em Economia tiveram o intuito de definir o comportamento da função utilidade, principalmente seus critérios de diferenciabilidade. O modelo *FSD* apresentou a característica de uma função de utilidade contínua, diferenciável e também uma vez derivável. Já para a Teoria *SSD* uma função utilidade pode ser duas vezes diferenciável com derivadas uma ou duas vezes contínuas. Por fim, a Teoria *TSD* prova a continuidade da função utilidade continuamente derivável até a terceira ordem. Também é possível constatar que a primeira derivada não precisa obedecer ao critério da continuidade e diferenciabilidade.

O papel da dominância estocástica é válido na Teoria da Utilidade quando precisamos medir distribuições de funções e compará-las em uma ordem de distribuição. Para melhor analisar o assunto nos valemos de *Mas-Colell*, *Whinston* e *Green* (2005). Segundo o autor, suponha-se que haja duas distribuições $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ tal que $f(\cdot)$ tenha um retorno muito maior do que $g(\cdot)$, e também como $f(\cdot)$ seja menos arriscada do que $g(\cdot)$.

As idéias acima fazem parte dos modelos de primeira ordem e segunda ordem de dominância estocástica. Devemos observar também que o intervalo $f(\cdot)$, pode ser determinado como $f(0)=0$ e $f(x)=1$ para algum x.

3.4.3.1. Dominância Estocástica de Primeira Ordem

Considerando a proposição acima de que "$f(\cdot)$ é menos arriscada do que $g(\cdot)$", temos dois critérios de análise. O primeiro critério é que podemos testar se toda a utilidade esperada maximiza aqueles valores maiores sobre os menos preferíveis, de $f(\cdot)$ para $g(\cdot)$. O outro critério é se é possível verificar se para todo o montante de dinheiro x, a probabilidade de se obter pelo menos x é mais alta sobre $f(\cdot)$ do que sobre $g(\cdot)$. Pela Matemática formal temos $f(\cdot)$ como sendo estocasticamente de primeira ordem dominante de $g(\cdot)$. Isto ocorre se esta função for não decrescente em $u:\Re \to \Re$.

Vendo o modelo abaixo.

$$\int u(x)df(x) \geq \int u(x)dg(x) \Leftrightarrow \int u(x)df(x) - \int u(x)dg(x) \geq 0 \Leftrightarrow \int (u(x)df(x) - u(x)dg(x)) \geq 0 \qquad (3.42)$$

A montagem por duas integrais impróprias é permitida para este formato, pois seus limites são iguais, ou seja, transformar-se-ão em integrais próprias.

Pelo modelo da figura 16 abaixo.

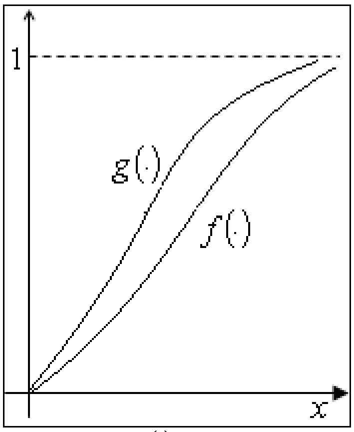


Figura 16: $f(\cdot)$ primeira-ordem estocasticamente dominante de $g(\cdot)$
Fonte: Mas-Colell, A. Whiston, Michael D, Green, Jerry R. Microeconomic Theory. Oxford University Press, 2005.

Também temos que a distribuição de compensação monetária[47] $f(\cdot)$ de primeira ordem estocasticamente pode dominar a distribuição $g(\cdot)$, se e somente se, $f(\cdot) \leq g(\cdot)$ para todo o x, basta ver a figura 16.

Primeiramente, pela explicação de *Mas-Colell*, *Whinston* e *Green* (2005), a dominância estocástica é exercida por $f(\cdot)$ sobre $g(\cdot)$, com $f(\cdot)$ abaixo de $g(\cdot)$. Dois detalhes precisam ser notados. O primeiro é que a dominância estocástica de primeira ordem não implica que todos os possíveis retornos da distribuição superior são maiores do que os possíveis retornos da distribuição inferiores.

Segundo, $f(\cdot)$ como estocasticamente dominante de primeira ordem de $G(\cdot)$ implica que o significado de x sobre $f(\cdot)$, $\int u(x)df(x)$, é maior do que se denota sobre $G(\cdot)$. Uma classificação do significado das duas distribuições não implica que uma de primeira ordem estocástica[48] domina a outra. Se determinarmos uma variável para $(\cdot)$ como (x), podemos também apresentá-la como sendo a "variável dinheiro [49]".

[47] Vejam: Robert Jarrow, "The Relationship between Arbitrage and First Order Stochastic Dominance" The Journal of Finance 1986. O autor apresenta um modelo binário para arbitragem financeira quando existem decisões de primeira ordem estocasticamente dominantes em carteiras determinadas

[48] Yoram Kroll e Haim Levy "*Stochastic Dominance: A Note*", *Journal of Finance* 1982. Os autores apresentam didaticamente as condições de primeira, segunda, e terceira ordem, para a dominância estocástica.

[49] Benjamin Éden, "*Stochastic Dominance in Human Capital*", *The Journal of Political Economy* 1980. O autor apresenta um modelo de duas trajetórias aleatórias e mutualmente exclusivas em cestas de consumo com escolha intertemporal.

Deste modo é possível afirmar que a probabilidade de haver mais garantias de ganhar dinheiro. Na afirmação de *Cusinato* (2003), sempre que houver uma preferência fraca e monotônica teremos dominância estocástica de primeira ordem. Pelo exemplo do autor, adaptado ao modelo de *Mas-Colell*, apresentamos o modelo abaixo.

$$f(\cdot) \gtrsim g(\cdot) \Rightarrow f(\cdot) \gtrsim g(\cdot) \qquad (3.43)$$

3.4.3.2. Dominância Estocástica de Segunda Ordem

Podemos comparar modelos relativamente arriscados de modelos dispersos. Nas palavras de *Mas-Colell*, *Whinston* e *Green* (2005) "*first order stochastic dominance involves the idea "higher/better" vs.* "*lower/worse*".

Faz-se necessário separar os elementos retorno e risco. É por esta razão que temos a Dominância Estocástica de Segunda Ordem, ou *SSD*. Assim significa que, determinando dois elementos $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$, tal que tenhamos a relação $\int u(x)df(x) = \int u(x)dg(x)$, dizemos que $g(\cdot)$ é mais arriscado do que $f(\cdot)$, se para todo risco evitar-se preferir $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$.

Para duas únicas distribuições $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$, com mesmo significado, $f(\cdot)$ é de segunda ordem estocasticamente dominante ou é de risco menor do que em $g(\cdot)$ se para toda função côncava não decrescente $u : \Re_+ \rightarrow \Re$ temos.

$$\int u(x)df(x) \geq \int u(x)dg(x) \qquad (3.44)$$

O gráfico da figura 17 deve ser interpretado pela seguinte forma: a área A é pelo menos tão grande quanto a área B, mas a soma das áreas $A + C$ pela igualdade é a mesma em $B + D$. Os critérios de dominância estocástica de primeira, segunda e terceira ordem apenas determinam de que forma queremos medir um risco, e monotônico, tal que este possa ser um comparativo para a maximização da utilidade esperada com a consagração dos modelos neoclássicos de escolha e preferência. Em particular para um prêmio de risco, a dominância estocástica de primeira ordem mede o potencial retorno maior em contraponto a um retorno menor. Veja na figura 17 como as distribuições acumuladas se comportam numa curva côncava (aversão ao risco) $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ obedecendo à determinada ordem de preferências.

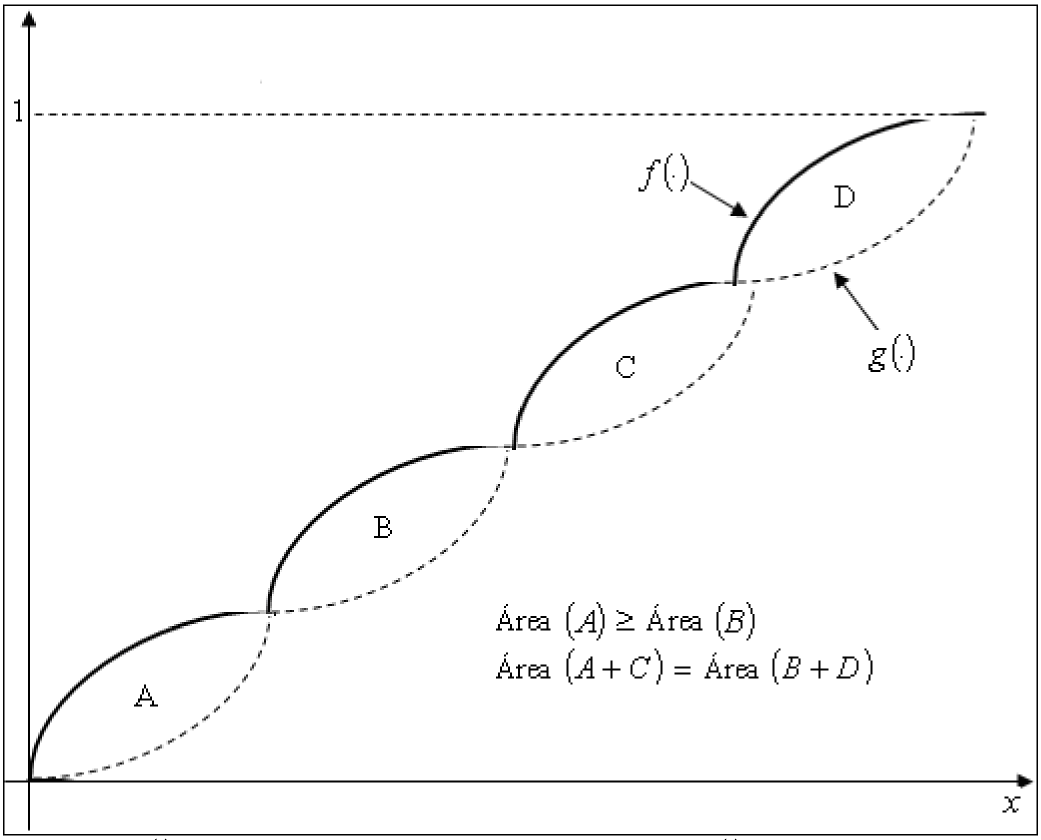


Figura 17: $f(\cdot)$ segunda-ordem estocasticamente dominante de $g(\cdot)$
Fonte: Mas-Colell, A. Whiston, Michael D, Green, Jerry R. Microeconomic Theory. Oxford University Press, 2005.

No caso da dominância estocástica de segunda ordem, são os retornos sobre os investimentos que são analisados em função da aversão ao risco. Desta forma o comparativo da figura 17 determina a área dos elementos em termo único e depois em grau comparativo. Para isto se faz necessária a abstração do modelo de loteria, pois isto envolve a multiplicação de elementos por probabilidades e, assim, constitui a esperança matemática de um conjunto de utilidades.

Há também uma última forma de dominância chamada Dominância Estocástica de Terceira Ordem, ou *TSD*. A função da estocastidicidade de terceira ordem é apresentar a possibilidade de haver uma escolha crescente de aversão ao risco, ou decrescente como função de utilidade. Por parecerem harmônicos em demasia para transcrever o real valor para os indivíduos, os axiomas podem ser traiçoeiros quando delimitam comportamentos e apresentam uma realidade muito comportada e normativa do risco. Para isto, demonstremos a seguir, os próximos três paradoxos que discutem o problema dos modelos bem comportados de Utilidade Esperada.

3.5. O Paradoxo de Allais

O Paradoxo de *Allais* é descrito na obra *Le Comportement de L'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine*, de 1953, que pode ser considerada como uma obra de referência no estudo do fenômeno da Intransitividade e, por isso, no questionamento do racionalismo normativo. Retomando a mesma linha de pensamento, a característica dos fenômenos da probabilidade aditiva de *Savage*, pode ser determinada por efeito da conseqüência comum.

Este efeito, apresentado na seção 3.2.5 é caracterizado como um problema na avaliação de dois eventos iguais, quando temos a mesma probabilidade em um conjunto de eventos, e num primeiro momento em um conjunto de escolhas um ordenamento de loterias serem mantidas e após havendo um conjunto de probabilidades associado ao evento não modificar a ordem deles. Além disso, junto ao efeito da Dominância Estocástica, como referência ao exemplo do evento "escolher um elemento de um conjunto de eventos" pode ser comparada ao que ocorre quando um jogador (num cassino) mantém uma ordem de apostas e ganha. Mas à medida que o risco admitido esbarra no limite tolerado *a priori*, o indivíduo não quer mais "pagar para ver". Neste momento temos a atuação, já explanada na seção 3.4.2, do Princípio da Dominância Estocástica. Observando o modelo de *Allais* (observe a figura 18)

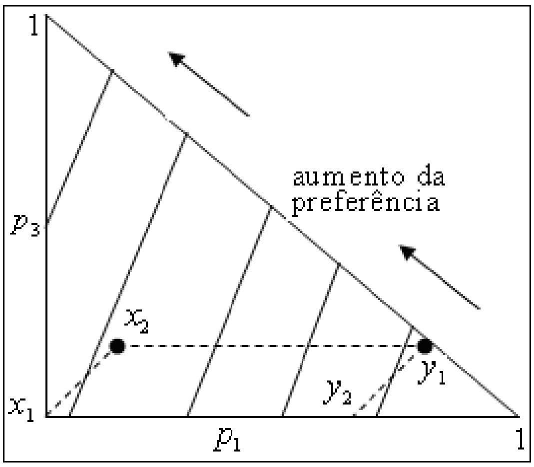


Figura 18: Utilidade Esperada, Curvas de Indiferença e o Paradoxo de *Allais*
Fonte: Machina, M. Choice under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved Economic Perspectives, Vol 1, 1987.

Machina (1987) apresenta o modelo de *Allais* com experimento de três possíveis prêmios em moeda local. O conjunto definido dos prêmios é dado por $X = \{5x, x, 0\}$. O indivíduo é submetido a dois conjuntos de escolhas.

O primeiro conjunto é definido por.

$$x_1 = (0,1,0) \text{ e } x_2 = \left(\tfrac{1}{10}, \tfrac{89}{100}, \tfrac{1}{100}\right) \tag{3.45}$$

O segundo conjunto é definido por.

$$y_1 = \left(0, \tfrac{11}{100}, \tfrac{89}{100}\right) \text{ e } y_2 = \left(\tfrac{1}{10}, 0, \tfrac{90}{100}\right) \tag{3.46}$$

Allais conclui que, em geral, os indivíduos apresentam a ordenação monotônica de preferências na forma. $x_1 \succ x_2$ e $y_2 \succ y_1$.

Agora, suponha que um indivíduo escolha seu conjunto de preferências tomando em conta os seguintes cenários.

Tomada de decisão 1.

> O indivíduo no primeiro conjunto de escolhas x_1 prefere escolher o valor de x (uma vez o valor do prêmio), pois paga 100% do prêmio. Isto decorre da situação de pagar para ver com 89% de chances de receber o mesmo valor.
>
> O indivíduo no primeiro conjunto de escolhas x_2, não aceita apostar o prêmio $5x$ (cinco vezes o valor do prêmio) no qual tem 10% de chance de ganhar, com um risco de perda (nada receber) de 1%.

Tomada de decisão 2.

> A possibilidade de nada receber em y_1 é muito maior do que receber $5x$ (cinco vezes o valor do prêmio) a 10% em y_2. Mas em compensação a loteria y_2 que entrega $5x$ (cinco vezes o valor do prêmio) a uma probabilidade (10%) está muito próxima daquilo que é oferecido na loteria y_1 na qual a probabilidade para se obter x (uma vez o valor do prêmio) é de 11%.

Em um comparativo com modelo *vN-M* (*Von-Neumann* e *Morgenstern*), este tipo de comportamento não é consistente pois não obedece ao Axioma da Independência, ou seja, a existência de um elemento de probabilidade em comum tal qual não altere o conjunto de decisões lógicas não pode ser escolhido (ou preferido). O que ocorre é o contrário.

Assim, para *vN-M*, no conjunto de preferências monotônicas deve haver uma seqüência $u_1 \succ u_2 \succ u_3$. Tomamos aqui o aspecto da função utilidade. Desta forma as utilidades dos prêmios em função de obedecerem à ordem de maior preferência para a de menor preferência seguem o modelo abaixo.

$$x_1 \succ x_2 \Rightarrow u_2 > \tfrac{1}{10}u_1 + \tfrac{89}{100}u_2 + \tfrac{1}{100}u_3 \tag{3.47}$$

e

$$y_2 \succ y_1 \Rightarrow \tfrac{11}{100}u_2 + \tfrac{89}{100}u_3 < \tfrac{1}{10}u_1 + \tfrac{90}{100}u_3 \tag{3.48}$$

Ou seja.

$\left(u_2 - \tfrac{89}{100}u_2\right) > \tfrac{1}{10}u_1 + \tfrac{1}{100}u_3 \Rightarrow \tfrac{11}{100}u_2 > \tfrac{1}{10}u_1 + \tfrac{1}{100}u_3$ para eq 3.45 e

$\tfrac{11}{100}u_2 + \tfrac{89}{100}u_3 < \tfrac{1}{10}u_1 + \tfrac{90}{100}u_3 \Rightarrow \tfrac{11}{100}u_2 < \tfrac{1}{100}u_3 + \tfrac{1}{10}u_1$ para a eq 3.46.

Agora, reformulando as duas equações para termos uma melhor persepção do paradoxo temos.

$$x_1 \succ x_2 \Rightarrow u_2 > \tfrac{1}{10}u_1 + \tfrac{89}{100}u_2 + \tfrac{1}{100}u_3 \Rightarrow \tfrac{11}{100}u_2 > \underbrace{\tfrac{1}{10}u_1 + \tfrac{1}{100}u_3}_{K_1}$$

$$y_2 \succ y_1 \Rightarrow \tfrac{11}{100}u_2 + \tfrac{89}{100}u_3 < \tfrac{1}{10}u_1 + \tfrac{90}{100}u_3 \Rightarrow \tfrac{11}{100}u_2 < \underbrace{\tfrac{1}{100}u_3 + \tfrac{1}{10}u_1}_{K_2}$$

Como $K_2 > \tfrac{11}{100}u_2 > K_1$, a montagem da equação 3.49 será trivial.

Onde está o problema? O problema está na seguinte contradição.

$$\tfrac{1}{10}u_1 + \tfrac{1}{100}u_3 > \tfrac{11}{100}u_2 > \tfrac{1}{10}u_1 + \tfrac{1}{100}u_3 \tag{3.49}$$

Passa a ser trivial a percepção no cenário 1, que os indivíduos são avessos a risco sendo que por isso escolhem $x_1 \succ x_2$. Agora, suponha que podemos multiplicar os fatores de cada cesta por suas utilidades respectivas. Temos então:

$x_1 = (0,1,0) \times (u_1, u_2, u_3)$ e $x_2 = \left(\tfrac{1}{10}, \tfrac{89}{100}, \tfrac{1}{100}\right) \times (u_1, u_2, u_3)$. O resultado do produto é a equação 3.45. Como temos um ordenamento, que ex ante, se põe como hipótese no modelo neoclássico, ou seja, da Utilidade Esperada, o autor quer demonstrar que esta ordenação é impossível de ocorrer.

Supondo entendível a primeira explicação, continua-se a regra já estipulada para $y_1 \succ y_2$, cenário 2. Por conseqüência isto resultará na equação 3.46. Mais uma vez deve-se frizar que nos dois modelos o que ocorre é a única é direta intenção de se demonstrar as escolhas feitas pelos indivíduos quando expostos a riscos.

O *insight* de Allais aparece na comparação de como um comportamento destas utilidades deveriam se apresentar. Para a teoria tradicional (*EU*) o fator de transitividade deveria ser do tipo $u_1 \succ u_2 \succ u_3$, ou seja, uma perfeita distribuição monotônica. Mas o que realmente ocorre é que foi mostrado na equação 3.49.

A probabilidade objetiva (ou normativa de *vN-M*) passa por transformações estruturantes, com a mudança para a subjetividade, mantendo o mesmo aspecto formal da independência, escolha e aditividade.

À medida que o axioma da independência é "quebrado" temos o efeito *Dutch Book* que significa o conjunto de apostas que um jogador faz, independente dos resultados (ou apostas), de tal modo que existe forte tendência para perda total, o que em muitas circustâncias é causa para elevação do prêmio de risco de modo a estimular o apostador a jogar mais do que o possível.

Outro detalhe muito importante é a relação de linearidade das probabilidades, já demonstrada na seção 3.2.2. *Allais*, via de regra, acabou contribuindo para aquilo que *Kahnemann* e *Twerky* denominaram como *Faninng-out*. O *Faninng-out* é a violação da linearidade das probabilidades (certa alusão com o que ocorre com a violação ao axioma da independência). O exemplo comparativo das duas figuras torna a explicação mais evidente.

Pela figura 18, nota-se a distribuição das linhas em um cenário de probabilidade linear, sem *Faninng-out*, ou seja, com escolhas ordenadas do tipo $u_1 \succ u_2 \succ u_3$ obedecendo ao axioma da independência determinado na seção 2.2.5. Porém, o que acontece é que os indivíduos realizam suas escolhas obedecendo ao efeito da conseqüência comum. Isto faz os indivíduos escolherem (observando o que ocorre no cenário de um lançamento de uma moeda) determinar *a priori* a possibilidade do que poderia aparecer na outra face da moeda.

No axioma da independência não importa o que está na outra face da moeda (se é cara ou coroa), mas o que importa é que haja uma ordem de ocorrência dos eventos. Uma outra leitura do que *Allais* apresentou é a relação de dominância estocástica, que já foi demonstrada na seção 3.4.2 e que, no caso da *Faninng-out*, determina o que se chama de "elemento estocasticamente dominante" e "elemento estocasticamente dominado".

Como se pode perceber, as linhas tortas do modelo da figura 19 representam as trajetórias não lineares das probabilidades, assim caracterizadas devido a mudanças no comportamento dos agentes. As probabilidades não seguem mais uma trajetória linear e sim, não linear.

Como exemplo, a figura 19 com *Faninng-out*.

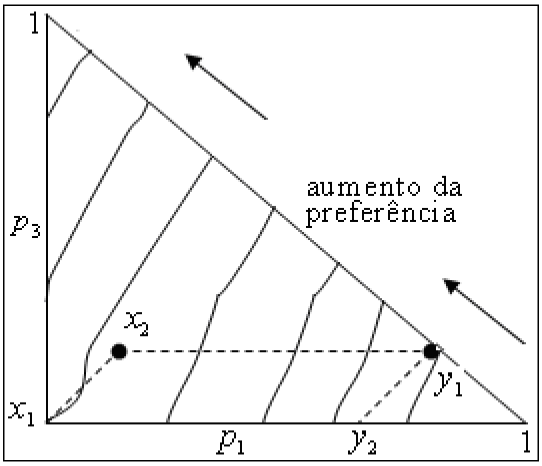


Figura 19: Curvas de indiferença com "*fan out*" e o Paradoxo de *Allais*
Fonte: Machina, M. Choice unde Uncertainty: Problems Solved and Unsolved. Economic Perspectives, Vol 1, 1987.

Por certas ambigüidades na situação em que os indivíduos não ordenam suas preferências, e sem obedecer a um padrão lógico, como o Axioma da Independência, o axioma de *Ellsberg* acabou por se tornar contribuinte da probabilidade subjetiva.

3.6. O Paradoxo de Elsberg

Elsberg apresentou a situação de duas urnas A e B. Em cada uma destas urnas há um número par de x bolas. Cada bola assume uma das cores, branca ou preta. Na urna A existe $x/2$ bolas de cada cor. Na urna B não temos informação alguma sobre sua constituição. Uma bola é retirada de cada uma das urnas. Supondo que exista quatro estados da natureza para a retirada, temos o conjunto de possibilidades.

$$S = \{(p,p),(p,b),(b,p),(b,b)\} \therefore S(A,B) \Rightarrow S\{A\{b \wedge p\}, B\{b \wedge p\}\} \tag{3.50}$$

Podemos construir quatro apostas denominadas por A^b, A^p, B^b, B^p. Em vista disso, podemos determinar um prêmio para a aposta feita e ocorrida usando então as seguintes relações entre apostas e prêmios.

Primeira suposição:

A aposta A^p paga R\$$k$ se ocorrer os eventos (p,p) ou (p,b) de retirada da urna A, e ao contrário desses eventos paga $\{0\}$R\$.

Lembre-se que o que vale aqui é a bola preta que sai da urna A, ou seja, é apostar que a bola preta da urna A^p saia.

Ellsberg descobriu que os indivíduos são indiferentes em apostar na seqüência $A(B)$ em que sairá a bola preta, ou apostar na seqüência $A(B)$ em que sairá a bola branca. Porém, existe uma pequena proporção de indivíduos que prefere apostas sempre na urna A, nas bolas ou branca ou preta, do que seguir a urna B (preta ou branca). Desta forma, temos então uma ordenação sobre as quatro possíveis apostas.

$$A^b \sim A^p \succ B^b \sim B^p \tag{3.51}$$

Agora suponha a seguinte função de utilidade.

$$U(A^p) = \sum_{s \in S} u(A^p(s)) f(s) = \frac{(u(0) + u(k))}{2} = U(A^b) \tag{3.52}$$

Supondo que $u(0) < u(k)$

Se $f(b,b)$ ou $f(p,b) = 1 - f((b,p)$ ou $f(p,p))$

$$U(B^b) = \alpha u(k) + (1-\alpha) u(0) \tag{3.53}$$

Pela ordenação de *Ellsberg* temos.

$\alpha u(x) + (1-\alpha)u(0) < \dfrac{(u(0)+u(x))}{2}$ e assim $(\alpha - \frac{1}{2})(u(x) - u(0)) < 0$.

Pela ordenação acima então.

$$U\left(B^{b}\right)=(1-\alpha)u(x)+\alpha u(0)\text{, e } (1-\alpha)u(x)+\alpha u(0)<\frac{(u(x)+u(0))}{2} \tag{3.54}$$

Finalmente temos

$$\left(\tfrac{1}{2}-\alpha\right)(u(k)+u(0))<0 \tag{3.55}$$

Isto leva a uma contradição sobre no que consiste a probabilidade subjetiva. Como pode ser visto na equação 3.55, em que $u(k)<u(0)$, ou seja, a utilidade de se ganhar k valores é menor do que a utilidade de nada ganhar. Isto prova uma incongruência com a teoria. Para uma definitiva constatação do tema Utilidade Esperada, veremos a seguir o modelo de *Machina*.

3.7. O Paradoxo de Machina

Machina também construiu um paradoxo denominado Desapontamento Antecipado, visto como uma direta crítica ao modelo de Probabilidade Subjetiva de *Savage*. Para melhor entendimento do modelo proposto supomos ter três elementos denominados por $\{x_1, x_2, x_3\}$, tais que x_1 represente o evento "não fazer nada" x_2 represente o evento "ganhar um curso de francês sobre toda a cultura, gastronomia e literatura francesa", x_3 ganhar uma viagem para o território francês com tudo pago. Devemos lembrar que a variável x_3 apenas indicará a possibilidade, ou não, de ordenamento das preferências dos indivíduos.

Suponha que o indivíduo "sortudo" sempre foi apaixonado pela França e por tudo que de lá provém. Suponha que o ordenamento das preferências monotônicas deste indivíduo seja da forma $x_3 \succ x_2 \succ x_1$. Assim temos os seguintes *payoffs*.

Primeira possibilidade: $x_3 \succ x_2 \succ x_1$

> ganhar uma viagem para o território francês $\succ$ ganhar um curso de francês sobre toda a cultura, gastronomia e literatura francesa $\succ$ não fazer nada.

Segunda possibilidade: $x_3 \succ x_2$

ganhar uma viagem para o território francês $\succ$ ganhar um curso de francês sobre toda a cultura, gastronomia e literatura francesa.

Terceira possibilidade: $x_3 \succ x_1$

ganhar uma viagem para o território francês $\succ$ não fazer nada.

Quarta possibilidade: $x_2 \succ x_1$

ganhar um curso de francês sobre toda a cultura, gastronomia e literatura francesa $\succ$ não fazer nada.

Podemos definir duas possibilidades de eventos: a primeira delas, é que nada ocorre com a ordenação $x_3 \succ x_2 \succ x_1$ e o indivíduo se mantém satisfeito com o que lhe ocorre, a segunda possibilidade, é que a viagem não aconteça (por diversos motivos como guerra, problemas na alfândega, terrorismo, etc), sempre com os acontecimentos não sendo controlados por ele, assim poder-se-ia definir que a escolha do indivíduo seria determinada pelo escore $x_2 \succ x_1$. Pela literatura, o que ocorre é o inverso, $x_1 \succ x_2$, em vista de haver ressentimento pela não possilibidade de viajar e principalmente, pelas expectativas criadas pelas pessoas ante a viajem.

Para provar esta afirmação baseamo-nos no exemplo de *Cusinato* (2003). Assim temos, $L_A = (1;0;0)$ e $L_B = (0;1;0)$ logo implica em $L_A \succ L_B$, pois $x_2 > x_1$. Seja agora $L_C = (0;0;1)$

Agora restringiremos as escolhas, baseadas nos *payoffs* apresentados, na suposição de que temos duas loterias com mesmos prêmios $\{x_1, x_2, x_3\}$. Supondo que tenhamos duas loterias $L_1(x_1, x_2, x_3)$ e $L_2(x_1, x_2, x_3)$, com probabilidades $L_1 = \left(0; \frac{1}{100}; \frac{99}{100}\right)$ e $L_2 = \left(\frac{1}{100}; 0; \frac{99}{100}\right)$.

Assim, para a loteria L_1 há a probabilidade de nada ganhar no evento "não fazer nada", de ganhar com probabilidade de 1% para o evento "ganhar um curso de francês" e de 99% de ganhar uma viagem para a França. Para a loteria L_2 têm-se os eventos de 1% para a probabilidade de "não fazer nada", de 0% de ganhar um curso de francês e de 9% de ganhar uma viagem completa para o território francês.

Pelo Axioma da Independência, analisado na seção 2.2.5, o indivíduo que quiser maximizar sua escolha deve optar pela loteria L_1.

Pelas seqüências $L_1 = \left(0; \frac{1}{100}; \frac{99}{100}\right)$ e $L_2 = \left(\frac{1}{100}; 0; \frac{99}{100}\right)$ temos então.

Usando o Axioma da Independência, temos o seguinte sistema de equações matemáticas.

Hipótese inicial.

$$L_1(L_A + L_B + L_C) \succ L_2(L_A + L_B + L_C) \tag{3.56}$$

$L_1 = \left(0; \frac{1}{100}; \frac{99}{100}\right)[(1;0;0);(0;1;0);(0;0;1)]$, temos então

$$L_1 = \frac{1}{100}L_B + \frac{99}{100}L_C$$

Para L_2 temos:

$L_2 = \left(\frac{1}{100}; 0; \frac{99}{100}\right)[(1;0;0);(0;1;0);(0;0;1)]$, temos.

$$L_2 = \frac{1}{100}L_A + \frac{99}{100}L_C \tag{3.57}$$

Agora mantendo $L_1 \succ L_2$ provamos que

$$L_1 = \frac{1}{100}L_B + \frac{99}{100}L_C \succ L_2 = \frac{1}{100}L_A + \frac{99}{100}L_C \tag{3.58}$$

$\frac{1}{100}L_B + \frac{99}{100}L_C \succ \frac{1}{100}L_A + \frac{99}{100}L_C$ -perceba L_C

Obedecendo ao Axioma da Independência, e *ceteris paribus*, a ordem se estabelece, mas se isto não ocorrer o Paradoxo de *Machina* identifica um grave problema no sistema de equações 3.58. Isto quer dizer que na hipótese de haver um problema na possibilidade do indivíduo ter dificuldades no processo de escolha, o axioma da independência pode estar metodologicamente ameaçado. Ou seja, pela ordem de independência temos $x_3 \succ x_2 \succ x_1$. Mas se $x_3 = 0$, precisaríamos obedecer à seqüência $x_2 \succ x_1$, mas o que realmente acontece é a relação $x_1 \succ x_2$, o que comprovaria definitivamente a quebra do Axioma da Independência no modelo do Paradoxo de *Machina*.

Segundo *Gul* (1991), *Machina* e *Allais* rejeitaram o apelo normativo que o axioma da independência proporcionava. *Allais* argumentava que a medida cardinal de utilidade sobre certas perspectivas (escolhas) incertas dependeria da distribuição da medida cardinal, tipicamente em seus primeiros três momentos (função geratriz de momentos). *Machina* considera que aquelas preferências podem ser representadas por uma plana preferência funcional e então desenvolver o mecanismo de análise das propriedades de preferência funcional local. Para ele, há duas hipóteses que cita em termos destas propriedades locais. A primeira é a aversão ao risco; a segunda é o comportamento consistente com o Paradoxo de *Allais* e um número de outras violações observadas na Teoria da Utilidade Esperada.

Partindo então para o último dos modelos apresentaremos a Teoria de Risco de *Bernoulli*.

3.8. Considerações Finais do Capítulo

O terceiro capítulo buscou relacionar dois modos de se medir riscos. O primeiro deles é a construção de um modelo de medida de risco que siga a cartilha neoclássica básica. Para isso buscou-se a referência teórica apresentada no segundo capítulo, e a aplicação da teoria à Utilidade Esperada.

Em seguida foi demonstrado que uma medida de risco necessita de um modelo básico, referendado por situações reais, como exemplo, jogos, cenários de conflitos, riscos bancários e de governo, e outros, que possam ter uma solução satisfatória e simultaneamente ser aplicável em Teoria Econômica.

Na mesma medida, a apresentação de um sistema contraditório do modelo *mainstream* será o contexto para um novo paradigma. Na intenção de apresentarmos como se desenvolve a Teoria da Utilidade Esperada na forma de “cestas” podemos perceber que ela se mantém apenas em situações em que o indivíduo age de forma bastante limitada em um simples processo de escolha.

Em função do exemplo da Teoria de *vN-M* a utilidade, mantendo o velho modelo cardinalista, constroe-se em pilares puramente racionais. Pela suposição de um mundo autoorganizado, matemático e equilibrado, a teoria funciona perfeitamente.

O que parece não ser totalmente exlicado, pode ser mantido como uma referência, pois não se pode destruir uma teoria que explica um determinado comportamento humano em função da criação de outra. Cada teoria se demonstra há seu tempo.

Um fator ou traço psicológico no expoente das escolhas pode ser adaptado à luz da matemática. De *Von-Neumann* até *Savage* este mundo se mostrou perfeito e aprimirou técnicas de medida de risco. Neste ponto, as críticas aos autores se avolumam de tal forma a se determinar que estas teorias (que garantem suporte a Teoria da Utilidade Esperada) sejam desconsideradas por outras linhas de pensamento econômico.

Nota-se que a Teoria da Utilidade Esperada não responde a todos os anseios do qual se propôs explicar. Ela apresenta falhas estruturais graves, mas que não invalidam-na em seu contexto principal. Os axiomas básicos apresentados no segundo capítulo, constituintes do arcabouço teórico da Utilidade Esperada, em algumas situações de escolha, e preferência, tem sua comprovação limitada. Mais uma vez, nota-se que o ser humano sempre transgride suas próprias convicções em virtude de algo que ainda não consegue especificar analiticamente.

Neste ponto, a racionalidade não esplica a transgressão humana por fatores que não aqueles que a teoria defende e determina como organizacionais. Nesta mesma linha, um dos principais críticos da Utilidade Esperada, (*Maurice Allais*), criou o paradoxo que levaria seu nome. Simultaneamente ao paradoxo, outros fenômenos como *fanning-out* (ou, forma de leque que consiste em não linearidade das probabilidades), e *framming effect* (efeito de enquadramento que conduz o comportamento de escolha dos agentes), além daqueles ligados a, provocam ou são referencia para a criação de outra nova escola de Pensamento Econômico (Utilidade Não Esperada), que buscaria, através da Teoria da Perspectiva (*Prospect Theory*) construir modelos de utilidade mais ajustáveis ao comportamento humano de escolha frente ao risco e a incerteza.

Deve ser percebido que a Utilidade Esperada explicou muito dos fenômenos que assolavam o pensamento econômico, por muito tempo. Porém, não conseguiu explicar eficientemete como os indivíduos não seguiam a uma abordagem neoclássica de comportamento. Os agentes não seguiam o comportamento determinado pelo sistema neoclássico de ordem e medida.

Por fim, no quarto capítulo haverá uma mudança de rumo no que tange a utilidade. Apresentaremos o conceito de Utilidade Não Esperada ou *NEU*. A Teoria da Utilidade Não-Esperada será uma alternativa aos problemas que a Utilidade Esperada não consegue resolver, sem, destruir a teoria anterior. Para isto apresentaremos algumas teorias que fazem parte da *NEU* e focaremos sistematicamente em apenas uma delas. Estudaremos com mais intensidade a Teoria da Perspectiva, ou *Prospect Theory*.

4. UTILIDADE NÃO ESPERADA

A Utilidade Esperada ainda tem como uma de suas características a utilização de um preceito econômico usando para isto o instrumental matemático. Isto é devido pelo seu propósito fim, que é de compreender como o comportamento humano se traduz no processo de escolhas quando envolve o fator risco.

Tomando como exemplo todo o processo apresentados no terceiro capítulo, agora podemos apresentar a Teoria *NEU* (Utilidade Não Esperada). A *NEU* é resultado de um novo paradigma em Economia, ou seja, ela é um conjunto de novos elementos na compreensão dos mecanismos que envolvem incerteza e risco. Lembre-se que na *EU* (Utilidade Esperada), a interpretação do comportamento psicológico, como fator de decisão não tinha valor real. Agora, pelas novas técnicas e novos métodos, tem-se a possibilidade de se complementar a Utilidade Esperada naquilo que esta se apresenta como insuficiente em uma teoria maior.

Como primeiro exemplo desta mudança de paradigma, apresentaremos a proposta dos autores *Kahnemann* e *Tversky*, que desenvolveram uma teoria denominada de Teoria da Perspectiva ou (*Prospect Theory*). A Teoria da Perspectiva tem com uma de suas funções, analisar as reações do ser humano (com objetivo econômico) em um sistema integrado de elementos de decisão, onde cabem emoções e razão conjuntamente condicionados quando da necessidade de se fazer e escolhas e medir os riscos associados.

Assim, para um perfeito encaminhamento dos capítulos teremos, na seção 4.1 serão apresentados os modelos associados a nova teoria que são um conjunto próximo ao objetivo que a Teoria da Perspectiva apresenta, mas com outro viés. Veremos alguns modelos como: *Rank–Dependent Expected Utility* de *Quiggins* (1982), *Dual Expected Utility* de *Yaari* e *Segal* (1984), e *Weighted Utility* de *Chew* (1983).

Na seção 4.2 apresentaremos a Teoria da Perspectiva como caso escolhido para uma análise e exemplificação mais completa da teoria. Em função disso, a Teoria da Perspectiva será demonstrada através de seu modelo geral com descrissão matemática em anexo.

4.1 Utilidade Não Esperada: principais modelos

Com o advento da Psicologia Cognitiva, da Sociologia e da Medicina Neurológica, houve significativa mudança no enfoque que se fazia do processo de escolha, aquele simplesmente com conotação puramente matemática.

Como já vem sendo aceito (principalmente pelo *mainstream*), que os modelos de Utilidade Esperada necessitam de reformulação, quando mais, de outros modelos[50]. A Economia (e principalmente a teoria da escolha) vem usando novas técnicas de medida, em conjunto com as ciências do comportamento. Isto propicia um novo enfoque na tradução do comportamento humano em Economia. Estes modelos seguem a mesma linha de *vN-M*, isto é, refletem adaptações aos axiomas que apresentaram críticas metodológicas. Como exemplo, *Quiggin* apresentou um modelo determinado como *Rank Dependence* que se adapta muito bem ao problema dos modelos aditivos. Desta forma, a probabilidade subjetiva descrita por *Savage* passaria por adaptações. *Quiggin* se utilizou da hipótese de modelos não lineares

Para sermos mais sintéticos analisaremos apenas a estrutura básica de alguns modelos de Utilidade Não Esperada. Por isto, para o objetivo deste trabalho, apresentaremos um breve enfoque, dentre os mais utilizados, e escolheremos o modelo de *Kahnemann* e *Tversky* (1979) como um exemplo destes novos modelos.

Como já apontado no capítulo três, todo o processo de escolha com probabilidade foi discutido com base em uma plataforma linear. Até certo ponto isto funcionou em virtude do comportamento humano parecer ser linear, ou de certo modo, sem consideração para explicar fenômenos vistos como incomuns. O modelo de utilidade esperada de *vN-M* pouco ou quase pouco se preocupou com a possibilidade de probabilidades não lineares. Neste aspecto os neoclássicos (considerando-se também os modelos de *Bernoulli*) não imaginavam um ser humano que não fizesse suas escolhas dentro de uma regra não linear de decisão.

[50] Hoje, novos modelos de Utilidade Não Esperada como os de *Edwards* 1962, *Kahnemann* & *Tversky* em 1979 (*Prospec Theory*), *Karnarkar* em 1978 com (*Subjectively Weighted Utility*), *Quiggin* em 1982 com (*Rank – Dependent Expected Utility*), *Yaari* em 1987 com (*Dual Expected Utility*), *Segal* em 1984 e *Green* & *Jullien* em 1988 com (*Ordinal Independence*), *Múnera* & de *Neufville* em 1983 e *Hagen* em 1979 com (*Moments of Utility*), *Chew* em 1983 com (*Weighted Utility*), *Hey* em 1984 com (*Optimism – Pessimism*), *Chew*, *Epstein* & *Segal* em 1991 com (*Quadratic in the Probabilities*) e por fim, *Loomes* & *Sugden* em 1982 com (*Regret Theory*), buscam responder as questões não assumidas pelo modelo tradicional.

De ponto a ponto, duas linhas claramente se formaram defendendo condições opostas de análise para a decisão e escolha. A primeira linha defendia uma suplementação dos processos de utilidade esperada, mas sem mudanças estruturais na essência dos modelos clássicos (principalmente aqueles que pudessem comprometer os pilares do castelo da utilidade esperada). A segunda linha, seguida pela Teoria da Utilidade Não Esperada, pretendia revisar e modificar substancialmente as características axiomáticas de estrutura axiomática, de modo a que se pensasse o processo de escolha forçosamente fora do modelo tradicional.

Com o objetivo de entender como os indivíduos processam suas decisões que têm reflexo econômico, passou-se a utilizar o aspecto da Utilidade Não Esperada, ou *NEU* (*Non Expected Utility*), como uma nova medida de escolha realizada pelos indivíduos. A sistemática da probabilidade linear não tinha como objetivo capturar o compreender o reflexo do grau de "dor" e "prazer" contidos em um processo de escolha.

A preocupação com a forma fez com que se buscou isolar o efeito "emoção" como uma variável separável e aditiva em um conjunto de elementos. *Savage* (1954) pensaria sua "probabilidade subjetiva" como um índice de utilidades que pudessem concentrar as emoções e os gostos dos indivíduos. A manutenção desta integridade matemática do modelo pouco auxiliaria na solução de alguns dos problemas fossem eles simples ou complexos, da escolha.

Entedido pela linha de pensamento da *NEU* (Utilidade Não Esperada) que a probabilidade não era um atributo linear, principalmente pela frágil estrutura do axioma da independência, notou-se a necessidade de se considerar a probabilidade como um atributo não linear, como visto na figura 19.

A conseqüência desta possibilidade abriu campo para o estudo de uma gama fenômenos, os mais importantes apresentados ao longo do capítulo três. A aversão ao desapontamento de *Machina*, os Paradoxos de *Allais* e *Elsberg*, o efeito de *Fanning out* e o *Framming Efect*, antes citados, formariam o arcabouço para a subdivisão das escolhas em prospectos. A conseqüência pairou na possibilidade de compreender o comportamento do ser humano sem estereótipos, ou seja, sem separar o comportamento puramente racional da dita emotividade intensa com mecanismos que possam analisar as reações humanas em todas as etapas de decisão.

A inserção de pesos nas decisões dos indivíduos não é uma medida de probabilidade e tampouco de certo grau de crença. A afirmativa, em *Schoemaker* (2000), de que *Kahnemman* e *Tversky* denotam que os pesos usados em seus modelos, como também outros elementos que intercalam escolhas, refletem apenas os impactos sobre as escolhas em que se preserva a monotonicidade destas e não são medidas de probabilidade. Os pesos são maneiras para demonstrar a forma não linear das escolhas e das preferências tomadas pelos indivíduos.

Machina (2004) apresenta exemplos de formas funcionais da utilidade que se classificam como modelos de Utilidade Não Esperada, ou *NEU*. Note-se que modificações entre as combinações de loterias podem ser interpretadas como cestas de bens com probabilidades associadas. Muito próximo àquilo que existe na Teoria da Utilidade Esperada *EU*.

Apresentaremos a seguir apenas três modelos para sintetizar a teoria. Para isso, ao longo da exposição faremos um comparativo com o que já foi apresentado no terceiro capítulo, no que corresponde as teorias de *vN-M* e *Savage*.

A primeira teoria se chama *Regret Theory* (ou teoria do Arrependimento) proposta por *Loomes* e *Sugden*[51] (1982). Esta teoria determina que um indivíduo quando apresentado a um sistema (ou cestas) necessita fazer escolhas, pode ter determinada reação em virtude de um resultado x quando a decisão alternativa poderia ser x^*. Em uma testagem de duas loterias do tipo $L^*(P^*(x^*))$ e $L(P(x))$, pode-se definir $P^* < 0$ e $P > 0$ de tal forma a separar os prospectos positivos e negativos de escolha. Tem-se então a possibilidade, entre cada evento e suas probabilidades associadas, de definir a função utilidade como uma combinação da influência de cada uma das escolhas. Desta forma, o modelo funcional é determinado por:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n^*} R(x_i, x_j^*) p_i p_j^* \tag{4.1}$$

[51] Veja de Loomes, G e Sudgen, R. "Disappointment and Dynamic Consistency in Choice under Uncertainty", The Review of Economic Studies, p. 271-282. O autor discute os modelos com incerteza em que os prospectos envolvem a discussão (pior ou melhor doque), o efeito isolamento de Savage e a teoria da perspectiva de Kahnemann e Tversky e os modelos de jogos de multi-estágios em que pese são determinados pelo efeito certeza em situações determinadas como sendo de decisão irracional.
Veja Gul, F. A Theory of Disappointment Aversion, Econometrica, 1991, p.667-686.

Note:

$P^* < 0$ (prospecto negativo) e
$P > 0$ (prospecto positivo),
$R(x_i, x^*_j)$-*rank*
x_i, x^*_j (decisão tomada, decisão alternativa)

Podemos comparar o modelo de *Loomes* e *Sugden* com o modelo de *vN-M* de utilidade esperada. Para isso, tomamos a expanção das equações 3.41 e 3.42, assim temos:

$U(u_i) = u_1 p_1 + \cdots + u_N p_N$ equação de *vN-M*

$U(x_i, x^*_j) = R(x_1, x^*_1)p_1 p^*_1 + \ldots + R(x_n, x^*_n)p_n p^*_n$ equação de *Loomes* e *Sugden*.

Considerando que os termos u_i e $R(x_i, x^*_j)$ se equivalem apenas se "nosso indivíduo" não correr os riscos de falsas escolhas. Para a utilidade esperada a probabilidade de cada evento é adequada a aditividade e logo, delimita o grau de utilidade. Isto é, na Teoria Utilidade Esperada não é possível separar probabilidades, pois ela já é definível.

Por fim, suponha que um indivíduo sempre faça escolhas corretas "para ele". Deste modo, temos, $R(x_i, x^*_j) = R(x_i)$. Tomemos como exemplo o modelo de *vN-M* e assumamos que é possivel escrever $R(x_i)$ nos termos de u_i, tal que $\sum R(x_i) \Leftrightarrow \sum u_i$, $R(x_1) \Leftrightarrow u_1$ também temos . Agora vamos expandir em apenas uma cesta as utilidades das duas equações. Assim temos: $U(u_1) = u_1 p_1$ e $U(x_1, x^*_1) = R(x_1, x^*_1)p_1 p^*_1$. Finalmente, podemos então comparar os dois modelos.

$U(x_1, x^*_1) = R(x_1, x^*_1)p_1 p^*_1$ e $U(u_1) = u_1 p_1$. Com alguns ajustes devemos ter.

$\frac{U(x_1, x^*_1)}{p^*_1} = R(x_1, x^*_1)p_1 \Leftrightarrow u_1 p_1$, como $U(u_1) = u_1 p_1$ temos, $\frac{U(x_1, x^*_1)}{p^*_1} = U(u_1) \Leftrightarrow u_1 p_1$.

O que quermos demonstrar é a relação muito próxima entre a Utilidade Esperada e a Teoria do Arrependimento (*Regret Theory*). Para a utilidade Experada não há arrependimento, ou seja, prospectos (ou perspectivas) negativos. Neste tipo de teoria podemos também ter uma relação dual, ou seja, $U(x_1, x^*_1) = U(u_1)p^*_1$. Como $p^*_1 < 0$, por conseguinte $U(x_1, x_1^*) < 0$, pois sempre $U(u_1) > 0$. Esta parte da decisão (ou escolha) a teoria da Utilidade Esperada não captura.

Com a *Rank–Dependent Expected Utility*, ou Utilidade Esperada Dependente-Ordenada proposta por *Quiggin*[51], é uma forma de consertar o modelo *vN-M*. Isto deveu-se principalmente ao fato das probabilidades não manterem a linearidade e, por assim dizer, não serem definíveis como reflexo do principio $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, diferente do que afirma *Machina*, $\sum_{i=1}^{n} p_i \neq 1$. Desobedecendo ao Axioma da Aditividade como apresentado no capítulo dois, teríamos então a relação $p_i + p_j \neq k(p_i + p_j)$. Para resolver este impasse teórico os autores buscaram uma função de utilidade que cumulasse os valores de probabilidade, como se fosse possível ter uma seqüência de probabilidades como $p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \ldots$. As relações de probabilidades aqui apresentadas não são conseqüências de uma medida causal de probabilidade, como foi apresentado nos dois capítulos anteriores, mas devem ser vistas como $\pi(p_i) + \pi(p_j) \neq \pi(p_i + p_j)$ em que π representa a função peso. Dessa forma, o modelo funcional da Utilidade Esperada Dependente–Ordenada é definido por.

$$\sum_{i=1}^{n} v(x_i)\left[G\left(\sum_{j=1}^{i} p_j\right) - G\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right)\right] \tag{4.2}$$

Suponha novamente as equações 3.41 *vN-M* e a equação 4.2.

$U(x_i) = \sum_{i=1}^{n} v(x_i)\left[G\left(\sum_{j=1}^{i} p_j\right) - G\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right)\right]$ *Rank–Dependent Expected Utility*

$U(u_i) = u_1 p_1 + \cdots + u_N p_N$ *vN-M*

Expandindo o modelo de *Quiggin*:

$$U(x_1) = v(x_1)(G(p_1))$$
$$U(x_2) = v(x_2)(G(p_1 + p_2) - G(p_1))$$
$$U(x_3) = v(x_3)(G(p_1 + p_2 + p_3) - G(p_1 + p_2))$$

---

[52] Veja Quiggin, J. "A Theory of Anticipated Utility", Journal of Economic and Organization, 1982, p-323-343.

Expandindo o modelo de *vN-M*

$U(u_i(x_i)) = u_1(x_1)p_1 + \cdots + u_N(x_N)p_N$, temos.

Primeira hipótese: os dois modelos obedecem a uma trajetória aditiva, ou seja, são reflexos do modelo de *Marschak-Machina*, ou $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Deste modo, o modelo de *Quiggin* se tornaria:

$$
\begin{aligned}
&U(x_1) = v(x_1)(G(p_1)); G(p_1) = p_1 \\
&U(x_2) = v(x_2)(G(p_1 + p_2) - G(p_1)), G(p_1 + p_2) = p_1 + p_2 \\
&U(x_3) = v(x_3)(G(p_1 + p_2 + p_3) - G(p_1 + p_2)), G(p_1 + p_2 + p_3) = p_1 + p_2 + p_3
\end{aligned}
$$

Então, reescrevendo, temos:

$$
\begin{aligned}
&U(x_1) = v(x_1)p_1 \\
&U(x_2) = v(x_2)p_2 \\
&U(x_3) = v(x_3)p_3 \\
&U(x_1; x_2; x_3) = v(x_1)p_1 + v(x_2)p_2 + v(x_3)p_3 \Leftrightarrow (vN - M)
\end{aligned}
$$

Deve ser percebido que a solução com (suposição aditiva de probabilidades) para o modelo de *Quiggin* é um retrospecto do modelo de *vN-M*. Essa solução só é válida, se as probabilidades forem aditivas, como já referendado. Mas como o modelo *Rank–Dependent Expected Utility* não obedece à probabilidade aditiva, logo, $\sum_{i=1}^{n} p_i \neq 1$, o caso analisado, acima, é uma peculiaridade do modelo apresentado.

Uma crítica ao modelo *Rank–Dependent Expected Utility*, na observação de *Starmer* (2000), é que mesmo na condição de ser uma teoria intransitiva ainda assim, ela não consegue explicar quais são os aprendizados sobre intransitividade em escolhas arriscadas.

Existem outros dois modelos de utilidade na linha do modelo *Rank–Dependence* citados como *Dual Expected Utility* (Utilidade Esperada Dual) definido por *Yaari* (1987) e o Modelo Ordinal Independence (Independência Ordinal) definido por *Segal* (1984) e por *Green* e *Jullien* (1988). Os referidos modelos têm apenas a primeira parte da função de somatório como diferenças, mantendo a segunda parte (relação da soma das diferenças de probabilidades como elementos iguais). Portanto, o modelo de Utilidade Esperada Dual é funcionalmente definido como.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left[G\left(\sum_{j=1}^{i} p_j\right) - G\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right)\right] \tag{4.3}$$

O modelo definido como Independência Ordinal é definido por.

$$\sum_{i=1}^{n} h\left(x_i, \sum_{j=1}^{i} p_j\right)\left[G\left(\sum_{j=1}^{i} p_j\right) - G\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right)\right] \tag{4.4}$$

Para uma breve exposição dos dois modelos apresentados (Utilidade Esperada Dual e Independência Ordinal) tem em comum com o modelo de Utilidade Esperada, ou modelo de *vN-M* se traduz. Expandindo os dois modelos temos:

$$\begin{aligned} U(x_1) &= x_1(G(p_1)) \\ U(x_2) &= x_2(G(p_1+p_2) - G(p_1)) \\ U(x_3) &= x_3(G(p_1+p_2+p_3) - G(p_1+p_2)) \end{aligned}$$

Utilidade Esperada Dual

$$\begin{aligned} U(x_1) &= h(x_1, p_1)(G(p_1)) \\ U(x_2) &= h(x_2, p_1+p_2)(G(p_1+p_2) - G(p_1)) \\ U(x_3) &= h(x_3, p_1+p_2+p_3)(G(p_1+p_2+p_3) - G(p_1+p_2)) \end{aligned}$$

Independência Ordinal

$$U(u_i(x_i)) = u_1(x_1)p_1 + \cdots + u_N(x_N)p_N$$

vN-M

O primeiro modelo (Utilidade Esperada Dual) em função comparativa com o modelo de *vN-M* é que em vez de termos uma função multiplicada pelos "pesos" como no modelo de *Quiggin* $(v(x_i))$ temos agora a variável em si, ou seja, a função de uma variável pela própria variável. Existe uma grande diferença entre "medir" a função de um termo em vez de se medir o próprio termo, como é apresentado no modelo de *vN-M*. O exemplo do terceiro capítulo, utilizamos, na parte da prova da linearidade da probabilidade, as cestas de Utilidade Parcias em forma de Utilidades Parciais.

O segundo modelo (Independência Ordinal) combina a variável (cesta para *vN-M*) com o conjunto de pesos "prospectos ou perspectivas". À medida que se aloca uma função de variável e pesos podemos ter a real idéia do valor da Utilidade Esperada para o modelo. A diferença dos modelos expandidos para a Utilidade Esperada é principalmente a não aditividade da probabilidade, ou seja, da diferença entre determinar $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ e $\sum_{i=1}^{n} p_i \neq 1$.

Finalmente, a *Weighted Utility* (Teoria da Proporção) proposta por *Chew* (1983), que foi baseada, segundo *Schweinzer*, na axiomatização da Teoria

Betweenness (ou separação). A Teoria (ou propriedade) *Betweenness* diz que a classificação de preferência de probabilidade de uma mistura de duas loterias é sempre intermediária entre as loterias individuais. Desde que $r \succ s \Rightarrow r \succ \alpha r + (1-\alpha)s \succ s$, ou seja, para todo $r, s \in P(X)$ com $r \sim s$ e $\alpha \in (0,1)$, deste modo temos $r \sim \alpha s + (1-\alpha)s \sim s$. Isto quer dizer que se um agente for indiferente entre escolher entre duas loterias, elas são indiferentes se forem misturas. A Teoria *Betweenness* é uma conseqüência imediata do Axioma da Independência. Os modelos apresentados acima, principalmente à relação $(r \sim \alpha s + (1-\alpha)s \sim s)$, representam também preferências quase-concavas e quase-convexas (veja a figura 20) que serão em todos os modelos *Weighted Utility,* ou Utilidade Ponderada, a causa da separação das reações dos indivíduos defronte a decisão com risco e incerteza.

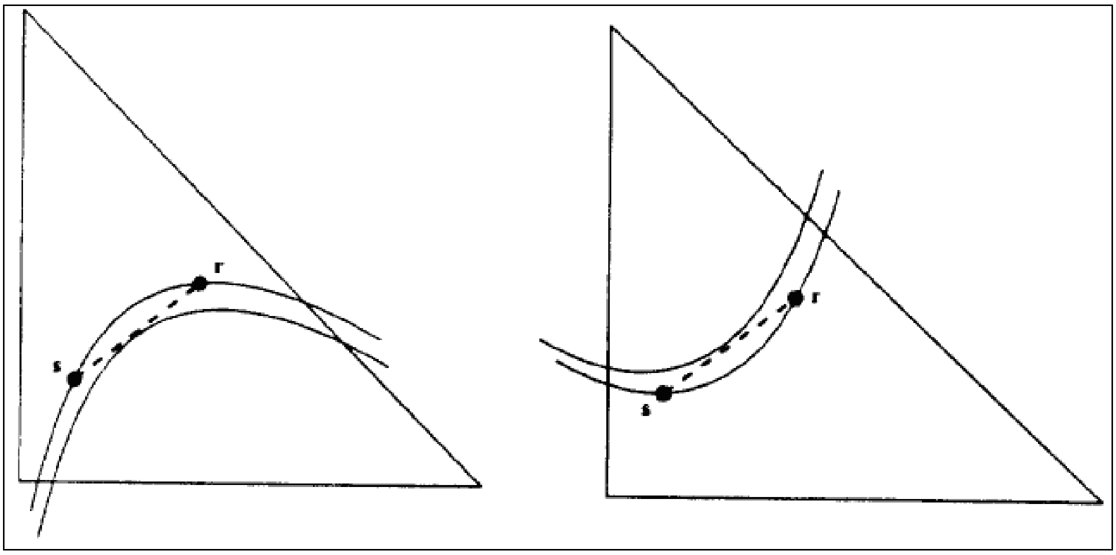


Figura 20: Preferências Quase-convexas (aversão ao risco) e Preferências Quase-côncavas (propensão ao risco)
Fonte: Tuthill, J e Frechette, D. Teorias da Utilidade Não Esperada: teorias da Utilidade Peso Esperada, Dependente da Classificação e Prospecto Cumulativa. Conferência sobre Aplicação de Mercadorias a Análise de Preços, previsões, e Administração de Mercados de Risco. NCR-134, St Louis, Missouri, abril de 2002.

O modelo funcional da *Weighted Utility* é definido pelo modelo abaixo.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} v(x_i)p_i}{\sum_{i=1}^{n} \tau(x_i)p_i} \qquad (4.5)$$

Primeiramente o modelo demonstra que a taxa de probabilidade p_i é uma conseqüência direta do resultado de x_i. Se a função peso $\tau(\cdot) > 0$ é pequena para uma muito grande ordenação de resultados e elevada para muito baixa ordenação de resultados, esta resultante distorção de resultados implica superestimação dos resuldados de probabilidade desprezados e subestimação dos resultados de probablidade considerados, como é passível de se perceber no formato da figura 21. Isto quer dizer que $\tau(\cdot)$ representa ou otimismo, ou pessimismo frente a uma decisão de risco. Nota-se que se $\tau(x_i)=1, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, e assim o modelo funcional *Weighted Utility* se reduz a $\sum_{i=1}^{n} v(x_i)p_i$, ou seja, o modelo *EU* (*Expected Utility*) de *vN-M*.

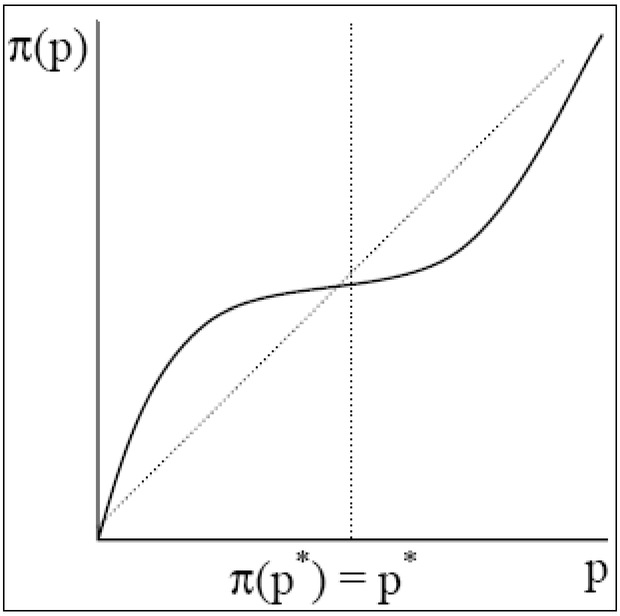


Figura 21: Função Transformação em forma S
Fonte: Starmer, C. Desenvolvimento em Teoria da Utilidade Não Esperada: a procura de uma teoria descritiva da escolha sob risco. Jornal de Literatura Econômica, vol XXXVIII (junho de 2000).

Utilizando também a comparação do modelo *vN-M* temos:

$$U(x_i) = \frac{v(x_1)p_1 + \ldots + v(x_i)p_i}{\tau(x_1)p_1 + \ldots + \tau(x_i)p_i} \qquad \text{Teoria da Proporção}$$

$$U(u_i(x_i)) = u_1(x_1)p_1 + \cdots + u_N(x_N)p_N \qquad vN\text{-}M$$

Se $\tau(x_i)=1, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, o que remonta a. *vN-M*. Basta substituir esta premissa no modelo da Teoria da Proporção que temos.

$$U(x_i) = \frac{v(x_1)p_1 + \ldots + v(x_i)p_i}{(p_1 + \ldots + p_i) = 1} = v(x_1)p_1 + \ldots + v(x_i)p_i \Leftrightarrow vN - M$$

Necessariamete, a função $\tau(x_i)$, como já explicado, pondera o resultado dos resultados x_i, como o exemplo abaixo:

Suponha que possamos escrever $\tau(x_i)$ como $\tau(x_1) > \tau(x_2) > \ldots > \tau(x_i)$. Podemos escrever $\tau(x_1) = n_1\tau(x_2) = \ldots = n_n\tau(x_i)$, então, temos, $U(x_i) = \dfrac{v(x_1)p_1 + \ldots + v(x_i)p_i}{\tau(x_1)p_1 + \dfrac{\tau(x_1)}{n_1}p_2 + \ldots + \dfrac{\tau(x_1)}{n_n}p_i} = \dfrac{v(x_1)p_1 + \ldots + v(x_i)p_i}{\tau(x_1)\left(p_1 + \dfrac{1}{n_1}p_2 + \ldots + \dfrac{1}{n_n}p_i\right)}$. Nota-se que temos pesos sobre os prospectos, que é conseqüência da função $\tau(x_i)$. Estes "pesos" ponderam a escala de ordenações de tal modo separar o efeito de grandes ordenações de pequenas ordenações, ou seja, como afirmado no texto, reforça "ou otimismo, ou pessimismo frente a uma decisão de risco".

Na próxima seção analisamos o modelo determinado por *Prospect Theory*, dos autores *Kanhnemann* e *Twerky*, e desenvolvido em 1979. A Teoria da Perspectiva, como no exemplo da Figura 23 (ou *Prospect Theory*), é um modelo de duas fases. A fase primeira mede a relação heurística da decisão como função da possibilidade do indivíduo ser capaz fazer suas escolhas; a segunda, determinada como perspectiva (ou prospecto); definem os pesos para as decisões, como elementos de freqüência e não como probabilidades. Assim, será bem mais detalhada a composição desta teoria e seus reflexos na condução no estudo do comportamento hunano.

4.2. Teoria da Perspectiva de Kahnemann e Tversky

4.2.1 Aspectos Iniciais

Toda decisão ocupa determinado espaço na vida dos seres humanos, ou seja, um espaço de tempo e de memória. Pelo lado da memória, o tema vem sendo estudado pelos cientistas, em função do comportamento como resposta às escolhas.

Já, pelo lado do tempo, os ganhos e das perdas são tratados pelo cérebro humano como dualidades entre recompensar um ato bem planejado, ou punir decisões equivocadas. Toda a tomada de decisão conjuntamente a possibilidade de resultado das observações, se mostra incapaz para o cérebro na percepção de todos os detalhes.

Em função desta capacidade (de perceber apenas o que os olhos são capazes de medir) os cientistas chamaram de *Framming effect*, ou efeito de enquadramento. Este efeito limita nosso olhar àquilo que, apenas queremos ver.

Mesmo que na intenção de perceber todas as relações existentes entre os fenômenos reais, diretamente proporcionais as nossas escolhas, seria improvável obtermos uma escolha ótima. O cérebro, diga-se de passagem, Sistema Nervoso Central, não consegue classificar todas as nuanças que formam um prospecto de escolha e por assim dizer, reduz esta possibilidade a fatores em que possa "pesar" e "catalogar". Essa característica humana torna o gasto de energia compatível com o que se pode fazer como "medir" o risco de um evento, ou calcular a Utilidade Esperada de uma loteria simples, por exemplo.

A condição de escolha ou, a preferência vinculada a ela, é definida de acordo com os dois modelos de utilidade propostos neste trabalho. Para a Teoria da Utilidade Esperada, a condição de escolha é uma medida de cunho racional, sendo que "razão" já foi claramente discutida nos dois primeiros capítulos do trabalho. Para a Teoria da Utilidade Não Esperada, a forma de escolha é uma construção onde um dos principais instrumentos é definido como Heurística. Por Heurística pode-se definir como um processo que a espécie humana desenvolveu para reduzir as situações complexas a sistemas mais simples de compreensão. Isso torna os resultados mais eficazes em uma situação qualquer.

Outro aspecto a ser observado é a relação da Economia com a Psicologia Cognitiva e a Medicina Neurológica. Estas áreas do conhecimento humano vêm contribuindo com novos pilares para o campo da Teoria da Escolha sobre Incerteza.

Estudando o comportamento humano, principalmente o cérebro, *Kahnemann* e *Twersky* (1979) perceberam o papel da memória no papel do processo de escolha dos indivíduos, principalmente associados à memória de longo prazo. Na medida em que as pessoas são expostas a situações de incerteza, e que necessitam julgar com um viés de risco, a possibilidade de situações embaraçosas se torna eminente. Por esse ponto, muitas decisões são tomadas pelo intermédio de heurísticas. Algumas como as de representatividade (usar como evento para decidir algo probabilisticamente muito representativo), de disponibilidade (facilidade com que determinado evento é acessado pela memória tantas quantas forem às vezes necessárias), de ancoragem (basear estimativas em função de cálculos ou estimativas incompletas) e de ajustamento (grau de ajuste da ancoragem) definem algum papel em escolhas.

A escolha sob risco, na Teoria de *vN-M*, não procurou compreender a característica dos processos de decisão, ma sim modelar todo o processo. Como exemplo, a própria Teoria da Utilidade Esperada apenas observa a probabilidade como uma "peça" linear ao modelo. Os movimentos da teoria se baseiam no referendo Matemático da Lógica da Teoria dos Conjuntos, e a alguns preceitos nenhum pouco convencional de que a representação da vontade humana está condicionada a razão.

Novamente, *Kahnemann* e *Twersky* (1979) perceberam a possibilidade de estudar alguns problemas cognitivos com impacto em Economia, mas que ainda eram tratados como instransponíveis pelos axiomas que os representavam. Esse é o caso do modelo de *Savage* (Probabilidade Subjetiva) que buscou avidamente "consertar" a característica aditiva da Teoria *vN-M* pela utilização de um separador "emotivo" para decisões. Buscando o Princípio da Dominância Estocástica (observe a seção 3.4.2) existe um ordenamento bem comportado na distribuição do risco. No caso da Teoria da Perspectiva este comportamento não ocorria, principalmente em virtude de mudanças no enfoque das ordenações realizadas através de pesquisa em indivíduos.

Outro aspecto apresentado por *Kahnemann* e *Twersky* é o Efeito Reflexão, ou *Reflection Effect*. Na presença de duas situações de escolha ocorre algo parecido como se tivéssemos dois espelhos postos um ao lado do outro. O primeiro deles seria o responsável pela parte dos ganhos da escolha (o que na figura 22 seria o trecho côncavo) e o outro seria o determinado como responsável pelas perdas (trecho convexo, na figura 22). Como exemplo, em decisões de escolha, utilizando a metodologia do efeito reflexão, tem-se ao Problema da Doença Asiática, proposto pelos autores.

Segundo *Kahnemann* e *Twersky*, suponha a seguinte situação:

> Imagine que os Estados Unidos está preparado para uma determinada insurreição de uma não usual doença asiática, em que é esperada a morte de 600 pessoas. Dois programas alternativos para combater a doença estão sendo propostos. Assuma que a exata estimativa científica das conseqüências do programa são as seguintes.
>
> a) se o programa A é adotado, 200 pessoas serão salvas
> b) se o programa B é adotado há 1/3 de probabilidade que 600 pessoas sejam salvas e 2/3 de probabilidades de que nenhuma seja salva.
>
> Qual dos dois programas você é favorável?

Segundo os pesquisadores, as pessoas quando expostas à pergunta, mantém o efeito de enquadramento "*framming effect*". Elas desejam salvar a todos ou correr o risco de não salvar ninguém. Outra observação é efeito reflexão indiretamente apresentado no problema, pois nas duas situações de escolha existe uma simetria entre os ganhos (salvar a maioria) e perder (correr o risco de matar a todos).

Existe outro efeito, fora os dois já apresentados, que também revelam a diferença entre a Teoria da Utilidade Experada e a Teoria a Utilidade Não Esperada. Para a Utilidade Esperada, existe a obediência aos princípios axiomáticos. Um destes, que foi apresentado no terceiro capítulo, é o Principio da Dominância Estocástica. Pela dominância há ordem de escolhas em virtude da medida de risco e da racionalidade. Acontece que para a Utilidade Não Esperada ocorre o efeito de Cancelamento, ou *cancellation effect*, que anula elementos com perspectivas em comum. O efeito na Dominância estocástica inexiste. Assim, *Starmer* (2000) afirma que ocorre a troca da Dominância Estocástica para Dominância Heurística sem, contudo, nesta estruturação, desaparecer a monotonicidade que se mantém preservada. A idéia de não haver mais Dominância Estocástica, como nos modelos neoclássicos, ocorre segundo *Kahnemann* e *Twersky*, quando os indivíduos "varrem" o conjunto de opções e deletam perspectivas dominadas se elas são detectadas.

Como apresentado no capítulo três, as probabilidades não são lineares e as escolhas são intransitivas. Isto faz com que haja uma transferência de dominância estocástica para dominância heurística como já explanado. *Starmer* (2000) afirma que a Teoria das Preferências Transitivas é uma característica dos modelos de maximização, mas não é algo fundamental para as escolhas em questão. Nas palavras do autor[53] "*can we speak of people maximizing anything if they don't have transitive preferences? It turns out that the answer is yes*".

[53] "podemos falar de pessoas que nada maximizam elas não têm preferências transitivas? deve-se supor que a resposta seja sim."

A Teoria das Preferências não Transitivas começou a ser pensada por *Bell* (1982), *Fishburn* (1982), e *Loomes* e *Sugden* (1987). No caso, *Loomes* e *Sugden* (1987) chamaram sua teoria de *Regret Theory* ou Teoria do Arrependimento. A Teoria do Arrependimento foi vista na seção 4.1.

Cabe aqui apenas lembrar que *Loomes* e *Sugden* perceberam que os indivíduos quando escolhem, comparam seus resultados com uma dada perspectiva (aquilo que já tem em mente). Isto acaba por afetar as próximas escolhas de tal forma a não mais existir um conjunto ordenado delas na forma da transitividade tradicional.

Também é preciso rever a capacidade das preferências monotônicas de permanecerem invioláveis. Segundo *Starmer* (2000) em primeiro lugar, poucas pessoas escolhem uma opção estocasticamente dominada de um conjunto de escolhas quanto ela é transparentemente óbvia, do que a opção dominada. Em segundo lugar, as escolhas não são geralmente monotônicas. Sistemáticas violações da monotonicidade podem ser geradas em um contexto onde a relação de dominância é opaca (isto é, onde a escolha não é óbvia).

4.2.2 Aspectos da Teoria da Perspectiva

A Teoria da Perspectiva foi construída com o intuito de desenvolver nova metodologia para a Utilidade Esperada. Como um novo ferramental para demonstrar como os indivíduos sempre, em ocasiões de incerteza, buscavam seu resguardo pela via da certeza. Para a Teoria da Perspectiva, a razão aplicável e normativa da Utilidade Esperada não tem eficácia para explicar como tomamos decisões sem analizarmos o cunho lógico delas.

Para isto, os autores *Kahnemann* e *Tversky*, ambos Psicólogos, trouxeram uma nova abordagem, consolidada por demonstrar por outras vias as falhas mais elementares da teoria anterior. A definição de risco, como uma medida, e de incerteza como algo além do tangível traz ao universo das Ciências Econômicas um novo desafio, uma nova versão da compreensão de como os indivíduos elegem seus padrões de escolha e os transformam em utilidade.

Continuando, pôs–se de lado o aspecto psicológico do processo de escolha. A construção de um indivíduo maximizador, otimizador e diferenciado em três categorias de risco (aversão, indiferença e propensão) foi até então uma medida pioneira de posição da utilidade e sua aplicabilidade em escolha e preferência, mas mantendo o aspecto da escolha sob aspecto racional.

Por conseguinte, alguns aspectos dos elementos da Teoria da Perspectiva, ou *Prospect Theory* são determinados por: a) uma função valor é côncava para ganhos e convexa para perdas, e inclinada em 45^o para ganhos e perdas; c) uma transformação não linear da escala de probabilidade, com sobrepeso para pequenas probabilidades e pouco peso em moderado e altas probabilidades, como no exemplo da figura 24. Vemos então, a representação geométrica do efeito de ganhos e perdas.

A *Prospect Theory* tem como objetivo principal medir o efeito dos ganhos e das perdas na vida dos indivíduos e o seu impacto na função de utilidade. Para isso é utilizado pesos para cada parcela das escolhas. Isto torna a medida de escala da utilidade mais consistente com o processo de "perdas" e "ganhos" que cada uma delas toma no processo todo. Quando "ocorre um arrependimento" em um processo de escolha, ele é medido, mas isto não é "capturado" no modelo de Utilidade Esperada formal, ou *vN-M*.

Dessa forma, não somente em Teoria da Perspectiva, mas em todos os outros modelos da Utilidade Não Esperada, as suposições de que as decisões são em sua maioria intransitivas (que não mantém uma ordem), de que não há dominância Estocástica de Primeiro grau em quase todos os modelos de decisão (que não existe o mantenimento de uma decisão que envolva risco, de forma ordenada), visto no terceiro capítulo, de que o Paradoxo de *Allais* apresentou uma nova abordagem em matéria de escolhas, demonstrando assim de que Savage não teria sucesso em ampliar o modelo tradicional da Utilidade Esperada, visto no terceiro capítulo, é parte integrante da configuração da Utilidade Não Esperada.

Para entendermos a Teoria da Perspectiva, na abordagem de *Kahneman* e *Tversky* (1979), devemos entender o que é delimitado por (pesos, perspectivas, prospectos, ou expectativas) escolha como um processo entre expectativa ou apostas. Uma expectativa (veja anexo A para uma descrissão completa da teoria) $(x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n)$ é um contrato (podemos também ver como uma cesta vista no terceiro capítulo) que produz rendimentos x_i com probabilidade p_i. Aqui,

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ pode ser escrita como um contrato. O desenvolvimento desta parte da probabilidade obedece ao modelo aditivo, como já visto.

Simplificamos a notação acima (veja Anexo A), omitimos o resultado nulo e usamos (x, p). Apresentamos a perspectiva (expectativa) $(x, p);(0,1-p)$ sendo que x (unidades de renda) com probabilidade p e $\{0\}$ (unidades de renda) com probabilidade $1-p$. Como efeito de notação, a expectativa de menor risco, que produz x (unidades de renda) com certeza é denominada por (x).

Avançando mais na teoria, a aplicação da Teoria da Utilidade Esperada para escolhas entre prospectos (ou expectativas) é baseada em três conjuntos de crenças.

(i) Expectativa: $U(x_1, p_1; \ldots; x_m, p_m) = p_1 u(x_1) + \ldots + p_n u(x_n)$ (4.6)

Note-se que ainda é buscada no modelo de *vN-M* a mesma distribuição de utilidade para a Teoria da Utilidade Não Esperada.

A utilidade do prospecto (ou expectativa) denominada por U é a utilidade esperada de seu resultado.

(ii) Valor da Integração: $(x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n)$ é aceitável na qualidade da posição w se e somente se $U(w + x_1, p_1; \ldots; w + x_m, p_m) > u(w)$ 4.7)

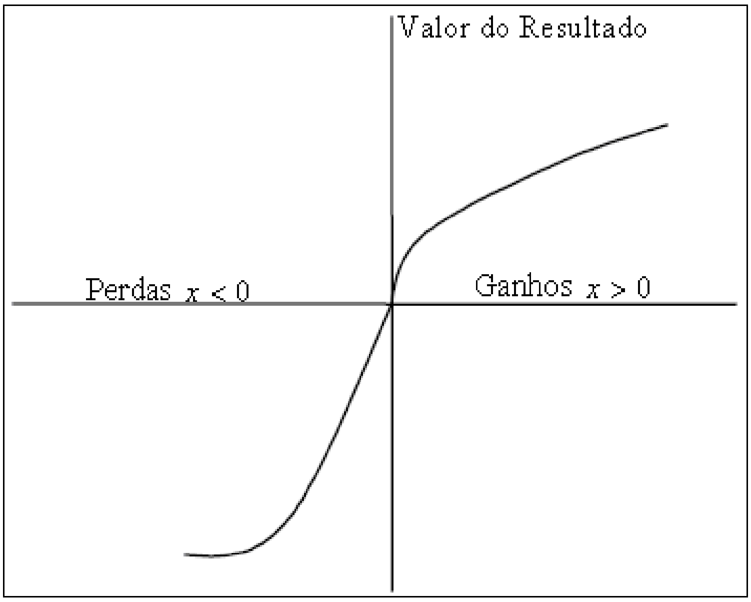


Figura 22: A Valoração dos Resultados em Teoria do Prospecto
Fonte: Starmer, C. Desenvolvimento em Teoria da Utilidade Não Esperada: a procura de uma teoria descritiva da escolha sob risco. Jornal de Literatura Econômica, vol XXXVIII (junho de 2000).

Isto significa que um prospecto ou (expectativa) é aceitável se a utilidade resultante da integrabilidade da expectativa de um dos ativos excede a utilidade de um determinado ativo. O domínio da função utilidade é então definitivamente estabelecido.

(iii) Aversão ao Risco: u é côncava $(u'' < 0)$. (4.8)

Uma pessoa é avessa ao risco se ela prefere certo prospecto (expectativa) $\{x\}$ a algum prospecto arriscado com valor esperado $\{x\}$. Na Teoria da Utilidade Esperada, a aversão ao risco é equivalente à concavidade da função utilidade. As pessoas mantêm aversão ao risco na medida em que não podem mais melhorar suas próprias escolhas. Como referência à percepção do comportamento da função utilidade, podemos exemplificar a função utilidade do dinheiro como matematicamente côncava. A idéia de um modelo matemático envolvendo uma medida de risco pode ser encontado em *Arrow* e *Pratt*.

Continuando o artigo de *Kahneman* e *Tversky* (1979), nos modelos de Utilidade Esperada a utilidade dos resultados é ponderada pela probabilidade. Os autores, *a priori*, declaram que elas comportam-se com "sobrepeso" de resultados para eventos com probabilidade certa de ocorrer e põe "pouco peso" em probabilidades que ocorrem meramente.

Para uma perfeita explanação de como *Kahneman* e *Tversky* puderam demonstar sua teoria, apresenta-se um trecho do questionário aplicado como teste para prova da Teoria da Perspectiva.

Kahneman e *Tversky*, em 1979 desenvolveram um modelo diagnóstico, em forma de 12 perguntas para uma amostra determinada de 33 pessoas, tal que fosse possível capturar o modo como elas se comportavam quando postas frente a situações de risco. Os pesquisadores tinham como primeiro objetivo determinar traços do comportamento cognitivo com reflexo nas escolhas. O questionário foi apresentado em forma de apostila contendo doze questões de múltipla escolha. Para cada questão respondida se ponderava o número de respostas em função dos resultados.

Vamos reproduzir parcela dos problemas que foram utilizados pelos pesquisadores e as respostas escolhidas pela amostra. Para entendermos melhor, o que os autores querem “medir” se faz necessária uma explicação simples de como este questionário foi desenvolvido. Uma grande parcela das questões apresentadas reflete exatamente o que já foi exposto no terceiro capítulo. O indivíduo para escolher necessitaria multiplicar o valor ($) pela probabilidade (conta mental) ou escolher entre o ($) ou a probabilidade. As que apresentam esta atividade são as questões (1, 2, 3, 4, 7, 8, 11, e 12). As questões (5, 6, 9, e 10) são mais simbólicas, pois exige do indivíduo imaginação.

O modelo de questinonário (veja Quadro 1, p. 131) apresenta as questões de forma a indagar ao questionado como ele quer se definir. Para a Teoria da Utilidade Esperada, equivaleria a decisão de um agente se mostrar avesso, indiferente ou propenso a risco. As pessoas entrevistadas deveriam apontar suas melhores alocações vendo o que lhes valia mais (probabilidade, ou valor). Baseado nestes dois pontos foi desenvolvido (através da análise das questões), um grupo de indicadores que definiriam como cada indivíduo se comportava em seu modo de escolha, isto é, como estas escolhas representavam na teoria.

Cada grupo de questões, quando respondidas de uma forma, aponta determinado traço de comportamento, ou seja, enfoca uma tendência de escolha dos agentes. A abordagem pesquisada se resume a apontar os efeitos de cada fator em Teoria da Perspectiva, (*Prospect Theory*) baseados no processo de escolha.

Deste modo, as questões 1 e 2 provam que há enquadramento (ou *framming effect*), as questões 3 e 4 prova o que se chama de mistura de loterias, que também é apresentado nas perguntas 7 e 8; todas estas apontam o efeito de reflexão das preferências, ou (*Reflections Preferences*). As questões 5 e 6 que provam o axioma da substituição, que define como os indivíduos são permeáveis em suas escolhas. Por fim, as questões 10, 11 e 12, apontam o fenômeno do efeito isolamento. A questão 9 é a que se refere ao risco de probabilidade.

Assim temos as questões formuladas, baseadas no artigo de *Kahnemann* e *Tversky*, intitulado *Prospec Theory: an analysis of decision under risk* (1979).

Quadro 1: Modelo de Questionário

Problema 1. Escolha entre.

A: $ 2.500 com probabilidade 33%
$ 2.400 com probabilidade. 66%
$ 0,00 com probabilidade 1%

B: $2.400 com certeza

Problema 2 – Escolha entre.

C: $2.500 com probabilidade 33%
$0,00 com probabilidade 67%

D: $2.400 com probabilidade 34%
$0,00 com probabilidade 67%

Problema 3: Escolha entre.

A: ($4.000; 80%)
ou B: ($3.000)

Problema 4: Escolha entre.

C: ($4.000;.20%)
ou B: ($3.000; 25%)

Problema 5: Suponha e escolha.

A: 50% de chance de ganhar um passeio de Três semanas pela Inglaterra, França e Itália.

B: Um passeio de uma semana pela Inglaterra com certeza.

Problema 6: Suponha e escolha.

A: 5% de chance de ganhar um passeio de três semanas pela Inglaterra, França e Itália.

B: 10% de chance de ganhar um passeio de uma semana pela Inglaterra

Problema 7: Escolha entre.

A: ($6.000; 45%)
ou B: ($3.000; 90%)

Problema 8: Escolha entre.

C: ($6.000; 0,1%)
ou D: ($3.000; 0,2%)

Problema 9:

Suponha que você considere a possibilidade de segurar a sua propriedade contra prejuízos, isto é, incêndio e roubo. Após examinar o risco e o prêmio você não percebe claramente a preferência entre a opção de comprar um seguro ou ter a propriedade sem seguro.

Então você percebe que a companhia de seguros oferece um novo programa chamado seguro probabilístico. Neste programa você paga a metade do prêmio regular. No caso de dano, existe 50 % de chance de você pagar a outra metade do prêmio e a companhia de seguros cobrir todas as perdas; e existe 50% de chance de você receber de volta o pagamento de seu seguro e sofrer todas as perdas. Por exemplo, se um acidente ocorrer em um dia eventual do mês, você paga a outra metade do prêmio regular e suas perdas são cobertas; mas se o acidente ocorrer em um único dia do mês, seu pagamento de seguro é devolvido e suas perdas não são cobertas.

Lembre que o prêmio de maior cobertura é tal que o preço do seguro igual ao custo. Nestas circunstâncias, você comprará o seguro probabilístico:

A: Sim
B: Não

Problema 10:

Considere os seguintes jogos em dois estágios. O primeiro estágio existe a probabilidade de 75% de terminar o jogo sem ganhar nada, e a probabilidade de 25% de se mover para o segundo estágio. Se você atingir o segundo estágio você tem que escolher entre ($4.000, 80%) e ($3.000).

Sua escolha deve ser feita depois do jogo começar, isto é, depois que o resultado do primeiro estágio for conhecido.

Problema 11:

Em adição a tudo o que você tem, lhe será dado $ 1.000,00. Porém, você precisa escolher entre.

A: ($1.000; 50%)
ou B: ($ 500)

Problema 12:

Em adição a tudo o que você tem, lhe será dado $ 2.000,00. Porém, você precisa escolher entre.

A: (- $1.000; 50%)
ou B: (- $ 500)

Fonte: KAHNEMAN, Daniel; TVERSKY, Amos. (1979). Prospec Theory: an analysis of decision under risk. Vol.47, n^0 2, mar. 1979, 263-291.

Ainda sobre o questinonário (observe o Quadro 1 da página anterior) apresenta algumas questões de forma a indagar do questionado a forma como ele se define. Para a Teoria da Utilidade Esperada, equivaleria à decisão de um agente em se mostrar avesso, indiferente ou propenso a risco. As pessoas entrevistadas deveriam apontar suas melhores alocações vendo o que lhes valia mais (probabilidade, ou valor). Baseado nestes dois pontos foi desenvolvido (através da análise das questões) um grupo de indicadores que definiriam como cada indivíduo se comportaria em seu modo de escolha, isto é, como estas escolhas representavam a teoria.

Para uma rápida exposição de cada grupo de questões, os modelos estudados definem a teoria e suas hipóteses. Todos os efeitos estudados, apresentados como conseqüência das escolhas dos indivíduos pesquisados, foram estudados no quarto capítulo.

Cada grupo de questões, dependendo da alocação das respostas, aponta para um determinado traço de comportamento, ou seja, aponta uma tendência de escolha. As perguntas se resumem a abordar os efeitos de cada fator em Teoria da Perspectiva, (*Prospect Theory*) baseados no processo de escolha. Deste modo, as questões 1 e 2 provam que há enquadramento (ou *framming effect*), as questões 3 e 4 prova o que se chama de mistura de loterias, que também é apresentado nas perguntas 7 e 8; todas elas apontam o efeito de reflexão das preferências, ou (*Reflections Preferences*). As questões 5 e 6 que provam o axioma da substituição, que define como os indivíduos são permeáveis em suas escolhas. Por fim, as questões 10, 11 e 12, apontam o fenômeno do efeito isolamento. A questão 9 é a que se refere ao risco de probabilidade.

Outra contribuição da Teoria da Perspectiva é aprimorar o estudo daquilo que os seres humanos não observam em suas escolhas: a freqüência de base. A freqüência de base é uma probabilidade *a priori* dos eventos que estão à disposição do processo de escolha, ou seja, é a probabilidade do evento. Segundo *Eysenkcy* e *Keane* apud *Koehler*, (2005, p. 461), as informações da freqüência de base são "a freqüência relativa com que um evento ocorre ou um atributo está presente na população". Um exemplo disso é o exemplo do "problema do táxi [54]" usado por *Tversky* e *Kahnemann*.

Em função da Teoria da Perspectiva também buscar em heurísticas de decisão parte do *modus operandi*, *Kahnemann* e *Tversky* (1979, p. 274) desenvolveram quatro padrões que definem conjuntamente o padrão de resposta que os indivíduos revelam, e a relação heurística delas com o processo de escolha. Estas são:

1. *coding* ou código
2. *combination* ou combinação
3. *segregation*, ou segregação
4. *Cancellation* ou cancelamento

Assim, os autores *Kahnemann* e *Tvesrky* definem *coding* ou código, como, a situação em que os indivíduos percebem os resultados como ganhos ou perdas, em vez de estados de riqueza e bem estar. A definição de "ganhos" e "perdas" é determinada como pontos neutros de referência. O ponto de referência corresponde à posição do prêmio corrente, em que, no caso de ganhos e perdas, coincide com o montante atual que é recebido ou pago (figura 22). Contudo, a localização do ponto de referência, e o conseqüente código de resultados, como ganhos ou perdas, podem ser afetados pela formulação das perspectivas oferecidas, e pelas espectativas dos tomadores de decisão.

O termo Combinação é o grupamento de probabilidades associadas a resultados idênticos.

Já Segregação, e a separação de componentes determinados como "arriscados" de outros chamados de "pouco arriscados". Isto ocorre à medida que o indivíduo não tem uma idéia clara dos padrões de escolha que está tomando.

Por fim, Cancelamento é a separação do que é parte de seu prospecto (perspectiva) e o que realmente não o é. O efeito cancelamento opera contra o efeito estocástico de primeira ordem.

[54] O problema apresenta uma situação em que alguém vê uma batida de táxi. Afirma-se que na cidade há 85% de táxis que pertencem à companhia verde e 15% a companhia azul. Ocorre que alguém presenciou o incidente e afirmou que quem o provocou foi à linha de táxi azul. O problema também refere que foram feitos testes posteriores com a testemunha e que estes mesmos testes indicam que ela apresenta probabilidade de acerto de 80%. Por fim os pesquisadores perguntam para a amostra se realmente o taxi envolvido era o da companhia azul. Como resultado ao problema do táxi, apresentamos a questão da freqüência de base. A feqüência de base é a probabilidade *a priori*, ou seja, dos táxis que rodam pela cidade. A amostra acompanha a testemunha na responsabilização do táxi azul. Assim, poucos acabam acertando a resposta: a companhia verde.

Para toda teoria há sempre problemas que não são resolvidos. Na Teoria da Perspetiva, como a Teoria da Utilidade Não Esperada, isto não seria diferente. Na próxima seção abordamos alguns problemas que estas duas Teorias ainda não conseguiram resolver.

4.2.3 Discussão em Teoria da Perspectiva: racionalidade

Tanto a Teoria da Perspectiva (*Prospect Theory*) como a Utilidade Não Esperada (*Non Expected Utility*), não definem um evento determinado como Irracional. O que há são eventos ditos racionais (que obedecem primordialmente aos axiomas da transitividade, completesa e reflexibilidade), vistos na Teoria da Utilidade Esperada e os eventos determinados como de Racionalidade Limitada (de *Simon*). O evento com Racionalidade Limitada toma como base o conceito de Heurística de Decisão.

Nesta linha, alguns autores tais como *Herbert Simon* (1959), apresentam um forte argumento envolvendo heurísticas de decisão. Para o autor existe uma sutil relação entre o processo puramente racional, ou puramente axiomático, como visto no capítulo dois; e o argumento da racionalidade limitada que envolve uma heurística limitada de decisão. Estes dois elementos marcam o começo de um notável aprofundamento ao objeto da Economia Neoclássica.

Existe uma forte busca da compreensão não matemática dos processos decisórios. A medida do bem estar dos agentes não necessariamente precisa estar relacionada ao bem estar da maximização do comportamento do indivíduo.

As duas teorias (Utilidade Esperada e Utilidade Não esperada) também partem do mesmo princípio: construir um modelo de utilidade que expresse o máximo do comportamento humano. Necessariamente, elas pecam em ainda não desenvolver um mecanismo que interprete o valor real das (probabilidades, para a Utilidade Esperada), e os ("pesos" para a Utilidade Não Esperada). Na Utilidade Não Esperada todos os modelos associados como, *Rank–Dependent Expected Utility* de *Quiggins* (1982), *Dual Expected Utility* de *Yaari* e *Segal* (1984), e *Weighted Utility* de *Chew* (1983) e a *Prospect Theory* de *Kahnemann* e *Tversky* (1979), usam "pesos" como medida. Os "pesos" e as probabilidades são medidas exógenas. Determinar endogenamente como cada probabilidade, ou peso, comporta-se ainda é uma tarefa complexa.

As eficazes constatações é que não existe um comportamento linear em utilidade, e que as probabilidades não são lineares. A característica de uma probabilidade não linear, e de outros fenômenos não considerados na Utilidade Esperada, foi discutida ao longo do terceiro capítulo e o presente.

Leister (2003) compara o desenvolvimento das idéias de *Tvesrky* e *Kahnemann* às idéias de *Simon*. Para a psicóloga, enquanto em *Simon* a racionalidade existe como caráter normativo, e também como uma propriedade do próprio indivíduo. *Tversky* e *Kahnemann* "estão mais preocupados com a construção de uma teoria empírica da decisão, mas não necessariamente comprometidos com a manutenção da racionalidade como idéia reguladora". A idéia reguladora é o "artefato metodológico" da estrutura behavorista de pensamento.

Pela análise de *Leiste* (2003), *Simon* expande seu pensamento filosófico a respeito dos processos de escolha quando captura o contexto da *psique*. O grande divisor de águas entre a Teoria Clássica da Escolha, ou *EU* (Utilidade Esperada) e a *NEU* (Utilidade Não Esperada) é a existência de uma concepção heurística do comportamento humano. Enquanto que para os clássicos isto é relegado ao acaso, para os novos teóricos do comportamento é parte integrante de uma nova consepção teórica.

Ainda, para a autora "o indivíduo racional exibe comportamento adaptativo, isto é, possui capacidade de se adequar-se ao ambiente". Em *Simon*, o individuo é resultado de uma seleção *Darwiniana*, mas ainda assim aprende com o seu espaço. Portanto, nesta direção, o indivíduo integra um modelo próximo ao que funcionaliza um computador. Este modelo se equipara à memória, processador, receptores, efetores. Enquanto a memória serve como um sistema de acúmulo de informações, o processador avalia as informações, os receptores acumulam informações em tempo real para a memória, e os efetores são os elementos que reagem aos estímulos recebidos pelos receptores. Nesse sentido, segundo *Leiste* apud *Quiggins* (1993), "um sistema formal, ou um sistema de axiomas, não faz referência a um ambiente externo".

Nesta mesma linha de pensamento, *Hirschman* (1987) elabora sua crítica à parcimônia neoclássica. Ainda em *Hirschman* apud *Harry Frankfurt* (1971) a capacidade de recuar é uma característica dos seres humanos, mas não está presente em todos eles. Aos que não tem esta capacidade, *Frankfurt* chamou de “Irrefletidos”, ou seja, são os que não sofrem com caprichos e paixões[55].

Para *Hirschman* (1987, p. 93)

> […] os economistas muitas vezes propõem tratar do comportamento aético ou antissocial elevando o custo de tal comportamento em vez de proclamar padrões e impor proibições e sansões. A razão é que provavelmente eles pensam nos cidadãos como consumidores com gostos inalteráveis ou arbitrariamente alteráveis em questões de comportamento civil ou de consumo. Esta visão tende a negligenciar a possibilidade de as pessoas serem capazes de mudar seus valores.

E ainda em *Hirschman* (1987, p.101), o agente econômico eficiente da teoria tradicional é essencialmente um explorador silecioso e “um estatístico de alto nível” (*Arrow*, 1978), enquanto eu argumentava que ele também possui consideráveis dons de comunicação verbal e não verbal e de persuasão que o capacitarão a influir nos processos econômicos.

Para *Ferejohn et all* (2006) a racionalidade “é um ato que foi escolhido por que está entre os melhores atos disponíveis para o agente, dadas as suas crenças e os seus desejos. Colocado de outra forma, a racionalidade requer que crenças, desejos e ações se relacionem de uma forma particular”. Assim, segundo o autor “são os desejos ou as preferências que serão satisfeitos na escolha”. Para ele, o filósofo Aristóteles preocupou-se em entender os tipos de desejos que os agentes racionais deveriam ter. Os desejos aqui são compreendidos como objetos que regulam as escolhas das ações humanas. Por fim, nas palavras de *Ferejohn* “Aristóteles apresenta, portanto, um tipo de teoria endógena de formação das preferências, na medida em que ele indica como desejos e sentimentos podem ser construídos e desenvolvidos”.

Deste modo, o papel da Psicologia e da Neurologia no processo de decisão aperfeiçoou as técnicas de compreensão do comportamento dos indivíduos em situações de esposição à escolha (sob risco ou incerteza).

Muitos estudos sobre comportamento deslocam a linha de análise para fenômenos (como encontrados em Bolsas de Valores) que foram determinados como irracionais.

---

[55] Veja de Paul Twomey, “*Reviving Veblenian Economic Psychology*”. O autor analisa as idéias e posicionamentos de Torsten Veblen, como um crítico controverso do pensamento racional.

Outro estudo sobre o comportamento das pessoas em situações de tomada de decisão e escolha foi realizado por *Brenner* (1996). Para ele, a sobreconfiança (ou *Overconfidence*) é uma característica do eu (ou *self*), ou seja, do modo pessoal com que os indivíduos respondem aos questionamentos diários e daquilo que elegem. Um exemplo de superconfiança é a situação em que as pessoas são intimadas a se manifestar sobre determinado assunto que muitas vezes não compreendem bem. Para um exemplo disso, a pesquisadora separou por amostragem duas populações de indivíduos sendo que ao primeiro grupo determinou que os indivíduos estimassem a freqüência das respostas do segundo grupo para algumas questões formuladas. O segundo grupo deveria então responder às questões sobre seus perfis de personalidade. Um exemplo de questão aferida no questionário para o segundo grupo foi "Que cidade é mais ao norte: Roma ou Nova Iorque?". Na observação de *Brenner* et al (p. 214):

> […] If, as suggested by Gigerenzer (1991), cognitive illusions disapear when assess relative frequency instead of single-event confidence, we may expect overconfidence, we may expect overconfidence in the latter task but not in the former. On the other hand, if subject's confidence in their predictions depends primarily on the degree to with the behaviors in question are representative of the target's personality profile (Kahnemann & Tversky, 1973), we expect both groups to exhibit overconfidence.[56]

Loewenstein e *O'Donoghue*[57] (2004) aduzem há dois sistemas que interferem no processo de decisão. No primeiro o processo afetivo que rodeia por emoções do tipo "zanga" e "medo" como outras motivacionais que envolvem "fome" e "sexo". O outro sistema é referente ao processo deliberativo que avalia amplas opções, metas, com objetivos específicos (como o que ocorre com a avaliação de perspectivas econômicas).

---

[56] se, como sugerido por Gigerenzer (1991), ilusões coletivas desaparecem quando a freqüência relativa se estabelece em vez de um único evento de confiança, podemos esperar superconfiança, podemos esperar superconfiança na próxima tarefa, mas não na anterior. De outro modo, se a confiança é subjetiva em suas predições depende primariamente do grau com que os comportamentos em questão são representativos no objetivo dos perfis de personalidade. (Kahnemann & Tversky, 1973), nós esperamos dois grupos para exibir superconfiança.

[57] Veja-se, Loewenstein e Prelec, Negative Time Preference, 1991. Os autores afirmam que uma seqüência de eventos dita "correta" pode não condizer com a ordenação desta seqüência. No artigo, isto quer dizer na condição da amostra querer trocar de restaurante em virtude de facilidades; esta falácia se deve principalmente às preferecias não seguir a um padrão ordenado e aditivo.

Os autores, *Loewenstein* e *O'Donoghue*, afirmam que o comportamento cognitico, como as expressões "*willpower*" (força de vontade) "*effort*" (esforço) "*insight*" (visão) são partes que determinam o grande grupo de elementos que se transpõem nos modelos de escolha, mas são de difícil delimitação e detalhamento.

Para os autores existe uma forte relação entre estímulo *versus* comportamento, sendo que entre estas duas relações há duas outras intermediárias, que equilibram o sistema afetivo e o sistema deliberativo.

Já *Gul* e *Pesendorfer* (2005) fazem sua crítica ao "economista irracional" (*mindless economics*). Os autores da área de Neurociências apresentam uma nova ciência que pode ser capaz de corresponder aos anseios dos economistas da *NEU* (Utilidade não-esperada). Note-se que na *NEU* tanto quanto na *EU* ainda não existem mecanismos de medida mais eficazes (como determinar criteriosamente os "pesos" com efetiva escolha em aspecto puramente psicológico) para se atribuir a utilidade um formato mais conciso com a realidade individual.. O ingresso da Psicologia e das Neurociências, como muitas vezes já focado aqui, parece ser o caminho promissor.

Por fim, na observação de *Gul* (apud *Köszegi-Rabin*, p.31), "several aspects of our theory, however, render it short of fully general and formulaically applicable. Many of our specific assumptions are based on intuition rather than direct evidence"[58]

4.2.4. Novas Características da Interpretação de Escolha.

As teorias que buscam delimitar o comportamento de escolha continuam interpretando o comportamento humano como um sistema fechado, ou seja, dentro de hipóteses e suposições muito bem especificadas. No caso da Utilidade Esperada, pelo lado dos modelos que definem uma decisão racional, e pelo lado na Utilidade Não Esperada, pela crítica a elementos da teoria anterior, como *framming effect*, *fanning-out*, paradoxo de *Allais*, e Heurísticas de Decisão.

[58] "severos aspectos de nossa teoria, contudo, rendem se a uma necessária falta de uma formulação geral e aplicável. Muitas de nossas suposições específicas são baseadas na intuição em vez da evidência direta".

A interpretação da probabilidade (como medida linear) por Pesos (como medida de freqüência de base) pouco modificou o conjunto agregador da definição de utilidade. Utilidade é atributo da Preferência, que é atributo de Escolhas que os indivíduos fazem. Neste caso, não existe um estudo para definir como escolhemos.

Alguns Teóricos do Comportamento e da Medicina (campo na Neurologia) vêem estudando de que forma o cérebro humano traça seus padrões de escolha. O primeiro cientista envolvido com esta procura, *Antonio Damásio*, médico português, que buscou uma interpretação neurológica para problemas cognitivos do comportamento humano. Ele apresentou a criação de um "marcador somático" como traço de comportamento para os indivíduos. A idéia do marcador somático (marcador de traço de comportamento) vai ao encontro do que *Gazzaniga* et all (2006) explica: "*Damasio* refere-se a esse mecanismo como marcador somático. Eventos somáticos são sensações corporais; assim um marcador somático implica uma ligação a uma experiência fisiológica, como ficar com medo após assistir a um filme de terror. A reação não é imparcial ou puramente intelectual; ela evoca uma reação física". Já um traço de comportamento, na observação de *Schultz e Schultz* (2002), representa aquilo que *Allport* determinava como "predisposições a responder igualmente ou de modo semelhante a tipos diferentes de estímulos, ou também formas constantes e duradouras de reagir ao nosso ambiente". Alguns exemplos de traços são: a paixão dominante, a agressividade, a autopiedade, o ceticismo, o sadismo, sendo estes os principais. Veja-se que há uma forte relação com o que *Sen* (1979) apresenta como "problemas da preferência revelada" apresentados no segundo capítulo (observe o Anexo B).

Voltando a *Simon* (Teoria da Racionalidade Limitada), e *Tversky* e *Kahnemann* (Teoria da Perspectiva) retomam o conceito de heurística para estudar o comportamento, em muitas situações, tomado pelos indivíduos. Aqui incluímos a relação entre freqüência de base e probabilidade, em que ambas são agregados para a heurística de decisão. Tanto as heurísticas de decisão, de numerosidade (que envolve inferir excessivamente quantidade ou valor a partir da numerosidade ou número de partes em que uma entidade é definida), da disponibilidade (que envolve estimar as freqüências dos eventos tendo como base a facilidade ou dificuldade para recuperar informações importantes da memória de longo prazo), da representatividade (quando um evento é extremamente similar à maioria dos outros em uma população ou uma classe), e de reconhecimento (que funciona como uma heurística rápida para que a mente crie uma ferramenta adaptativa para tomar decisões com recursos mentais realistas), são formas de julgamentos tomadas pelos seres humanos em situação de decisão com um mínimo de informação disponível ou com pouco tempo para isso. No apontamento de *Eysenck* e *Keane* (apud *Griffing* e *Buehler* 2005) ocorrem determinados elementos chamados de falacias. A primeira chamada de falácia do planejamento consiste em se "subestimar quanto tempo se demorará em realizar uma determinda tarefa, ainda que se saiba que as tarefas similares no passado requeiram mais tempo do que o esperado". Isto acontece principalmente porque os julgamentos são apresentados como freqüências e não probabilidades. A segunda falácia, que vem causando grande atenção na comunidade científica, pois sua posição é causa de grandes controvércias interpretativas, é a falácia da conjunção.

A falácia da conjunção foi apresentada como um problema por *Kahnemann* e *Tversky*, em 1983, para estudar, segundo *Eysenck* e *Keane* (2005), "a crença equivocada de que a conjunção ou combinação de dois eventos A e B é mais provável do que um dos dois eventos isoladamente". Um exemplo desta falácia é o problema de Linda: "*Linda* tem 31 anos de idade, é solteira, sincera e muito brilhante. É formada em Filosofia. Quando aluna, era profundamente interessada em questões de discriminação e justiça social e também participou de manifestações antinucleares". Os participantes deveriam ordenar oito possíveis categorias em termos de probabilidade de *Linda*[59] pertencer a cada uma delas. Três destas categorias eram: caixa de banco, feminista, e caixa de banco feminista. Grande parte dos indivíduos respondeu "caixa de banco feminista". Existe uma grande controvércia sobre o "problema de *Linda*" e as alternativas apresentadas, na literatura econômica. Nesta mesma linha, o instituto da preferência e da escolha sempre foi visto pela Utilidade Esperada como elementos imutável sendo parte integrante do racionalismo objetivo (normativo). Acontece que em virtude da possibilidade do Axioma da Transitividade ser objeto de contestação, os fundamentos que operavam a Utilidade Esperada e por assim dizer, a Subjetividade, passaram a necessitar de uma defesa muito mais consistente para responder pelos processos de escolha e preferência.

[59] veja a crítica direta à falácia da conjunção no artigo The Conjuction Fallacy Revisited: How Intelligent Inferences Look Like Reasoning Errors, 1999, de Ralph Hertwig e Gerd Gigerenzer, em que existe uma inferência semântica e polissemia na relação entre probabilidade e freqüência, no problema de Linda.

Nesta mesma linha de pensamento, *Kahneman* e *Tversky* partem do paradoxo de *Allais* como base para complementar suas teorias. *Allais* foi ponto de partida para diversas teorias de comportamento, principalmente as teorias *NEU* (Utilidade Não-Esperada).

Indivíduos separam suas decisões em efeitos que consideram certos (*certainty effect*) de outros, relativos. O processo de escolha passa pela eleição da preferência aparentemente mais concreta, e não pelo resultado *a posteriori*. Para os indivíduos a necessidade de prospectos (expectativas) positivos e não negativos faz com que ocorra um segundo elemento, o efeito reflexão (*reflection effect*). Isto ocorre quando se estuda a possibilidade do sinal dos resultados serem contrários para que ganhos sejam substituídos por perdas. O efeito reflexão é conseqüência da posição do agente frente ao risco assumido.

4.3. Considerações Finais do Capítulo

A característica dos modelos de Utilidade Não Esperada é o contraponto entre a condição de uma Heurística de decisão, contra a pouca consideração desta nos processos de escolha e decisão apresentados pela Utilidade Esperada. A medida de probabilidade é uma medida necessária e suficifiente em Utilidade Esperada, e necessária e não sucificiente em Utilidade Não Esperada, no estudo do comportamento do indivíduo e o seu enquadramento no comportamento de risco.

O risco, na *NEU*, deve ser visto como um processo, e não como um problema de escolha. Entende-se risco como uma condição de medida para algum fenômeno observável. Para a teoria, é a incerteza que importa aos novos modelos a fim de se poder entender os mecanismos de escolha. Neste aspecto, a Teoria da Utilidade Não Esperada se faz mais avançada do que a Teoria da Utilidade Esperada, pois ela redesenha os mecanismos de observação do comportamento dos indivíduos, na condição de apresentar algumas "variáveis" de fora do objeto econômico em si. Sucintamente, o fator psicológico, que é buscado como intrínseco ao comportamento na Teoria *NEU*, é nada ou nenhum pouco compreendido em seu valor na Teoria *EU* ou até na própria Teoria da Utilidade. Pelo termo "aspecto psicológico", a observação da probabilidade, vista como mecanismo ex ante para a *EU*, e definida em "pesos" para a *NEU*.

Os modelos da *NEU* (Utilidade Não Esperada) em nenhum tempo delimitam um "ótimo" para o indivíduo. Na qualidade de uma nova teoria, desmistificam, dentro de um novo contexto, todos os "quadros" materiais do qual a utilidade neoclássica se pôs. Neste caso, vale dizer que o modelo de "otimo" é uma medida adequada quando há um cenário claro (objetivo) de condições de decisão, ou, plena certeza. Quando os indivíduos são postos à situação de incerteza, buscam seguir aquilo que podem ter como sua certeza. Neste ponto, o questionário levantado pelos pesquisadores *Kahnemann* e *Tversky*, demostrou esta idéia motivada pelo ser-humano de que o risco corrido de vir com um prêmio de risco adequado.

A Utilidade Não Esperada propõe buscar melhor compreensão para os mecanismos de escolha, que não envolvam necessariamente os mesmos modelos axiomáticos da Teoria da Utilidade Esperada. Neste ponto deve-se ficar claro que os termos axiomáticos do qual se vale a Teoria *EU* são válidos, desde que enumerados em uma ordem racional de comportamentos (contendo informação simétrica, concorrência perfeita, externalidades positivas), em que todos os agentes envolvidos conheçam a atitude de todos. A Heurística como ferramenta de análise, vem apontando os problemas do modelo de Utilidade Esperada, mas devemos ser rasoáveis de que mesmo ela, como ferramenta de análise, não é eficaz em explicar o modo como cada individuo faz suas próprias escolhas (qual a motivação para determinado ato) mesmo sendo estas escolhas ditas "equivocadas", mesmo que partindo da posse de considerável volume de informação.

Hoje, novos teóricos, vinculados ao Pensamento Econômico, a Medicina, a Psicologia, e Sociologia, e outras áreas do comportamento humano, vêem o processo de decisão como um conjunto complexo de fatores. Assim, pesquisadores como, *Loewenstein*, *Damásio*, *Hirschman*, *Kahnemann*, e muitos outros, mantém a posição de que um ser humano não é capaz, pelo menos a todo o instante, de ter controle de seus posicionamentos, compreendê-los e estudar a melhor forma de decidir por algum deles, sem que desta forma procure sempre um ponto de máximo de cada escolha. O que ocorre, é que o agente seja capaz de perceber com a pouca informação que detém aquilo do qual é possível de se fazer, sem traumas. Esta condição, chamada de heurística, é a base de muitos trabalhos sobre utilidade que estão sendo propostos em todo mundo atualmente.

5. CONCLUSÕES FINAIS

Há um complexo caminho na compreensão dos mecanismos que envolvem razão e a emoção. Em fases da História do Pensamento Econômico (período clássico até o momento presente), o desenvolvimento de sucesivas teorias que pudessem explicar os mecanismos com que os indivíduos reagissem a estímulos externos, e a sua tradução no aspecto econômico, foi entendido como tarefa complexa demais para algumas escolas. Nesta época (idos dos séculos desessete, dezoito e metade do século dezenove) o desenvolvimento de algumas teorias que esplicavam o comortamento dos indivídos como efetivamente "emotivos" ou "racionais" pecava na discretização destes comportamentos como se fossem mutiamente excludentes para por o indivíduo a frente de suas escolhas.

Assim, primeiramente, *Smith*, *Jevons*, *Benthan*, *Menger*, *Ricardo*, e *John Stuart Mill*, foram os precursores do estudo do homem como agente social. Para eles, o ser humano poderia corresponder aos próprios anseios, ou aos de seus pares, na medida em que sua forma de agir respondesse a estes. A partir daí, o estudo social como mecanismo para se compreender a interação motivação humana de aspecto econômico como interposição de uma conseqüência para os atos individuais e coletivos foi o "quesito chave" para a construção de uma Teoria Econômica. A captura de elementos simbólicos, tal como o homem narcísico, no qual conceito de valor tinha forte conotação com felidade econômica, era o contraponto de um homem social, ou altruísta. Destas duas realidades surge o conceito de valor. Parece estranho aceitar que ocorre a fusão de conceitos simbólicos como felicidade, prazer e satisfação como consonantes de um bem-estar, todos ressarcidos por outro grupo de símbolos como (ganância, egoísmo e individualismo). Este grupo de símbolos a ser explicados por gerações de economistas formaria o caldo da Escola da Utilidade.

Voltando ao princípio, o valor apareceu como definição, abstrata, mas de composição concreta dos comportamentos individuais. A abstração do conceito de valor apotava ao conceito de utilidade, mesmo que por outras concepções. Nestas condições, a compreensão do conceito de valor passa a ser mais real do que determinar que os elememetos tenham grau de utilidade. O termo utilidade, primeiramente passa a ser melhor compreendide se denominado como Preferência.

Neste momento, problema com termos semânticos desfavoráveis tem mais significância.

Assim, *Walras*, *Pareto*, *Marshall*, *Edgeworth* e *Gossen*, tomam o conceito de valor-utilidade com uma semântica diferente. Com estes economistas, a Matemática passa a valer como uma medida de cunho racional, ao lugar da concepção Filosófico-Econômica de felicidade, e, assim, atribui uma nova conotação ao conceito de Utilidade. Neste ponto, a utilidade como forma funcional, pode ser analizada, medida, e comparada. Uma observação mais atenta aponta que a "maximização da felicidade" foi sucessivamente substituída pela "maximização da utilidade". Esta forma semântica de perceber a felicidade, ou prazer, como reflexo da utilidade, foi substancialmente mascarado no processo de matematização. O descolamento entre "felicidade" e "razão" foi o primeiro passo na compreensão dos efeitos do processo de escolha dos indivíduos

A matematização da economia foi a peça chave que marcou a utilidade, como teoria. Este processo, conjuntamente ao desenvolvimento de outras teorias do mesmo porte, motivou-se a modular o comportamento humano pela linha da Teoria dos Conjuntos. Além disso, como também a idealização do comportamento humano como ideal de um ser lógico, racional e maximizador, dotado de capacidades diferenciadas na definição de suas decisões foram o foco de um outro processo que tinha como objetivode se chegar a uma teoria do processo humano racionalista da felicidade. Poratanto, a "felicidade" ou o "prazer", aqui, são "absorvidos", ou "endocitados" pelo conjunto Matemática *versus* Teoria da Utilidade.

Após a consolidação da Teoria da Utilidade A revolução cientifica do século dezenove trouxe avanços incomensuráveis para o progresso da ciência. No campo da Economia estes avanços se traduziram em mudanças substanciais nas teorias do comportamento. Neste ponto, *Von Neumann* e *Morgenstern*, *Arrow*, *Savage*, descreveram um padrão de comportamento de decisão em que a escolha deveria necessariamente estar vinculada uma medida de risco condicionando o comportamento desta escolha a alguns fundamentais axiomas da lógica matemática. A partir daí, *Savage* no intuito de repaginar as idéias de *Von-Neumann* e *Morgenstern* em sua Teoria *vN-M*, construiria outra nova teoria. A sua Teoria da Utilidade Subjetiva baseada na "Probabilidade Subjetiva" foi, talvez, um esforço ímpar na busca de acertar as falhas do modelo de *vN-M* de Utilidade Esperada

Simultaneamente aos personagens da escola neoclássica surgiam, *Allais* e *Ellsberg*. A Probabilidade Subjetiva continuava mantendo a mesma linha de pensmento do pós-clássico. Para estes autores, a utilidade ainda mantinha os mesmos problemas axiomáticos não bem resolvidos quando entre um fenômeno econômico havia um outro psicológico. Em verdade, o comportamento humano constrói um conjunto de decisões de objetivo econômico que seriam apenas mensuráveis por elementos exógenos da probabilidade formal. Isto é, que apemas podem ser medidos por condições muito específicas; além disso, não seria possível de serem mensurados.

Neste ponto, as Teorias de *Allais* e *Ellsberg* definem exatamente o ponto de corte do padrão axiomático dos modelos da Teoria da Utilidade Esperada. Quando os axiomas, Aditividade, Transitividade, Reflexibilidade, Independência, e Escolha, são postos à prova, estes funcionam desde que o indivíduo obedeça a uma série de condições objetivas e ordenadas. A insurgência acontesse quando o individuo não é capaz de conviver e obedecer a estas premissas: ele blefaria, ou até, transgrediria contra a teoria. Um exemplo disso se faz presente em *Allais* que demonstrou que a ocorrência da transitividade não poderia ocorrer em seu aspecto prático. As teorias de *Savage* seriam a prova cabal de que *Allais* estaria certo.

Desta forma, a Teoria da Utilidade Não Esperada nasceu do ponto de inflexão entre o pensamento clássico e as idéias inovadoras sobre a escolha e preferência (leia-se utilidade). Da dicotomia entre a razão e a emoção, a Teoria da Escolha, acabou se tornando uma escola a parte em função do interesse de áreas como a Psicologia, Medicina (campo da Neurologia), Sociologia, como principais áreas, concorreram conjuntamente com a Economia para a formação de um novo modelo de Utilidade. Esta repaginação também buscou no desenvolvimento da Heurística (de *Simon*) o acompanhamento de novas estruturas para o desenvolvimento da Teoria da Utilidade Não Esperada.

Neste ponto, a grande diferença entre Utilidade Esperada e Utilidade Não Esperada é a principalmente, questão das Heurísticas de Decisão. Por esta razão, *Kahnemann* e *Tvesrky* apresentaram um novo método de medir a utilidade quando de riscos incorridos pelos indivídos em um processo de escolha. Os autores construiram uma metodologia própria à vista do que a Teoria da Utilidade Esperada de *vN-M* e a Teoria da Probabilidade Sujetiva de *Savage* construíram.

Assim, a percepção de alguns fenômenos psicológicos, mas que são importantes na composição do processo de escolha efetuado pelos indivíduos, e que a primeira vista nunca foram considerados pelos teóricos da utilidade, foi o diferencial da teoria. O primeiro deles foi o *fanning-out*, ou efeito leque. O efeito deste fenômeno é que as linhas de Indiferença para a utilidade esperada deveriam ser lineares, mas o que ocorre é o efeito inverso: o das mesmas apresentar-se em forma de curvas. Outro fenômeno foi o *framming-effect*, ou efeito de enquadramento. O efeito de enquadramento não era percebido na Utilidade Esperada em função do julgamento dos indivíduos. Assim, sempre que o processo de decisão não vislumbrar a intenção de fato, pela escolha a priori, o individuo toma sua decisão de escolhao. Ocorre que a maior parte dos eventos ocorre a posteriori da decisão dos agentes.

A partir disso, há o que se denomina na literatura de hiato entre probabilidade de um evento e sua freqüência de base. Quando um evento ocorre, ele deve ser mensurável em escalas de risco, o que a Teoria da Utilidade Esperada define como uma medida de risco (aversão, propensão e indiferença ao risco). A Frequência de Base não é uma probabilidade, (usada nos modelos de *Kahnemann* e *Tversky*, Teoria da Perspectiva), mas pensa os eventos em forma de freqüências de ocorrência. Esta diferença estabelece um novo modelo de medição daquelas variáveis que em Utilidade Esperada não se estabelecem, ou seja, a partir da freqüência de base é possível de se estabelecer o real grau de escolhas que o ser-humano estrutura (enquadramento), mede pela probabilidade daquilo que realmente se apresenta.

Progressivamente, em função dos fenômenos psicológicos estudados, *Kahnemann* e *Tversky* desenvolveram uma teoria para medir o efeito da perda e do ganho na decisão individual. A Teoria da Perspectiva (*Prospect Theory*) e posteriormente, a Teoria da Perspectiva Cumulativa (*Cumulative Prospect Theory*) tiveram por objetivo construir uma função utilidade que "medisse" a intenção real dos indivíduos em um ambiente de incerteza. Proporcionalmente, percebe-se que no Paradoxo de *Allais* o indivíduo buscaria sempre o efeito certeza, pois "olharia" para a probabilidade, como medida arriscada. Desta forma, as pessoas tenderiam sempre a maximizar a dor de suas perdas na mesma intencidade do que maximizar a alegria de seus ganhos, considerando-se para isto a mesma escala de valores. Isto ocorre porque não há como descolar os efeitos racionais dos emocionais num mesmo processo.

Apesar da evolução da Teoria da Utilidade Não Esperada, objetivamente, ainda há problemas próximos aos que enfrenta a Teoria Utilidade Esperada. Mesmo que já tenhamos definido que as probabilidades são não lineares, que os agentes usam "uma janela de obervação" bastante precária para decidir, que podemos redesenhar uma função de utilidade com "Pesos", ainda assim, os mecanismos próprios de escolha de cada ser humano são bastante complexos para as duas teorias definirem. Por conseguinte, nesta abordagem, a Teoria da Perspectiva não é de todo completa para explicar a intenção indivudual dos agentes.

Por outro lado, nas abordagens de, *Damazio*, *Sen*, *Loewenstein*, *Hirschman* e outros, há uma tênue relação entre racionalidade e irracionalidade humana. Esta dicotomia humana se mostra em *Sen*, quando demonstra o problema metodológico da preferência revelada de *Samuelson*, e afirma que existem muitos aspectos em jogo para um processo decisório ser definido como sendo racional. Já em *Loewenstein*, é espresso quando afirma que, neurologicamente, o individuo não tem condições de escolher quando apresentado à muitas possibilidades, pois o cérebro do ser-humano não se atém a todo o risco possivel, mas aquilo que é importante.

Por fim, o trabalho buscou apresentar um variado contexto sobre o tema utilidade. Deste a quebra de paradimas dentre duas teorias ao posicionamento histórico das Escolas de Pensamento Econômico que mais influenciaram sobre o tema. Desde os trabalhos de *Kahnemann* e *Tversky*, em seu ensaio denominado *Prospec Theory: an analysis of decision under risk* de 1979, até hoje, já há considerável volume de publicações cientificas sobre o assunto "processo de escolha" tanto com conotação psicológica quanto também com referência ao campo da Neurologia. Com as técnicas aprimoradas de Análise Multivarida de Dados (mais especificamente, Análise Fatorial de Dados), e outras ferramentas de análise de dados, está se tornando mais eficiente à interpretação e a distribuição dos pesos nas inferências de modo a melhorar o grau de medição da subjetividade com que os indivíduos fazem suas escolhas e apontam seus riscos em situações de tomada de decisão.

ANEXO A.

A.1. Aspectos Matemáticos da Teoria da Perspectiva (Prospect Theor) e sua variante, a Teoria da Perspectiva Cumulativa (Cumulative Prospect Theory)

Agora, tomando o conjunto de suposições dos autores *Kahnemann* e *Tversky* segundo o artigo *Prospec Theory: An Analysis of Decision Under Risk*, (1979) descreveremos metodologicamente a Teoria da Perspectiva, também chamada como Teoria da Expectativa. Seguiremos duas metodologias, a primeira (1979) referente ao trabalho que deu o Prêmio Nobel aos dois pesquisadores; e a segunda metodologia (1992), com a mudança para o efeito cumulativo, ou (*Cumulative Prospect*).

Para a primeira metodologia, considere o conjunto de todas as perspectivas regulares da forma $(x, p; y, q)$ do qual $p+q<1$, (lembre-se que (p,q) são prospectos). A extensão da perspectiva regular em que $p+q=1$ é simples. O termo (/) denota a relação de preferência entre o prospecto. O prospecto assume três referências chamadas por conecção (*connected*), simetria (*symmetric*) e transitividade (*transitive*) e (~), denota uma associação de indiferença.

Podemos escrever então, $(x, p; y, q) \sim (y, q; x, p)$. Note-se que o sistema de perspectivas é comutativo, ou seja, a ordem de cada prospecto, quando de seus elementos serem simétricos, permanece indiferente. Também é possível de se perceber que $(x, p; 0, q) \sim (y, q; 0, r)$, e $(x, p; y, 0) \sim (y, q; z, 0)$. Isto é, o resultado nulo no evento impossível tem a propriedade de multiplicação por zero.

Até agora definimos apenas como os prospectos (ou perspectivas) devem se formalizar, isto é, como podemos distribuir cestas com seus pesos específicos da seguinte forma. Como o apresentado, $(x, p; y, q) = x \times p + y \times q$. Outro detalhe a ser observado é a relação dos pesos dos prospectos $p+q<1$. Na teoria da Perspectiva, como na Teoria da Utilidade Não Esperada, necessariamente os pesos dos prospectos somam um inteiro. Isto foi apresentado no terceiro capítulo, seção 3.2.3, (separabilidade aditiva).

Assim, se $(x, p; y, q)$ é uma perspectiva (ou expectativa) regular (isto é, ambos $p+q<1$, ou $x \geq 0 \geq y$, ou $x \leq 0 \leq y$) temos.

$$V(x, p; y, q) = \pi(p)v(x) + \pi(q)v(y) \tag{4.9}$$

Onde $v(0)=0$, $\pi(0)=0$ e $\pi(1)=1$, como em Teoria da Utilidade, V é definido em perspectivas, enquanto v é definido em resultados. As duas escalas coincidem para certos prospectos, onde $V(x)=v(x)$.

A equação geral acima generaliza o modelo de utilidade esperada relaxando o princípio da expectativa.

Por substituição temos, $V(x,1;0,0)=\pi(1)v(x)+\pi(0)v(0)=v(x)$.

Agora faremos um paralelo com a (segunda metolodogia, a de 1992) obra dos mesmos autores, intitulada *Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty*, de 1992. Aqui, *Kahnemann* e *Tversky* adaptam a Teoria da Perspectiva (*Prospect Theory*) traçando um novo estágio para a teoria. Em vista disso, paralelemente ao modelo de probabilidade subjetiva de *Savage* apresentado na página 96. Os autores determinam que também exista um conjunto finito de estados de natureza S.

Pelo texto dos próprios autores, *Kahnemann* e *Tversky* (1992), temos:

Suponha-se que exista um conjunto finito de estados S da natureza, e também que os subconjuntos de S sejam chamados de eventos. Assume-se que um estado obtido não seja conhecido do tomador de decisão. Seja X um conjunto de conseqüências também chamadas de resultados. Deve ser assumido que X inclui um resultado neutro determinado por zero. Deve ser interpretado que todos os outros resultados definidos por X serão definidos por ganhos e perdas, ou números positivos ou negativos.

Os autores, *Kahnemann* e *Tversky*, determinam que haja duas funções de perspectivas representando perspectivas negativas e positivas. As funções determinadas por f^+ (função de ganhos) e f^- (função de perdas), que representam a parte “positiva” e “negativa” da perspectiva, Uma vez que sistema central da Teoria da Perspectiva é determinado pelas funções de pesos, podemos complementá-lo com o modelo de *Savage*, que define, em outra linha, f e g, como “um conjunto de “atos” f e g denominados estados da natureza”. Aqui, a diferença entre *Savage* e *Kahnemann* e *Tversky* é que o primeiro autor não determina “os estados mistos” ou “as expectativas” (*Prospects*) mistas que são causa para probabilidade, como referencia a separabilidade aditiva. Já o segundo apresenta um substituto para a probabilidade chamada freqüência de base.

Assim a função 4.9 se transforma na função $V(f)=V(f^{+})+V(f^{-})$.

Onde $V(f^{+})=\sum_{i=0}^{n}\pi_i^{+}v(x_i)$ e, $V(f^{-})=\sum_{i=-m}^{0}\pi_i^{-}v(x_i)$ (4.10)

Para uma melhor explicação da relação $V(f)=V(f^{+})+V(f^{-})$, significa que uma função de Perspectivas V de um ato f é igual à função de perspectivas V de um ato f^{+} (função de ganhos) mais uma função de perspectivas de um ato f^{-} (função de perdas). Os elementos π_i^{+} e π_i^{-} representam funções de pesos de "ganhos" e de "perdas". Ocorre que há uma diferença entre uma função determinada por $\pi(p),\pi(q)$, e π_i^{+},π_i^{-}. O que dever ser percebido, é que estas funções não perderam seu elemento primordial, determinar os pesos do modelo. O que veremosmais adiante, é que π_i^{+},π_i^{-} serão substituídos por $\pi_i^{+}(f^{+}),\pi_i^{-}(f^{-})$.

A diferença de somatório entre as duas funções não ocorre por acaso. Ela repreesenta a unicidade de um elemento de estado que assegura a existência de um estrito incremento de função valor

Para finalizar a análise do modelo ainda restaria determinar uma função que fosse não aditiva e que fizesse parte da probabilidade da função geral. Assim, na concepção dos autores:

Existe um conjunto de funções não aditivas determinadas por W (também chamada por capacidade). A capacidade assegura que exista uma partição do tipo A_i, tal que um elemento $A\subset A_i$, também esteja contido em S, ou seja, $A\subset S$. Desta forma existirá um número $W(A)$ que satisfará a duas regras: $W(\phi)=0$, $W(S)=1$. No que tange ao ordenamento poderá também ser escrito um sistema do tipo $W(A)\geq W(B)$, tal que $A\supset B$. Desse modo então, podemos escrever as probabilidades (aqui precisam ser vistas como pesos) das funções 4.10. As capacidades também podem assumir as formas W^{+} (capacidades de ganhos) e W^{-} (capacidades de perdas).

Primeiro vejamos as funções peso de decisão:

$$\pi^{+}(f^{+})=(\pi_0^{+},\ldots,\pi_n^{+}) \text{ e } \pi^{-}(f^{-})=(\pi_{-m}^{-},\ldots,\pi_0^{-}) \tag{4.11}$$

$$\pi_n^{+}=W^{+}(A_n),\pi_{-m}^{-}=W^{-}(A_{-m}) \tag{4.12}$$

$$\pi_i^{+}=W^{+}(A_i\cup\ldots\cup A_n)-W^{+}(A_{i+1}\cup\ldots\cup A_n),0\leq i\leq n-1 \tag{4.13}$$

$$\pi_i^- = W^-(A_{-m} \cup \ldots \cup A_i) - W^-(A_{-m} \cup \ldots \cup A_{i+1}), 1-m \leq i \leq 0 \tag{4.14}$$

Agora, utilzando as equações de 4.10 possamos substituí-las em 4.14, da seguinte forma.

$$V(f^+) = \sum_{i=0}^{n} \pi_i^+ v(x_i) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \left(W^+(A_i \cup \ldots \cup A_n) - W^+(A_{i+1} \cup \ldots \cup A_n)\right) v(x_i)}_{A}$$

$$V(f^-) = \sum_{i=-m}^{0} \pi_i^- v(x_i) = \underbrace{\sum_{i=1-m}^{0} \left(W^-(A_{-m} \cup \ldots \cup A_i) - W^-(A_{-m} \cup \ldots \cup A_{i+1})\right) v(x_i)}_{B}$$

Temos os seguintes elementos. Uma partição A_i contida em um conjunto A, intervalos para as duas funções determinados por $0 \leq i \leq n-1$ correspondente a $V(f^+)$ e $1-m \leq i \leq 0$ correspondente a $V(f^-)$, e uma capacidade W. A capacidade assegura que exista a partição já definida. Também temos a relação $V(f) = V(f^+) + V(f^-)$.

Deste modo podemos agora montar nosso modelo.

$$V(f) = A + B$$

$$V(f^+) = \sum_{i=0}^{n} \pi_i^+ v(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \left(W^+(A_{i-1} - A_i)\right) v(x_i), \text{ e } V(f^-) = \sum_{i=-m}^{0} \pi_i^- v(x_i) = \sum_{i=-m}^{0} \left(W^-(A_{i-1} - A_1)\right) v(x_i)$$

Agora podemos unir as duas equações em uma apenas.

$$V(f) = \sum_{i=0}^{n} \left(W^+(A_{i-1} - A_i)\right) v(x_i) + \sum_{i=-m}^{0} \left(W^-(A_{i-1} - A_i)\right) v(x_i).$$

$$V(f) = \sum_{i=0}^{n} \left(W^+(A_{i-1} - A_i)\right) v(x_i) = \left(W^+(A_{-1} - A_0) + \ldots + W^+(A_{n-1} - A_n)\right) v(x_i)$$

$$+ \sum_{i=-m}^{0} \left(W^-(A_{i-1} - A_i)\right) v(x_i) = \left(W^-(A_{-m-1} - A_m) + \ldots + W^-(A_{-1} - A_0)\right) v(x_i)$$

$$V(f) = \left(W^+(A_{n-1} - A_n) + W^-(A_{-m-1} - A_m)\right) v(x_i)$$

Se fizermos uma interpolação entre os termos, temos $0 \leq i \leq n-1$ + $1-m \leq i \leq 0 =$ $1-m \leq i \leq n-1$, ou $-m \leq i \leq n$, ou $-m = n$. Assim $V(f) = \left(W^+(A_{m-1} - A_m) + W^-(A_{-m-1} - A_m)\right) v(x_i)$.

Por fim, mensionaremos, ainda um caso geral que nos remete à maioria dos modelos da *NEU* (Utilidade Não Esperada).

Ocorre-se a situação $\pi_i = \pi_i^+, i \geq 0$ e $\pi_i = \pi_i^-, i < 0$, a equação 4.10 se reduz a.

$$V(f)=\sum_{i=-m}^{0}\pi_i v(x_i) \tag{4.15}$$

Ou seja, $V(f)=\left(\underbrace{W^{+}(A_{m-1}-A_m)+W^{-}(A_{-m-1}-A_m)}_{\pi_i}\right)v(x_i)$, como podemos retornar ao somatório acima, temos $V(f)=\sum_{i=-m}^{-m+m=0}\left(W^{+}(A_{i-1}-A_i)\right)v(x_i)+\sum_{i=-m}^{0}\left(W^{-}(A_{i-1}-A_i)\right)v(x_i)$, que resulta em $V(f)=\sum_{i=-m}^{0}\underbrace{\left(W^{+}(A_{i-1}-A_i)+W^{-}(A_{i-1}-A_i)\right)}_{\pi_i}v(x_i)=\sum_{i=-m}^{0}\pi_i v(x_i)\cdot$

Agora, reportando-nos ao apêndice do artigo *Prospec Theory: An Analysis of Decision Under Risk*, (1979), de *Kahnemann* e *Tversky*, podemos interpretar a equação 4.9 $(V(x,p;y,q)=\pi(p)v(x)+\pi(q)v(y))$, como um modelo que incorpora a probabilidade aditiva em forma de um par de probabilidades–resultado. O termo aditivo significa que o modelo preserva um ordenamento das preferências, um intervalo de escalas definido pelos argumentos f e g. A equação V pode ser escrita por:

$$V(x,p;y,q)=f(x,p)+g(y,q) \tag{4.16}$$

Deve-se perceber que $f(v(x),\pi(p))=\pi(p)v(x)$, e $g(v(y),\pi(q))=\pi(p)v(x)$. Sendo que agora f e g, são um conjunto de atos, diferentemente do que foi apresentado no segundo artigo de *Kahnemann* e *Tversky*, intutulado *Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty*, (1992), onde, com já demonstrado, os autores apresentam uma função $f(f^{+},f^{-})$ chamadas e (função de ganhos) e (função de perdas).

Agora serão apresentados alguns axiomas que comporão a Teoria da Perspectiva.

Axioma da independência, definido por: $(x,p;y,q)\gtrsim(x,p;y',q')$, se e somente se $(x',p';y,q)\gtrsim(x',p';y',q')$. (4.17)

Podemos também ver por, $V(x,p;y,q)=f(x,p)+g(y,q)\gtrsim V(x,p;y^t,q^t)=f(x,p)+g(y^t,q^t)$, se e somente se $V(x^t,p^t;y,q)=f(x^t,p^t)+g(y,q)\gtrsim V(x^t,p^t;y^t,q^t)=f(x^t,p^t)+g(y^t,q^t)$.

Axioma do cancelamento: se $(x,p;y',q')\gtrsim(x',p';y,q)$ e $(x',p';y'',q'')\gtrsim(x'',p'';y',q')$, então $(x',p';y'',q'')\gtrsim(x'',p'';y,q)$. (4.18)

$V(x,p;y^t,q^t)=f(x,p)+g(y^t,q^t)\gtrsim V(x^t,p^t;y,q)=f(x^t,p^t)+g(y,q)$ e $V(x^t,p^t;y^{tt},q^{tt})=f(x^t,p^t)+g(y^{tt},q^{tt})\gtrsim V(x^{tt},p^{tt};y,q)=f(x^{tt},p^{tt})+g(y,q)$.

Axioma da solvabilidade: se $(x,p;y,q)\gtrsim(z,r)\gtrsim(x,p;y',q')$, para algum resultado z e probabilidade r então ocorre existência de y'',q'', desde que, $(x,p;y'',q'')\sim(z,r)$ (4.19)

Tem sido demonstrado que estas condições são suficientes para construir uma representação aditiva do desejo, desde que a ordem de desejo seja arquimediana. Além disso, desde já $(x,p;y,q)\sim(y,q;x,p)$, $f(y,q)+g(x,p)$, e deixando $q=0$ produz $f=g$.

Após, consideraremos o conjunto de todos os prospectos da forma (x,p) com um único resultado diferente de zero. Neste caso o modelo bilinear se reduz a $V(x,p)=\pi(p)v(x)$. Para construção da representação multiplicativa admitimos que a ordem do par resultado–probabilidade satisfaz os axiomas do cancelamento, solvabilidade, independência e arquimediano. Na adição, assumimos a dependência do sinal para garantir a propriedade da multiplicação dos sinais. Assim pode ser notado que o axioma da solvabilidade deve ser muito fraco, porque o fator de probabilidade permite somente o limite de solvabilidade.

Combinando a representação aditiva e a multiplicativa permite finalmente chegamos a um novo axioma da distributividade:

$(x,p;y,p)\gtrsim(z,p)$ se e somente se $(x,q;y,q)\gtrsim(z,q)$

Aplicando este axioma para a representação acima, obtemos,

$$f[\pi(p)v(x)]+f[\pi(q)v(y)]=f[\pi(p)v(z)] \quad (4.20)$$

Implicando

$$f[\pi(q)v(x)]+f[\pi(q)v(y)]=f[\pi(q)v(z)] \quad (4.21)$$

Os modelos 4.20 e 4.21 apresentam uma soma distributiva. Suponha que usemos a equação 4.16 e que ela apresente aditiva e distributiva. Aditiva, como na própria equação 4.16, e distributiva, pelo axioma da solvabilidade. Imaginemos uma função f chamada de argumento. Suponha que tenhamos duas “ocorrencias” (x,y), tal que para haja a existência de uma terceira “ocorrência” determinada por (z), esta tenha uma probabilidade associada (r). Mundando-se um pouco os fatores, quer dizer que se $(x, p; y, q) \gtrsim (z, r = p)$, temos, adaptadamente, $(x, p; y, q) \sim (z, p)$. $f(\pi(p)v(x)) + f(\pi(q)v(y)) = f(\pi(p)v(z))$ (ou a equação 4.20), ou, $(x, p; y, q) \sim (z, q)$, que pode ser escrito como $f(\pi(q)v(x)) + f(\pi(q)v(y)) = f(\pi(q)v(z))$, pois temos a como conseqüência o sistema $(x, p; y, q) \sim (y, q; x, p)$.

Agora, assumindo que não há perda de generalidade, em $\pi(p) < \pi(q)$, e permitindo $\alpha = \pi(p)v(x)$ e $\beta = \pi(p)v(y)$, $\gamma = \pi(p)v(z)$, e $\theta = \pi(q)/\pi(p)$, (4.22)

temos $f(\alpha) + f(\beta) = f(\gamma)$ que implica em $f(\theta\alpha) + f(\theta\beta) = f(\theta\gamma)$ para todo $0 \leq \theta \leq 1$.

Pelo fato de f ser estritamente monotônica, podemos unir $\gamma = f^{-1}[f(\alpha) + f(\beta)]$. Aqui, $\theta\gamma = \theta f^{-1}[f(\alpha) + f(\beta)] = f^{-1}[f(\theta\alpha) + f(\theta\beta)]$ (4.23)

A solução desta equação funcional é $f(\alpha) = k\alpha^c$. Por isso:

$$V(x, p; y, q) = k[\pi(p)v(x)]^c + k[\pi(q)v(y)]^c \tag{4.24}$$

Para algum k, c >0. A forma bilinear desejada é obtida pela redefinição de escalas π, v e V assim como absorve as constantes k e c.

As demonstrações matemáticas da Teoria da Perspectiva referentes aos artigos de 1979, propuseram o Prêmio Nobel aos seus autores. Os avanços da mesma teoria contribuíram para a busca de uma melhor compreensão nos mecanismos de escolha sobre incerteza e, principalmente, sobre a característica do processo de decisão determinado pelo ser humano.

ANEXO B

B.1. Conceito Topógico de Conjunto.

De acordo com *Cysne* e *Moreira* (2000), e *Elon*[1](2005), estabelece-se o conceito topológico de conjunto como definição de utilidade através da seguinte estrutura:

Seja X um conjunto de escolhas, τ uma coleção de subconjuntos de escolhas de X que contenha ϕ (conjunto vazio) e X. Diz–se que τ é uma topologia sobre X se:

$$A \cap B \in \tau \text{ se } A, B \in \tau \tag{2.1}$$

$$\bigcup A_\lambda \in \tau \text{ se } A_\lambda \in \tau, \forall \lambda \in I, I \text{ um conjunto de índices qualquer} \tag{2.2}$$

Na mesma linha de raciocínio, temos a definição de um espaço topológico com elementos de τ chamados de conjuntos abertos. Mais adiante será necessário definir um espaço geométrico denominado Bola Aberta[2] ou Bola Aberta Geodésica, através da topologia do $\Re^n$. Assim, é definida Bola Aberta como uma topologia que contém ou não elementos de conjunto.

Sendo $X \subset \Re^n$ um conjunto

1. Bola Aberta de um centro num ponto $a \in \Re^n$ e raio $r > 0$ denominado como

---

[1] *Elon Lages Lima* (1929, -), define a intersecção $A \cap B \in \tau$, como $A_1, \ldots, A_n \in \tau$ assim sendo $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \tau$.

[2] O termo Bola Aberta significa uma superfície e três dimensões. A figura 1 representa uma projeção da Bola Aberta em uma superfície bidimensional, e assim não há perda de generalidade do modelo.

um conjunto, $B(a,r)=\{x\in \Re^n ; \|x-a\| < r\}$ (2.3)

2. O símbolo $\|.\|$[3] é a norma euclidiana (ou medida) e o termo $<$ é aqui definido como sendo a desigualdade (menor do que).
3. O termo Bola fechada é definido como $B(a,r)=\{x\in \Re^n ; \|x-a\| \le r\}$, (2.4)
4. A esfera s é definida pelo modelo, $s(a,r)=\{x\in \Re^n ; \|x-a\| = r\}$ (2.5)

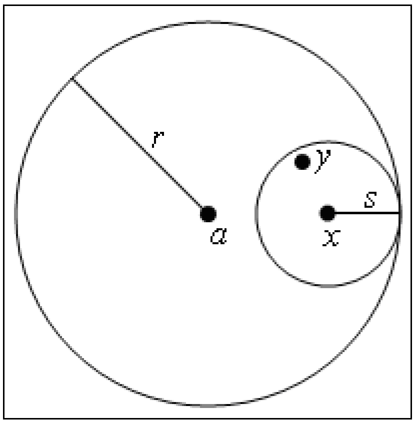


Figura B.1: Bola Aberta
Fonte: Lima, E. Lages. Espaços Métricos. Rio de Janeiro
Projeto Euclides, 2003.

Ambos os modelos têm centro a e raio r.

Analisando a figura acima e as condições citadas para definição de Bola Aberta temos então: a bola maior apresenta dois elementos $B(a,r)$, $\{a\}$ representa o ponto central da bola, ou seja, uma das coordenadas. Se pudéssemos escrever uma função que definisse a equação de uma circunferência poderíamos escrevê-la da seguinte forma: $(x-a)^2+y^2 \le r^2$ como $\{r\}$ representando o raio da bola maior.

A esfera s pode ser visualizada funcionalmente através da equação $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2 \le r^2$, ou seja, se tínhamos uma Bola bidimensional agora abstratamente temos uma bola tridimensional.

Na mesma linha, ainda é preciso estabelecer intervalos entre conjuntos, de modo que uma bola os componha.

Propositalmente, aquilo que foi apresentado como demonstração para bola maior é válido para bola menor.

---

[3] A norma $\|.\|$ é a representação de uma medida (entende-se como distância). Para uma bola o significado de "aberto ou fechado" é a representação da descontinuidade do conjunto, neste caso o termo matemático $\{<\}$. Para um melhor tratamento matemático, veja Elon Lima, Análise I e II.

Cada bola estabelece um limite em que se pode afirmar que contém intervalos de conjuntos. Neste caso ocorre que, se há um conjunto de elementos que está contido dentro da bola, estes conjuntos estão determinados por intervalos. Em Topologia dos Conjuntos isto significa supor que há três intervalos[4]: interior (com elementos contidos internamente a bola), fecho (com elementos na fronteira da bola) e superior (com elemento fora do espaço geométrico da bola), que serão apresentados abaixo.

O elemento a das equações (2.3), (2.4) e (2.5) é determinado pelos pontos interior, limite, ou superior de X. Um conjunto é definível como aberto se todos os seus pontos são interiores.

Deste modo temos, $a \in X$ e a é um ponto interior de X se $\exists\, r > 0 / B(a,r) \subset X$. O int X é o conjunto int $X = \{a \in X\}, a$ é interior a X. Por esta definição podemos inferir que há três possibilidades mutuamente excludentes, descritas da seguinte forma.

O elemento a do conjunto $X \subset \Re^n$ pode ser determinado pelas seguintes suposições:

> $a \in \operatorname{int} X$, ou seja, a como ponto interno da bola aberta,
>
> $a \in \operatorname{int}(\Re^n - X)$, ou seja, a como ponto externo à bola aberta, ou $\sup X$,
>
> $C_a^X(\Re^n - X)$, ou seja, a como fecho, ponto limite à superfície da bola aberta ou $fech(X)$.

Agora, definindo o termo s da pequena bola contida na bola maior, usaremos a proposição de *Elon*.

1. Sendo $x \in B(a;r)$ e $d(a,x) < r$ e, portanto, $s = r - d(a,x)$ é um número positivo, então $B(x;s) \subset B(a;r)$. Se $y \in B(x;s)$ então $d(x,y) < s$ e, portanto, $d(x,y) < s$.
2. Se A for aberto[5] e $A \subset X$ (lembrando da equação $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, e X é determinado como um conjunto de escolhas) tem o indicativo de que $A = Int(X)$.

---

[4] Podemos escrever estas três relações citadas acima através da identidade métrica definida por *Elon*, tal que $M = \operatorname{int} X \cup \partial X \cup \operatorname{int}(M - X)$. Assim, M é um espaço métrico tal que o três subconjuntos se excluem mutuamente. Estes subconjuntos são definidos acima como: "Interior de X", "fronteira de X", e o equivalente ao $\sup(X)$, supremo de X.

Todo ponto $a \in A$ é interior de A e como $A \subset X$, interior de X.

Para a compreensão matemática do significado das duas bolas abertas devemos primeiramente interpretar as duas definições feitas acima por *Elon*. Na circunferência há duas bolas abertas sendo que a bola menor está inscrita dentro da bola maior. É preciso provar que se um elemento $\{y\}$ está contido na bola menor, tal que também está contido e pertence ao conjunto maior. Em vista das duas bolas estarem representadas por uma figura geométrica pode-se então construir uma Topologia (medida) do sistema todo.

Assim, se a medida da bola aberta maior é menor que o raio da mesma bola e se também temos a mesma sentença para a bola menor, podemos supor que o elemento $\{y\}$ é um ponto de fronteira para uma das bolas. Supondo que uma bola está contida dentro da outra, como mostra a figura, e que existe uma relação de distâncias então é possível afirmar que o ponto $\{y\}$ também é uma medida que está contida dentro da bola menor. Prova-se então que, em havendo um plano em que tenhamos conjuntos que estejam também contidos dentro de uma bola aberta (lembre-se da abstração), podemos então criar outra bola menor para estudarmos os elementos do conjunto de fronteira que podem constituir as duas bolas. Para isso, é importante não se importar com a definição de conjunto, pois não existe, mas perceber que o espaço de elementos de um conjunto pode ser representado como, por exemplo, os modelos de loterias, que serão vistos no capítulo 3.

Desse modo, a relação topológica existente para $\Re^2$ é válida para $\Re^3$, mantidas as devidas relações, basta que pensemos em um sistema tridimensional, ou uma bola aberta geodésica tridimensional. Se falarmos em sistema além da descrição geométrica formal, e mantendo a integridade dos principais conceitos as mesmas propriedades. Podemos então escrever um espaço do tipo $\Re^n \rightarrow (\Re^2, \Re^3)$.

---

[5] A definição de aberto de um conjunto está diretamente relacionada com os espaços definidos por Bolas Abertas. Devemos perceber que $X \subset \Re^n$ e por condição de τ ser uma topologia (medida), X um conjunto de escolhas (perceba que podemos considerar escolha não como atitude, mas como elementos em um conjunto qualquer) e $A = A_1, \ldots, A_n$ como um conjunto de bolas (lembre do conjunto das duas bolas acima). Um elemento de A, determinado como $\{A\}$ está contido na bola aberta e assim é um ponto interior de X, o espaço de escolhas.

À relação topológica de conjunto, como função de conjunto, avançaremos no conceito e definição de axiomática, que será visto na próxima seção.

B.2. O Princípio da Boa Ordenação. Definição de $\lesssim$, e o Lema de *Kuratowski–Zorn*.

Antes de citarmos os principais axiomas de *Zermelo* e *Fraenkel*[6], é necessário fazer um pequeno parêntesis sobre o Principio da Boa Ordenação. O Principio da Boa Ordenação (ou Boa Ordem) afirma que todo o subconjunto não vazio de N (conjunto dos números naturais) possui um elemento mínimo (ou mínimo de um conjunto), ou seja, a relação . é uma boa ordem de N por que define o menor entre os menores.

Para definirmos . (fracamente preferido) temos primeiro que apresentar o Lema de *Kuratowski–Zorn*[6]. Seja (P;$\lesssim$) uma ordem maximal não vazia (P) e uma ordenação ($\lesssim$), ou seja, $P \neq 0$. Se toda a cadeia em P possui um limitante superior, então P possui um elemento maximal. O termo “limitante superior” se refere ao supremo de um conjunto.

Vendo por outro modo, suponha agora que temos um conjunto V não vazio e parcialmente ordenado (ou seja, obedecendo a (P;$\lesssim$) e $P \neq 0$. Suponha que toda a cadeia de V tem limite superior (definido como supremo). Logo V é maximal. Na mesma linha do enunciado acina, o lema de *Zorn* delimita-se em determinar.

> a) $V \neq 0$ é parcialmente ordenado e toda a cadeia em V tem máximo, então V tem um elemento maximal,
> b) $V \neq 0$ é parcialmente ordenado e toda a cadeia em V tem supremo, então V tem um elemento maximal,
> c) $V \neq 0$ é parcialmente ordenado, então V tem uma cadeia maximal, isto é, uma cadeia que não está prontamente contida em nenhuma outra cadeia.

A intenção do Lema de separar máximo de supremo tem a simples razão de afirmar a diferença, no conjunto V, entre ordenamento, determinado pelo símbolo . em um conjunto de elementos contidos em V.

---

[6] Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1771–1953), Aelof Abrahan Halen Fraenkel (1891–1965); Kazimerz Kuratowski (1896–1980), Max August Zorn (1906–1993)

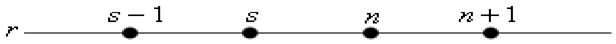
Supondo que tenhamos em um conjunto de elementos tal que seja definido por um elemento qualquer $\{b\} \subset V$. Se o intervalo de V contém $(-\infty, b)$. O supremo de V seria o que *Elon* (2005), definiu como “a menor das cotas superiores”, ou seja, $\{b\}$. Ao conceito de máximo referido acima, voltando ao exemplo de supremo dado, o máximo do intervalo seria $\{b\}$ ou como seja, o seu supremo. O interessante deste postulado é que se tivéssemos $\{b\} \subset V$ e V delimitado pelo intervalo $(a, +\infty)$ teríamos a maior das cotas inferiores de V e sucessivamente um ínfimo (ou minorante) e por conseqüência um mínimo em $\{a\}$.

Deve ser levado em conta que em Teoria dos Conjuntos existe um termo chamado “corpo de um conjunto”, como é definido o conjunto dos números reais, números racionais, números irracionais, números inteiros e números naturais, na ordem $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{I} \subset \Re$.Cada conjunto ordenado obedece a uma pontual ordem delimitada por propriedades de ínfimo e supremo. Será verificada esta característica no estudo da Propriedade Arquimediana (determinante na interpretação da continuidade da preferência) mais adiante.

B.3 Propriedade Arquimediana

Para apresentarmos as propriedades do Arquimediano (ou continuidade da preferência) é necessário revisar alguns elementos das funções contínuas que podem ser vistas em Elon (2005).

1. Propriedade do supremo: todo o conjunto não vazio em $\Re$ (conjunto dos reais) limitado superiormente tem um supremo em $\Re$.
2. Conjunto indutivo: um subconjunto $A \subset \Re$ se determina indutivo se: i) $1 \in A$; ii) $a \in A \Rightarrow (a+1) \in A$.
3. Números Naturais: o conjunto dos números naturais é o menor subconjunto indutivo de $\Re$ representado por N. Assim, podemos definir que existe um elemento $n \in \Re$ tal que $N = \{n \in \Re\}$ e n pertence a qualquer conjunto indutivo de $\Re$. Temos então $1 \in N$; $2 = 1 + 1 \in N$; $3 = 2 + 1 \in N \ldots$ ou seja, $N = \{1,2,3,4,\ldots\}$.

4. O conjunto dos naturais N não é majorado: para demonstrar esta afirmativa devemos abstrair e imaginar uma reta r tal que seja definida pelos pontos 

. Se a priori N for majorado, então temos $s = \sup N$. Vamos deduzir então que isto seja verdade. Assim pela definição de supremo (veja princípio da boa ordenação) é o menor dos majorantes. Vendo a reta deduz-se que $(s-1) < s$, o que por lógica traduz que $(s-1) \in \Re$ (como $N \neq \phi$ e é indutivo, pois $N = \{1,2,3,4,\ldots\}$, para $(s=1) \neq N$, mas $(s=1) \in \Re$). Se $n \in N$, pela reta $(s-1) < n$ e assim pela continuidade $(n+1) \in N$, (veja o conjunto indutivo acima). Como $s < (n+1) \in N$ há um grave erro na lógica, pois $s = \sup N$, e pela sucessão o supremo deveria ser $(n+1)$. Logo, a lógica correta é que N não é majorado.

Abaixo temos a descrição sintética do Axioma Arquimediano sem os detalhes expostos acima. Assim, Segundo *Neves* (Notas de Teoria dos Conjuntos, 2003/2004).

> [...] o corpo K é *arquimediano* se é ordenado e satisfazer o axioma de Arquimedes. Para cada δ e cada x de K, positivos, existe um natural n e N_K se $\forall a, b \in \Re^+$ tal que $x < n\delta$. Assim dizemos que x e K é um infinitamente grande se $|x|$ é superior a todo o natural de K. Dizemos que x e K é um infinitamente pequeno se $|x|$ é positivo e inferior a todo o racional positivo de se K. Diz – se que um subconjunto de se S de K, se em cada intervalo $]x, y[$, com $x < y$, existe um elemento de S.

B.4. Propriedades α e β de *Amartya Sen*.

Retomando ao assunto da Transtividade, mas agora por um outro viés, apresentaremos um exemplo comparativo da discussão sobre preferência revelada (Axiomas Fraco e Forte), mas à luz de duas propriedades que *Sen*[7] denominou como propriedades α e β.

[7] Amartha Sen (1933, -), economista indiano, criador da Teoria da Abordagem das Capacitações.

Para um perfeito entendimento do assunto, primeiramente devemos entender o quanto a racionalidade, como um instrumento de escolha, tem suas falhas instrumentais. A transitividade, a completeza e a reflexibilidade, como relações de preferência, podem ser intransitivas, incompletas e não reflexivas. Estas anomalias teóricas, para os neoclássicos (Escola da Utilidade Esperada), são vistas como situações imperfeitas, mas que não mudam o modelo original, ou seja, a estrutura se mantém conservada. Para a Escola da Utilidade Não Esperada, apresentada no capítulo quatro deste trabalho, estes são alguns dos indicativos de que há problemas no modelo tradicional e que este ser objeto de contestação.

A simbologia apresentada por *Castro* e *Faro* (2004), no que se refere às propriedades α e β, significa que *Sen* definiu como propriedades *menu*-independente, ou seja, aquelas que revestem as preferências por características formais. Para uma melhor compreensão da observação do autor deve nos reportar à sua interpretação sobre a preferência revelada em conjunto com a caracterização formal do que significa "ser preferido a".

Estas propriedades são suportes para o axioma (fraco e forte) da preferência revelada de *Paul Samuelson*. Segundo *Sen* (1999).

> […] The condition of menu-independence is a standard assumptions–typically mad implicitly–in mainstream utility theory and choice theory. In *Bourbaki's* language, R^S is simply "induced by" an overall ordering R^X, and R^X is an "extencion" of R^S on X (*Bourbaki* (1968, p.136)). This relationship is implicitly presupposed when a utility function $U(x)$ is defined just over the culmination outcome x, as is the standard practice (see, for exemple, Hicks (1939), Samuelson (1947), Debreu (1959), Arrow and Hahn (1971), Becker (1976))).[8]

e ainda em *Sen*,

> […] In what follows, I shall consider choice functions based on optimization, that is, choosing and element from de optimal set $B(S,R)$ (that is, choosing a "best" element) from each menu set S, according to a weak preference relation R (interpreted as "preferred or indifferent to"), which ranks the set of available alternatives X of which each "menu" S is a nonempty subset.[9]

Sen define as propriedades α e β[10] como propriedades de contração e expansão,

[…] wich are necessary and sufficient for binariness of choice functions over finite sets, much used in general choice theory as well as social choice theory, are violated by such choices”. [11]

Assim, *Castro* e *Faro* (2004), propõe a seguinte situação:

Supondo que tenhamos um experimento $X = \{x, y, z, w\}$, e assim possamos expressar os elementos por $B = \{\{x, y\}, \{x, z, w\}, \{x, y, w\}, \{x, y, w, z\}\}$. Supomos também, que temos as seguintes funções de escolha.

$$\begin{array}{ll}
C_1\{x, y\} = \{x\} & \qquad C_2\{x, y\} = \{x\} \\
C_1\{y, z, w\} = \{z\} & \qquad C_2\{y, z, w\} = \{y\} \\
C_1\{x, y, w\} = \{w\} & \qquad C_2\{x, y, w\} = \{w\} \\
C_1\{x, y, z, w\} = \{z\} & \qquad C_2\{x, y, z, w\} = \{z\}
\end{array}$$

Note que *ex ante*, temos um padrão de escolhas bem definido em C_1 mas não bem claro em C_2. Em C_1 temos a ordem de preferência $\{z \succ w \succ x\}$, mas em C_2, $\{x \sim y \sim w \sim z\}$.

A propriedade α de *Sen* nos diz que em uma estrutura de escolha (X, β, C), ou regra de escolha C satisfaz a Propriedade α se ocorre que para todos os $B_1, B_2 \in \beta$, se $x \in B_1 \subset B_2$ e $x \in C(B_2)$, então $x \in C(B_1)$.

Pelas setas, segundo o teorema α de *Sen*, temos:

---

8 A condição de menu - independência é um padrão tipicamente hipotético feito pela corrente dominante implicitamente em teoria da utilidade e teoria da escolha. Na linguagem de *Bourbaki* R^S é simplesmente “induzida por” uma ordem absoluta R^X, e R^X é uma “extensão” de R^S em X (*Bourbaki* (1968, p.136)). Esta inter-relação é implicitamente presumida quanto uma função utilidade $U(x)$ é definida exatamente sobre o mais alto resultado de x como uma prática padrão (veja por exemplo, Hicks (1939), Samuelson (1947), Debreu (1959), Arrow and Hahn (1971), Becker (1976))).

9 Dentro do apresentado, eu quero considerar a função escolha baseada em otimização, isto é, escolhido um elemento de um conjunto ótimo $B(S, R)$ (isto é, escolhido o “melhor” elemento) de cada cardápio (menu) do conjunto S de acordo com a relação de preferência fraca R (interpretado como “preferido ou indiferente a”), que classe o conjunto de alternativas avaliáveis de X das quais cada “cardápio (menu)” S é um subconjunto não vazio.

10 Veja Machina, J, M. “Stochastic Choice Function Generated from Deterministic Preferences Over Loteries”, The Economic Journal, 1985, p. 575-594. Principalmente a descrissão do modelo de *Sen* na pg 580 e a discussão sobre trajetória independente na pg 583.

11 “quando é necessário e suficiente para a binariedade da função de escolha sob conjuntos finitos, muito usados em geral na teoria da escolha bem como na escolha social são violadas por escolhas semelhantes.”

Para C_1

$$z \in B_1\{y,z,w\} \subset B_2\{x,y,z,w\}$$

$$z \in C_1(B_2\{x,y,z,w\}) = \{z\} \Rightarrow \{z\} \in C_1(B_1\{y,z,w\} = \{z\})$$

Para C_2

$$z \in B_1\{y,z,w\} \subset B_2\{x,y,z,w\}$$

$$z \in C_2(B_2\{x,y,z,w\}) = \{z\} \Rightarrow z \notin C_2(B_1\{y,z,w\} = \{y\})$$

A propriedade β de *Sen* que a estrutura de escolha (X,β,C) ou regra de escolha C satisfaz a Propriedade β se ocorre que para todos os $B_1, B_2 \in \beta$, se $x, y \in B_1 \subset B_2$ e $x \in C(B_2) \Leftrightarrow y \in C(B_2)$.

Para tornar o teorema mais simples, modificaremos o experimento $X = \{x,y,z,w\}$, o experimento $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Temos,

$$\begin{aligned} C_3\{x_1,x_2\} &= \{x_1\} \\ C_3\{x_1,x_3\} &= \{x_3\} \\ C_3\{x_2,x_3\} &= \{x_2,x_3\} \\ C_3\{x_1,x_2,x_3\} &= \{x_1\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} C_4\{x_1,x_2\} &= \{x_1,x_2\} \\ C_4\{x_1,x_3\} &= \{x_1\} \\ C_4\{x_2,x_3\} &= \{x_2\} \\ C_3\{x_1,x_2,x_3\} &= \{x_1\} \end{aligned}$$

Testemos a propriedade α para os dois casos.

Para C_3

$$x_1 \in B_1\{x_1,x_3\} \subset B_2\{x_1,x_2,x_3\}$$

$$x_1 \in C_3(B_2\{x_1,x_2,x_3\}) = \{x_1\} \Rightarrow x_1 \notin C_3(B_1\{x_1,x_3\} = \{x_3\})$$

Para C_4

$$x_1 \in B_1\{x_1,x_3\} \subset B_2\{x_1,x_2,x_3\}$$

$$x_1 \in C_2(B_2\{x_1,x_2,x_3\}) = \{x_1\} \Rightarrow x_1 \in C_2(B_1\{x_1,x_3\} = \{x_1\})$$

Uma observação atenta: se notarmos nos dois conjuntos C_3, C_4 em relação aos outros dois anteriores C_1, C_2 resta clara diferença no aspecto de escolha. Nos primeiros dois pares de conjuntos, processo de escolha e preferência ocorre à medida que avançam as possibilidades de trocas de elementos. Isto é bem claro quando temos $\{z \succ w \succ x\}$ em C_1, e nenhuma ordem de preferência em C_2. Mas isto muda repentinamente nos exemplos dos conjuntos C_3, C_4. Em C_3 temos um problema de escolhas de elementos (ordenamento), pois $C_3(x_2 \sim x_3)$, ou seja, o agente é indiferente à escolha dos dois elementos do conjunto. Isto também ocorre em $C_4(x_1 \sim x_2)$. Os modelos destes últimos dois conjuntos nessas condições, precisam de um tratamento matemático mais apurado. Daí a propriedade β de *Sen* servir como uma ferramenta satisfatória e eficaz no estudo de escolhas indiferentes.

Para a testagem da propriedade β, utilizamos a metodologia já apresentada. Testaremos a proposição para o segundo grupo:

$$\text{Para } C_4$$
$$x_1, x_2 \in B_1\{x_1, x_2\} \subset B_2\{x_1, x_2, x_3\}$$
$$x_1 \in C_4(B_2\{x_1, x_2, x_3\}) \therefore x_2 \notin C_4(B_1\{x_1, x_2, x_3\})$$
$$\text{Para } C_3$$
$$B_1\{x_2, x_3\} \subset B_2\{x_1, x_2, x_3\} \therefore B_1\{x_2, x_3\} \neq B_2\{x_1, x_2, x_3\}$$
$$x \neq y$$
$$x, y \in C_3(B_1\{x_2, x_3\}) \Rightarrow \{x_2, x_3\}$$
$$x, y \notin C_2(B_1\{x_1, x_2, x_3\})$$

O que deve ser compreendido num primeiro momento é a utilização da propriedade α e a sua comparação com a propriedade β. Se há invariância no processo de escolha, há um padrão ordenado de preferências.

A aplicação da propriedade β tem como finalidade resolver os dilemas de escolha $C_3\{x_2, x_3\} = \{x_2, x_3\}$ e $C_4\{x_1, x_2\} = \{x_1, x_2\}$. *Amartya Sen* em *Maximization and the act of Choice*, (1979, p. 745-779), define.

> […] The process of choice has rather different roles in these distinct cases, and they may, in fact, occur in various mixed forms. The first line of explanation ("reputation and indirect effects") is most in harmony with the established conventions of standard neoclassical economics. [12]

Sen apresenta quatro suposições que traduzem a diferença entre a dependência da escolha "*chooser dependence*" de "*preference*". Estas são definidas como:

i) a reputação e efeitos indiretos

ii) o compromisso social e o imperativo moral

[12] "O processo de escolha de muitos modelos diferentes naqueles casos distintos; e então podem, de fato, ocorre em varias formas mistas. A primeira linha de explanação (reputação e efeitos indiretos) está mais em harmonia com as convenções estabelecidas do padrão da economia neoclássica."

iii) os efeitos diretos do bem–estar.

iv) as convenções rígidas que se seguem

Pelo fato de ser apenas uma suposição ao trabalho de *Sen*, o principal traço dos tópicos apresentados pelo autor é que o objeto epistemológico da palavra racional é frágil e sutil para definir o conceito de escolha. Existe, o que o autor define como a relação bipolar entre "*menu dependence*" *versus* "*menu independence*" ou, dependência *versus* independência do cardápio. E, portanto, na afirmação de *Sen*:

B.5 Axiomas Fraco e Forte da Preferência Revelada: um comparativo

Na mesma linha de pensamento, o autor define "*menu independence*" como.

> […] The condition of menu independence is a standard assumption – typically made implicitly – in mainstream utility theory and choice theory.[13]

Na mesma trilha de discussão do ordenamento das preferências, agora apresentaremos e analisaremos o modelo de preferência revelada[13] de *Samuelson*.

Para um melhor entendimento, podemos descrever melhor o primeiro enunciado da preferência revelada.

Suponha:

1^0, a seqüência: $(r, s, t, \ldots, u, v)$, ou $(r \to s \to t \to \ldots \to u \to v)$. (2.6)

$$2^0\text{, a seqüência: } \begin{cases} p^r x^r \geq p^r x^s, \\ p^s x^s \geq p^s x^t \\ \qquad \cdots \\ p^t x^t \geq p^t x^u \\ p^u x^u \geq p^u x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x^r) \geq u(x^s), \\ u(x^s) \geq u(x^t) \\ \qquad \cdots \\ u(x^t) \geq u(x^u) \\ u(x^u) \geq u(x) \end{cases} \tag{2.7}$$

Note-se, a diferença entre os termos R e R_D. O primeiro termo significa "revelado" e o segundo termo sintático "revelado como preferido". Outro importante detalhe é a relação entre R e R_D: R é a relação transitivamente fechada de R_D.

---

[13] "A condição de menu-independente é uma suposição padrão – típicamente feita implicitamente – na corrente dominante da Teoria da Utilidade e Teoria da escolha"

Axioma de *Houthakkes*: dados A, B com $x, y \in A \cap B$, se $x \in C(A)$ e $y \in C(B)$, então $x \in C(B)$. Este axioma é parte integrante na definição do Axioma Forte da Preferência Revelada.

Pela figura 6 podemos visualizar melhor o Modelo de Preferência Revelada de *Samuelson*.

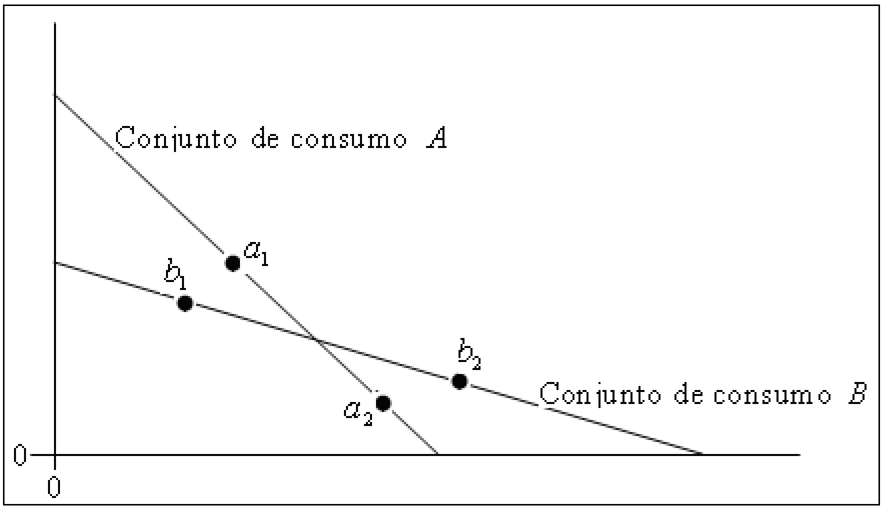


Figura B.2: Conjuntos de Consumo e Preferência Revelada
Fonte: VARIAN, Hall. A. (1998). Análisis Microeconómico.

Para compreender a referida teoria, precisamos primeiro considerar que os axiomas forte e fraco obedecem aos axiomas da transitividade e da completeza, já analisados na introdução do segundo capítulo.

Utilizando a figura 6, suponha-se que temos duas cestas de consumo $A(a_1, a_2)$, e $B(b_1, b_2)$. Suponhamos *ex ante*, que o conjunto de escolhas do indivíduo seja: $C(A) = C(\{a_1, a_2\}) = \{a_2\}$ e $C(B) = C(\{b_1, b_2\}) = \{b_2\}$. Desde modo, $\{a_2\}$ é tão bom quanto $\{a_1\}$, assim como $\{b_2\}$ é tão bom quanto $\{b_1\}$. Se supusermos que B é tão bom que não existem elementos em A que se equivalham. Podemos escrever os conjuntos como funções do tipo, $u(b_2) \geq u(a_2)$.

Agora, para demonstração dos axiomas fraco e forte da preferência revelada supomos a definição introdutória da seção em que $A = x^t; B = x^s$. Para o axioma fraco temos a relação ($p^t x^t \geq p^t x^s$ que implica em $p^s x^s < p^s x^t$). Desconsiderando a influência dos preços, apenas a título de simplificação, podemos escrever ($x^t \geq x^s \Rightarrow$ $x^s < x^t$), ou seja, ($A \geq B \Rightarrow B < A$), e assim ($u(A) \geq u(B) \Rightarrow B < A$). Para a demonstração do axioma forte, temos a relação $(A)R(B)$, "(A) é revelado como preferido a (B)" implica $B < A$. Pelas duas definições, podemos então afirmar que o axioma forte determina a preferência revelada, enquanto o axioma fraco determina apenas a preferência. Lembre-se que temos dois conjuntos de elementos em cada cesta.

Suponha agora as duas proposições de *Amartha Sen* em que podemos inferir com uma demonstração de que os conjuntos α e β satisfazem ao axioma fraco da preferência revelada. Lembre-se da seção anterior para a definição dos elementos. Para isso, continuaremos utilizando o modelo de *Castro* e *Faro* (2006) nas condições de um sistema geral. Deste modo temos:

Suponha-se a estrutura de escolha (X, β, C). Partindo de um experimento $X = \{x, y, z, w\}$, com conjunto de escolhas $B = \{\{x, y\}, \{x, z, w\}, \{x, y, w\}, \{x, y, w, z\}\}$, e uma função de escolha $C = \{B_i\}, 1 \leq I \leq i$.

Partindo da suposição de que a função escolha $C(\cdot)$ satisfaz as propriedades α e β temos $x, y \in B_1 \cap B_2, x \in C(B_1), y \in C(B_2)$. Necessita–se provar que $y \in C(B_1)$. Deste modo, pelo teorema, $B_1 \cap B_2 \subset B_2$, a propriedade α determina que $y \in C(B_1 \cap B_2)$. Na qualidade de que $B_1 \cap B_2 \subset B_1$, a propriedade $\beta \Rightarrow$ $x \in C(B_1) \Leftrightarrow y \in C(B_1)$.

AFPR $\Rightarrow \beta$.

Sejam $B_1, B_2 \in B, x, y \in C(B_1), B_1 \subset B_2$. O *AFPR* implica que se $x \in C(B_2)$, por conseqüência $y \in C(B_2)$. Em mesma condição $y \in C(B_2) \Rightarrow x \in C(B_2)$, ou também $x \in C(B_2) \Rightarrow y \in C(B_2)$, e assim temos a propriedade β.

$C(\cdot) \neq \phi$ e *APFR* $\Rightarrow \alpha$

Sejam $B_1, B_2 \in B$ e $x \in B_1 \subset B_2, x \in C(B_2)$, como $C(B_1) \neq \phi, \exists y \in C(B_1) \subset B_1 \subset B_2$. Pelo *AFPR*, $x \in C(B_2)$ e $y \in C(B_1) \Rightarrow x \in C(B_1)$.

Agora testamos o axioma fraco da preferência revelada utilizando uma das funções escolha determinadas anteriormente, como por exemplo $C_4(\cdot)$.

Temos a função escolha $C_4(\cdot)$ tipo:
$$\begin{aligned} C_4\{x_1, x_2\} &= \{x_1, x_2\} \\ C_4\{x_1, x_3\} &= \{x_1\} \\ C_4\{x_2, x_3\} &= \{x_2\} \\ C_3\{x_1, x_2, x_3\} &= \{x_1\} \end{aligned}$$

Considere-se que $x_1 = x; x_2 = y; x_3 = w$; $B_1 = \{x_1, x_2\}; B_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $C(B_1) = C(B_1\{x_1, x_2\})$, e $C(B_2) = C(B_2\{x_1, x_2, x_3\})$.

Provaremos apenas a primeira parte do teorema, aquela que se denomina a principal, ou seja, quando $AFPR \Rightarrow \alpha, \beta$. Partindo do teorema temos:

$$[\{x_1 = x\}; \{x_2 = y\}] \in [B_1 = \{x_1, x_2\}] \cap [B_2 = \{x_1, x_2, x_3\}]$$

$$\{x_1 = x\} \in C(B_1\{x_1, x_2\}), y \in C(B_2\{x_1, x_2, x_3\})$$

Provando que,

$\{x_2 = y\} \in C(B_1\{x_1, x_2\})$. Como $(B_1\{x_1, x_2\}) \cap (B_2\{x_1, x_2, x_3\}) \subset B_2\{x_1, x_2, x_3\}$, assim $\alpha \Rightarrow$ que $\{x_2 = y\} \in C\{B_1\{x_1, x_2\} \cap B_2\{x_1, x_2, x_3\}\}$.

Como,

$(B_1\{x_1, x_2\}) \cap (B_2\{x_1, x_2, x_3\}) \subset B_1\{x_1, x_2\}$, a propriedade $\beta \Rightarrow$ $\{x_1 = x\} \in C(B_1\{x_1, x_2\}) \Leftrightarrow$

$\{x_2 = y\} \in C(B_1\{x_1, x_2\})$. E assim terminamos a prova de que as proposições α e β obedecem diretamente ao *AFPR* (Axioma Fraco da Preferência Revelada).

Nota-se que em *Sen* temos duas suposições para a preferêcia. A primeira suposição, sem ser repetitivo, é a frágil estrutura de uma determinada preferência revelada (aqui, $x^t \geq x^s \Rightarrow x^s < x^t$), ou ($x^t \succsim x^s \Rightarrow x^s \prec x^t$), pois se mudando a característica das cestas estas não mantém uma ordenação racional. A segunda (axioma forte), (aqui, $x^t < x^s$), ou ($x^t \succ x^s$) necessita de uma forte consistência na alocação de preferência das cestas, o que não necessariamente ocorre sempre. Na próxima seção aprofundaremos o conceito de preferência.

ANEXO C

C.1. Modelo de Savage de Utilidade Subjetiva.

Para uma representação fiel aos modelos de probabilidade subjetiva utilizaremos o modelo de *Gul-Savage* para estados finitos. Assim como em *vN-M* escreveremos o modelo *Gul-Savage* pela sigla S-G. Primeiramente apenas descreveremos os axiomas de *S-G* (segundo *Machina* (1985)) pela ordem adiante.

Axioma 1. (ordem) a relação $\succsim$ é completa, reflexiva e transitiva

Axioma 2. (principio da certeza): para todos os eventos E e atos $f(\cdot), f^*(\cdot), g(\cdot)$ e $h(\cdot)$,

$$\begin{bmatrix} f^*(s) & se & s \in E \\ g(s) & se & s \notin E \end{bmatrix} \succsim \begin{bmatrix} f^*(s) & se & s \in E \\ g(s) & se & s \notin E \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} f^*(s) & se & s \in E \\ h(s) & se & s \notin E \end{bmatrix} \succsim \begin{bmatrix} f(s) & se & s \in E \\ h(s) & se & s \notin E \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Axioma 3. (monotonicidade modo-eventual): para todos os resultados x e y, eventos não nulos E e atos $g(\cdot)$,

$$\begin{bmatrix} x & se & s \in E \\ g(s) & se & s \notin E \end{bmatrix} \succsim \begin{bmatrix} y & se & s \in E \\ g(s) & se & s \notin E \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \succsim y \tag{3.2}$$

Axioma 4. (probabilidade comparativa fraca): para todos eventos A e B, e resultados $x^* \succ x$ e $y^* \succ y$,

$$\begin{bmatrix} x^* & se & A \\ x & se & \approx A \end{bmatrix} \succsim \begin{bmatrix} x^* & se & B \\ x & se & \approx B \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y^* & se & A \\ y & se & \approx A \end{bmatrix} \succsim \begin{bmatrix} y^* & se & B \\ y & se & \approx B \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Axioma 5. (não degeneracidade): existe então resultados x e y desde que $x \succ y$.

Axioma 6. (eventos continuamente pequenos): para alguns atos $f(\cdot) \succ g(\cdot)$ e resultado x existe então um finito conjunto de eventos $\{A_1, \ldots, A_n\}$ formando uma partição de $\mathscr{S}$ desde que,

$$f(\cdot \succ) \begin{bmatrix} x & se & s \in A_i \\ g(s) & se & s \notin A_i \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} x & se & s \in A_j \\ f(s) & se & s \notin A_j \end{bmatrix} \succ g(\cdot) \tag{3.4}$$

Axioma 7. (monotonicidade uniforme): para todos os eventos E e todos os atos $f(\cdot)$ e $f^*(\cdot)$, se

$$\begin{bmatrix} f^*(s) & se & s \in E \\ g(s) & se & s \notin E \end{bmatrix} \succsim (\precsim) \begin{bmatrix} x & se & s \in E \\ g(s) & se & s \notin E \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Para todo $g(\cdot)$ e cada $x \in f(E)$, então,

$$\begin{bmatrix} f^*(s) & se & s \in E \\ h(s) & se & s \notin E \end{bmatrix} \succsim (\precsim) \begin{bmatrix} f(s) & se & s \in E \\ h(s) & se & s \notin E \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Para todo $h(\cdot)$. No mais,

$$\begin{bmatrix} f(s) & se & s \in E \\ g(s) & se & s \notin E \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Denota o ato que corresponde com $f(\cdot)$ sobre o evento E e com $g(\cdot)$ sobre o evento E.

Para uma descrição sucinta de cada axioma nos espelhamos na argumentação de *Machina*. Para o autor:

O axioma 1 é definido como padrão dos modelos neoclássicos de escolha.

O axioma 2 estabelece que dois atos $f^*(\cdot)$ versus $f(\cdot)$ implicam em diferentes sub-atos, de tal forma que as preferências são separáveis sobre eventos mutuamente exclusivos. Esta é a chave da estrutura de preferências da utilidade esperada.

O axioma 3 estabelece que o resultado de um evento y não nulo em E só é preferível a x se, e somente se que o ato que gerou o evento for preferível ao ato $f(\cdot)$.

O axioma 4 é crucial para a definição de probabilidade subjetiva. Estabelece que a classificação de probabilidade revelada como sendo independente do específico resultado obtido. A crença individual de que um evento A pode ser pelo menos tão bom como o evento B.

O axioma 5 estabelece que a relação $\succsim$ é não trivial

O axioma 6 estabelece que algum par de atos não indiferente a algum resultado x, o conjunto $\mathscr{S}$ pode ser particionado entre simples eventos suficientes, tal que altere outro ato igual a x, em exatamente um deste eventos desde que este não seja suficientemente inverso a sua classificação original.

O axioma 7, por fim, expande a teoria para o caso de atos com infinitos resultados. Aqui o autor delimitou sua análise para a comparação de um ato fracamente preferido a outro ato, ou a um similar fracamente não preferido. Como exemplo suponha-se que temos para todo $g(\cdot)$, $[f^*(\cdot) \text{se} E;\ g(\cdot)\ \text{se} \sim E]$ é fracamente preferido a $[x \text{ se} E;\ g(\cdot)$

se $\sim E]$ de cada resultado de x do sub-ato $f(\cdot)$ sobre E então o indivíduo preferirá fracamente $[f^*(\cdot)\text{se}\, E;\ h(\cdot)\text{se}\ \sim E]$ por $[f(\cdot)\text{se}\, E;\ h(\cdot)\text{se}\ \sim E]$, para todo $h(\cdot)$ (fracamente não preferido).

Referências

ALDRIGHI, Dante. M; MILANEZ, Daniel. Y. (2005). **Finança Comportamental e a Hipótese dos Mercados Eficientes**. Revista de Economia Conteporanea, Rio de Janeiro, jan. 2005, 41-72.

ALLAIS, Maurice. (1953). **Le Comportement de L'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine**. Econométrica, vol. 21, n^{0}4, oct. 1953, 503-546.

ANSCOMBE, F.J; AUMANN, R.J; (1962). **A Definition of Subjective Probability. Princeton University and the Hebrew University of Jerusalem**, aug. 1962.

BAERT, Patrick. (1997). **Algumas Limitações das Explicações da Escolha Racional na Ciência Política e na Sociologia**, Versão Brasileira Ci. Soc, vol. 12, n^0 35, São Paulo, feb. 1997.

BAUMOL, Willian. J. (1951). **The Morgenstern Utility Index-an Ordinalist View. The Journal of Political Economy,** vol. 59, n^0 1, feb. 1951, 61-66.

BELL, David. E; FARQUHAR, Peter. H. (1986). **Perspectives on Utility Theory. Operational Research**, vol. 34 n^0 1, jan-fev 1986, 179-183.

BELL, John. F. (1961). **História do Pensamento Econômico**. Rio de Janeiro, ZAHAR editores.

BERNASCONI, Michele. (1994). **Preferences and Two-Stage Lotteries: Theories and Evidence**. The Economic Journal, vol. 104, n^{0}422, jan. 1994, 54-70.

BERNOULLI, Daniel, (1954). **Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk**. Econometrica, vol.22, n^0 1, jan. 1954, 23-36.

BIANCHI, Ana. Maria; MURAMATSU, Roberta. (2000). **A volta de Ulisses: Notas críticas sobre a teoria da escolha racional**. Encontro Anpec

BRANDI, Londero. B; HEINECK, Luiz, F. M. (2005). **As Abordagens dos modelos de preferência declarada e revelada no processo de escolha habitacional. Ambiente Construído**, v.5, n^{0}2, abr-jun. 2005, Porto Alegre, 61-75.

BRENNER, Lyle. A; KOEHLER, Derek. J; LIBERMAN, Varda; TVERSKY, Amos. (1996). **Overconfidence in Probability and Frequency Judgment: A Critical Examination. Organizacional Behavior and human Decision Processes**, vol.65, n^0 3, mar 1996, 212-219.

CALDERONI, Eric. (2004). **A Irracionalidade da Racionalidade Técnica: uma crítica às inversões entre fins e meios**. Revista Psicologia e Argumento, vol. 22, n^0 36, 57-66.

CAMERER, Colin. F, Loewenstein, George (2002). **Behavioral Economics: past, present, futur**e, 228-277.

CASTRO JR, Armando. (2004). **A. Curso de Teoria da Medida. Rio de Janeiro**, IMPA.

CHEW, S. H; EPSTEIN, L. G; SEGAL, U. (1991). **Mixture Symmetry and Quadratic Utility. Econometrica**, vol. 59, n^0 1, jan 1991, 139-163.

CLARK, Estephen, A. (1987). **An extension theorem for rational choice functions**. Review of Economic Studies, vol. 55, n^0 3, jul. 1988, 485-492.

CONIGLIO, Marcelo. E. (1997). Teoria **Axiomática de Conjuntos: uma introdução**. GTAL, Departamento de Filosofia, Unicamp, São Paulo.

CUSINATO, Rafael. T. (2003). **Teoria da Decisão sob Incerteza e a Hipótese da Utilidade Esperada: Conceitos Analíticos e Paradoxos**. Dissertação de Mestrado, PPGE UFRGS, Porto Alegre.

CYSNE, Rubens. P; MOREIRA, Humberto. A. (2000). **Curso de Matemática para Economistas**, 2.ed. São Paulo. Atlas.

Da SILVA, Marcos. F. G. (2002). **A Epistemologia da Economia Teórica em Shumpeter**. Revista de Economia, Política, vol.22, n^0 1, jan/mar 2002.

Da SILVA, Samuel, G. (2008). **Cem Amos do Axioma da Escolha – II. Cem anos do Axioma da Escolha: Boa Ordenação, Lema de Zorn e o teorema de Tychonoff**. Departamento de Matemática – Instituto de Matemática. Universidade Federal da Bahia, Maringá – Paraná, set/out 2008.

De CASTRO, Luciano, FARO, José, H. **Introdução à Teoria da Escolha**. 25º Colóquio Brasileiro de Matemática, 2005.

De SÁ, Eduardo. M. (2004). **Notas de Teoria dos Conjuntos**. Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, fevereiro de 2004.

De VASCONCELLOS, Marco. A. S; De OLIVEIRA, Roberto. G. (2000). **Manual de Microeconomia**, 2 ed. São Paulo, Atlas.

DENIS, Henri. (1978). **História do Pensamento Econômico**. 3. ed, Lisboa, Livros Horizonte LDA.

EDGEWORTH, Francis Y (1889). **The Mathematical Theory of Political Economy: Review of Léon Walras**, "**Éléments d'économie politique pure**", Nature, vol.40, sept. 1889, 434-436.

ELLSBERG, Daniel. (1961). **Risk, Ambiguity, and, the Savage Axioms**. The Quarterly Journal of Economics. Vol. 75, n^0 4, nov 1961, 643-669.

EYSENCK, Michael, W; KEANE, Mark. T. (2007). **Psicologia Cognitiva**. 5 ed, Porto Alegre, Ed. Artmed.

FEIJÓ, Ricardo. (2001). **História do Pensamento Econômico**: de Lao tse a Robert Lucas, São Paulo, Ed Atlas.

FERGUSON, C.E. (1974). **Microeconomia**. 5. ed, Rio de Janeiro, Ed Forense-Universitária.

FERREIRA, A.A.L. (2003). **O Lugar da Psicofísica de Gustav Fechner na História da Piscologia**, vol. 5, Revista Memorandum, São Paulo, 86-93.

FERREIRA, Vera R. de M. (2007). **Informações Econômicas e Ilusão – uma Contribuição Psicanalítica ao Estudo de Fenômenos Econômicos**. Revista Agora, Riop de Janeiro, vol X, n⁰ 1, jan/jun 2007, 107-126.

GAZZANIGA, Michael. S; IVRY, Richard. B; MANGUN, George. R. (2006). **Neurociência Cognitiva: a biologia da mente**. 2. ed, Porto Alegre, Ed. Artmed.

GIANNI, Vaggi; GROENEWEGEN, Peter. (2003). **A Concise History of Economic Thought – from mercantilism to monetarism**. vol. 32, Palgrave Macmillan.

GIFFORD Jr, Adam. (2005). **The Role of Culture and Meaning in Rational Choice.** Journal of Bioeconomics, vol. 7, 129-155.

GLIMCHER, Paul. W; DORRIS, Michael, C; BAYER, Hannah. M. (2004). **Pysiological utility theory and the neuroeconomics of choice. Games and Economic Behavior**, vol 52, 213-256.

GOMES, Orlando. (2005). **Racionalidade e Escolha**. Revista Economia e Sociologia, Universidade de Évora, Lisboa, vol 79, 53-71.

GONZALEZ, Cleotilde; DANA, Joana; KOSHINO, Hideya; JUST, Marcel. (2005). **The framing effect and risky decisions: Examining cognitive function with fMRI**. Journal of Economic Pyschology, vol. 26, nov.2004, 1-20.

GUL, Faruk; PESENDORFER, Wolfgang. (2005). **The Case for Midless Economics**. – Princeton University, Levine's Working Paper Archieve, nov, 2005, n⁰ 581.

HAUSMAN, Daniel. M. (2000). **Revealed Preference, Belief, and Game Theory**. Economics and Philosophy, vol 16, Cambridge University Press, 99-115.

HIRSCHMAN, Albert. O. (1987). **Contra a parcimônia – Três maneiras fáceis de complicar algumas categorias do discurso econômico**. Revista de Economia Política, vol 7, jan/mar 1987, 90-103.

HOUTHAKKER, H.S. (1960). **Additive Preferences**, Econométrica, vol.28, n⁰ 2, apr. 1960, 244-257.

HUGENII, Christiani; (1714). **Libellus de Ratiociniis in Ludo Alae, or The Value of all Changes in Games of Fortune**, Cards, Dice, Wagers, Lotteries, &. London

HUNT, E.K. (1982). **História do Pensamento Econômico: uma perspectiva crítica**. Rio de Janeiro, Ed. Campus.

JEVONS, Willian S. (1911). **The Theory of Political Economy**, 5⁰ ed. London.

KAHNEMAN, Daniel; SLOVIC, Paul; TVERSKY, Amos. (2001). **Judgment under uncertainty: Heuristics and biases**. 14. ed. United Kingdon, Cambridge University Press.

KAHNEMAN, Daniel; TVERSKY, Amos. (1979). **Prospec Theory: an analysis of decision under risk**. Vol.47, n⁰ 2, mar. 1979, 263-291.

_________. (1984). **Choices, Values, and Frames. American Pyschological Association**, vol 39, n⁰ 4, 341-350.

KAHNEMANN, Daniel; TVERSKY, Amos. KERSTENETZKY, Celia. R. (2005). **A Lógica da Situação da Economia**, revista da Anpec, vol.7, n⁰ 4, dez 2006.

KIVETZ, Ran, (1999). **Advances in Research on Mental Accounting and Reason-Based Choice**. Marketing Letters, vol. 10, n⁰ 3, 249-266.

LIMA, Elon. L. (2003). **Espaços Métricos**, vol 1, 3 ed, Rio de Janeiro, IMPA.
_________. (2005). Curso de Análise vol 2, 8⁰ ed, Rio de Janeiro, IMPA.

LOEWENSTEIN, George (2004). **Animal Spirits: Affective and Deliberative Processes in Economic Behavior**, Center of Analytic Economic n⁰ 14 august 2004.

LOOMES, Graham; SUDGEN, Robert. (1982). **Regret Theory: an alternative theory of rational choice under uncertainty**. The Economic Journal, vol 92, n⁰ 368, dec.1982, 805-824.

MACHINA, Mark. J, (1987). **Choice Under Uncertainty: problems solved and unsolved**. (2005). The Journal of Economic Perspectives, vol. 1, n⁰ 1, summer 1987, 121-154.

_________. (2004) **Non-Expected Utility Theory**. Encyclopedia of Actuarial Science, vol 2, 1173-1179.

_________. (2005) **Expected Utility/ “Subjetctive probability” analysis without the sure-thing principle or probabilistic sophistication**. Economic Theory, vol. 26, jul 2005, 1-62.

MACHINA, Mark. J; SCHMEIDLER, David. (1992). **A More Robust Defination of Subjective Probability**. Econometrica, vol. 60, n⁰ 4, jul 1992, 745-780.

MADUREIRA, Alexandre. L. (2006). **Introdução à Análise Real**. Laboratório Nacional de Computação Científica-LNCC, Brasil, maio 2006.

MASS-COLELL, Andreu, WHINSTON, D. Michael, GREEN, R. Jerry. (2005). **Microeconomic Theory**. Nova Iorque, Oxford University Press.

MARSCHAK Jacob. (1950). **Rational Behaviour Uncertaint Prospects, and Measurable Utility**. Econometrica, vol.18, n^0 2, apr. 1950, 111-141.

MARSHALL, Alfred. (1946). **Princípios de Economia**. Trad 8.ed. Inglesa, (1938), Rio de Janeiro, Ed EPASA.

MIRAGLIA, Francisco. (1991). **Teoria dos Conjuntos: um mínimo**. São Paulo, EdUSP.

MOLIM, Eric, J.E; OPPEWAL, Harmen; TIMMERMANS, Harry, J.P. (1997). **Modeling Group Preferences Using a Decompositional Preference Approach**. Group Decision and Negociations, vol 6, 339-350.

MONASTERIO, Leonardo M. (2005). **Veblen eo Comportamento Humano: uma avaliação após um século de "A Teoria da Classe Ociosa**". Cadernos IHU idéias, ano 3, n^0 42, Unisinos.

MORA, Jhon. J. (2002) **Introdución a la Teoría del Consumidor. De la preferencia a la estimación**. Universidade ICESI, Editora Feriva, Cali, Janeiro de 2002.

MORGENSTERN, Oscar, (1972). **Thirteen Critical Points in Contemporary Econonomic Theory: An Interpretation**. Journal of Economic Litereture. vol.10, n^0 4, dec. 1972, 1163-1189.

NASCIMENTO, Leandro; RIELLA, Gil. (2008). **A Class of Incomplete and Ambiguity Averse Preferences**, The Banco Central do Brasil working papers, n^0 180, dez 2008, 1-48.

NEVES, Victor. (2003/2004). **Análise Matemática**. Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, Portugal.

NEUMANN, John. V; MORGENSTERN Oskar. (1953). **Theory of Games and Economic Behavior**, 5 ed. Princeton, Princeton University Press.

NUNES, Avelãs. A. J. (1998). **Economia Política – Introdução à História da Ciência Económica e do Pensamento Económico**. Coimbra, Portugal.

PARETO, Vilfredo. (1945). **Manual de Economia Politica**. Buenos Aires, editorial Atalaya.

PINEDO, Christian. Q. (2002). **História da Teoria dos Conjuntos**, vol. 1, n^0 1. CEFET PATO BRANCO, 139-150.

RIBEIRO, Gonçalo; (2007). **Alfred Marshall – A Teoria do Valor. Os três teoremas da teoria do valor**. Instituto Politécnico de Coimbra, Departamento de Engenharia Civil, junho de 2007.

SCHOEMAKER, Paul, J. (1982). **The Expected Utility Model: its variants, purposes, evidence and limitations**. Journal of Economic Literature, vol.XX, jun. 1982, 529-563.

SEGAL, Uzi. (1984). **Nonlinear Decision Weights with the Independence Axiom**. UCLA Working Paper #353, nov. 1984.

SEIDENFELD, Teddy; SCHERVISH, Mark. J; KADANE, Joseph. B. (1995). A **Representation of Partially Ordered Preferences. The Annals of Statistics**, vol.23, n^0 6, dec. 1995, 2168-2217.

SEN, Amartya. (1993). **Internal Consistency of Choice**. Econometrica. vol. 61, n^0 3, may. 1993, 495-521.

_________ (1997). **Maximization and Act of Choice**. Econometrica. vol. 65, n^0 4, may. 1997, 745-779.

SHULTZ, Duane. P; SHULTZ, Ellen. S. (2008). **Teorias da Personalidade**. 3^0 reimpr. da 1^0 ed de 2002. São Paulo, Ed CENGAGE Learning.

SHUMPETER, Joseph. A. (1964). **História da Análise Econômica**. Parte IV, Editora Fundo de Cultura Brasil/Portugal.

SIMON, Herbert, A. (1955). **A Behavioral Model of Rational Choice**. The Quarterly Journal of Economics, vol. 69, n^0 1, feb. 1955, 99-118.

_________ (1978) **Rationality as Process and as Product of Thought**. The American Economic Review, vol. 68, n^0 2, may. 1978, 1-16.

_________(1993) **Altruism and Economies**. The American Economic Review, vol. 83, n^0 2, may. 1993, 156-161.

_________ (1959) **Theories of Decision-Making in Economics and Behavioral Science**. The American Economic Review, vol XLIX, n^0 3, jun. 1959, 253-283.

SOUZA, Cesar. A; KAYO, Eduardo. K; PUSCH; Alexandre. C; YU, Abrahan. S. O. **Teoria da Perspectiva (PROSPEC THEORY) de Kahneman e Tversky: Estudo Empírico com Alunos de Graduação em Administração**. Métodos Quantitativos e Informática (MQI).

STARMER, Chris. (2000). **Development in Non-Expected Utility Theory: the hunt for a descriptive theory of choice under risk**. Journal of Economic Literature, vol. XXXVIII, jun. 2000, 332-382.

SWEINZER, Paul. (2000). **Expected utilty teory and some extensions**, part of M.Sc dissertation at the London School of Economics an Political Science, Department of Philosophy, Logic abd Scientific Method.

TENREIRO, Carlos. (2000). **Apontamentos de Medida e Integração**. Universidade de Coimbra, Coimbra.

TUTHILL, Jonathan; FRECHETTE, Darren. (2002). **Non-Expected Utility Theories: Weighted Expected, Rank Dependent, and, Cumulative Prospect Theory Utility**. NCR – 134, Conference on Applied Commodity Price Analysis, Forecasting, and Market Risk Management, St. Louis, Missouri, April 22-23

TVERSKY, Amos. (1967). **Additivity, Utility, and Subjective Probability**. Journal of Mathematical Psychology, vol. 4, 175-201.

TVERSKY, Amos; WAKKER, Peter. (1992). **Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty**. Journal of Risk and Uncertainty, vol. 5, 297-323.

_________ (1995) **Risk Attitudes and Decision Weight**. Econometrica, vol. 63, n^0 6, nov. 1995, 1255-1280.

VARIAN, Hall. A. (1998). **Análisis Microeconómico**. 3. ed, Barcelona, Antoni Bosh, editor.

WALRAS. Léon. (1936). **Études D'Économie Sociale. (Théorie de la répartition de la richesse sociale)**. Edition définitive par les soins de G. Leduc. Lausanne, France, fev 1936.

YAARI, Menahen, E. (1987). **The Dual of Choice under Risk**. Econometrica, vol. 55, n^0 1. jan. 1987, 95-115.

ZANETTI, Antônio, C.B. (2008). **Utilidade Esperada Subjetiva com Descrição Imperfeita das Conseqüências**. Dissertação de Mestrado, São Paulo, FEA-USP.